Matematicamente.it

Carmelo Di Stefano

Dal problema al modello matematico

Volume secondo

Funzioni esponenziali e logaritmiche, Geometria dello spazio, Trigonometria, Successioni di numeri reali

ISBN 9788896354520

Carmelo Di Stefano

Dal problema al modello matematico

Vol. 2

Funzioni esponenziali e logaritmiche, Geometria dello spazio, Trigonometria, Successioni di numeri reali

Matematicamente.it

www.matematicamente.it - info@matematicamente.it
http://mathinterattiva.altervista.org/index.htm

ISBN 9788896354476

Edizione riveduta e corretta. Maggio 2014

PRESENTAZIONE

Nel corso della lettura dei volumi troverai diverse cose, che di seguito ti spiego brevemente.
All'inizio di alcune unità trovi un breve ripasso di argomenti svolti negli anni precedenti che ti risultano utili per affrontare serenamente la stessa unità. Vanno sotto il nome di **Richiamiamo le Conoscenze**. In alcune unità vi sono anche argomenti di approfondimento, denominati con il titolo ***Quelli che vogliono sapere di più …***
Le definizioni, i teoremi, i corollari e simili enti matematici, sono contenuti all'interno di appositi box di un uguale colore (verde per le definizioni, celeste per i teoremi e così via)
Ogni tanto troverai anche un box che ti spiega il significato di alcuni vocaboli, si intitola **Che cosa significa?**
Poi ci sono dei box con delle informazioni storiche che si chiamano **I Protagonisti**, che contengono informazioni relativamente a famosi matematici citati nelle stesse pagine; e **L'angolo storico**, in cui invece ci sono informazioni di varia natura, su quando per la prima volta si sono incontrate le nozioni di cui si sta parlando e simili informazioni. Trovi anche, ogni tanto un box denominato **L'antologia**, in cui sono riportati passi di famose opere matematiche, commentate. Vi sono anche dei box chiamati **Enigmi matematici** o **Intervallo matematico**, che si riferiscono in genere ad applicazioni giocose della matematica.
Alla fine di ogni argomento vi sono le relative verifiche. In esse sono presenti esercizi di tre livelli di difficoltà, opportunamente indicati. Il Livello 1 è relativo a esercizi che sono spesso semplice applicazione di quanto detto nella teoria; quelli di Livello 2 o contengono calcoli più complicati, o hanno bisogno di un impegno maggiore; infine quelli di Livello 3 riguardano quesiti che devono essere impostati usando la fantasia e non in modo ripetitivo. Questi ultimi sono riferiti ai più volenterosi. Per quelli a cui piace veramente ragionare e impegnarsi, alla fine di ogni unità sono presenti alcuni esercizi molto complessi, che vanno sotto il nome di **La sfida**
Invece per aiutarti all'inizio di ogni gruppo di esercizi di livello 1 o 2 vi sono alcuni esercizi simili svolti.
Sono talvolta presenti box legati a importanti software matematici: Derive, Geogebra, Excel, Microsoft Mathematica. In essi ti vengono spiegate brevemente alcune funzionalità dei software, ti si spiega velocemente cosa puoi fare con essi relativamente all'argomento affrontato e poi ti vengono proposti esercizi da risolvere con i detti software. Ricorda che Geogebra e Microsoft Mathematica sono liberamente scaricabili da Internet, mentre Derive può essere scaricato liberamente solo in una versione di prova che, dopo 30 giorni, non ti permette più di salvare. Excel, o simile, è di solito installato in tutti i PC.
Alla fine dell'unità sono presentati, quando possibile, esercizi tratti dagli esami di stato, soprattutto del Liceo Scientifico, riferiti ad anni passati. Sono anche presenti dei quesiti tratti da gare matematiche italiane ed internazionali, alcuni quesiti sono anche enunciati in lingua inglese. Così come quesiti tratti dai Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari.
In alcune unità poi sono presentate anche delle proposte di **attività interdisciplinari**.
Infine sono proposti dei test, almeno 10 di numero, relativi ai più importanti argomenti dell'unità didattica. Questi li trovi solo in formato multimediale scaricabili sempre dal sito http://mathinterattiva.altervista.org.
Un altro sito da cui puoi scaricare molto materiale didattico gratuito è http://matdidattica.altervista.org.

Buon lavoro
Carmelo Di Stefano

Indice

6.2 Geometria dei poliedri

6.3. Geometria dei solidi di rotazione

6.4. Il volume

7.3 Equazioni e disequazioni goniometriche

7.4 Formule goniometriche

7.5 Il campo dei numeri complessi

8. Successioni di numeri reali

8.1 L'insieme dei numeri naturali

8.2 Combinatoria

8.3 Progressioni numeriche

8.4 Il calcolo delle probabilità

8.5 Successioni infinite e serie numeriche

5. Esponenziali e logaritmi

5.1 Esponenziali

Prerequisiti
- Concetto di numero reale
- Elevamento a potenza di esponente intero o razionale
- Proprietà delle potenze
- Uso della calcolatrice

Obiettivi
- Comprendere il concetto di potenza a base ed esponente reale
- Sapere usare le proprietà delle potenze
- Sapere usare la notazione esponenziale
- Sapere impostare e risolvere semplici problemi relativi agli esponenziali
- Comprendere il concetto di logaritmo
- Saper calcolare logaritmi in qualsiasi base usando la calcolatrice scientifica
- Sapere usare i logaritmi per semplificare numeri a molte cifre

Contenuti

- Esponenti di base reale ed esponente intero o razionale
- Potenze a base ed esponente reale
- Equazioni e disequazioni esponenziali
- Applicazioni delle equazioni esponenziali alla risoluzione di problemi del mondo reale

Parole Chiave
Base – Esponente

Richiamiamo le conoscenze

Esponenti di base reale ed esponente intero o razionale

L'operazione di elevamento di un numero a una potenza intera positiva non è altri che una generalizzazione dell'operazione di moltiplicazione.

Definizione A

Diciamo potenza di **base** il numero reale a e di **esponente** il numero naturale b, il prodotto di b fattori uguali ad a.

Notazione A

La potenza di a alla b si indica con a^b.

Dalla stessa definizione nascono immediati risultati di facile dimostrazione, perciò omessa.

Teorema A

Si ha: $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$, $b, c \in \mathbb{N}$; $a^b : a^c = a^{b-c}$, $b, c \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$; $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$, $b, c \in \mathbb{N}$

Esempio A

Abbiamo: $[(2^3 \cdot 2^5) : 2^2]^4 = [2^{3+5} : 2^2]^4 = [2^{3+5-2}]^4 = 2^{6 \cdot 4} = 2^{24}$.

Sempre sfruttando i risultati del Teorema A, possiamo generalizzare il concetto di potenza ad esponenti numeri interi relativi.

Esempio B

Per la seconda proprietà del Teorema A si ha: $3^4 : 3^6 = 3^{-2}$. D'altro canto si ha anche: $3^4 : 3^6 = \frac{\cancel{3^4}}{3^{\cancel{6}\,2}} = \frac{1}{3^2}$. Pertanto possiamo dire che si ha: $3^{-2} = \frac{1}{3^2}$.

Possiamo allora porre la seguente definizione.

Definizione B

Per ogni numero naturale b e per ogni numero reale diverso da zero a, si ha: $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$.

Possiamo generalizzare il concetto di potenza anche agli esponenti nulli, sempre usando la proprietà già vista.

Esempio C

Si ha: $5^3 : 5^3 = 5^0$, ma anche: $5^3 : 5^3 = 1$. Pertanto possiamo dire che si ha: $5^0 = 1$.

In vista del precedente esempio possiamo dire.

Definizione C

Per ogni numero naturale b e per ogni numero reale diverso da zero a, si ha: $5^0 = 1$.

Cosa accade se la base è zero?

Esempio D

Se fosse $0^0 = 1$ dovrebbe essere anche: $0^0 = 0^2 : 0^2 = \frac{0^2}{0^2} = \frac{0}{0}$. Cioè $\frac{0}{0} = 1$, ma noi sappiamo che la scritta $\frac{0}{0}$ non ha significato, poiché esistono infiniti numeri che moltiplicati per zero danno zero.

Definizione D

La scritta 0^0 è priva di significato.

Una ulteriore estensione del concetto di potenza si ha con gli esponenti razionali.

Esempio E

Che significato possiamo dare alla scritta $3^{\frac{1}{2}}$? Poiché si ha: $\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 3$, abbiamo che il simbolo $3^{\frac{1}{2}}$ è soluzione dell'equazione $x^2 = 3$. Poiché nei numeri reali la detta equazione ha solo le soluzioni $x = \pm\sqrt{3}$ e poiché il simbolo $3^{\frac{1}{2}}$ certamente non rappresenta un numero negativo possiamo dire che $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$.

Tenuto conto di quanto detto possiamo stabilire la seguente definizione.

Definizione E

Per ogni numero razionale $b = \frac{m}{n}; m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ e per ogni numero reale positivo, si ha: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Esempio F

Per la definizione precedente si ha: $5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^3}$. Cosa succede se la base è negativa? Dipende dall'esponente. $(-5)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{-5^3}$ non ha significato, invece $(-5)^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{-5^5} = -\sqrt[3]{5^5} = -5 \cdot \sqrt[3]{5^2}$ ha significato.

Quindi la potenza a esponente frazionario ha sempre significato per qualsiasi base positiva, mentre per le basi negative dipende dall'esponente. Per evitare problemi evitiamo di definire quindi le potenze ad esponente frazionario e base non positiva.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo semplificare la seguente espressione nel modo più rapido, ossia eseguendo solo quelle potenze che risultano necessarie: $(2^2 \cdot 3^2)^3 \cdot 6^2 \cdot 3^3 \cdot (6^4 \cdot 6^3)^5$. Cominciamo ad applicare le proprietà enunciate nella teoria. $[(2 \cdot 3)^2]^3 \cdot 6^2 \cdot 3^3 \cdot (6^{4+3})^5 = (6^2)^3 \cdot 6^2 \cdot 3^3 \cdot (6^7)^5 = 6^6 \cdot 6^2 \cdot 3^3 \cdot 6^{35} = 6^{6+2+35} \cdot 3^3 = 6^{43} \cdot 3^3$ Non riusciamo a semplificare ulteriormente l'espressione.

Utilizzando le proprietà delle potenze, semplificare le seguenti espressioni.

***Livello* 1**

1. $2^{-2} \cdot 2^3 \cdot 2^{-4} \cdot 2^5 \cdot 2^0$ $[2^2]$ $2^{-2} \cdot 4^3 \cdot 8^{-4} \cdot 16^5 \cdot 32^{-6} \cdot 64^7$ $[2^{24}]$ $2^3 \cdot 2^5 \cdot 2^7 \cdot 2^4$ $[2^{19}]$ $2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4$ $[2^{10}]$
2. $3^2 \cdot 3^3 \cdot (3^4)^2$ $[3^{13}]$ $(5 \cdot 5)^2 \cdot (5^4 \cdot 5)^4$ $[5^{29}]$ $7^2 \cdot (7 \cdot 7^2)^3 \cdot (7^4 \cdot 7)$ $[7^{16}]$ $2^2 \cdot 2^3 \cdot (2^3)^2 \cdot (2^4)^4$ $[2^{27}]$
3. $(3 \cdot 3^2)^3 \cdot (3^3 \cdot 3)^3$ $[3^{18}]$ $[(3^2)^3]^4 \cdot [(3^3)^2]^4$ $[3^{48}]$ $(2^2)^3 \cdot (2^3)^2 \cdot (2^6)^2$ $[2^{24}]$ $2^4 \cdot (2^2)^2 \cdot (2^3)^4 \cdot (2^4)^3$ $[2^{32}]$
4. $5^3 : 5^4 \cdot (5^3 : 5)^5$ $[5^9]$ $\left(\sqrt{3}\right)^3 : \left(\sqrt{27}\right)^5 \cdot \left(\sqrt{3^5}\right)^2 : \sqrt{3}$ $\left[\sqrt{3^{-3}}\right]$ $(3/7)^2 \cdot (3/7)^4 \cdot (7/3)$ $[3/7]$

5. $\sqrt[3]{11}\cdot\sqrt[3]{121}:\left(\sqrt[3]{11}\cdot\sqrt[3]{11}\right)^4$ $\left[\sqrt[3]{11^{-5}}\right]$ $\pi^4\cdot(\pi^3)^{-2}:\pi^{-3}\cdot(\pi^2:\pi^5)^{-2}$ $[\pi^{-11}]$

Livello 2

6. $3^2\cdot5^2\cdot3^3\cdot2^3$ $[2^3\cdot3^5\cdot5^2]$ $3\cdot2\cdot5\cdot2\cdot2^2\cdot3^2\cdot5$ $[2^4\cdot3^3\cdot5^2]$ $-2\cdot7\cdot11\cdot7^4\cdot11^3\cdot13^2$ $[-2\cdot7^5\cdot11^4\cdot13^2]$
7. $2\cdot3\cdot2^2\cdot5^2\cdot(-2\cdot3^3)\cdot(-2\cdot5^2)\cdot(-2^2\cdot3^2\cdot5^3)$ $[-2^7\cdot3^6\cdot5^7]$ $[(2^2\cdot5^2)^3\cdot3^3]^4:[(2^4\cdot3^4)^2\cdot5^2]^4$ $[2^{-8}\cdot3^{-20}\cdot5^{16}]$
8. $\left(\frac{\sqrt{2}}{\pi^2}\right)^3:\left(\frac{\sqrt{8}}{\pi^3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{\pi^2}{\sqrt{32}}\right)^{-3}$ $[2^{12}\cdot\pi^{-18}]$ $\left(\frac{2}{3^2}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{3^{-2}}{4^6}\right)^3:\left(\frac{2^7}{81^{-2}}\right)^3$ $[2^{-60}\cdot3^{-24}]$
9. $\left(\sqrt{5}\right)^{-3}:\sqrt{125^3}\cdot5^{-3}\cdot\sqrt{5^5}$ $[5^{-27/2}]$ $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-2}:\left(\frac{\pi}{3}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{\pi}{4}\right)^2:\left(\frac{\pi}{6}\right)^3$ $[2]$
10. $\left\{\left[\left(5^2\cdot7^2\right)^3\cdot2^3\right]^4\cdot3^4\right\}^5:\left\{\left[\left(2^3\cdot5^3\right)^4:3^4\right]^3\cdot7^3\right\}^5\cdot\left\{\left[\left(3^4:5^4\right)^2\cdot7^2\right]^3\cdot2^3\right\}^5$ $[2^{-153}\cdot3^{200}\cdot5^{-260}\cdot7^{135}]$

Livello 3

11. Determinare x in modo che valga la seguente uguaglianza: $2^x\cdot(2^3)^2\cdot(2^x)^3=2^{23}$. [17/4]
12. Un'azienda ha avuto una produzione di 2^{17} chicchi di riso. Nel giro di tre anni si prevede di raddoppiare la produzione. Il tecnico del marketing dice che quindi si devono raccogliere 2^{34} chicchi; la segretaria di produzione afferma che dovranno essere invece 4^{17}; il direttore del settore vendite non è d'accordo, saranno 2^{18}; infine il responsabile pubblicitario afferma che il risultato corretto è invece 4^{34}. Chi ha ragione e perché? [Il direttore]
13. Sappiamo che $3^2>2^2$ e che $6^5>4^5$, possiamo dire che si ha sempre $a>b\Rightarrow a^n>b^n$, per ogni numero intero n? Giustificare la risposta. [No]

Lavoriamo insieme

Vogliamo semplificare la seguente espressione $\dfrac{\dfrac{3^2\cdot9^{-3}}{27^{-4}}+3}{\dfrac{9+3\cdot3^{-2}}{3^{-4}\cdot27}}$. Ci accorgiamo che tutte le potenze possono essere ricondotte alla base comune 3, quindi effettuiamo intanto questa operazione $\dfrac{\dfrac{3^2\cdot\left[3^2\right]^{-3}}{\left[3^3\right]^{-4}}+3}{\dfrac{9+3^{-1}}{3^{-4}\cdot3^3}}$. Osserviamo che non abbiamo ricondotto il 9 a 3^2 perché in quel caso è un addendo e non un fattore, pertanto non avremmo ricevuto alcun vantaggio da questa espressione, non potendo applicare nessuna delle regole valide per le moltiplicazioni e le divisioni fra potenze. Continuiamo $\dfrac{\dfrac{3^2\cdot3^{-6}}{3^{-12}}+3}{\dfrac{9+3^{-1}}{3^{-1}}}=\dfrac{\dfrac{3^{-4}}{3^{-12}}+3}{\dfrac{9+\frac{1}{3}}{3^{-1}}}=\dfrac{3^{-4-(-12)}+3}{\dfrac{27+1}{3}\cdot3}$. Notiamo che abbiamo trasformato una frazione in moltiplicazione e a un'altra abbiamo applicato la proprietà della divisione fra potenze aventi la stessa base $\dfrac{3^{-4+12}+3}{\dfrac{27+1}{\cancel{3}^1}\cdot\cancel{3}^1}=\dfrac{3^8+3}{28}=\dfrac{3^8+3}{28}=\dfrac{6561+3}{28}=\dfrac{6564}{28}=\dfrac{1641}{7}$.

Applicando le proprietà delle potenze semplificare le seguenti espressioni:

Livello 1

14. $35\cdot3^{-3}\cdot28^{-1}\cdot98\cdot108^{-1}$ $[2^{-3}\cdot3^{-6}\cdot5\cdot7^2]$ $3^3\cdot3^{-4}:3^5\cdot3^2+3$ $[2^2\cdot3^{-4}\cdot61]$ $(6^2\cdot12^{-3})^{-1}:(18^{-3}:16^4)^2$ $[2^{42}\cdot3^{13}]$
15. $(3^3)^2\cdot(5^2)^{-3}:25^3\cdot(5+5^2)$ $[2\cdot3\cdot5^{-5}]$ $(4^2:8^3)^{-4}\cdot(2^{-2}:2^3)^4+16$ $[17]$ $\dfrac{7^2\cdot7^{-3}\cdot49^5}{343\cdot7^{-2}}$ $[7^8]$

16. $3^2 \cdot 5 \cdot 3^{-3} \cdot 5^{-2} + 3 \cdot 5^2 \cdot 3^{-2} \cdot 5^{-3}$ $[2 \cdot 3^{-1} \cdot 5^{-1}]$ $\dfrac{\dfrac{3^{-7}}{3^{-4}}}{\dfrac{3^{-3}}{3^{-2}}}$ $[3^{-2}]$ $2^3 \cdot 3^{-2} \cdot 4^3 \cdot 6^{-2} \cdot 8^5 \cdot 9^{-4}$ $[2^{22} \cdot 3^{-12}]$

17. $\dfrac{2^3 \cdot 4^{-2} \cdot 8^3}{4^{-2} \cdot 16^2}$ $[2^4]$ $\dfrac{3^{-2} \cdot 9^{-3} \cdot 18^5}{12^{-4} \cdot 18^2}$ $[2^{11} \cdot 3^2]$ $(4^{-2} + 3^{-1}) \cdot (4^{-2} - 3^{-1})$ $[-2^{-8} \cdot 3^{-2} \cdot 13 \cdot 19]$

Livello 2

18. $(2^{-1} + 1 - 2^{-2}) \cdot (2^{-1} + 1 - 2^{-2})$ $[2^{-4} \cdot 5^2]$ $(3^{-1} + 3^{-2} - 3^{-3}) \cdot (3^{-1} + 3^{-2} - 3^{-3})$ $[3^{-6} \cdot 11^2]$

19. $\dfrac{(2^{-2}+1) \cdot (2^{-2}-1)}{2^{-2} + 2 \cdot 2^{-2} + 1}$ $[-2^{-2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^{-1}]$ $(2 \cdot 3^{-1} - 3 \cdot 2^{-1} - 1) \cdot (2 \cdot 3^{-2} - 3 \cdot 2^{-1} + 1)$ $[2^{-3} \cdot 3^{-3} \cdot 5 \cdot 13]$

20. $\dfrac{(3^{-3} + 9^{-2}) \cdot \left[(3^{-3})^2 - 3^{-3} \cdot 9^{-2} + (9^{-2})^2\right]}{\left[(3^3)^{-2} - (9^{-2})^2\right]^2}$ $[2^{-4} \cdot 3^4 \cdot 7]$

21. $\dfrac{(2^{-3})^2}{(2^{-2} - 6^{-1}) \cdot (2^{-2} - 3^{-2})} + \dfrac{(6^{-1})^3}{(6^{-1} - 3^{-2}) \cdot (6^{-1} - 2^{-2})} + \dfrac{(3^3)^{-2}}{(3^{-2} - 2^{-2}) \cdot (3^{-2} - 6^{-1})}$ $[2^{-2} \cdot 3^{-2} \cdot 19]$

22. $\dfrac{(3^{-3} \cdot 6^{-2} + 4^{-1} \cdot 2^{-2})^2 + (3^{-3} \cdot 2^{-2} - 4^{-1} \cdot 6^{-2})^2}{(3^{-3} \cdot 12^{-1} + 4^{-1} \cdot 18^{-1})^2 + (3^{-3} \cdot 18^{-1} - 4^{-1} \cdot 12^{-1})^2}$ $[2 \cdot 13^{-1} \cdot 41]$

23. $\dfrac{(10^{-2} + 15^{-1} - 6^{-2}) \cdot (10^{-2} - 15^{-1} + 6^{-2})}{(10^{-2})^2 - (15^{-1} - 6^{-2})^2}$ $[1]$

24. $\dfrac{1 + 2 \cdot 4^{-2} - (2^{-3})^2 - 2 \cdot 2^{-3} \cdot (-1) + (4^{-2})^2 - (-1)^2}{1 - 2^{-3} + 4^{-2} + 1}$ $[2^{-4} \cdot 3]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo semplificare l'espressione: $3^{\frac{1}{3}} \cdot 6^{\frac{2}{3}} \cdot 4^{-\frac{3}{4}} \cdot 18^{-\frac{3}{2}}$. Cominciamo con la scomposizione delle basi in fattori primi: $3^{\frac{1}{3}} \cdot 6^{\frac{2}{3}} \cdot 4^{-\frac{3}{4}} \cdot 18^{-\frac{3}{2}} = 3^{\frac{1}{3}} \cdot (2 \cdot 3)^{\frac{2}{3}} \cdot (2^2)^{-\frac{3}{4}} \cdot (2 \cdot 3^2)^{-\frac{3}{2}} =$

$= 3^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{-2 \cdot \frac{3}{4}} \cdot 2^{-\frac{3}{2}} \cdot 3^{-2 \cdot \frac{3}{2}} = 3^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{-\frac{3}{2}} \cdot 2^{-\frac{3}{2}} \cdot 3^{-3}$

Adesso moltiplichiamo fra loro le potenze di uguale base, applicando la ben nota regola secondo la quale gli esponenti si sommano e le basi restano invariate.

$$3^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{-\frac{3}{2}} \cdot 2^{-\frac{3}{2}} \cdot 3^{-3} = 2^{\frac{2}{3}-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-3} = 2^{\frac{4-9-9}{6}} \cdot 3^{\frac{1+2-9}{3}} = 2^{-\frac{14}{6}} \cdot 3^{-\frac{6}{3}} = 2^{-\frac{7}{3}} \cdot 3^{-2}$$

Semplificare le seguenti espressioni

Livello 1

25. $2^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{-\frac{2}{5}} : 8^{\frac{1}{7}}$ $[2^{-94/105}]$ $5^{\frac{1}{2}} \cdot 25^{\frac{1}{3}} \cdot 75^{\frac{2}{3}}$ $[3^{2/3} \cdot 5^{5/2}]$ $12^{\frac{3}{4}} \cdot 18^{\frac{5}{2}}$ $[2^4 \cdot 3^{23/4}]$ $24^{\frac{1}{3}} \cdot 48^{\frac{2}{3}} : 72^{\frac{4}{3}}$ $[2^{-1/3} \cdot 5^{-5//3}]$

26. $\dfrac{2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{5}{8}} \cdot 2^{\frac{9}{32}}}{2^{\frac{3}{4}} \cdot 2^{\frac{7}{16}} \cdot 2^{\frac{11}{64}}}$ $[2^{3/64}]$ $\dfrac{15^{\frac{2}{5}} \cdot 20^{\frac{3}{5}}}{12^{\frac{1}{5}} \cdot 25^{\frac{4}{5}}}$ $[2^{4/5} \cdot 3^{1/5} \cdot 5^{-3/5}]$ $\dfrac{2^{\frac{2}{3}} \cdot 64^{\frac{1}{3}} \cdot 128^{\frac{1}{2}} \cdot 16^{\frac{1}{4}}}{32^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{6}} \cdot 256^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{2}{3}}}$ $[2^{-1/3}]$ $a^{\frac{3}{2}} \cdot b^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{-\frac{1}{2}}$ $[a^{-7/4} \cdot b]$

Livello 2

27. $\left(5^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{1}{2}}\right)^2$ $\left[8 - 2 \cdot \sqrt{15}\right]$ $\left(2^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}\right)^3$ $[3 \cdot 18^{1/3} + 3 \cdot 12^{1/3} + 5]$ $\left(1 + 7^{\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(1 - 7^{\frac{1}{2}}\right)$ $[-6]$

28. $\left(5^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}\right) \cdot \left(5^{\frac{2}{3}} - 10^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}}\right)$ $[7]$ $\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{4}}\right)^2 + \left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{4}}\right)^2$ $\left[2a + 2 \cdot \sqrt{b}\right]$

29. $\left(2^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{6}}\right)^2-\left(2^{\frac{1}{3}}-3^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\left(2^{\frac{2}{3}}+6^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{2}{3}}\right)-3\cdot\left(1+3^{-\frac{2}{3}}\right)$ $[2 \cdot 24^{1/6}]$

30. $\left(2^{\frac{1}{2}}-3^{\frac{1}{4}}+1\right)\cdot\left(2^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{4}}+1\right)-2^{\frac{3}{2}}+\left(2^{\frac{1}{4}}-3^{\frac{1}{2}}-1\right)\cdot\left(2^{\frac{1}{4}}+3^{\frac{1}{2}}-1\right)-2^{\frac{1}{2}}\cdot\left(1-2^{\frac{3}{4}}\right)$ $\left[1-\sqrt{3}\right]$

31. $\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{4}}\right)\cdot\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{4}}\right)-\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{4}}\right)^2+2\cdot\left(a^{\frac{1}{3}}+1\right)\cdot\left(b^{\frac{1}{4}}-1\right)+2\cdot\left(b^{\frac{1}{4}}-1\right)^2$ $[-2a^{1/3}-2b^{1/4}]$

32. $\left(a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}}-c^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{2}}\right)-\left(a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{3}}\right)^2-a^{-\frac{1}{3}}\cdot\left(4a^{\frac{1}{2}}-1\right)\cdot b^{\frac{1}{3}}$ $[a^{-1/3}\cdot b^{1/3}-c]$

Lavoriamo insieme

La notazione esponenziale è molto usata nelle scienze, per esempio in fisica o in chimica. Ciò infatti rende più semplice risolvere certi problemi. Sappiamo per esempio che la distanza media della terra dal sole è 150 milioni di chilometri, mentre la velocità della luce è di 300 000 Km al secondo, cioè in un secondo la luce percorre 300 000 Km. Se volessimo determinare in quanto tempo la luce del sole arriva fino a noi dovremmo semplificare la frazione $\frac{150000000}{300000}$, che non è difficile da ridurre. Se scriviamo però i due numeri nella notazione esponenziale in base 10: $\frac{15\cdot 10^7}{3\cdot 10^5}=5\cdot 10^2$, troveremmo più semplicemente il risultato. Sono perciò necessari 500 secondi. Quanti minuti rappresentano? In un minuto ci sono 60 secondi, quindi 500/60 ≈ 8,3 = $8^m 48^s$.

Usando la notazione esponenziale e la seguente tabella in cui sono riportati i dati sui pianeti del nostro sistema solare, risolvere i seguenti problemi. La velocità della luce è di $3 \cdot 10^8$ *m/s*

Livello 2

Pianeta	Distanza media dal sole (in m)	Raggio medio (in Km)	Massa (in Kg)
Mercurio	$5,79\cdot 10^{10}$	$2,433\cdot 10^3$	$3,18\cdot 10^{23}$
Venere	$1,082\cdot 10^{11}$	$6,08\cdot 10^3$	$4,881\cdot 10^{24}$
Terra	$1,496\cdot 10^{11}$	$6,378\cdot 10^3$	$5,976\cdot 10^{24}$
Marte	$2,28\cdot 10^{11}$	$3,386\cdot 10^3$	$6,41\cdot 10^{23}$
Giove	$7,783\cdot 10^{11}$	$7,137\cdot 10^4$	$1,9\cdot 10^{27}$
Saturno	$1,429\cdot 10^{12}$	$6,037\cdot 10^4$	$5,681\cdot 10^{26}$
Urano	$2,875\cdot 10^{12}$	$2,56\cdot 10^4$	$8,678\cdot 10^{25}$
Nettuno	$4,504\cdot 10^{12}$	$2,27\cdot 10^4$	$1,026\cdot 10^{26}$
Plutone	$5,91\cdot 10^{12}$	$1,1\cdot 10^3$	$1,3\cdot 10^{26}$

33. Determinare quante volte il raggio della Terra è più grande di quello di Mercurio. [≈ 2,6]
34. Determinare quante volte il raggio di Saturno è più grande di quello di Plutone. [≈ 54,9]
35. Determinare quante volte il raggio di Venere è più piccolo di quello di Nettuno. [≈ 3,7]
36. Determinare quante volte il pianeta Giove è più pesante di Venere. [≈ 389]
37. Determinare quante volte il pianeta Urano è più leggero di Giove. [≈ 22]
38. Determinare dopo quanti minuti la luce del sole raggiunge Mercurio. [≈ $3^m 13^s$]
39. Determinare dopo quante ore la luce del sole raggiunge il pianeta Saturno. [≈ $1^h 19^m 23^s$]
40. Determinare dopo quante ore la luce del sole raggiunge il pianeta Plutone. [≈$5^h 28^m 20^s$]
41. L'elettrone ha una massa di circa $9,11\cdot 10^{-31}$ Kg. Determinare un valore approssimato della massa del protone sapendo che è circa 1800 volte quella dell'elettrone. [≈ $1,639 \cdot 10^{-27}$ Kg]
42. Quanti Km è lungo l'anno luce (la distanza che la luce percorre in un anno)? [≈ $9,46 \cdot 10^{12}$ Km]

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.
A = Abacus, rivista on line
B = Giochi della Bocconi
AHSME = Annual High School Mathematics Examination
OMI = Olimpiadi della Matematica

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente quesito assegnato all' AHSME 1975: determinare la somma delle cifre del numero $(10^{408} + 1)^2$.
Sviluppiamo il quadrato: $(10^{408} + 1)^2 = 10^{816} + 2 \cdot 10^{408} + 1$. Adesso chiediamoci che tipo di numero è il risultato. 10^{816} è formato da 1 e 816 zeri, allo stesso modo $2 \cdot 10^{408}$ è formato da 2 seguito da 408 zeri. Quando sommiamo questi due numeri avremo ancora un numero con 817 cifre, che sono 1 (la prima), 2 (quella di posto 409 dalla fine) e poi tutti zeri. Sommando a questo numero 1 otterremo $1\underbrace{0....0}_{407}2\underbrace{0....0}_{407}1$, la somma delle sue cifre è chiaramente 1 + 2 + 1 = 4.

1. (AHSME 1976) Sia il numero: $P = 2^{\frac{1}{7}} \cdot 2^{\frac{3}{7}} \cdot ... \cdot 2^{\frac{2n+1}{7}}$, in cui tutte le frazioni hanno denominatore uguale a 7 e numeratori i numeri dispari in successione. Qual è il più piccolo numero n per cui P è maggiore di 1000? [8]
2. (AHSME1995) Un campo rettangolare è largo 300 piedi e lungo 400 piedi. Mediamente si trovano tre formiche per ogni pollice quadrato [12 pollici = 1 piede]. Fra i seguenti numeri quale approssima meglio il numero di formiche in tutto il campo? [(C)]
(A) 5×10^5 (B) 5×10^6 (C) 5×10^7 (D) 5×10^8 (E) 5×10^9
3. (B1999) La Signora e il Signor Settimi hanno 7 figli nati tutti, stranamente, il 7 luglio. Ogni anno, per il loro compleanno la signora Settimi offre ad ogni figlio una torta con tante candeline quanti sono i suoi anni. Giovanni Settimi, il più giovane, si ricorda che 5 anni fa le candeline erano, in totale, la metà di quelle di quest´anno. Quante candeline saranno accese quest´anno? [10]
4. (B2000) In un dado "normale", la somma dei punti su due facce opposte è sempre uguale a 7. Enrico ha messo su un tavolo tre dadi "normali", uno sopra l´altro a formare una torre. Sulla faccia superiore del dado in cima alla torre c´è un 4. Quanto vale la somma dei punti nelle cinque facce nascoste (comprese tra due dadi o il tavolo)? [17]
5. (B2003) Leone è velocissimo nei calcoli e chiede a Paolo: "Qual è l'ultima cifra di 2003^{2003}?" Aiuta Paolo. [7]

Questions in English

Nota: Gli anglosassoni usano il punto decimale come la nostra virgola.

6. (AHSME 1999) What is the sum of the digits of the decimal form of the product $2^{1999} \cdot 5^{2001}$? [7]
7. (HSMC 1999) List the numbers 2^{100} ; 3^{75} and 5^{50} in order from smallest to largest. [$2^{100} < 5^{50} < 375$]
8. (HSMC 2005) If $P = 3^{2000} + 3^{-2000}$ and if $Q = 3^{2000} - 3^{-2000}$, what is $P^2 - Q^2$? [4]

Uso della calcolatrice per il calcolo di una potenza

L'utilizzo almeno di una calcolatrice scientifica è ormai indispensabile. Vogliamo vedere quindi come usare una calcolatrice tascabile o un software matematico come potrebbe essere Derive® o uno simile.
Per quanto riguarda l'elevamento a potenza in genere i tasti hanno due simboli $\boxed{\wedge}$ o $\boxed{y^x}$. Nel primo caso per immettere 2^3 si digiteranno in sequenza i tasti $\boxed{2}\boxed{\wedge}\boxed{3}$. Nel secondo caso invece $\boxed{2}\boxed{y^x}\boxed{3}$. si deve fare particolare attenzione a immettere le potenze negative, infatti in genere le calcolatrici hanno due simboli per il meno, uno che è quello che si usa per la sottrazione e l'altro, di solito indicato con $\boxed{(-)}$, che invece è il cosiddetto cambio segno, cioè il simbolo per indicare i numeri negativi. Quindi potrebbe succedere che immettendo $\boxed{2}\boxed{\wedge}\boxed{-}\boxed{3}$ la calcolatrice emetta un messaggio di errore, invece il modo corretto è $\boxed{2}\boxed{\wedge}\boxed{(-)}\boxed{3}$. Analogamente possono esservi errori segnalati o, peggio, non segnalati che danno risultato sbagliato, immettendo potenze frazionarie. Per esempio $2^{¾}$, immesso

come 2 ^ 3 ÷ 4 potrebbe essere inteso come $2^3/4$ e fornire il risultato errato 2, invece del risultato corretto di circa 0,4849. Per evitare problemi quindi conviene usare le parentesi, cioè immettere

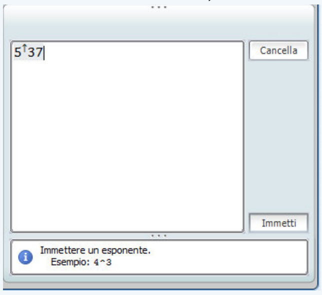
2 ^ (3 ÷ 4).

Inoltre ogni calcolatrice utilizza la notazione cosiddetta scientifica per indicare i numeri "grandi", cioè numeri che superano il numero di cifre che una calcolatrice riesce a visualizzare, di solito 8. Così il risultato di 2^{20} sarà 1048576, invece quello di 2^{30} che è di 10 cifre probabilmente sarà scritto 1.0737418E9, che vuol dire circa 1.0737418×10^9.

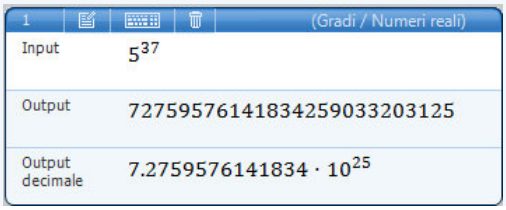
Per immettere le potenze di 10 si usa il tasto 10^x, mentre per le potenze del numero il tasto e^x

L'angolo di Microsoft Mathematics

Per la potenza si usa il tasto ^, che però viene visualizzato, in immissione, come mostrato in figura

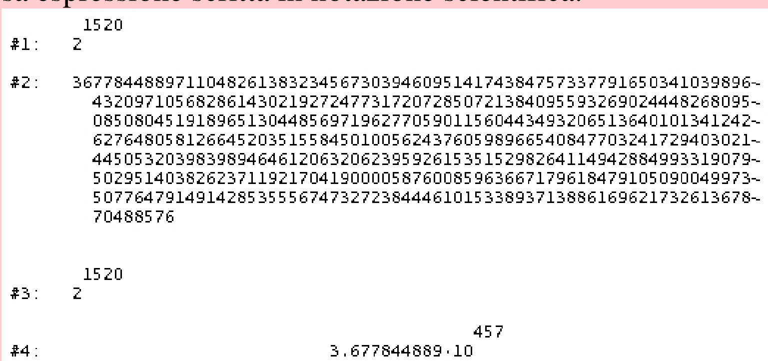


Il tasto ^ può immettersi dalla tastiera del proprio PC, oppure cliccando sul tasto presente nella calcolatrice del software ^. Il software è abbastanza potente e scrive tutte le cifre, fornendo contemporaneamente anche l'approssimazione in notazione esponenziale.



L'angolo di Derive

Nei software matematici di tipo CAS (Computer Algebra System), il cui esempio più diffuso nelle scuole superiori è Derive, l'elevamento a potenza si ottiene con ^. Di seguito vediamo una schermata in cui si vede che Derive calcola espressioni esatte con molte cifre, nell'esempio sono ben 458, uno in più dell'esponente della stessa espressione scritta in notazione scientifica.



Attività

Usando la tua calcolatrice scientifica o un software tipo CAS, semplifica le seguenti espressioni.

$3 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 - 5^{17}$ [$\approx -7{,}62 \cdot 10^{11}$] $2 \cdot 7^5 - 4 \cdot 10^{4/3} + 3^7$ [$\approx 35714{,}82$]

$\pi^4 + \sqrt{3}^{-3} - \frac{2}{3^5}^7$ [$\approx 97{,}07$] $\left(\frac{3}{4}\right)^{\sqrt{2}} \cdot \frac{5}{\sqrt{3}}^4 + \pi^{3/4}$ [$\approx 242{,}59$]

$\frac{10^{2/3} + \sqrt{5} \cdot \sqrt{3^{1/3}}^{2/5}}{2 \cdot 3^{-2} - \sqrt{7^{-3}}}$ [$\approx 41{,}89$]

Potenze ad esponente reale

Problema

Che significato possiamo dare alle scritte $2^{\sqrt{2}}, \sqrt{2}^{\sqrt{3}}, \pi^{\pi}$?

Abbiamo già ricordato che significato dare alle potenze a esponente razionale e abbiamo già visto che in generale non hanno senso potenze di base negativa ed esponente razionale. Per generalizzare il concetto agli esponenti reali consideriamo la procedura mostrata nel seguente esempio.

Esempio 1

Noi sappiamo che i numeri irrazionali, in generale, sono numeri con infinite cifre decimali che non ubbidiscono a regole particolari. Per esempio $\sqrt{2} = 1,41421356...$ e per quanto ci possiamo sforzare non riusciamo a trovare, se non calcolandola, la successiva cifra decimale. Questo non accade sempre, perché ci sono infiniti numeri le cui infinite cifre decimali ubbidiscono a una particolare regola e sono irrazionali, per esempio 0,1234567… ottenuto scrivendo tutti i numeri interi uno appresso all'altro.

Quindi i numeri irrazionali non si distinguono dai razionali solo perché le cifre decimali devono essere calcolate con qualche strana procedura. Vi è però una procedura che lega un qualsiasi numero irrazionale a infiniti numeri irrazionali, che è quella detta dell'approssimazione. Vediamo un esempio.

Esempio 2

Dire che $\sqrt{2} = 1,41421356...$, vuol dire che si ha la validità delle seguenti disuguaglianze:

$$1 < \sqrt{2} < 2; 1,4 < \sqrt{2} < 1,5; 1,41 < \sqrt{2} < 1,42; 1,414 < \sqrt{2} < 1,415...$$

cioè ogni numero irrazionale si può sempre scrivere all'interno di una disuguaglianza in modo che la differenza fra il valore maggiore (approssimazione per eccesso) e quello inferiore (approssimazione per difetto) sia una potenza di 10. Infatti $2 – 1 = 1 = 10^0$, $1,5 – 1,4 = 0,1 = 10^{-1}$, $1,42 – 1,41 = 0,01 = 10^{-2}$ …

Vale quindi il seguente risultato che non dimostriamo.

Teorema 1

Per ogni numero reale r esistono due successioni di numeri razionali $\{a_n\}, \{b_n\}$ per cui si ha: $a_n < r < b_n, |b_n - a_n| = 10^{-n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Le successioni stabilite nel teorema precedente si chiamano **sezioni razionali del numero reale *r***.
Nel teorema precedente abbiamo usato il vocabolo successione solo per dire che i numeri di tale oggetto matematico possono essere sistemati in una sequenza nella quale ciascuno è individuato dalla sua posizione, così per esempio a_5 indica il quinto elemento e a_{34} indica il trentaquattresimo.
La proprietà precedente ci permette di dare significato alle potenze ad esponente reale, come vediamo in un esempio.

Esempio 3

Che significa $2^{\sqrt{2}}$? Il numero reale r che verifica le seguenti infinite uguaglianze:

$$2^1 < r < 2^2; 2^{1,4} < r < 2^{1,5}; 2^{1,41} < r < 2^{1,42}; 2^{1,414} < r < 2^{1,415}, ...$$

cioè r è il numero determinato dalle sezioni razionali che si ottengono innalzando 2 alle sezioni razionali di $\sqrt{2}$. Poiché $2^{1,414} \approx 2,6647$ e $2^{1,415} \approx 2,6665$, possiamo dire che $2^{\sqrt{2}}$ approssimato alle prime due cifre decimali è 2,66.

E che significa $(-2)^{\sqrt{2}}$? Stavolta nasce un problema, infatti se hanno senso scritte come

$$(-2)^1 - 2; (-2)^{1,4} = (-2)^{7/5} = \sqrt[5]{(-2)^7}$$

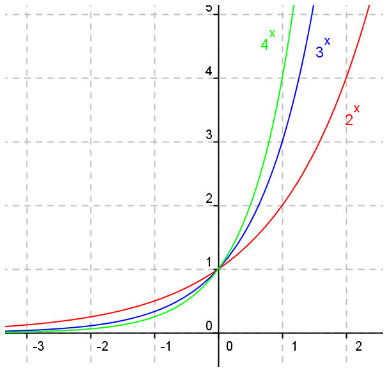
non hanno senso scritte come $(-2)^{1,414} = (-2)^{707/500} = \sqrt[500]{(-2)^{707}}$. Pertanto non possiamo ripetere la procedura di approssimazioni vista in precedenza.

Tenuto conto del precedente esempio abbiamo allora la seguente definizione.

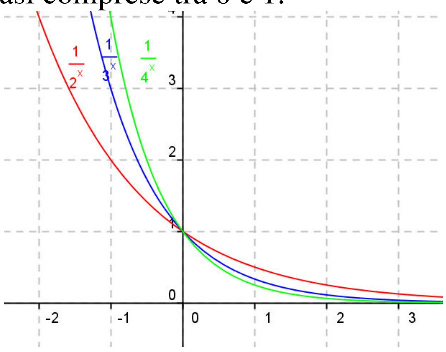
Definizione 1

Dato un numero reale positivo a e un numero reale b, diciamo $\boldsymbol{a^b}$ il numero reale determinato dalle sezioni razionali del numero reale a innalzato alle sezioni razionali del numero reale b.

Quindi non ha alcun senso la scritta $a^x, a \le 0$.
Possiamo anche rappresentare le funzioni esponenziali, di cui mostriamo semplicemente il grafico che facilmente si comprende:



Se la base è maggiore di 1 all'aumentare di essa ovviamente si ottengono valori sempre maggiori per esponenti positivi e sempre minori, ma positivi, per x negativo.
Esattamente il contrario accade per basi comprese tra 0 e 1.



Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo trovare la 2012ª cifra decimale del numero irrazionale 0,135791113… le cui cifre decimali si ottengono scrivendo uno dopo l'altro tutti gli infiniti numeri dispari.
Ragioniamo nel modo seguente. I primi 5 numeri dispari occupano i primi 5 posti, i successivi numeri dispari, da 11 a 99, sono in numero di 45, e avendo due cifre ciascuno occupano altre 90 cifre decimali. Poi i numeri da 101 a 999 sono 450 e occupano 450 × 3 = 1350 posizioni. Siamo così arrivati alla cifra decimale che occupa il posto 5 + 90 + 1350 = 1445. Quindi dobbiamo considerare altre 2012 – 1445 = 567 cifre decimali. Poiché i numeri adesso hanno 4 cifre, da 1001 in poi, dobbiamo vedere quale numero occupa la posizione 567. Poiché 567 = 4 × 141 + 3, vuol dire che la cifra cercata è la terza del 142–mo numero dispari di 4 cifre. Poiché 1001 = 2 × 500 + 1, il numero cercato è 2 × (500 + 141) + 1 = 1283. La sua terza cifra è 8, che è perciò la cifra cercata.

Determinare la 2012ª cifra decimale dei seguenti numeri irrazionali
Livello 2

1. 0,1234567891011… (le cifre decimali sono tutti i numeri interi). [6]
2. 0,24681012… (le cifre decimali sono tutti i numeri interi pari). [2]
3. 0,3691215182124… (le cifre decimali sono tutti i numeri interi multipli di 3). [1]
4. 0,112233445566… (le cifre decimali sono tutti i numeri interi ripetuti due volte). [7]
5. 0,11335577991111… (le cifre decimali sono tutti i numeri interi dispari ripetuti due volte). [7]

Lavoriamo insieme

Vogliamo determinare i primi 5 elementi delle sezioni razionali del numero $\sqrt{3}$. Consideriamo i successivi quadrati dei numeri interi, poiché $1^2 = 1 < 3 < 2^2 = 4$, possiamo dire che i primi due elementi delle due sezioni razionali sono rispettivamente {1} e {2}. Adesso consideriamo i successivi quadrati dei numeri decimali del tipo 1,*a* con *a* cifra da 0 a 9. Poiché $1{,}7^2 = 2{,}89 < 3 < 1{,}8^2 = 3{,}24$; i successivi elementi delle sezioni sono: {1; 1,7} e {2; 1,8}. Procedendo in questo modo otterremo: {1; 1,7; 1,73; 1,732; 1,7320; 1,73205} e {2; 1,8; 1,74; 1,733; 1,7321; 1,73206}.

Determinare i primi cinque elementi delle sezioni razionali che determinano i seguenti numeri reali.

Livello 1

6. $\sqrt{5}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{11}$; $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[4]{5}$; π; $1+\pi$; π^2

Livello 2

7. $2^{\sqrt{3}}$; $3^{\sqrt{2}}$; $4^{\sqrt{5}}$; $2^{1+\sqrt{3}}$; $3^{1-\sqrt{2}}$; $5^{\sqrt[3]{2}}$; $2^{\sqrt[4]{2}}$; $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$; $\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$; 2^{π}; $3^{1-\pi}$; $4^{1+\pi}$; $\sqrt{2}^{1+\sqrt{3}}$; $\sqrt{3}^{\pi}$; $\pi^{\sqrt{2}}$

Equazioni e disequazioni esponenziali

Problema

Tommaso ha acquistato un vaso da un antiquario, il quale gli ha assicurato che è originale del VI secolo a.C. Come può essere sicuro di non essere stato imbrogliato?

Il problema precedente può essere risolto utilizzando una tecnica nota come carbonio datazione. Tutti gli esseri viventi, quindi anche i manufatti di argilla, contengono un elemento chimico noto come Carbonio 14, indicato con C_{14}. Il Carbonio è uno degli elementi indispensabili per la vita, ed ha 6 protoni e 6 neutroni, quindi il suo numero chimico è 12, il C_{14} ha invece 6 protoni e 8 neutroni e per questo motivo viene chiamato isotopo. Esso è un isotopo radioattivo, quindi quando l'organismo muore, in questo caso quando si cuoce l'argilla del vaso, che diviene terracotta, non vi è più assunzione di C_{14}. Si sa che ogni 5700 anni la percentuale di tale isotopo presente si dimezza, quindi basta misurare quanta percentuale è rimasta per avere una datazione "abbastanza" precisa del vaso.

Esempio 4

Supponiamo che Tommaso abbia fatto analizzare il vaso e la rilevazione ha stabilito che la percentuale di C_{14} presente sul vaso è del 72%, quale dovrebbe essere quindi la datazione del vaso? Dobbiamo risolvere un'equazione che tenga conto che ogni 5700 anni la percentuale diventa pari a 0,5 di quello che era prima. Così per esempio dopo 2×5700 anni sarà la metà della metà, cioè $0{,}5^2 = 0{,}25 = 25\%$ di quello che era, dopo 3×5700 anni sarà $0{,}5^3 = 0{,}125 = 12{,}5\%$ di quello che era. In generale, dopo *x* anni sarà $0{,}5^x$. Quindi noi vogliamo sapere per quale *x* si ha: $0{,}72 = 0{,}5^x$.

La precedente equazione è di un tipo che ancora non conosciamo, vediamo di definirla.

Definizione 2

Un'equazione che dopo tutte le possibili semplificazioni, presenta l'incognita come esponente, si dice **equazione esponenziale**.

In generale non è semplice risolvere un'equazione esponenziale. Per esempio quella precedente, al momento non sappiamo risolverla se non per tentativi, cioè prendendo una calcolatrice scientifica e ponendo dei valori all'esponente, per cercare di vedere quando otteniamo valori vicini a 0,72.

Esempio 5
Poiché 0,72 > 0,5, non è difficile capire che l'esponente da cercare deve essere più piccolo di 1. Consideriamo i seguenti calcoli. $0{,}5^{0{,}15} \approx 0{,}90$; $0{,}5^{0{,}35} \approx 0{,}78$; $0{,}5^{0{,}45} \approx 0{,}73$; $0{,}5^{0{,}47} \approx 0{,}72$; possiamo perciò dire che il vaso è di circa 5700 × 0,47 = 2679 anni fa, e quindi la datazione proposta dall'antiquario è ragionevole, poiché VI secolo a.C. significa circa 2600 anni fa.

Nel paragrafo sui logaritmi risolveremo in modo più rigoroso la precedente equazione. Adesso vediamo invece alcune equazioni che possono risolversi con gli strumenti che conosciamo.

Esempio 6
Vogliamo risolvere l'equazione $2^x = 128$, poiché possiamo scriverla nel modo seguente: $2^x = 2^7$ possiamo dire che la sua soluzione è $x = 7$, dato che ovviamente se due potenze sono uguali e hanno la stessa base debbono avere anche lo stesso esponente.

Vale il seguente intuitivo risultato.

Teorema 2
L'equazione $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, con $a > 0$, $f(x)$, $g(x)$ espressioni nell'incognita x, è equivalente (cioè ha le stesse soluzioni) all'equazione $f(x) = g(x)$.

Esempio 7
Vogliamo risolvere l'equazione $3^{2x-1} = 9^{4x-2}$. La riscriviamo nel modo seguente: $3^{2x-1} = 3^{2\cdot(4x-2)}$, quindi uguagliamo gli esponenti: $2x - 1 = 8x - 4 \Rightarrow 6x = 3 \Rightarrow x = ½$.
Verifichiamo la soluzione: $3^{2 \cdot ½ - 1} = 9^{4 \cdot ½ x - 2} \Rightarrow 3^0 = 9^0 \Rightarrow 1 = 1$

Ci sono altre equazioni esponenziali che possono risolversi facilmente.

Esempio 8
Vogliamo risolvere l'equazione $9^x + 2 \cdot 3^x - 3 = 0$. In questo caso non è difficile capire che se poniamo $3^x = y, 9^x = \left(3^x\right)^2 = y^2$, otteniamo una semplice equazione di secondo grado in y.

$$y^2 + 2y - 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \begin{cases} \dfrac{-2+4}{2} = 1 \\ \dfrac{-2-4}{2} = -3 \end{cases}$$

Queste ovviamente non sono le soluzioni dell'equazione di partenza, ma servono per trovare quelle. Infatti sostituiamone il valore nella posizione: $3^x = 1 \vee 3^x = -3$. Ovviamente la seconda equazione non ha soluzioni, poiché abbiamo visto che le potenze a base positiva sono sempre numeri positivi. Mentre la prima la risolviamo semplicemente: $3^x = 3^0 \Rightarrow x = 0$.

La risoluzione delle disequazioni esponenziali avviene sempre passando dalla risoluzione delle equazioni esponenziali. Dobbiamo fare attenzione solo al valore della base, poiché noi sappiamo che, $3^4 > 3^3 \Rightarrow 4 > 3$ mentre $(1/3)^4 < (1/3)^3 \Rightarrow 4 > 3$. Quindi abbiamo la seguente regola:

Regola 1
Si ha: $a^{f(x)} \underset{(<)}{>} a^{g(x)} \Rightarrow \begin{cases} f(x) \underset{(<)}{>} g(x) & se\ a > 1 \\ f(x) \underset{(>)}{<} g(x) & se\ 0 < a < 1 \end{cases}$.

Esempio 9

Vogliamo risolvere la disequazione $4^{2x} > 4^{x^2-1}$. Tenuto conto della regola precedente essa equivale alla disequazione: $2x > x^2 - 1 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 > 0 \Rightarrow x < 1 - \sqrt{2} \vee x > 1 + \sqrt{2}$.

Invece la disequazione: $0,23^{x^2+1} < 0,23^{3x+2}$ equivale a

$$x^2 + 1 > 3x + 2 \Rightarrow x^2 - 3x - 1 > 0 \Rightarrow x < \frac{3-\sqrt{13}}{2} \vee x > \frac{3+\sqrt{13}}{2}$$

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere l'equazione esponenziale $8^{3x+1} = \sqrt[x]{4^{5x-2}}$.

Osserviamo che entrambi i membri sono potenze di 2, quindi esprimiamoli in tal modo: $2^{3\cdot(3x+1)} = 2^{\frac{2\cdot(5x-2)}{x}}$
A questo punto possiamo uguagliare gli esponenti, ottenendo la seguente equazione algebrica:

$$3\cdot(3x+1) = \frac{2\cdot(5x-2)}{x} \Rightarrow 9x^2 + 3x = 10x - 4, x \neq 0 \Rightarrow 9x^2 - 7x + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 49 - 144 < 0$$

Pertanto neanche l'equazione esponenziale ha soluzioni reali.

Risolvi le seguenti equazioni esponenziali

Livello 1

1. $3^{2x-1} = 27$ [2] $2^{12x-1} = \sqrt{2^3}$ [5/24] $¼ = 16^{2x-3}$ [5/4] $5^{x-2} = 1$ [2] $7^{14x} = 1/49$ [–1/7]
2. $(5/4)^{3x+1} = 25/16$ [1/3] $25^{x+1} = 5^{2x^2-1}$ $\left[\frac{1\pm\sqrt{7}}{2}\right]$ $27^{x-2} = 9^{3x-2}$ [–2/3] $15^{2x^2-x} = 225^{\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}}$ [½]
3. $2^{2x}\cdot 2^x = \sqrt{8^{x+1}}\cdot 16$ [11/3] $3^{2x-1} = \frac{\sqrt[3]{9}}{27^x}$ [1/3] $7^{x^2-1} = \frac{49^{x-1}}{343^{x+1}}$ [∅] $16^{2x+4}\cdot 64^x = \frac{8^{x+7}}{\sqrt[3]{2}}$ [14/33]
4. $17^{x+1} = \sqrt[3]{289^x}$ [–3] $32^{x^2+x-1}\cdot 128^x = \frac{1024}{\sqrt[3]{2}}$ $\left[\frac{-18\pm 2\cdot\sqrt{246}}{15}\right]$ $13^{3x}\cdot 169^{2x+1} = 1$ [–2/7]
5. $14^{2x^2-3x}\cdot\sqrt[3]{14} = 196^{2+x}$ $\left[\frac{15\pm\sqrt{489}}{12}\right]$ $2^{14x-1} = \sqrt[x]{4^{x-2}}\cdot 128$ [∅]

Livello 2

6. $\frac{2^{4x-1}\cdot 8^{x+3}}{16^{\frac{x-1}{2}}} = \sqrt[x+1]{4}$ $\left[\frac{-15\pm\sqrt{65}}{10}\right]$ $\frac{\sqrt[x+2]{14^3}\cdot 196^{2x-1}}{14^{3x+2}} = 1$ $\left[1\pm\sqrt{6}\right]$ $\frac{10^{4x+1}\cdot 100^x}{0,01^{3x-1}} = \frac{0,1^{2x-5}}{1000^{2x+1}}$ [0,15]
7. $\frac{3^{x-1}\cdot 9^{x+1}\cdot 27^x}{81^{x-2}\cdot 243^{x+2}} = 3$ [–2/3] $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-2}\cdot\frac{9}{4} = \left(\frac{4}{9}\right)^{x-1}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}}$ [5/2] $\frac{5^{x+2}\cdot 125^{2x-\frac{1}{3}}}{625^{4x-1}} = \sqrt[x-1]{25}$ [∅]
8. $\frac{\sqrt[x-1]{2^x}\cdot 4^{\frac{x-2}{3}}}{8^{2x-3}} = \frac{\sqrt{2^{x+1}}}{16^{2x-1}}$ $\left[\frac{-6\pm\sqrt{283}}{13}\right]$ $\frac{\sqrt[x+1]{5^{2x+1}}\cdot 25^{x+2}}{125^{\frac{x+15}{3}}} = 625^{\frac{x-1}{x+1}}$ $\left[6\pm\sqrt{42}\right]$ $\frac{\sqrt[3x-2]{16^3}\cdot 64^{5x}}{4^{2x-1}} = 256^{x-2}$ [∅]
9. $\frac{\sqrt[3x-2]{7^{x-1}}\cdot 49^{2x-4}}{7^{\frac{x-3}{2}}} = \sqrt[4]{343^x}$ $\left[\frac{16\pm 4\cdot\sqrt{5}}{11}\right]$ $12^{5x-1} = \frac{144^{x-3}}{1728^{x-2}}$ [1/6] $\frac{\sqrt[2x-9]{19^x}\cdot 361^{2x-1}}{19^{3x-2}} = \sqrt[5]{19^x}$ [0 ∨ 31/8]

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere l'equazione $3\cdot 9^x - 10\cdot 3^x + 3 = 0$.

Scriviamo in quest'altro modo: $3 \cdot 3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 3 = 0$, adesso poniamo $3^x = y$, $9^x = 3^{2x} = y^2$, e risolviamo l'equazione $3y^2 - 10y + 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{5 \pm \sqrt{25-9}}{3} = \frac{5 \pm 4}{3} = \begin{cases} \frac{5+4}{3} = 3 \\ \frac{5-4}{3} = \frac{1}{3} \end{cases}$.

Risostituiamo: $3^x = 3 \Rightarrow x = 1 \vee 3^x = 1/3 \Rightarrow x = -1$.

Risolvi le seguenti equazioni esponenziali

Livello 1

10. $4^x + 6 \cdot 2^x - 16 = 0$ [1] $4 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^x + 2 = 0$ [$-2 \vee 1$] $3 \cdot 27^{2x} - 244 \cdot 27^x + 81 = 0$ [$-1/3 \vee 4/3$]
11. $9 \cdot 9^x - 82 \cdot 3^x + 9 = 0$ [$-2 \vee 2$] $25 \cdot 5^{2x} - 126 \cdot 5^x + 5 = 0$ [$-2 \vee 1$] $5 \cdot 25^x + 14 \cdot 5^x - 3 = 0$ [-1]
12. $4 \cdot 4^x + 9 \cdot 2^x + 2 = 0$ [$\varnothing$] $49 \cdot 7^{2x} - 50 \cdot 7^x + 1 = 0$ [$-2 \vee 0$] $16 \cdot 8^x - 17 \cdot 8^x + 1 = 0$ [$-4/3 \vee 0$]
13. $32 \cdot 16^x - 65 \cdot 4^x + 2 = 0$ [$-5/2 \vee ½$] $256 \cdot 0{,}25^{2x} - 68 \cdot 0{,}25^x + 1 = 0$ [$1 \vee 3$] $4^x + 31 \cdot 2^x - 32 = 0$ [0]
14. $25 \cdot 0{,}04^x - 3126 \cdot 0{,}2^x + 125 = 0$ [$-3 \vee 2$] $9 \cdot 3^x - 244 \cdot \sqrt{3^x} + 27 = 0$ [$-4 \vee 6$] $9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$ [1]

Livello 2

15. $9^{x-1} - 10 \cdot 3^{x-2} + 1 = 0$ [$0 \vee 2$] $9^{x-2} - 30 \cdot 3^{x-4} + 1 = 0$ [$1 \vee 3$] $9^x + 2 \cdot 3^x - 15 = 0$ [1]
16. $25^{x+1} - 126 \cdot 5^x + 5 = 0$ [1] $4^{x+2} - 10 \cdot 2^x + 1 = 0$ [$-3 \vee -1$] $(4/25)^x - 133/20 \cdot (2/5)^x + 5/2 = 0$ [$-2 \vee 1$]
17. $375 \cdot (25/9)^x - 706 \cdot (5/3)^x + 135 = 0$ [$-3 \vee 1$] $8 \cdot (9/4)^x - 6 \cdot (3/2)^x - 27 = 0$ [2] $4^x + 3 \cdot 2^{x-1} + 2 = 0$ [$\varnothing$]
18. $2^{2x+7} - 9 \cdot 2^{x+2} + 1 = 0$ [$-5 \vee -2$] $9^{x+1} - 730 \cdot 3^x + 81 = 0$ [$-2 \vee 4$] $49^{x+1} - 16808 \cdot 7^x + 343 = 0$ [$-2 \vee 3$]
19. $5 \cdot 25^{x+1} - 30 \cdot 5^x + 1 = 0$ [$-2 \vee 1$] $4 \cdot (9/16)^x + 5 \cdot (¾)^x - 6 = 0$ [1] $3 \cdot (25/9)^x - 2 \cdot (5/3)^x - 5 = 0$ [1]

Livello 3

20. $2^{3x+5} - 35 \cdot 4^{x+1} + 49 \cdot 2^x - 4 = 0$ [$-3 \vee -2 \vee 2$] $2^{2x-¾} - 2^{x-¼} - 2^{x-½} + 1 = 0$ [$5/4 \vee ½$] $5^{2x-1/3} = 1 + 5^x$ [1/3]
21. $4^{x+2} - 2^{x+5/2} - 2^{x+2} + \sqrt{2} = 0$ [$-2 \vee -3/2$] $9^x - 10 \cdot 3^{x+½} + 27 = 0$ [$½ \vee 5/4$] $4^{x-1} - 3 \cdot 2^{x-3/2} + 1 = 0$ [$½ \vee 3/2$]
22. $36^x - 6^{x+3/2} - 6^{x-1} + \sqrt{6} = 0$ [$-1 \vee 3/2$] $49^x - 7^{x+¾} = 7^{x+½} - \sqrt[4]{7^5}$ [$½ \vee ¾$] $4^x - 2^{x+\pi} - 2^{x+3/5} + 2^{\pi+3/5} = 0$ [$3/5 \vee \pi$]
23. $8^x - 5 \cdot 4^x + 2^{x+1} + 8 = 0$ [$1 \vee 2$] $3^{3x+1} - 4 \cdot 9^x - 17 \cdot 3^x + 6 = 0$ [$-1 \vee 1$] $5^{-2x-3} - 6 \cdot 5^{-x-2} + 1 = 0$ [$-2 \vee -1$]
24. Spiegare perché l'equazione $a^{2x} + b \cdot a^x + c = 0$ non ha soluzioni reali qualunque siano a, b e c numeri reali positivi.

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere il seguente sistema di equazioni esponenziali: $\begin{cases} \frac{2^{x-y}}{2^{x+y}} = 8 \\ \frac{9^{x-2y}}{3^{2y-1}} = 1 \end{cases}$.

Come già visto per le equazioni, scriviamo, dato che è possibile, le equazioni come uguaglianza di potenze con uguale base: $\begin{cases} 2^{x-y-x-y} = 2^3 \\ 3^{2x-4y-2y+1} = 3^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{-2y} = 2^3 \\ 3^{2x-6y-2y+1} = 3^0 \end{cases}$. Adesso uguagliamo gli esponenti, ottenendo un sistema di due equazioni lineari in due incognite.

$$\begin{cases} -2y = 3 \\ 2x - 6y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{2} \\ 2x - \cancel{6}^{3} \cdot \left(-\frac{3}{\cancel{2}_{1}}\right) + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{2} \\ 2x + 9 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{2} \\ x = -5 \end{cases}$$

Risolvi i seguenti sistemi di equazioni esponenziali, in cui le lettere rappresentano numeri reali positivi

Livello 1

25. $\begin{cases} 2^{x+3} = 8 \\ 9^{3y-2} = \frac{1}{3} \end{cases}$ [$x = 0, y = ½$] $\begin{cases} \sqrt{7^x} = \frac{1}{49} \\ 12^{4y-3} = \frac{\sqrt[3]{144}}{12^x} \end{cases}$ [$x = -4, y = 23/12$] $\begin{cases} \frac{4^{x+3}}{32^{y-1}} = 1 \\ \frac{18^{2y}}{324^{x-1}} = 18^{x+y} \end{cases}$ [$x = 21/13, y = 37/13$]

26. $\begin{cases} 2^{x+y} = \dfrac{1}{16} \\ 3^{x+y-1} = \sqrt{3} \end{cases}$ [∅] $\begin{cases} \sqrt{5^{x+2y}} = 5^x \\ 25^{y-2x} = \dfrac{1}{125} \end{cases}$ [$x = 1$, $y = ½$] $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3]{169^{x+y}}} = \dfrac{13^{x+y}}{\sqrt{13}} \\ 6^{2y+x-1} = \dfrac{36}{\sqrt{6^{x-3y}}} \end{cases}$ [$x = 57/20$, $y = -51/20$]

27. $\begin{cases} \sqrt{2^x} = 4^{x^2-1} \\ 2^{y+1} = \dfrac{32^x}{\sqrt{8^{y-x}}} \end{cases}$ $\left[x = \dfrac{1 \pm \sqrt{65}}{8}, y = \dfrac{-3 \pm 13 \cdot \sqrt{65}}{40}\right]$ $\begin{cases} \sqrt{7^{2x+3y}} = 343^{x-1} \\ 15^{3x+7y} = \dfrac{1}{\sqrt[y]{225^x}} \end{cases}$ [∅] $\begin{cases} \sqrt{3^{x-3}} = 81 \\ 5^{2y+1} = 5 \cdot \sqrt{5} \end{cases}$ [$x = 11$, $y = ¼$]

28. $\begin{cases} a^{x+y} = a^{2y-1} \\ b^{y^2-1} = b^{1-x} \end{cases}$ $\left[x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}, y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}\right]$ $\begin{cases} \sqrt[y]{a^x} = \dfrac{1}{a^{y+1-2x}} \\ \dfrac{\sqrt[y-1]{a^{x+1}}}{a^{2x-1}} = 1 \end{cases}$ [$x = 1/87$, $y = -½$] $\begin{cases} \sqrt{2^{x^2-1}} = \dfrac{4}{64^{1-x-y}} \\ a^{3x+5y} = \dfrac{\sqrt[4]{a^{x-y}}}{a^{x+2}} \end{cases}$ [∅]

29. $\begin{cases} \sqrt{a^{2x+1}} = \dfrac{a^{x-3}}{\sqrt{a^{y-2}}} \\ b^{y-x} = \dfrac{\sqrt[x]{a^y}}{a^{2x-1}} \end{cases}$ [($x = 1$, $y = -5$) ∨ [($x = 5$, $y = -5$)] $\begin{cases} a^{x+y-1} = \dfrac{1}{a^{2x-y}} \\ b^{2x+y} = \dfrac{b}{\sqrt{b^{x-2}}} \end{cases}$ [$x = ½$, $y = ¾$]

30. $\begin{cases} \sqrt{b^{x+y-1}} = \dfrac{b^x}{b^{-y}} \\ c^y = c^{x-1} \cdot \sqrt{c^{x+y}} \end{cases}$ [$x = ¼$, $y = -5/4$] $\begin{cases} a^{2x} = \sqrt[x]{a^{2y-z}} \\ a^{x+y-2z} = \dfrac{a^{2x-1}}{a^{1-3y}} \\ 3^{z-1} = 9^{x-3y} \end{cases}$ [∅] $\begin{cases} 2^{x+y} = 2^{y-2x} \\ 3^{2x-1} = 3^{z+y} \\ 4^{2z-x-1} = 2^{x+y-1} \end{cases}$ [$x = 0$, $y = -1$, $z = 0$]

31. $\begin{cases} 4^{x+y} = 8 \\ 2^{x-z} = 4 \\ 8^{y-z} = \sqrt{2} \end{cases}$ [$x = 5/3$, $y = -1/6$, $z = -1/3$] $\begin{cases} a^x = a^y \\ b^{x-y} = b^{z+1} \\ c^{z-1} = c^{y-1} \end{cases}$ [$x = -1$, $y = -1$, $z = -1$]

32. $\begin{cases} 6^{2x+3y-1} = 36^x \\ 12^{3x-y+z} = 144^{x-z} \\ \sqrt[3]{5^{2x-y}} = \sqrt{5^{z+1}} \end{cases}$ [$x = 4/5$, $y = 1/3$, $z = -7/45$] $\begin{cases} \pi^{3x+2} = \pi^{3y-z} \\ \sqrt[4]{\pi^{x+y-z}} = \dfrac{1}{\pi^{x-y}} \\ 2^{3x-y+1} = 16^{-2x+3y} \end{cases}$ [$x = -10/19$, $y = -7/19$, $z = -29/19$]

Lavoriamo insieme

Risolviamo il sistema $\begin{cases} 2^{x+1} - 3^{y-1} + 5^z = \dfrac{86}{3} \\ 3 \cdot 2^x - 4 \cdot 3^{y+1} + 5^{z-1} = \dfrac{29}{3} \\ 2^{x+1} + 3^y = 5 \end{cases}$.

Riscriviamolo in una diversa forma: $\begin{cases} 2 \cdot 2^x - \dfrac{3^y}{3} + 5^z = \dfrac{86}{3} \\ 3 \cdot 2^x - \dfrac{4}{3} \cdot 3^y + \dfrac{5^z}{5} = \dfrac{29}{3} \\ 2 \cdot 2^x + 3^y = 5 \end{cases}$. Facciamo delle posizioni: $2^x = 1, 3^y = b$, $5^z = c$,

ottenendo il sistema lineare: $\begin{cases} 2\cdot a-\frac{1}{3}\cdot b+c=\frac{86}{3} \\ 3\cdot a-\frac{4}{3}\cdot b+\frac{1}{5}c=\frac{29}{3} \\ 2\cdot a+b=5 \end{cases}$. Con qualsiasi metodo si voglia risolvere le sue soluzioni sono sempre $a = 2$, $b = 1$, $c = 25$.
Quindi risostituendo avremo le effettive soluzioni: : $2^x = 2$; $3^y = 1$; $5^z = 25 \Rightarrow x = 1$; $y = 0$; $z = 2$.

Livello 2

33. $\begin{cases} 2^x+3^y=\frac{13}{3} \\ 3^{2y-1}+4^x=\frac{433}{27} \end{cases}$ $[x = 2, y = -1]$ $\begin{cases} 16^x+25^y=29 \\ 5^y+2\cdot 4^x=9 \end{cases}$ $[x = ½, y = 1]$ $\begin{cases} 7^{x+1}-2\cdot 3^{y-1}=\frac{9259}{7} \\ 5\cdot 3^{y+1}+2\cdot 7^x=\frac{299}{3} \end{cases}$ $[x = 2, y = -2]$

34. $\begin{cases} 3^x+2\cdot 5^y=\frac{31}{75} \\ 2\cdot 3^{x+1}+5^{y-2}=\frac{1251}{625} \end{cases}$ $[x=-1, y=-2]$ $\begin{cases} 2^{x-y}+5^y=127 \\ 3\cdot 5^y-2^{x-y+1}=371 \end{cases}$ $[x = 4, y = 3]$ $\begin{cases} 2^x+3^y=745 \\ 2^{x-1}+3^{y-1}=251 \end{cases}$ $[x = 4, y = 6]$

35. $\begin{cases} 2^{x+y}+3^x=41 \\ 4\cdot 3^x-3\cdot 2^{x+y}=-60 \end{cases}$ $[x = 2, y = 3]$ $\begin{cases} 2^x-3^y=-1 \\ 2^x+3^y=17 \end{cases}$ $[x = 3, y = 2]$ $\begin{cases} 3^{x+2y}-3^{x+5y-1}=\frac{26}{81} \\ 3^{x+2y+1}+3^{x+5y}=\frac{28}{27} \end{cases}$ $[x = 1/3, y = -2/3]$

36. $\begin{cases} 4^{x-1}+3\cdot 2^{y+1}=\frac{1}{2}+6\cdot\sqrt{2} \\ 4^{x+1}-2^{y+2}=8-4\cdot\sqrt{2} \end{cases}$ $[x = ½, y = ½]$ $\begin{cases} 5^x-3^{y-x+1}=-\frac{2024}{25} \\ 3^{y-x+2}+5^{x+1}=\frac{1216}{5} \end{cases}$ $[x = -2, y = 1]$

37. $\begin{cases} 2^x+3^y-2^z=3 \\ 2^x-3^y-2^z=-15 \\ 2^x+3^y+2^z=19 \end{cases}$ $[x = 1, y = 2, z = 3]$ $\begin{cases} 2^x+2^{y+1}+2^{z-1}=5 \\ 2^{x+1}+2^y-2^z=2 \\ 2^x+2^{y-1}+2^z=\frac{5}{2} \end{cases}$ $[x = -1, y = 1, z = 0]$

38. $\begin{cases} 2^{x+y}+3^{x-y}-2^{x-z}=\frac{49}{12} \\ 2^{x+y+1}-3^{x-y-1}-2^{x-z}=\frac{275}{36} \\ 2^{x+y}+3^{x-y}+2^{x-z}=\frac{55}{12} \end{cases}$ $[x = ½, y = 3/2, z = 5/2]$ $\begin{cases} 6^{x+y}-5^{x-y}=\frac{179}{5} \\ 6^{x+y-2}+5^{x-y+4}=126 \end{cases}$ $[x = ½, y = 3/2]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere la disequazione esponenziale $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-x-1}>\sqrt[4]{\frac{27}{8}}$. Intanto scriviamo tutto con la stessa base: $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-x-1}>\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{3}{4}}$. Poiché la base è minore di 1, passiamo alla disequazione fra gli esponenti cambiando il verso: $x^2-x-1<-\frac{3}{4}$. Risolviamo: $4x^2-4x-1<0\Rightarrow\frac{1-\sqrt{2}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Risolvi le seguenti disequazioni esponenziali

Livello 1

39. $3^{x^2-1} \ge \sqrt[5]{3}$ $\left[x \le -\frac{\sqrt{30}}{5} \vee x \ge \frac{\sqrt{30}}{5}\right]$ $\left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} \le 9/16$ $[x \ge 1]$ $13^{2x^2-x+1} > \sqrt[3]{13^{x+2}}$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$ $11^{4x} > \frac{121^{x-1}}{\sqrt{11}}$ $[x > -5/4]$

40. $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x-1}{3}} < 27^{x+1}$ $[x > -4/5]$ $4^{2x^2} > \sqrt[5]{2^{x+1}}$ $[x < -1/5 \vee x > 1/4]$ $5 \cdot 5^{x+1} < \frac{1}{125^{2x}}$ $[x < -2/7]$ $3^{2x-1} < 1/3$ $[x < 0]$

41. $\sqrt{7^{x+3}} > 49^{x-2}$ $[x < 11/3]$ $\left(\frac{1}{3}\right)^{4x+7} \le \sqrt[x]{9^{x+1}}$ $[-2 \le x \le -1/4 \vee x > 0]$ $2^{2x+1} < \frac{4 \cdot \sqrt{2^x}}{8^{2x-1}}$ $[x < 8/15]$

42. $27^{4x^2-2x} < \frac{\sqrt[3]{9^{x+2}}}{3^{x-2}}$ $\left[\frac{17-\sqrt{1729}}{72} < x < \frac{17+\sqrt{1729}}{72}\right]$ $3^{2x+1} \ge 3 \cdot \sqrt[x+1]{81^{x-2}}$ $[x > -1]$ $3^x > 27$ $[x > 3]$

43. $\frac{\sqrt[x-1]{5^2}}{25^{x+1}} > 125^{2x-3}$ $\left[x < \frac{15-\sqrt{65}}{16} \vee 1 < x < \frac{15+\sqrt{65}}{16}\right]$ $4^{x^2-1} < \frac{1}{16^{3x-2}}$ $\left[-3-\sqrt{14} < x < -3+\sqrt{14}\right]$

44. $\sqrt[x+3]{\frac{7}{8}} \le \left(\frac{64}{49}\right)^{2x-3}$ $\left[-3 \le x \le \frac{-3-\sqrt{77}}{4} \vee x \ge \frac{-3+\sqrt{77}}{4}\right]$ $\frac{\sqrt{\pi^{x-1}} \cdot \pi^{x+1}}{\pi} > 1$ $[x > 1/3]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere la disequazione esponenziale $8^x + 2^{2x-1} - 2^{x+1} < 1$. Intanto scriviamo tutto con la stessa base: $2^{3x} + ½ \cdot 2^{2x} - 2 \cdot 2^x - 1 < 0$. Sostituiamo: $2^x = y$; $2^{2x} = y^2$; $2^{3x} = y^3$, ottenendo una disequazione di III grado: $y^3 + ½ \cdot y^2 - 2y - 1 < 0$. Verifichiamo se vi sono numeri interi che annullano il polinomio, che ricordiamo possono essere solo fra i divisori del termine noto, quindi solo –1 oppure 1. Si ha: $1 + ½ - 2 - 1 \ne 0$, $-1 + ½ + 2 - 1 \ne 0$, quindi non vi sono zeri interi. Allora effettuiamo il minimo comune denominatore: $2y^3 + y^2 - 4y - 2 < 0$, proviamo se vi sono zeri razionali, stavolta dobbiamo considerare il rapporto fra il termine noto e il primo coefficiente, quindi proviamo con ½ e –½: $2 \cdot 1/8 + ¼ - 4 \cdot ½ - 2 \ne 0$, $2 \cdot (-1/8) + ¼ - 4 \cdot (-½) - 2 = 0$. Abbiamo trovato uno zero, quindi possiamo scomporre il polinomio:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & 1 & -4 & -2 \\ -1/2 & & -1 & 0 & 2 \\ \hline & 2 & 0 & -4 & 0 \end{array}$$

Pertanto possiamo scrivere: $2 \cdot \left(y + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(2y^2 - 4\right) < 0 \Rightarrow (2y+1) \cdot \left(2y^2 - 4\right) < 0$, le cui soluzioni sono, come facilmente si vede: $y < -\sqrt{2} \vee -\frac{1}{2} < y < \sqrt{2}$, il che conduce alle disequazioni: $2^x < -\sqrt{2} \vee -\frac{1}{2} < 2^x < \sqrt{2}$.
La prima disequazione non ha ovviamente soluzioni, essendo gli esponenziali quantità sempre positive. La seconda dunque equivale a $2^x < \sqrt{2}$ e le soluzioni sono: $2^x < 2^{1/2} \Rightarrow x < \frac{1}{2}$.

Livello 2

45. $\frac{5^{2x+1}-25}{3^{4x+1}-\sqrt[3]{3}} > 0$ $[x < -3/14 \vee x > ½]$ $\frac{4^{3x+7}-\sqrt[7]{32}}{\sqrt{2^{2x-3}}-4} \le 0$ $[-31/14 \le x < 7/2]$ $\frac{\sqrt[x]{27}-81}{0,1^{x^2-2x}-100} \ge 0$ $[x < 0 \vee x \ge 3/4]$

46. $\frac{0,32^{x-3}-16^{3x-1}}{0,25^{3x+5}-\sqrt[5]{8}} > 0$ $[x < -53/30 \vee x > 19/17]$ $4^x - 5 \cdot \sqrt{2} \cdot 2^x + 8 \ge 0$ $[x \le ½ \vee x \ge 5/2]$

47. $\frac{0,125^{x^2-1}-\sqrt[4]{2}}{\sqrt{5^{x+1}}-\sqrt[6]{5}} > 0$ $\left[x < -\frac{\sqrt{33}}{6} \vee -\frac{2}{3} < x < \frac{\sqrt{33}}{6}\right]$ $27 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x - 30 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 8 < 0$ $[1 < x < 2]$

48. $\frac{\sqrt[4]{5^x}-0,2}{6^{3x}-\sqrt[7]{216}} \le 0$ $[-4 \le x < 1/7]$ $\frac{8^{x+2}-16}{0,01^{3x-2}-0,1^x} > 0$ $[-2/3 < x < 4/5]$ $\frac{0,4^{x^2+1}-1}{2^{5x+2}-\sqrt{32^{x+1}}} < 0$ $[x < 1/5]$

49. $4^x - 12 \cdot 2^x + 32 > 0$ $[x < 2 \vee x > 3]$ $3^{2x+1} - 28 \cdot 3^x + 9 \le 0$ $[-1 \le x \le 2]$

50. $4^{x+1} - 9 \cdot 2^x + 2 > 0$ $[x < -2 \vee x > 1]$ $\quad \frac{3^{2x}}{4^{2x-1}} - 7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x + 3 \le 0$ $[0 \le x \le 1]$

51. $2^{x+2} - 5 \cdot \sqrt{2}^{x+1} + 1 \ge 0$ $[x \le -3 \vee x \ge 1]$ $\quad 3 \cdot 27^{x+1} + 51 \cdot 9^x - 29 \cdot 3^x + 1 > 0$ $[x < -3 \vee x > -1]$

52. $3 \cdot \left(\frac{16}{9}\right)^x + 2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x - 8 > 0$ $[x > 1]$ $\quad 49^x + 5 \cdot 7^x + 6 \le 0$ $[\varnothing]$ $\quad \sqrt[3]{2^{2x}} - 3 \cdot \sqrt[3]{2^{x+1}} + 2^{5/3} \ge 0$ $[x \le 1 \vee x \ge 4]$

53. $40 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{2x} - 641 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^x + 250 < 0$ $[-1 < x < 3]$ $\quad 32 \cdot 2^x - 18 \cdot 2^{x/2} + 1 > 0$ $[x < -8 \vee x > -2]$

54. $\frac{1}{4^{x-4}} - \frac{5}{2^{x-3}} + 1 < 0$ $[3 < x < 5]$ $\quad 8^x - 4^x - 2^{x+2} + 4 < 0$ $[0 < x < 1]$ $\quad \frac{\sqrt[x]{7} - 343}{0,2^{4x-7} - 125} < 0$ $[x < 0 \vee 1/3 < x < 1]$

Livello 3

55. $\frac{4 \cdot 16^x - 9 \cdot 4^x + 2}{9 \cdot 27^{2x} - 82 \cdot 27^x + 9} < 0$ $[-1 < x < -2/3 \vee ½ < x < 2/3]$ $\quad \frac{2 \cdot 4^x + 3 \cdot 2^x - 2}{\frac{1}{9^{x-1}} + \frac{17}{3^x} - 2} < 0$ $[x < -1 \vee x > 2]$

56. $\frac{8 \cdot 0{,}125^{2x} - 33 \cdot 0{,}125^x + 4}{0{,}2^{2x-1} - 26 \cdot 0{,}2^x + 5} \ge 0$ $[x \ge -2/3 \vee x < -1 \wedge x \ne -1]$ $\quad \frac{5^{2x} - 2 \cdot 5^x - 15}{13^{2x+1} - 170 \cdot 13^x + 13} > 0$ $[x > -1 \wedge x \ne 1]$

57. $\frac{2 \cdot 16^{2x} - 9 \cdot 16^x + 4}{8^{2x+1} - 17 \cdot 8^x + 2} > 0$ $[x < -1 \vee -¼ < x < 1/3 \vee x > ½]$ $\quad \frac{4^x - 31 \cdot 2^x - 32}{3 \cdot 9^{x+1} - 4 \cdot 3^{x+1} + 1} \le 0$ $[x < -2 \vee -1 < x \le 5]$

58. $\frac{0{,}25^{2x} - 12 \cdot 0{,}25^x + 32}{32 \cdot 8^{2x} - 12 \cdot 8^x + 1} \le 0$ $[-3/2 \le x < -2/3 \wedge x \ne -1]$ $\quad \frac{7^{2x+1} - 50 \cdot 7^x + 7}{9^{4x+1} - 82 \cdot 81^x + 9} \le 0$ $[-1 \le x < -½ \vee ½ < x \le 1]$

59. $\frac{9 \cdot 27^{2x} - 82 \cdot 27^x + 9}{27 \cdot 81^{2x} - 82 \cdot 81^x + 3} > 0$ $[x < -¾ \vee -2/3 < x < ¼ \vee x > 2/3]$ $\quad \frac{9^{x+1} - 28 \cdot 3^x + 3}{2^{2x+5} - 3 \cdot 2^{x+2} + 1} > 0$ $[x < -3 \vee x > 1]$

Lavoriamo insieme

Risolviamo il sistema di disequazioni esponenziali $\begin{cases} \sqrt{3}^x \ge 9^{x+2} \\ 0{,}5^{\frac{2x-1}{2}} > 4^{x^2-x} \end{cases}$. Risolviamo singolarmente le due disequazioni.

$$\begin{cases} 3^{1/2x} \ge 3^{2x+4} \\ 2^{-\frac{2x-1}{2}} > 2^{2x^2-2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1/2x \ge 2x+4 \\ -\frac{2x-1}{2} > 2x^2-2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 4x+8 \\ -2x+1 > 4x^2-4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x \ge 8 \\ 4x^2-2x-1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le -\frac{3}{8} \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Non vi sono soluzioni comuni perché $-\frac{3}{8} < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, pertanto il sistema è privo di soluzioni.

Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni esponenziali

Livello 1

60. $\begin{cases} 2^{x-1} > \frac{1}{16} \\ 3^{2x-3} > \sqrt[5]{27} \end{cases}$ $[x > 9/5]$ $\quad \begin{cases} a^{x+3} > a^{x^2-1}, a > 1 \\ b^{5x-2} > b^{1-3x}, 0 < b < 1 \end{cases}$ $\left[\frac{1-\sqrt{17}}{2} < x < \frac{3}{2}\right]$ $\quad \begin{cases} \frac{5^{13+x}}{\sqrt{5^{2x+3}}} \ge 25^x \\ 3^{2x^2+x-1} < 1 \end{cases}$ $[-1 < x < ½]$

61. $\begin{cases} 5^{5x+3} \cdot 25^{x+1} < \frac{\sqrt{5}}{125^{x-1}} \\ \sqrt{2^{x^2-1}} \ge 8 \cdot \sqrt[4]{32^{x+1}} \end{cases}$ $\left[x \le \frac{5-\sqrt{177}}{4}\right]$ $\quad \begin{cases} 16^{2x+5} < \sqrt{2} \cdot 4^{2x^2} \\ 31^{7x+1} < 31 \cdot \sqrt[7]{31^{5x-2}} \end{cases}$ $\left[x < \frac{4-\sqrt{94}}{4}\right]$ $\quad \begin{cases} 4^{3-4x} < 64^{5x+2} \\ 13^{x^2-3} \le 169^{2x-7} \end{cases}$ $[\varnothing]$

62. $\begin{cases} \dfrac{\sqrt[x]{2^{3x+8}}}{2} < 8^{\frac{2x-3}{5}} \\ 11^{\frac{3x+4}{x-1}} < 121^{\frac{3x+5}{2x-3}} \end{cases}$ $\left[-\dfrac{2}{5} < x < 0 \vee x > \dfrac{19+\sqrt{1321}}{12}\right]$ $\begin{cases} 4^{x+1}\cdot 8^{x-1} < 2^{4x-5}\cdot 16^{1-4x} \\ 5^{12x} \le \dfrac{25^{x^2+3}\cdot\sqrt{5}}{125^{\frac{2x-3}{4}}} \end{cases}$ $[x < 0]$

63. $\begin{cases} 14^{11-x} < \dfrac{196^{2x+1}}{\sqrt{14}} \\ 17^{2x^2+x} > 17^{4x+1}\cdot\sqrt[3]{289^{x+1}} \end{cases}$ $\left[x > \dfrac{11+\sqrt{241}}{12}\right]$ $\begin{cases} \left(a^2+2\right)^{4+2x} < \left(a^2+2\right)^{3x-1} \\ \left(\dfrac{1}{a^2+3}\right)^{2x^2-3x+1} \le \left(\dfrac{1}{a^2+3}\right)^{x+4} \end{cases}$ $\left[x \ge \dfrac{2+\sqrt{10}}{2}\right]$

64. $\begin{cases} 3^{x^2+5} < \dfrac{1}{27^{4x^2-x}} \\ 8^{x^2+7} \le \sqrt[5]{2^{x^2+x}} \end{cases}$ $[\varnothing]$ $\begin{cases} 6^{2x} < 36^{1-x^2+x} \\ 0,13^{4x+1} > 0,13^{4+7x} \end{cases}$ $[-1 < x < 1]$ $\begin{cases} \left(\dfrac{4}{5}\right)^{1-5x} > \left(\dfrac{5}{4}\right)^{3-3x} \\ \left(\dfrac{3}{4}\right)^{2-x^2} \le \left(\dfrac{16}{9}\right)^{2-3x} \end{cases}$ $\left[\dfrac{1}{2} < x \le \sqrt{15}-3\right]$

65. $\begin{cases} 12^{3x}\cdot\sqrt{12} > \dfrac{144}{12^{x+1}} \\ 0,33^{4x+1} < \dfrac{1}{0,33^{\frac{3x+5}{6x-2}}} \end{cases}$ $[x > 1/3]$ $\begin{cases} 0,1^{2x}\cdot 0,01^{4-2x} \le 10^{x}\cdot 100 \\ 0,25^{4x+1}\cdot 0,5^{5x+1} < 0,125^{5x-2} \end{cases}$ $[x < 9/2]$

Livello 2

66. $\begin{cases} 3^{2x-1} < 81 \\ 0,4^{3x+1} > \left(\dfrac{2}{5}\right)^{5-2x} \\ \sqrt[x-1]{7^{x+1}} < 49^{x} \end{cases}$ $\left[\dfrac{3-\sqrt{17}}{4} < x < \dfrac{4}{5}\right]$ $\begin{cases} 3\cdot\sqrt[5]{9^{x+2}} < 27^{4x+1} \\ 4^{2x-1}\cdot 0,5^{4-2x} > 8^{1-x} \\ 0,2^{x^2} < 5^{4+3x}\cdot\sqrt{125^{\frac{3x-1}{3}}} \end{cases}$ $[x > 1]$

67. $\begin{cases} \dfrac{6^{31+2x}}{36^{1+23x}} > \dfrac{6^{1-5x}}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{9^{2x^2-4x}}{3^{x^2+1}} \le \dfrac{27^{x^2+7}}{3} \end{cases}$ $[-21/8 \le x < 19/26]$ $\begin{cases} 4^{2x+1}\cdot 8^{1+x} > \sqrt{32^{\frac{x-1}{3x+2}}} \\ 8^{2x-1} - 6\cdot 8^{x-1} + 1 < 0 \end{cases}$ $[1/3 < x < 2/3]$

68. $\begin{cases} 5^{1+4x} > 0,04^{1+3x} \\ 0,008^{x^2-3} > 25^{4+x^2} \\ \sqrt[x]{0,3^{x+5}} \ge 0,09^{2x+1} \end{cases}$ $[-3/10 < x < 0]$ $\begin{cases} 0,23^{2x-6}\cdot\sqrt[x]{0,23^{3x}} > 1 \\ 0,54^{3x}\cdot 0,54^{4x-1} < 1 \\ 4^{x} + 2^{x+1} + 1 > 0 \end{cases}$ $[1/7 < x < 3/2]$ $\begin{cases} 9^{x} + 4\cdot 3^{x} + 4 < 0 \\ \dfrac{5^{x^2-4x}}{7^{x^2}} \le \dfrac{12^{x^2+3}}{31} \end{cases}$ $[\varnothing]$

69. $\begin{cases} 4^{2x} - 10\cdot 4^{x} + 16 > 0 \\ 27^{2x} - 30\cdot 27^{x} + 81 < 0 \end{cases}$ $[1/3 < x < ½]$ $\begin{cases} \dfrac{5^{1+7x}}{25^{2-3x}} < \dfrac{0,04^{x}}{5} \\ 49^{2x} - 8\cdot 49^{x} + 7 > 0 \end{cases}$ $[x < 0]$

Giochiamo alla matematica

Diverse sono le questioni che hanno un fondo giocoso e che riguardano le potenze. Una delle più famose e interessanti è quella delle cosiddette **torri di Hanoi.**

Il problema è riportato in letteratura per la prima volta nel 1883 ed è associato al grande matematico "ricreativo" Edouard Lucas come gioco d’intrattenimento. L’interpretazione “leggendaria” gli viene invece data da De Parville nel 1884, ed è abbastanza simile al seguente enunciato:

Un monaco buddista ha avuto assegnato il compito di spostare una torre composta da 64 *dischi di diverso diametro, infilati in un lungo piolo e posti l’uno sull’altro in modo da rispettare l’ordine della grandezza del diametro (il disco più grande è posto alla base) in un altro piolo. Le consegne sono precise: il monaco non potrà mai poggiare un disco più grande su uno più piccolo, ma potrà avvalersi di un terzo piolo di “appoggio”. Se riuscirà a completare il lavoro durante la sua vita terrena sarà ricompensato con il paradiso.*

Per risolvere il problema possiamo ragionare nel modo seguente. Se abbiamo un solo disco ovviamente basta fare una sola mossa, quindi indicando con H_1 il numero di mosse necessarie a spostare 1 disco, abbiamo $H_1 = 1$. Se invece avessimo due dischi con 1 mossa spostiamo il disco più piccolo su uno dei pioli liberi, con un'altra mossa spostiamo il disco più grande sul piolo voluto e infine con una terza mossa spostiamo il disco grande sul piccolo. Cioè $H_2 = 3$. Ora possiamo fare il seguente ragionamento per 3 dischi. Noi sappiamo che per spostarne due occorrono 3 mosse. Allora in 3 mosse spostiamo i due dischi più piccoli su un piolo, poi con 1 mossa spostiamo il disco maggiore sul piolo voluto e quindi con altre 3 mosse spostiamo i due dischi sul terzo.

Cioè $H_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 2 \cdot H_2 + 1$. Non è difficile capire che questa legge vale anche per esempio per 35 dischi, cioè $H_{35} = 2 \cdot H_{34} + 1$, cioè in generale abbiamo

$$H_{64} = 2 \cdot H_{63} + 1 = 2 \cdot (2 \cdot H_{62} + 1) + 1 = 2^2 \cdot H_{62} + 2 + 1 = 2^2 \cdot (2 \cdot H_{61} + 1) + 2 + 1 =$$
$$= 2^3 \cdot H_{61} + 2^2 + 2 + 1 = \ldots = 2^{61} \cdot H_3 + 2^{60} + 2^{59} + \ldots + 2 + 1 = 2^{63} + 2^{62} + \ldots + 2 + 1$$

La somma delle 64 potenze di 2, si dimostra (si vedrà nell'unità delle progressioni geometriche) che è uguale a $2^{64} - 1$. In quanto tempo il monaco può fare tutto queste mosse, che sono un numero di 20 cifre? Anche se facesse una mossa al secondo servirebbero più di 584 miliardi di anni, che forse sono troppi anche per un monaco buddista.

L'angolo di Derive

Derive risolve facilmente molte equazioni e disequazioni esponenziali

#1: $\text{SOLVE}(2^{3\cdot x + 1} = 1024,\ x,\ \text{Real})$

#2: $x = 3$

#3: $\text{SOLVE}(4^{x + 1} - 17\cdot 2^{x} + 4 = 0,\ x,\ \text{Real})$

#4: $x = -2 \vee x = 2$

#5: $\text{SOLVE}(7^{3\cdot x + 1} > 343,\ x,\ \text{Real})$

#6: $x > \frac{2}{3}$

Ovviamente se l'equazione o la disequazione non è riducibile a una dei tipi da noi visti, Derive talvolta riesce a risolverla lo stesso scrivendo dei simboli che spiegheremo nell'unità successiva

#7: $\text{SOLVE}(7^{3\cdot x + 1} > 54,\ x,\ \text{Real})$

#8: $x > \frac{\text{LN}(54)}{3\cdot \text{LN}(7)} - \frac{1}{3}$

O talvolta non riesce proprio a risolvere, se non in modo approssimato

#9: $\text{SOLVE}(2^{x + 1} + 4^{3\cdot x - 2} = 12,\ x,\ \text{Real})$

#10: $2^{x}\cdot(2^{5\cdot x} + 32) = 192$

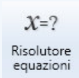
#11: $\text{NSOLVE}(2^{x + 1} + 4^{3\cdot x - 2} = 12,\ x,\ \text{Real})$

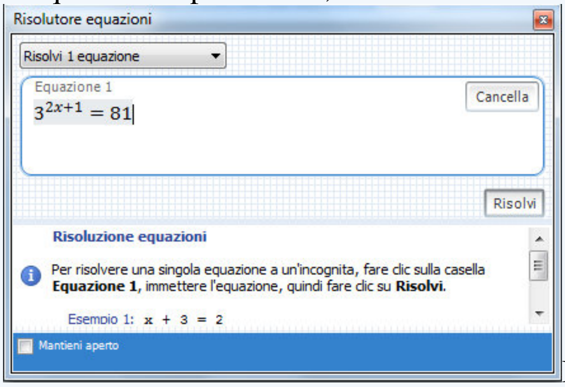
#12: $x = 1.152840815$

Attività

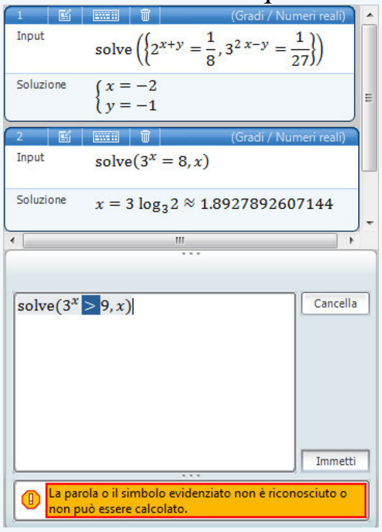
Risolvere gli esercizi proposti in precedenza, verificando i risultati

L'angolo di Microsoft Mathematics

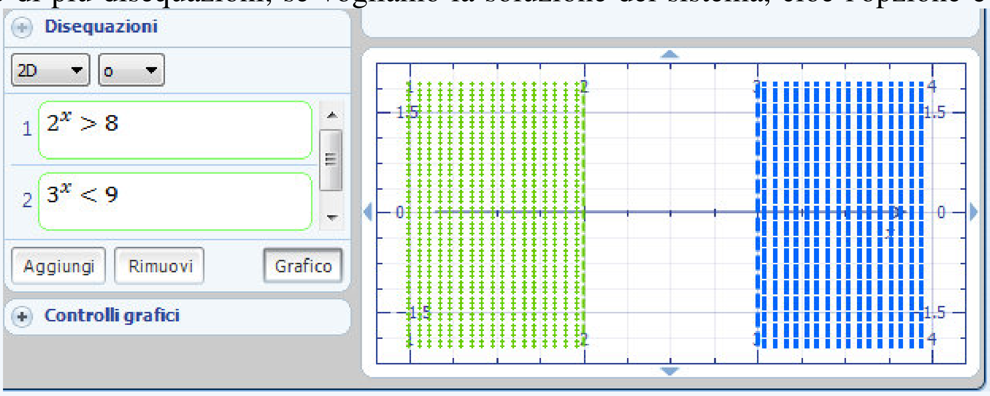
Anche questo software risolve equazioni esponenziali, con sintassi simile a quella di Derive. Possiamo usare l'apposito comando 

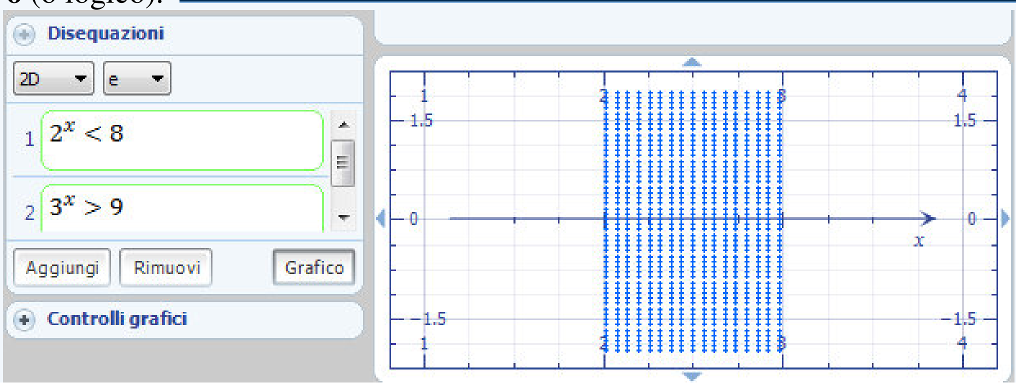
. 

In cui possiamo scegliere quante equazioni risolvere, cioè se abbiamo equazioni o sistemi di equazioni. Ecco alcuni esempi.



Non è possibile invece risolvere disequazioni, se non graficamente. Prima si sceglie **Area Grafica**, quindi **Disequazioni**. Immettiamo la o le disequazioni da risolvere graficamente, quindi clicchiamo su **Grafico**. Possiamo scegliere, nel caso di più disequazioni, se vogliamo la soluzione del sistema, cioè l'opzione **e** (et logico) oppure **o** (o logico).





La Sfida

1. Determinare la somma delle cifre del numero $(10^n + 1)^3$, $n \in \mathbb{N}$. [8]
2. Determinare la somma delle cifre del numero $(10^n + 1)^4$, $n \in \mathbb{N}$. [16]
3. Determinare la somma delle cifre del numero $(10^n + 1)^m$, $n, m \in \mathbb{N}$. [2^m]
4. Determinare la somma delle cifre del numero $(10^n + 9)^2$, $n \in \mathbb{N}$. [19]
5. Se $2^{2015} - 2^{2014} + 2^{2013} - 2^{2012} = k \cdot 2^{2012}$, quanto vale k? [5]
6. Poiché $80^2 = 6400$, cioè il quadrato di un numero di due cifre è un numero di 4 cifre, possiamo dire che è sempre vero che il quadrato di un numero di n cifre è un numero con $2n$ cifre? Se la risposta è negativa, quante cifre può avere? [No, il quadrato di un numero di n cifre ha da $2n - 1$ cifre a $2n$ cifre]
7. Possiamo dire che $10^{30} + 10^{29} > 10^{31}$?
[No, perché $10^{30} + 10^{29} = 10^{29} \cdot (10 + 1) = 10^{29} \cdot 11$, mentre $10^{31} = 10^{29} \cdot 10^2$]

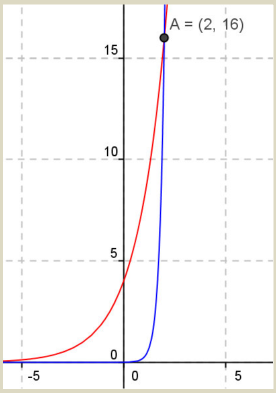
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.
AHSME = Annual High School Mathematics Examination
AL = Alabama University Mathematics Contest
HSMC = Texas University High School Mathematics Contest

Lavoriamo insieme

Il seguente quesito è stato assegnato agli HSMC del 2002.
Trovare le intersezioni dei grafici $y = 2^{x+2}$ e $y = 4^{3x-4}$.
Basta risolvere un'equazione esponenziale: $2^{x+2} = 4^{3x-4} \Rightarrow 2^{x+2} = 2^{6x-8} \Rightarrow x + 2 = 6x - 8 \Rightarrow x = 2$

Verifichiamo tracciando i grafici con Geogebra:



1. (AHSME 1951) Se $a^x\ c^q = b$ e $c^y = a^x = d$, quale delle seguenti uguaglianze è vera? [A]
A. $xy = qz$ B. $\frac{x}{y} = \frac{q}{z}$ C. $x + y = q + z$ D. $x - y = q - z$ E. $x^y = q^z$.
2. (AHSME 1952) Risolvere $\begin{cases} z^x = y^{2x} \\ 2^x = 2 \cdot 4^x \\ x + y + z = 16 \end{cases}$ nell'insieme dei numeri naturali. [$x = 4$, $y = 3$, $z = 9$]
3. (AHSME 1957) Risolvere $9^{x+2} = 240 + 9^x$. [$x = ½$]
4. (AHSME 1958) Se $4^x - 4^{x-1} = 24$, quanto vale $(2x)^x$? [$5^{5/2}$]
5. (AHSME 1960) Quante soluzioni hanno in comune le equazioni $3^{x+y} = 81$ e $81^{x-y} = 3$?
[$x = 17/8$; $y = 15/8$]
6. (AHSME 1961) Risolvere l'equazione $2^{2x} - 3^{2y} = 55$, con $x, y \in \mathbb{Z}$. [$x = 3$, $y = 1$]
7. (AHSME 1962) Risolvere l'equazione $(x - 8) \cdot (x - 10) = 2^y$, con $x, y \in \mathbb{Z}$.
[$(x = 12, y = 3)$, $(x = 6, y = 3)$]
8. (AHSME 1964) Sapendo che si ha: $2^x = 8^{y+1}$ e $9^y = 3^{x-9}$, determinare il valore di $x + y$. [27]
9. (HSMC 2005) Risolvere $3^x - 3^{-x} = 80/9$. [$x = 2$]

10. (HSMC 2008) Risolvere $27^x - 9^{x-1} - 3^{x+1} + 1/3 = 0$. [$x = ½ \vee x =- 2$]

11. (AL 2008) Se $2^{2^x} + 4^{2^x} = 56$, quanto vale $2^{2^{2^x}}$? [128]

12. (AL 2009) Quante soluzioni reali ha l'equazione $e^{5x} + e^{4x} - 3e^{3x} - 17e^{2x} - 30e^x = 0$? [1]

Questions in English

Working together

This is a question assigned at HSMC in 2007. Solve for x: $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.
We rewrite the equation in the following way:

$$4^x + \frac{4^x}{2} = 3^x \cdot 3^{\frac{1}{2}} + \frac{3^x}{3^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow 4^x \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3^x \cdot \left(3^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}\right) \Rightarrow 4^x \cdot \frac{3}{2} = 3^x \cdot \left(\frac{3+1}{3^{\frac{1}{2}}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4^x \cdot \frac{3}{2} = 3^x \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{8}{\sqrt{27}} \Rightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

13. (HSMC 1999) List the numbers 2^{100}, 3^{75} and 5^{50} in order from smallest to largest. [$2^{100} < 5^{50} < 3^{75}$]

14. (NC 2002) Find the non–zero solution for x: $8^x = \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2}$. [$x = -3/2$]

15. (HSMC 2006) Given that x is a real number which satisfies the equation $2^{2^x} + 4^{2^x} = 42$. What is the value of $\sqrt{2^{2^{2^x}}}$? [8]

16. (HSMC 2008) If $2^n - 2^{n-2} = 192$, what is the value of n? [8]

17. (AL2007) The equation $3^{x^2} = 81^{2x-3}$ has *two* solutions. What is the sum of the solutions ? [8]

18. (AL2007) Solve for n: $5^n + 5^n + 5^n + 5^n + 5^n = \left(\sqrt{5}\right)^{10}$. [4]

19. (AL2008) How many real number solutions are there for the equation $\left(x^2 + 4x + 5\right)^{x^2+1} = 1$? [1]

20. (AL 2009) If $2^x \cdot 4^x \cdot 8^x = \sqrt{2}$, then what is x? [1/12]

21. (HSMC 2011) Find x if $2^{16^x} = 16^{2^x}$. [2/3]

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Medicina 2000) Se A è un numero negativo allora $(-A)^{0,5}$ è sicuramente un numero
A) uguale a 1 B) reale C) Sempre uguale a 0,5 D) Sempre un numero intero E) sempre 0

2. (Ingegneria – Politecnico di Torino 1999). Sia n un numero intero positivo. Allora l'espressione $3^{n+1} - 3^n$ è uguale a A) 3 B) 3^n C) $3^{(n+1)/n}$ D) $(2 \cdot 3)^n$ E) $2 \cdot 3^n$

3. (Ingegneria 2002). La metà di $\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$ è uguale a A) $\left(\frac{1}{4}\right)^{25}$ B) $\left(\frac{1}{2}\right)^{51}$ C) $\left(\frac{1}{4}\right)^{50}$ D) $\left(\frac{1}{2}\right)^{25}$ E) $\left(\frac{1}{2}\right)^{49}$

4. (Ingegneria 2009). Dato un numero reale x, la seguente relazione $\frac{2^x \cdot 2}{\sqrt{4^{x+1}}}$ vale
A) $1/2^x$ B) 0 C) ½ D) 2 E) 1

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_1_5.htm

Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1	2	3	4
B	E	B	E

5. Esponenziali e logaritmi

5.2 Logaritmi

Prerequisiti
- Concetto di esponente
- Potenze reali di base ed esponente reale
- Equazioni e disequazioni esponenziali

Obiettivi
- Comprendere il concetto di logaritmo
- Sapere utilizzare i logaritmi nella risoluzione di semplici problemi di modellistica matematica
- Sapere usare le proprietà principali dei logaritmi
- Sapere risolvere equazioni e disequazioni logaritmiche
- Sapere risolvere equazioni e disequazioni esponenziali con i logaritmi

Contenuti
- Concetto di logaritmo e curva logaritmica
- Proprietà dei logaritmi
- Applicazione dei logaritmi nella risoluzione di equazioni esponenziali
- Equazioni e disequazioni logaritmiche

Parole Chiave
Argomento – Base – Logaritmo – Numero *e* o di Nepero

Concetto di logaritmo e curva logaritmica

Poiché non vi è nulla di più ostico nell'applicazione matematica, né che reca maggiori difficoltà nei calcoli, che la moltiplicazione, la divisione, l'estrazione di radici quadrate e cubiche di numeri grandi... ho cominciato a pensare come risolvere questi problemi.
John Napier, Mirifici logarithmorum canonis descriptio

Riprendiamo in considerazione l'equazione esponenziale $0{,}72 = 0{,}5^x$, che era scaturita fuori dal problema sulla datazione del vaso di epoca romana. Abbiamo visto che siamo riusciti a risolverla in qualche modo, successivamente abbiamo visto che se fossimo riusciti a scrivere l'equazione come uguaglianza fra potenze di uguale base avremmo risolto facilmente e senza approssimazioni. Il problema è che, in questo caso, ciò non è possibile. Però possiamo sempre ripetere i procedimenti di approssimazione visti prima e costruire così una tabella nella quale inserire un certo numero di potenze del genere, da potere consultare.

Esempio 1

Se riuscissimo a scrivere $10^z = 0{,}72$ e $10^y = 0{,}5$; l'equazione da risolvere diverrebbe $10^z = 10^{yx}$, e quindi la soluzione si otterrebbe semplicemente uguagliando gli esponenti: $z = xy$ da cui $x = z/y$.

Quindi basterebbe costruire una tabella di potenze di 10 da cui ricaveremmo i valori (approssimati) di z e di y che risolvono il problema.
Cominciamo intanto a porre una definizione.

Definizione 1

Diciamo **logaritmo in base 10 e di argomento positivo *a***, il numero reale soluzione dell'equazione esponenziale $10^x = a$, $a > 0$.

Notazione

Il logaritmo decimale si indica con $log(a)$.

Per la stessa definizione, l'insieme di esistenza di $log(x)$ è $x > 0$.

L'angolo storico

Il problema di effettuare moltiplicazioni e divisioni fra numeri molto "grandi" rendeva molto difficile soprattutto il lavoro degli astronomi. A partire dal XVI secolo si cercò di inventare uno strumento matematico che potesse semplificare tali calcoli. Per fare ciò si osservò che il prodotto e il rapporto di potenze con uguale base, si riducevano a una somma o differenza di esponenti. Questo poteva perciò essere un modo di ricondurre le moltiplicazioni alle somme e le divisioni alle sottrazioni, che erano operazioni certamente più semplici. Si deve a John Napier (1550–1617), latinizzato in Nepero, un nobile scozzese, l'invenzione e anche la scelta del nome, dei logaritmi (dal greco: *lògon*, ragione, nel suo senso però di *rapporto*, cioè divisione e *arithmòs* (*numero*). Le sue idee sono presentate in " *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*" del 1614. Ma spesso le idee vengono a maturazione contemporaneamente e così un altro inglese, Henry Briggs (1561 –1630), nel 1624 scrive "*Arithmetica logarithimica*", in cui riporta le tavole dei logaritmi decimale di 30.000 numeri naturali con 14 cifre decimali. Ma addirittura qualche anno prima di Napier, lo svizzero Jobst Bürgi (1552–1632) aveva avuto le stesse idee che però pubblicò solo nel 1620, in "*Arithimetische und Geometrice Progress Tabulen*".

Esempio 2

Si ha $log(10) = 1$, $log(100) = 2$, …, $log(10^x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$; $log(1/1000) = log(10^{-3}) = -3$.

Per calcolare i logaritmi è molto utile la calcolatrice scientifica, in cui osserviamo la presenza di due tasti del genere. Uno indicato in genere con log per il logaritmo decimale e un altro con ln per un altro tipo di logaritmo che vedremo successivamente.

Per calcolare un logaritmo basta premere il tasto e poi il relativo argomento, per esempio digitando log 2 calcoleremo *log*(2), che la calcolatrice ci dice essere circa 0,30102999. Ovviamente il numero deve essere minore di 1, come stabilito dal teorema precedente.

Esempio 3

Quindi la soluzione dell'equazione $0,72 = 0,5^x$ è $x = z/y$, in cui $z = log(0,72)$ e $y = log(0,5)$. Usando la calcolatrice abbiamo allora $x = log(0,72)/log(0,5) \approx 0,474$ che è il valore che avevamo ottenuto con il metodo *sperimentale* nell'unità 1 (ci eravamo fermati a 0,47).

I logaritmi hanno importanti applicazioni in problemi finanziari.
Spesso i risparmiatori acquistano delle obbligazioni, cioè prestano denaro a una banca o allo Stato, in cambio di un interesse, cioè di una certa somma con cadenze periodiche (trimestrali, semestrali, annuali, …). Tali operazioni vengono chiamate capitalizzazione. Le più usate capitalizzazioni sono quella cosiddetta semplice e quella composta. Nella prima, l'interesse si ottiene alla scadenza del periodo previsto mentre la somma rimane a maturare interessi fino alla prossima scadenza. Per esempio un BTP[1] decennale produce un interesse ogni sei mesi sempre uguale e relativo alla somma inizialmente versata, che sarà interamente restituita alla fine dei 10 anni.
A noi interessa il secondo tipo di capitalizzazione, nel quale invece l'interesse maturato non viene liquidato alla fine del periodo, ma viene aggiunto al capitale iniziale, in modo che alla successiva scadenza l'interesse maturato sarà calcolato su un capitale maggiore.
Chiariamo meglio con un esempio.

Esempio 4

Supponiamo di versare una certa somma, per esempio € 10000,00 a una banca, vincolandola per 15 anni, ricevendo un interesse annuale del 3%, in regime di capitalizzazione composta. Ciò vuol dire che alla fine del primo anno l'interesse maturato sarà di € $10000,00 \times 0,03 =$ € 300,00. Questa somma non sarà liquidata, ma verrà aggiunta al capitale che diventa € 10300,00. In questo modo il secondo anno l'interesse sarà di € $10300,00 \times 0,03 =$ € 309,00 e così via.

Possiamo quindi dire che vale la seguente legge di capitalizzazione composta

Teorema 1

Un capitale iniziale C_0, investito a un tasso periodico i in regime di capitalizzazione composta, dopo n periodi diviene: $C_n = C_0 \cdot (1+ i)^n$

Dimostrazione

Alla fine del primo periodo il capitale sarà $C_1 = C_0 + C_0 \cdot i = C_0 \cdot (1+ i)$. Alla fine del secondo periodo diventa $C_2 = C_1 + C_1 \cdot i = C_1 \cdot (1+ i) = C_0 \cdot (1+ i) \cdot (1+ i) = C_0 \cdot (1+ i)^2$. Non è difficile capire che si avrà anche $C_3 = C_0 \cdot (1 + i)^3$; $C_4 = C_0 \cdot (1 + i)^4$; … $C_n = C_0 \cdot (1+ i)^n$.

I logaritmi servono ovviamente nei problemi inversi, cioè se volessimo sapere dopo quanti anni un certo capitale iniziale diverrà una certa somma.

Esempio 5

Se impieghiamo una certa somma in regime di capitalizzazione composta con un interesse annuo del 3,15%, dopo quanto tempo otterremo il doppio del capitale iniziale? Dobbiamo risolvere l'equazione esponenziale $C_n = 2 \cdot C_0 \Rightarrow 2 \cdot C_0 = C_0 \cdot (1+ 0,00315)^n \Rightarrow 1,00315^n = 2$.

1 Vuol dire Buono del Tesoro Polienniale

Per risolvere la precedente equazione dobbiamo generalizzare il concetto di logaritmo a una base qualsiasi. Per fare ciò dobbiamo però stabilire se la base può essere un qualsiasi numero positivo.

Esempio 6

Possiamo risolvere l'equazione esponenziale $1^x = 2$? No, perché $1^x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Il precedente esempio quindi limita le basi dei logaritmi ai numeri positivi ma diversi da 1.

Definizione 2

Diciamo **logaritmo in base *b* positiva e diversa da 1 e di argomento positivo *a***, il numero reale soluzione dell'equazione esponenziale $b^x = a$.

Notazione

Il logaritmo in base b si indica con $log_b(a)$.

Esempio 7

Abbiamo $log_3(81) = log_3(3^4) = 4; log_2\left(\frac{1}{32}\right) = log_2(2^{-5}) = -5; log_5\left(\sqrt[3]{25}\right) = log_5\left(5^{2/3}\right) = \frac{2}{3}$.

Dalla precedente definizione e dall'esempio, seguono queste immediate proprietà.

Teorema 2

Si ha:

1. $log_a(b) = \begin{cases} < 0 & (0 < a < 1 \wedge b > 1) \vee (0 < b < 1 \wedge a > 1) \\ 0 & b = 1 \\ > 0 & (0 < a < 1 \wedge 0 < b < 1) \vee (a > 1 \wedge b > 1) \end{cases}$
2. $a^n < b < a^{n+1} \Rightarrow n < log_a(b) < n+1, \forall n \in \mathbb{Z}$

Oltre al 10, un altro numero ha una posizione privilegiata come base dei logaritmi.

La legge della capitalizzazione composta si può applicare anche per interessi variabili. Un caso molto interessante è quando l'interesse dipende dal periodo, ed è uguale al suo reciproco. Cioè $i = \frac{1}{n}$. In questo caso la legge diviene $C_n = C_0 \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. La particolarità viene rappresenta dal seguente risultato, che non dimostriamo.

Teorema 3

All'aumentare del numero naturale n, la quantità $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ diventa sempre più vicina a zero. E la quantità $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2{,}718$.

Il precedente numero a cui *tende* l'espressione $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, viene indicato con il simbolo e e di solito è chiamato numero di Nepero.

Notazione

Il logaritmo in base *e* si indica con $ln(a)$.

L'angolo storico

Per indicare un logaritmo, nel 1624 Keplero usa la contrazione Log;
Giuseppe Peano agli inizi del 1900, invece scrive log per il logaritmo naturale, Log per quello decimale.
Per indicare la base dei logaritmi naturali, Eulero usa l'attuale simbolo *e* in un manoscritto del 1727 o 1728, che però viene pubblicato solo nel 1862.

Sempre dalla definizione di logaritmo segue un'altra importante identità.

Esempio 8

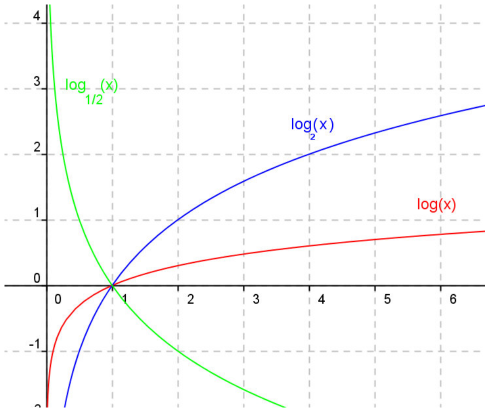
Abbiamo visto che $log_3(81) = 4$. Ciò vuol dire che $3^4 = 81$, che si può anche scrivere: $3^{log_3(81)} = 81$

Dall'esempio segue quindi la validità della seguente proprietà generale.

Teorema 4

Si ha: $x = b^{\log_b(x)}, \forall x \in \mathbb{R}^+, b > 0 \wedge b \neq 1$

Con quello che abbiamo stabilito possiamo quindi rappresentare la funzione $y = log_a(x)$.



Osserviamo che tutte le funzioni passano per il punto (1; 0), sono tutte definite solo per $x > 0$. Inoltre, se la base è maggiore di 1 sono negative per $x < 1$ e positive per $x > 1$. Il viceversa se la base è minore di 1.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare $log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{8}\right)$, che equivale a risolvere l'equazione esponenziale: $\left(\sqrt{2}\right)^x = \frac{1}{8}$. Dato che entrambi i membri sono potenze di due possiamo scrivere: $2^{½x} = 2^{-3} \Rightarrow ½x = -3 \Rightarrow x = -6$. Quindi possiamo dire che si ha: $log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{8}\right) = -6$. Il che concorda con il fatto che un logaritmo di base maggiore di 1 ed argomento minore di 1 è un numero negativo.

Calcola i seguenti logaritmi (Gli eventuali parametri sono scelti in modo che le espressioni abbiano significato)

Livello 1

1. $log_4(1/64)$ [–3] $log_{\sqrt{3}}(27)$ [6] $log_{3/4}(1)$ [0] $log_2\left(\sqrt{2}\right)$ [½] $log_{\sqrt{2}}(2)$ [2] $log_5\left(\sqrt[7]{25}\right)$ [2/7] $log_{\sqrt[4]{5}}\left(\frac{1}{5}\right)$ [–4]

2. $log_{1/\sqrt{7}}(49)$ [–4] $log_{1/4}(128)$ [–7/2] $log_{1/\sqrt{32}}(32)$ [–2] $log_a(a^2)$ [2] $log_{a^3}\left(a^2\right)$ [2/3] $log_{1/a}\left(\sqrt{a}\right)$ [–½]

3. $log_{\sqrt{a^3}}\left(\frac{1}{a^2}\right)$ [–4/3] $log_{\sqrt{a}}\left(\sqrt[3]{a}\right)$ [2/3] $log_8\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$ [–1/9] $log_{\sqrt[3]{7}}(49)$ [6] $log_{11/\sqrt{11}}(121)$ [4] $log_{3/5}(0,36)$ [2]

4. $log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt[5]{8}\right)$ [6/5] $log_{\pi}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}\right)$ [–1/3] $ln\left(e^{\pi}\right)$ [π] $ln\left(e\cdot\sqrt[4]{e^3}\right)$ [7/4] $log_{27}\left(\sqrt{3}\right)$ [1/6] $log_{2^{3,1}}(4)$ [2/3,1]

Semplificare le seguenti espressioni

Livello 2

5. $log_2(4)\cdot log_4(2)$ [1] $log_{\sqrt{6}}\left[18\cdot log_5(25)\right]$ [4] $log_{4/9}(3/2)\cdot log_{3/2}(4/9)$ [1] $\left[log_8\left(\sqrt{32}\right)\right]^{log_4(8)}$ $\left[\frac{5\cdot\sqrt{30}}{36}\right]$

6. $\frac{log_{\sqrt{15}}(225)}{log_{12}\left(\sqrt[3]{1/144}\right)}$ [–6] $log_{7/4}(16/49) - log_{16/49}(4/7)$ [–5/2] $\left[log_{1/2}\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)\right]^{log_{1/3}(9)}$ [4/25] $\frac{log_{\sqrt{5}}(1/25)}{log_2\left(2^{\pi}\right)}$ [–4/π]

7. $ln\left(\sqrt{e}\right)\cdot ln\left(\frac{e^3}{\sqrt{e}}\right)$ [5/4] $2^{log_2(17)}\cdot 17^{log_{17}\left(\frac{1}{3}\right)}$ [17/3] $\frac{log_4\left(\sqrt[3]{128}\right)}{log_2(16)+log_{16}(2)}$ [14/51] $ln\left(\frac{e^2}{\sqrt{e}}\right)-log_{e^2}(e)$ [1]

8. $log_2(4)\cdot log_4(8)\, log_8(16)$ [4] $\frac{log_3(9)}{log_9(3)+log_9(1/3)}$ [∅] $\left[e^{ln(\pi)}\cdot\pi^{log_{\pi}(e)}\right]^{log_{\sqrt{e}}(e)}$ [$e^2\cdot\pi^2$]

Livello 3

9. $log_{\frac{2}{3}}\left\{\left[log_{27}(9)\right]^{log_9(81)}\right\}$ [2] $log_2\left\{\left[log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{log_{\sqrt{2}}(8)}\right\}$ [6] $log_{\sqrt[3]{2}}\left\{\left[log_{\sqrt{3}}(9)\right]^{log_{\sqrt{5}}(25)}\right\}$ [24]

10. $log_{\frac{7}{3}}\left\{\left[log_{0,5}\left(\sqrt[7]{8}\right)\right]^{log_{0,25}\left(\sqrt[3]{64}\right)}\right\}$ [Risultato non reale] $\left[log_{27}(3)\cdot log_3(27)\right]^{log_{1/4}(2)-log_2(1/4)}$ [1]

Semplifica le seguenti espressioni, tenendo conto che tutte le variabili sono scelte in modo che i logaritmi relativi abbiano significato

11. $log_a\left(a^2\right)+log_a\left(\frac{1}{a^3}\right)-2\cdot log_a\left(\sqrt[3]{a^2}\right)$ [–7/3] $\frac{log_a\left(a^3\right)\cdot log_{a^2}\left(a^3\right)}{log_{\sqrt[3]{a}}\left(a^4\right)}+\frac{log_{a^2}\left(a^4\right)\cdot log_{\sqrt{a}}(a)}{log_{1/a}\left(a^2\right)}$ [–13/8]

12. $\frac{log_x\left(x^3\right)\cdot log_x\left(\sqrt{x}\right)}{log_{\sqrt{x}}\left(\sqrt{\sqrt{x}}\right)}-\frac{log_y\left(\frac{1}{y}\right)\cdot log_y\left(\sqrt{y}\right)}{log_{1/\sqrt{y}}(y)}$ [11/4] $log_a\left(a^b\right)\cdot log_a\left(a^b\cdot a\right)\cdot log_{\sqrt{a}}\left(\sqrt[3]{a^b}\right)$ $\left[\frac{2\cdot b^2\cdot(b+1)}{3}\right]$

13. $log_{a^b}\left(a^c\right)+log_{a^c}\left(a^b\right)-log_{a^{b+c}}\left(a^{b-c}\right)$ $\left[\frac{b^3+2bc^2+c^3}{bc\cdot(b+c)}\right]$

Lavoriamo insieme

- Vogliamo trovare per quale x reale la seguente uguaglianza è vera: $log_x\left(\sqrt[3]{\frac{1}{16}}\right)=\frac{2}{3}$.

  Tenuto conto del significato di logaritmo, essa equivale a $x^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\frac{1}{16}}, x>0, x\neq 1$, cioè $x^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{2^{-4}}\Rightarrow x^{\frac{2}{3}}=2^{-\frac{4}{3}}$. Per potere uguagliare le basi dobbiamo fare lo stesso con gli esponenti:

$x^{2/3} = 4^{2/3} \Rightarrow x^{2/3} = (¼)^{2/3} \Rightarrow x = ¼$. La soluzione è accettabile.

- Vogliamo trovare per quale x reale la seguente uguaglianza è vera: $log_{\frac{3}{2}}\left(x^2+1\right)=2$.

  Si ha: $(3/2)^2 = x^2 + 1$, $x^2 + 1 > 0$, cioè $x^2 = \frac{9}{4} - 1 \Rightarrow x^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Determina il valore dell'incognita affinché le uguaglianze abbiano validità

Livello 1

14. $log_3(x) = 3$ [27] $log_{\sqrt{x}}(4)=1$ [16] $log_3\left(\sqrt[3]{x^2}\right)=4$ [±729] $log_x(2) = ½$ [4] $log_{1/3}(x + 1) = -1$ [2]

15. $log_{x+1}(4) = 2$ [1] $log_{2x-1}(3/2) = -2$ $\left[\frac{\sqrt{6}+3}{6}\right]$ $log_{3x+1}(1/3) = 3$ $\left[\frac{\sqrt[3]{9}-3}{9}\right]$ $log_{x^2}\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{1}{2}$ [±5/4]

16. $log_{1-x}(5) = 3/2$ $\left[1-\sqrt[3]{25}\right]$ $log_{2/3}(x+2) = 1$ [–4/3] $log_2(4x - 3) = 2$ [7/4] $log_4\left(\sqrt{x}+1\right)=-1$ [∅]

17. $log_3(2x + 3) = -2$ [–13/9] $log_{\sqrt{2}}\left(x^2+1\right)=4$ $\left[-\frac{13}{9};\pm\sqrt{3}\right]$ $log_{¼}(2x - 1) = -2$ [17/2] $log_{2-x}(3) = -½$ [17/9]

18. $log_{\sqrt{3}}\left(x^2-x\right)=2$ $\left[\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}\right]$ $log_{x+1}(½) = 3$ $\left[\frac{\sqrt[3]{4}-2}{2}\right]$ $log_{3/2}(4x + 1) = ½$ $\left[\frac{\sqrt{6}-2}{8}\right]$ $log_{3/5}(1 - 2x) = 2$ [8/25]

19. $log_{x+1}\left(\sqrt{2}\right)=\frac{2}{3}$ $\left[-1+\sqrt[4]{8}\right]$ $log_{x+1}\left(\sqrt{2}\right)=-\frac{2}{3}$ $\left[\frac{-2+\sqrt[4]{2}}{2}\right]$ $log_3(x^2 + x) = -2$ $\left[\frac{-3\pm\sqrt{13}}{6}\right]$ $log_{x/3}(4) = ½$ [48]

Negli esercizi seguenti si tenga conto che base ed argomento devono assumere valori positivi, e la base essere diversa da 1

Livello 2

20. $log_x(x) = 2$ [∅] $log_x(x^2) = 1$ [∅] $log_{x+1}(x) = -1$ $\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$ $log_x(x + 1) = ½$ [∅]

21. $log_x(x + 1) = -1$ $\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$ $log_{x+1}(x) = -1$ $\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$ $log_{x+2}(x - 2) = 2$ [∅] $log_x(1 - x) = 2$ $\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$

22. $log_{x^2}\left(1-x\right)=1$ $\left[\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right]$ $log_{x+1}(x^2) = 2$ [–½] $log_{x^2}\left(x+1\right)=\frac{1}{2}$ [∅] $log_{x^2+1}\left(x^2-1\right)=2$ [∅]

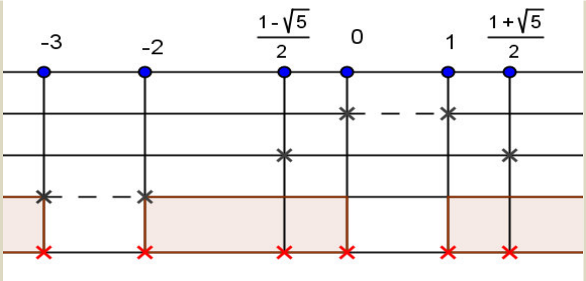
23. $log_{\frac{x+1}{2}}\left(\frac{x+1}{3}\right)=\frac{1}{2}$ [7/2] $log_{x/2}(2/x) = -2$ [∅] $log_{x-2}(x + 2) = 2$ $\left[\frac{\sqrt{17}+5}{2}\right]$

Livello 3

24. Determinare una relazione fra a e b in modo che si abbia $log_b(a) > 1$. [$a > b$]
25. Determinare una relazione fra a e b in modo che si abbia $log_b(a) < 1$. [$a < b$]

Lavoriamo insieme

Consideriamo l'espressione $log_{x^2-x}\left(x^2+5x+6\right)$. Essa è un'espressione variabile, dipendendo da x. Vogliamo stabilire per quali x reali la detta espressione ha significato. Basta imporre le condizioni di realtà della base e dell'argomento: $\begin{cases} x^2-x>0 \\ x^2-x\neq 1 \\ x^2+5x+6>0 \end{cases}$. Risolviamo il sistema: $\begin{cases} x<0 \vee x>1 \\ x\neq\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \\ x<-3 \vee x>-2 \end{cases}$



Pertanto l'espressione esiste per $x < -3 \vee -2 < x < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee \frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < 0 \vee 1 < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vee x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Determinare le condizioni di esistenza dei seguenti logaritmi.

Livello 1

26. $log_2(1-x)$ $[x < 1]$ $\quad$ $log_{3-x}(3+x)$ $[-3 < x < 3 \wedge x \neq 2]$ $\quad$ $log_{3-x}(3+x)$ $[x > -2]$

27. $log_{½}(2+x)$ $[x < 4/3 \wedge x \neq 1]$ $\quad$ $log_{1+2x}(x^2+1)$ $[x > -½ \wedge x \neq 0]$ $\quad$ $log_{x^2+2}(3+x)$ $[x > -3]$

28. $log_{3+4x}(4x-1)$ $[x > ¼]$ $\quad$ $log_{2x+3}(4+3x)$ $[x > -4/3 \wedge x \neq -1]$ $\quad$ $log_{½+¾x}(4x+1)$ $[x > -¼ \wedge x \neq 2/3]$

29. $log_{¾-x}(3/2 - 2/3x)$ $[4/9 < x < ¾]$ $\quad$ $log_{x^2}(x)$ $[x > 0 \wedge x \neq 1]$ $\quad$ $log_x(x^2+x)$ $[x > 0 \wedge x \neq 1]$

30. $log_{2x}(x-x^2)$ $[0 < x < 1 \wedge x \neq ½]$ $\quad$ $log_{5-3x}(3x-5)$ $[\varnothing]$ $\quad$ $log_{x+2}(4)$ $[x > -2 \wedge x \neq -1]$

Livello 2

31. $log_{x^2-1}\left(1-x^2\right)$ $[\varnothing]$ $\quad$ $log_{4x^2-9}\left(16-25x^2\right)$ $[\varnothing]$ $\quad$ $log_{x^2-3x}\left(2x-5x^2\right)$ $[\varnothing]$

32. $log_{x^2-5x}\left(2x^2+3x\right)$ $\left[\left(x < -\frac{3}{2} \vee x > 5\right) \wedge \neq \frac{5+\sqrt{29}}{2}\right]$ $\quad$ $log_{x^2-3}\left(2-9x^2\right)$ $[\varnothing]$ $\quad$ $log_{\frac{2x+1}{x-x^2}}\left(\frac{x^2-2x}{4-3x}\right)$ $[x < -½]$

33. $log_{2x^2+3x}\left(3x^2+2x\right)$ $\left[\left(x < -\frac{3}{2} \vee x > 0\right) \wedge x \neq \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}\right]$ $\quad$ $log_{x^2+x+1}\left(x^2+3x+2\right)$ $[x < -2 \vee x > -1 \wedge x \neq 0]$

34. $log_{4x^2-5}\left(x^2+x+1\right)$ $\left[\left(x < -\frac{\sqrt{5}}{2} \vee x > \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \wedge x \neq \pm\frac{\sqrt{6}}{2}\right]$ $\quad$ $log_{x^2-2x+1}\left(x^2-4x+4\right)$ $[x \neq 0, 1, 2]$

35. $log_{-x^2+1}\left(3x^2+x-1\right)$ $\left[\left(-1 < x < \frac{-1-\sqrt{13}}{6}\right) \vee \left(\frac{-1+\sqrt{13}}{6} < x < 1\right)\right]$ $\quad$ $log_{4x+1}\left(5x^2-x-3\right)$ $\left[x > \frac{1+\sqrt{61}}{10}\right]$

36. $log_2 \frac{x-x^2}{x^2+x-2}$ $[-2 < x < 0]$ $\quad$ $log_{\frac{x-1}{2-3x}}(4)$ $[2/3 < x < 1 \wedge x \neq ¾]$ $\quad$ $log_{\frac{x-2}{x+2}}\left(\frac{1}{3-x}\right)$ $[x < -2 \vee 2 < x < 3]$

37. $log_{\frac{x+1}{2x-3}}\left(\frac{4x-1}{2x+3}\right)$ $\left[\left(x < -\frac{3}{2} \vee x > \frac{1}{4}\right) \wedge x \neq -2\right]$ $\quad$ $log_{x^2-x}\left(\frac{3x-1}{2x+5}\right)$ $\left[\left(x < -\frac{5}{2} \vee x > 1\right) \wedge x \neq \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$

38. $log_{\frac{x^2-3x}{x+1}} \frac{x^4-1}{x^2+3x}$ $\left[(-1 < x < 0 \vee x > 3) \wedge x \neq 2 \pm \sqrt{5}\right]$ $\quad$ $log_{x^2-4}\left(x^2-9\right)$ $[x < -3 \vee x > 3]$

39. $log_{\frac{x^2-x}{2x-1}}\left(\frac{4x+1}{5-x^2}\right)$ $\left[\left(0 < x < \frac{1}{2} \vee 1 < x < \sqrt{5}\right) \wedge x \neq \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right]$ $\quad$ $log_x \frac{x^3-1}{1-x^2+x}$ $\left[1 < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$

Proprietà dei logaritmi

Abbiamo già detto che i logaritmi storicamente sono nati per semplificare calcoli fra numeri molto grandi, in particolare moltiplicazione e divisione. Ciò dipende dal fatto che per le potenze valgono le ben note proprietà che di seguito ricordiamo: $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$; $a^b : a^c = a^{b-c}$; $(a^b)^c = a^{b\cdot c}$.
Dato che il logaritmo non è altri che la soluzione di un'equazione esponenziale, pensiamo che vi possano essere delle proprietà che semplifichino il calcolo di particolari logaritmi.

Esempio 9

Calcoliamo $log_2(32) = log_2(2^5) = 5$. Osserviamo però che si ha anche: $log_2(32) = log_2(2^2 \cdot 2^3) = log_2(2^9 : 2^4)$ $= log_2\left[\left(2^7\right)^{5/7}\right]$ e infinite altre identità. Osserviamo altresì che si ha:

$$log_2(2^2) + log_2(2^3) = 2 + 3 = 5;\ \ log_2(2^9) - log_2(2^4) = 9 - 4 = 5;\ 5/7 \cdot log_2(2^7) = 5/7 \cdot 7 = 5.$$

Il precedente esempio ci suggerisce di enunciare il seguente risultato.

Teorema 5

Si ha la validità delle seguenti uguaglianze:

$$log_a(b\cdot c) = log_a(b) + log_a(c), \forall a,b,c \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$$
$$log_a(b/c) = log_a(b) - log_a(c), \forall a,b,c \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$$
$$log_a\left(b^c\right) = c \cdot log_a(b), \forall a,b \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$$

Dimostrazione

Proviamo solo la prima, le altre si dimostrano in modo analogo e sono perciò lasciate per esercizio.
Per definizione $log_a(b) = m \Rightarrow a^m = b$; $log_a(c) = p \Rightarrow a^p = c$, quindi possiamo anche scrivere:

$$a^m \cdot a^p = b \cdot c \Rightarrow a^{m+p} = b \cdot c$$

Ma allora, sempre per la definizione di logaritmo possiamo scrivere: $log_a(b \cdot c) = m + p = log_a(b) + log_a(c)$ che è quello che volevamo provare.

Esempio 10

Vogliamo calcolare $log_2\left(\frac{\sqrt[3]{4}\cdot 64}{\sqrt[8]{2}}\right)$. Potremmo cercare di scrivere l'argomento come potenza di 2:

$$log_2\left(\frac{\sqrt[3]{4}\cdot 64}{\sqrt[8]{2}}\right) = log_2\left(\frac{2^{2/3}\cdot 2^6}{2^{1/8}}\right) = log_2\left(2^{2/3+6-1/8}\right) = \frac{2}{3}+6-\frac{1}{8} = \frac{157}{24}$$

Oppure possiamo applicare le proprietà già viste, ottenendo in pratica gli stessi calcoli:

$$log_2\left(\frac{\sqrt[3]{4}\cdot 64}{\sqrt[8]{2}}\right) = log_2\left(\sqrt[3]{4}\cdot 64\right) - log_2\left(\sqrt[8]{2}\right) = log_2\left(\sqrt[3]{4}\right) + log_2(64) - log_2\left(\sqrt[8]{2}\right) = \frac{2}{3}+6-\frac{1}{8} = \frac{157}{24}.$$

L'esempio precedente sembra suggerire che le proprietà enunciate non siano così importanti come abbiamo detto. Ciò non è vero, come vogliamo mostrare con il seguente esempio.

Esempio 11

Nel 1500 effettuare l'operazione $123456789^{2345678}$ senza calcolatrici o computer era un lavoro ostico, lungo e noioso. D'altro canto, soprattutto in campo astronomico non era difficile trovarsi a effettuare un calcolo simile. Vediamo come l'invenzione dei logaritmi, con le relative tavole, riusciva a semplificare l'operazione. Abbiamo: $log(123456789^{2345678}) = 2345678 \cdot log(123456789)$. Adesso, lo studioso andava a cercare sulle tavole logaritmiche che $log(123456789) \approx 8{,}094151$. Era certamente alla portata di qualsiasi studioso effettuare facilmente la moltiplicazione $2345678 \cdot 8{,}094151 \approx 18986271{,}929378$. Infine dobbiamo trovare per quale x si ha: $log(x) \approx 18986271{,}929378$, cioè circa $10^{18986271,929378}$. Ovviamente questo non è il risultato cercato, ma è un'ottima approssimazione che spesso poteva essere sufficiente per ciò che dovevano fare gli studiosi.

Abbiamo già detto che nelle calcolatrici scientifiche, e prima nelle tavole dei logaritmi, vi sono solo due tasti indicati in genere con **log** (base 10) e **ln** (base il numero e). Ci chiediamo allora come possiamo calcolare logaritmi in basi diverse i cui argomenti non sono potenze razionali della base, o comunque non semplicemente ci si accorge che lo siano.

Esempio 12

Supponiamo di volere calcolare $log_3(52)$ usando una calcolatrice scientifica. Il problema è perciò quello di esprimere il logaritmo in una delle due basi presenti sulla tastiera. Per il Teorema 4 possiamo scrivere: $log(52) = log[3^{log3(52)}] = log_3(52) \cdot log(3)$, ottenendo così ciò che ci serviva: $log_3(52) = log(52)/ log(3) \approx 1{,}71600/0{,}47712 \approx 3{,}5965$.
Ovviamente avremmo anche potuto scrivere: $ln(52) = ln[3^{log3(52)}] = log_3(52) \cdot ln(3)$, cioè $log_3(52) = ln(52)/ln(3) \approx 3{,}95124/1{,}09861 \approx 3{,}5965$. Osserviamo che i risultati intermedi sono, ovviamente diversi, ma il risultato finale è sempre lo stesso.

Quanto visto nell'esempio precedente ci permette di enunciare il seguente risultato generale:

Teorema 6

Si ha la validità della seguente identità, detta formula del cambiamento di base:

$$log_a(b) = \frac{log_c(b)}{log_c(a)}, \forall a, b, c \in \mathbb{R}^+, a, c \neq 1$$

Dimostrazione
Basta ripetere quanto visto nell'esempio 12, compito che lasciamo per esercizio.

Esempio 13

In che relazione sono $log_2(3)$ e $log_3(2)$? Esprimiamo uno dei due nella base dell'altro.

$$log_3(2) = \frac{log_2(2)}{log_2(3)} = \frac{1}{log_2(3)}$$

sono numeri reciproci. In generale si ha: $log_a(b) = \dfrac{1}{log_b(a)}, \forall a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare $log_2\left(\frac{\sqrt{16\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}}}{\sqrt[3]{16\cdot\sqrt{128}}}\right)$. Usando le proprietà dei logaritmi possiamo scrivere:

$$log_2\left(\frac{\sqrt{16\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}}}{\sqrt[3]{16\cdot\sqrt{128}}}\right)=log_2\left(\sqrt{16\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}}\right)-log_2\left(\sqrt[3]{16\cdot\sqrt{128}}\right)=\frac{1}{2}\cdot log_2\left(16\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}\right)-\frac{1}{3}\cdot log_2\left(16\cdot\sqrt{128}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left[log_2(16)+log_2\left(\sqrt{2}\right)+log_2\left(\sqrt{32}\right)\right]-\frac{1}{3}\cdot\left[log_2(16)+log_2\left(\sqrt{128}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left[4+\frac{1}{2}\cdot log_2(2)+\frac{1}{2}\cdot log_2(32)\right]-\frac{1}{3}\cdot\left[4+\frac{1}{2}\cdot log_2(128)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(4+\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\right)-\frac{1}{3}\cdot\left(4+\frac{7}{2}\right)=\frac{7}{2}-\frac{5}{2}=1$$

Usando le proprietà dei logaritmi, calcolare le seguenti espressioni.

Livello **1**

1. $log_3\left(3\cdot\sqrt[3]{27}\right)$ [2] $log_5\left(\frac{25}{\sqrt{5}}\right)$ [3/2] $log_6\left(6\cdot\sqrt{216}\right)$ [5/2] $log_2\left(\frac{1}{4}\cdot\sqrt[3]{2}\right)$ [–2/3] $log_{0,5}\left(\frac{8\cdot\sqrt{2}}{\sqrt[4]{4\cdot\sqrt[3]{2}}}\right)$ [–35/12]
2. $log_2\left(\frac{1024\cdot\sqrt{32}}{\sqrt[7]{4}}\right)$ [171/14] $log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt[5]{64}}\right)$ [–3/10] $log_{0,2}\left(25\cdot\sqrt[4]{5}\right)$ [–9/4] $log_{1/5}\left(\frac{125\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{3125}}\right)$ [–1]
3. $log_5\left(25\cdot\sqrt{125\cdot\sqrt{5}}\right)$ [15/4] $log_4\left(2\cdot\sqrt{8\cdot\sqrt[3]{2}}\right)$ [4/3] $log_8\left(\sqrt{\frac{2\cdot\sqrt{512}}{\sqrt{4\cdot\sqrt{8\cdot\sqrt{16}}}}}\right)$ [13/24]
4. $log_9\left(\frac{3\cdot\sqrt[5]{81}}{\sqrt{3\cdot\sqrt{27}}}\right)$ [11/40] $log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{27\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3\cdot\sqrt{243}}}\right)$ [–7/4] $log_{\frac{1}{81}}\left(\frac{27\cdot\sqrt{3\cdot\sqrt[3]{3}}}{\sqrt[5]{81\cdot\sqrt{27}}}\right)$ [–77/120]

Livello **2**

5. $log_2\left(4\cdot\sqrt[5]{\frac{1}{8}}\right)+log_4\left(\frac{16\cdot\sqrt{8}}{\sqrt{2}}\right)-2\cdot log_3\left(27\cdot\sqrt{243}\right)$ [–71/10] $\dfrac{log_{\sqrt{6}}\frac{\sqrt[4]{6\cdot\sqrt[3]{6\cdot\sqrt{216}}}}{\sqrt[4]{6\cdot\sqrt[3]{6}}}}{log_{\sqrt[3]{4}}\frac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{16}\cdot\sqrt{8}}{\sqrt[3]{32\cdot\sqrt{2}}}}$ [1/8]
6. $\left[log_{\frac{1}{4}}\left(2\cdot\frac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{32}\cdot\sqrt[3]{64}}\right)+log_{0,25}\frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt[7]{16}\cdot\sqrt[3]{4}}\right]^2$ [16384/111025]
7. $\left[log_{\frac{1}{4}}\left(0,25\cdot\frac{2\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2}}\right)+log_9\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}}{\sqrt[5]{81}}\right]\cdot\left[log_{\frac{1}{4}}\left(0,25\cdot\frac{2\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2}}\right)-log_9\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}}{\sqrt[5]{81}}\right]$ [–56/25]
8. $log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{2\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{32}}{\sqrt{2\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt{2}}}}\cdot log_{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2\cdot\sqrt{\sqrt{32}}}}{8\cdot\sqrt[3]{16\cdot\sqrt{128}}}$ [2765/48]
9. $log_{\frac{1}{8}}\left(\frac{\sqrt[4]{2\cdot\sqrt[4]{4\cdot\sqrt{2}}}}{\sqrt[4]{16\cdot\sqrt[5]{4}}}\right)+log_{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt[5]{27\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{243}}}{\sqrt[3]{3\cdot\sqrt{27}}}\right)$ [2383/480]

10. $log_{0,5}\dfrac{\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{2\cdot\sqrt[5]{8\cdot\sqrt[3]{16}}}}}{16\cdot\sqrt[4]{2\cdot\sqrt[3]{4}}}-log_{0,2}\dfrac{\sqrt[5]{25\cdot\sqrt[4]{5}}}{25\cdot\sqrt[3]{5\cdot\sqrt{5\cdot\sqrt{5}}}}$ [319/180]

Lavoriamo insieme

L'espressione $log_3(7) + log_3(5) - 2 \cdot log_3(4)$, potrebbe scriversi in modo compatto usando le proprietà dei logaritmi: $log_3(7 \cdot 5) - log_3(16) = log_3(35/16)$

Scrivere sotto forma di un unico logaritmo le seguenti espressioni, gli eventuali parametri presenti sono tali da rendere reali i risultati

Livello 1

11. $log_5(2) + log_5(4) - log_5(8)$ [0] $log_3(6) + 2 \cdot log_3(5)$ [$log_3(150)$]
12. $log_a(5) - 3\, log_a(2) + log_a(4)$ [$log_a(5/2)$] $2\, log(2) - 3\, log(3) + 4\, log(5) - log(6)$ [$log(1250/81)$]
13. $ln\left(\sqrt{2}\right) + 2\, ln(3) - 3\, ln(4) + ½\, ln(2)$ [$ln(9/32)$] $log_{1/3}(¾) - 3\, log_{1/3}(4/3)$ [$log_{1/3}(81/256)$]
14. $[log(1/3) + log(2/5)] \cdot [log(1/3) - log(2/5)] - [log(2) - log(5) - log(3)]^2$ [$log(4/25) \cdot log(15/2)$]

Livello 2

15. $log_2(a + b) + log_2(a - b) - log_2(a^2 + b^2 - 2ab)$ $\left[log_2\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)\right]$ $log_4(a) + 2\, log_4(b) - log_4(b^3)$ $\left[log_4\left(\dfrac{a}{b}\right)\right]$
16. $log(a) + log(b) - log(a^2) + log(b^3) - 2\cdot log\left(\sqrt{b}\right)+3\cdot log\left(\sqrt[3]{a}\right)$ [$log(b^3)$]
17. $log_a(a) - b\, log_a(b) + a\, log_a(a + 1) + (b - 1)\, log_a(b)$ $\left[1+log_a\left(\dfrac{(a+1)^a}{b}\right)\right]$
18. $[log(a) + log(b)]^2 - [log(a) - log(b)]^2 - ½\, log(b^2) + 1/3\, log(a^3)$ [$log(a^4) \cdot log(b) + log(ab)$]

Lavoriamo insieme

Vogliamo semplificare la seguente espressione: $log_8(9) \cdot log_9(10) \cdot log_{10}(11) \cdot \ldots \cdot log_{31}(32)$, dove i punti indicano che si va da 11 a 32 passando per tutti gli interi intermedi Portiamo tutto in una stessa base, per esempio la base 8: $\cancel{log_8(9)}\cdot\dfrac{\cancel{log_8(10)}}{\cancel{log_8(9)}}\cdot\dfrac{\cancel{log_8(11)}}{\cancel{log_8(10)}}\cdot\ldots\cdot\dfrac{log_8(32)}{\cancel{log_8(31)}}=log_8(32)$. Abbiamo quindi ottenuto un solo termine, che può essere facilmente calcolato: $log_8(32) = log_8(2^5) \Rightarrow 8^x = 2^5 \Rightarrow 2^{3x} = 2^5 \Rightarrow x = 5/3$.

Usando il cambio di base semplificare le seguenti espressioni

Livello 1

19. $log_2(3) \cdot log_3(2)$ [1] $\dfrac{log_4(5)}{log_5(4)}$ [$log^2{}_4(5)$] $\dfrac{log_2(3)\cdot log_8(3)}{log_4(3)}$ [$log_2(3)$] $log_2(3) \cdot log_3(4)$ [2]
20. $\dfrac{log_2(3)}{log_{1/2}(1/3)}$ [–1] $\dfrac{log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}\right)}{log_2(3)}$ [1] $log(2) - log_{100}(4)$ [0] $log_2(10) - log_4(10) + log_8(10)$ [5/6 $log_2(10)$]
21. $\dfrac{log_2(5)+log_4(25)}{log_8(125)}$ [2] $\dfrac{log_3(6)-log_9(36)}{log_{27}(216)}$ [0] $\dfrac{log_{81}(8)}{log_9(2)}$ [3/2] $\dfrac{log_{25}(9)-log_5(3)}{log_{25}(9)-log_5(3)}$ [0]

Livello 2

22. $log_2(3) \cdot log_3(4) \cdot log_4(5) \cdot log_5(6) \cdot log_6(7) \cdot log_7(8)$ [3] $log_{a^n}\left(b^m\right)\cdot log_{b^n}\left(a^m\right)$ [m^2/n^2]
23. $log_3(4) \cdot log_4(5) \cdot log_5(6) \cdot log_6(7) \cdot log_7(8) \cdot log_8(9)$ [2] $log_{a^n}(b)-\dfrac{log_a(b)}{n}$ [0]
24. $log_4(5) \cdot log_5(6) \cdot log_6(7) \cdot \ldots \cdot log_{15}(16)$ [2] $log_{a^n}\left(a^m\right)$ [m/n]

Livello 3

25. $\dfrac{log_2(3)\cdot log_4(9)\cdot log_6(27)}{log_4(3)\cdot log_6(9)\cdot log_8(27)}$ [3] $\dfrac{log_3(2)\cdot log_4(15)\cdot log_{17}(24)\cdot log_{31}(35)}{log_4(2)\cdot log_{17}(15)\cdot log_{31}(24)\cdot log_{81}(35)}$ [4]

26. $\dfrac{log_{25}(2)\cdot log_{14}(4)\cdot log_{21}(11)}{log_{14}(2)\cdot log_{21}(4)\cdot log_5(11)}$ [½]

Lavoriamo insieme

Sapendo che $log_a(b) = 2$, semplificare: $log_{\sqrt{a}}\left(b^4\right)-5\cdot log_{\sqrt{b}}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)$.

Supponiamo che le lettere abbiano valori che rendono reali i logaritmi. Portiamo tutto alla base a.

$$log_{\sqrt{a}}\left(b^4\right)-5\cdot log_{\sqrt{b}}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)=\frac{log_a\left(b^4\right)}{log_a\left(\sqrt{a}\right)}-5\cdot\frac{log_a\left(1/\sqrt[3]{a}\right)}{log_a\left(\sqrt{b}\right)}$$

Semplifichiamo: $\dfrac{4\cdot log_a(b)}{log_a\left(a^{1/2}\right)}-5\cdot\dfrac{log_a\left(a^{-1/3}\right)}{\frac{1}{2}\cdot log_a(b)}=\dfrac{\cancel{4}^2\cdot log_a(b)}{\cancel{2}}-10\cdot\dfrac{-1/3}{log_a(b)}=2\cdot log_a(b)+\dfrac{10}{3\cdot log_a(b)}$.

Adesso sostituiamo il valore noto: $2\cdot 2+\dfrac{10}{3\cdot 2}=4+\dfrac{5}{3}=\dfrac{17}{3}$.

Livello 2

27. $log_{\sqrt{a}}\left(b^3\right)\cdot log_{b^2}\left(\sqrt{a}\right)$ [3/2] $log_a\left(\sqrt{b}\right)\cdot log_{\sqrt{b}}\left(a^3\right)$ [3] $log_{\sqrt{a^3}}\left(b^2\right)\cdot log_{\sqrt{b^5}}\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}\right)$ [–2/15]

28. $log_{\sqrt{a}}\left(b^3\right)\cdot log_{1/b^2}\left(\sqrt{a}\right)$ [6] $log_{a^2}\left(\sqrt{b}\right)\cdot log_{b^2}\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{a^3}}\right)$ [–3/16] $log_{1/a^2}\left(\sqrt[5]{b^2}\right)\cdot log_{b^4}\left(\dfrac{1}{a^3}\right)$ [3/5]

29. $log_{\sqrt{a}}\left(b^4\right)\cdot log_{\sqrt{b}}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)$ [–16/3] $log_{a^2}\left(\sqrt{b^3}\right)\cdot log_{b^3}\left(\dfrac{1}{\sqrt[5]{a^4}}\right)$ [–1/5]

30. $log_a(b)=\dfrac{1}{2}\Rightarrow 2\cdot log_{\sqrt{a}}\left(\dfrac{1}{b}\right)+3\cdot log_{1/b^3}\left(\dfrac{1}{\sqrt[5]{a^4}}\right)=?$ [–2/5]

31. $log_a(b)=\dfrac{3}{4}\Rightarrow 3\cdot log_{\sqrt{a^3}}\left(b^2\right)-4\cdot log_{b^2}\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{a^3}}\right)=?$ [5]

32. $log_b(a)=3\Rightarrow\left[log_{1/a^2}\left(\dfrac{1}{b^3}\right)\right]^2-\left[log_{\sqrt{b^3}}\left(\sqrt[3]{a^4}\right)\right]^2=?$ [–247/36]

33. $log_{a^2}(b)=-\dfrac{1}{4}\Rightarrow log_a\left(\dfrac{1}{b^2}\right)-4\cdot log_{b^3}\left(\dfrac{1}{a^4}\right)=?$ [–29/3]

34. $log_a(x)=2, log_a(y)=3\Rightarrow log_a\left(x^2\cdot y^3\right)=?$ [13]

Livello 3

35. $\dfrac{log_a(b)\cdot log_x(c)\cdot log_y(d)}{log_x(b)\cdot log_y(c)\cdot log_{a^4}(d)}$ [4] $\dfrac{log_a(b)\cdot log_x(c)\cdot log_y(d)}{log_x(b)\cdot log_y(c)\cdot log_{a^n}(d)}$ [n]

36. $log_a(x)=2, log_b(x)=\dfrac{1}{2}, log_c(x)=\dfrac{1}{3}, log_d(x)=3\Rightarrow log_{abcd}(x)=?$ [35/6]

Lavoriamo insieme

I logaritmi possono essere utili per determinare quante cifre hanno numeri molto grandi, che di solito sfuggono alle classiche calcolatrici tascabili, anche scientifiche. Per esempio vediamo come possiamo sapere quante cifre ha 3^{100}, usando una semplice calcolatrice scientifica. Noi sappiamo che se $log(N) = h \in \mathbb{N}$, N è un numero con $(h + 1)$ cifre decimali, infatti $log(10) = 1$, $log(10^2) = 2$ e così via. Allora calcoliamo $log(3^{100})$, ovviamente usando le proprietà dei logaritmi, scrivendo cioè

$log(3^{100}) = 100 \cdot log(3)$

ora con una calcolatrice scientifica abbiamo che $log(3) \approx 0,477$, avremo $log(3^{100}) \approx 47,7$. Perciò il numero ha 48 cifre.

Livello 2

37. Determinare quante cifre ha 2^{1000}. [302]
38. Con l'uso dei logaritmi ordinare dal più piccolo al più grande: 3^{75}, 4^{63}, 5^{54}. [$3^{75} < 5^{54} < 4^{63}$]
39. Determinare il più piccolo valore intero di n per cui 2^n ha almeno 1000 cifre. [3319]
40. Determinare il più piccolo valore intero di n per cui n^{17} ha almeno 100 cifre. [666084]

L'angolo di Derive

Derive calcola i logaritmi in qualunque base, senza dovere applicare la formula per il cambio base

#1: $\left[\mathrm{LOG}(2,\ 4),\ \mathrm{LOG}(4,\ 2),\ \mathrm{LOG}(100),\ \mathrm{LN}(e^3)\right]$

#2: $\left[\frac{1}{2},\ 2,\ 2\cdot\mathrm{LN}(10),\ 3\right]$

La sintassi è **LOG(argomento, base)**, come si vede nella precedente schermata. Si vede anche che **LN** e **LOG** sono equivalenti, quindi Derive non riconosce una simbologia particolare al logaritmo decimale. Derive lavora nei complessi, quindi accetta e calcola anche basi e argomenti negativi, come mostrato di seguito.

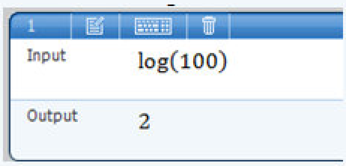
#3: $\left[\mathrm{LOG}(-2,\ 4),\ \mathrm{LOG}(4,\ -2),\ \mathrm{LOG}(-1,\ 4),\ \mathrm{LOG}(4,\ 1)\right]$

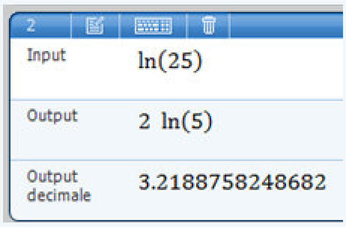
#4: $\left[\frac{1}{2} + \frac{\pi\cdot i}{2\cdot\mathrm{LN}(2)},\ \frac{2\cdot\mathrm{LN}(2)^2}{\mathrm{LN}(2)^2 + \pi^2} - \frac{2\cdot\pi\cdot i\cdot\mathrm{LN}(2)}{\mathrm{LN}(2)^2 + \pi^2},\ \frac{\pi\cdot i}{2\cdot\mathrm{LN}(2)},\ \pm\infty\right]$

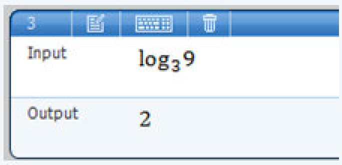
Invece non accetta che la base sia uguale ad 1.

L'angolo di Microsoft Mathematics

Ha i pulsanti predefiniti logaritmo e logaritmo naturale, quindi basta cliccare su di essi per effettuare i calcoli.

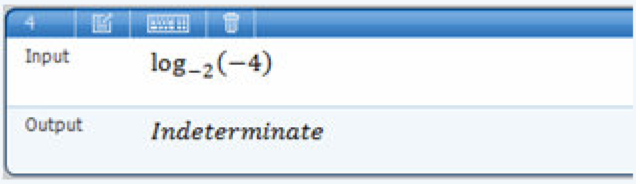


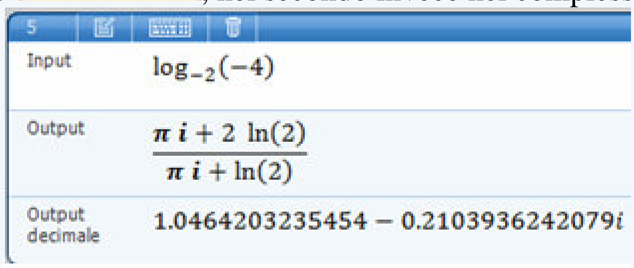




Per immettere i logaritmi in base diversa da 10 o e, si usa il comando **log(base, argomento)**
Il software accetta argomenti e basi negative solo se si sceglie di operare nei complessi, selezionando nella barra principale il comando ℂ Numeri complessi.

Nella figura seguente il primo calcolo è con l'opzione è ℝ Numeri reali, nel secondo invece nei complessi.





Calcola, con precisione al secondo decimale, i seguenti logaritmi usando la calcolatrice

Livello 1

41. $log_3(7)$ [1,77] $log_4(31)$ [2,47] $log_{1/3}(2/5)$ [0,83] $log_{\frac{4}{5}}\left(\sqrt{2}\right)$ [1,20] $log_{\sqrt{3}}(12)$ [4,52] $log_{13}(1{,}21)$ [0,07]

42. $log_{0,12}(4)$ [–0,65] $log_{\pi}(3)$ [0,95] $log_3(\pi)$ [1,04] $log_{\frac{1}{2}}\left(1+\sqrt{2}\right)$ [–1,27] $log_{\sqrt{2}-1}\left(\frac{1}{5}\right)$ [1,82]

43. $log_2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$ [1,65] $log_{1+\pi}(\pi)$ [0,80] $log_{\pi^2}\left(1+\sqrt{5}\right)$ [0,51] $log_{\frac{2}{5}}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$ [–0,34] $log_{1+e}(e+\pi)$ [1,34]

Livello 2

44. Sapendo che $log(2) \approx 0{,}301$, senza usare l'apposito tasto della calcolatrice determinare un valore approssimato di $log_5(10)$. [1,430]
45. Sapendo che $(0.2)^x = 2$ e $ln(2) \approx 0{,}693$, determinare un valore approssimato di x. [–0,4]

Lavoriamo insieme

Nell'unità sulle equazioni esponenziali avevamo risolto solo quelle che erano riconducibili all'uguaglianza fra potenze di uguale base o che con una posizione diventavano equazioni algebriche. Non abbiamo risolto equazioni del tipo $3^x = 2$. Adesso siamo in grado di farlo, poiché abbiamo introdotto i logaritmi, pertanto la soluzione formale è semplicemente $x = log_3(2)$, quella numerica è ovviamente approssimata ed è circa 0,63.
Vediamo un caso un po' più complesso: $2^x + 3^{x-1} = 3^x - 2^{x+1}$
Portiamo le potenze di uguale base dalla stessa parte rispetto al segno di uguale.

$$2^x + 2^{x+1} = 3^x - 3^{x-1} \Rightarrow 2^x + 2 \cdot 2^x = 3^x - 3^x/3 \Rightarrow 3 \cdot 2^x = 2/3 \cdot 3^x \Rightarrow 2^{x-1} = 3^{x-2}$$

Adesso estraiamo i logaritmi, in una base a piacere, di entrambi i membri: $(x-1) \cdot log(2) = (x-2) \cdot log(3)$
In tal modo abbiamo a che fare con una semplice equazione di primo grado:

$$x \cdot [log(2) - log(3)]\ log(2) - 2 \cdot log(3) \Rightarrow x = \frac{log(2) - 2 \cdot log(3)}{log(2) - log(3)} \Rightarrow x = \frac{log\left(\frac{2}{9}\right)}{log\left(\frac{2}{3}\right)} \approx 3{,}71$$

Risolvi le seguenti equazioni o disequazioni esponenziali

Livello 1

46. $3^{x+1} = 4$ [$x = 1 - log_3(4)$] $5^{x+2} = 3$ [$x = log_5(3) - 2$] $2^{3x-1} = 5^x$ [$x = log_{5/8}(½)$] $2^{x^2} = 5$ $\left[x = \pm\sqrt{log_2(5)}\right]$

47. $4^{2x-3} = 3^{x-1}$ [$x = log_{3/16}(3/64)$] $4^{3x+2} = 7^{x-1}$ [$x = log_{7/64}(112)$] $2 \cdot 5^{2x-1} = \frac{3^{x-1}}{5}$ [$x = log_{25/3}(1/6)$]

48. $\sqrt{3^{2x-5}} = 2^{x-1}$ [$x = log_{9/4}(243/4)$] $4^{\frac{x-1}{2}} = 3^{\frac{x+1}{3}}$ [$x = log_{3/8}(1/24)$] $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} < \left(\frac{3}{5}\right)^{x-1}$ [$x < log_{10/9}(5/2)$]

49. $½^{3x} \geq 3$ [$x \geq log_8(3)$] $3^{x+3} > 4$ [$x < 3 - log_3(4)$] $3^{2x+3} \geq 2 \cdot 5^{4x+7}$ $\left[x \geq \frac{7 \cdot log(5) - log(27/2)}{2 \cdot log(25/3)}\right]$

50. $\left(\frac{5}{7}\right)^{x-4} < \frac{1}{2^{2x-3}}$ [$x < log_{7/20}(2401/5000)$] $\sqrt{3^{x+3}} \leq 2^{x+1}$ [$x \geq log_{3/4}(4/27)$]

51. $\left(\frac{4}{3}\right)^{3x+5} < \left(\frac{6}{5}\right)^{2x}$ $\left[x < \frac{5 \cdot log(3/4)}{log(400/243)}\right]$ $\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2+1} < 1$ [$\forall x \in \mathbb{R}$] $\pi^{3x+1} < e^{4x-1}$ $\left[x < \frac{1+ln(\pi)}{3 \cdot ln(\pi) - 4}\right]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere la disequazione esponenziale $4^{x+1} - 5 \cdot 2^x - 1 > 0$. Riscriviamola: $4 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x - 1 > 0$ $\Rightarrow 4z^2 - 5z - 1 < 0$ ($z = 2^x$). Risolviamo l'equazione associata nella variabile z. $z = \frac{5 \pm \sqrt{25+16}}{8} = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{8}$.

Quindi le soluzioni della disequazione in z sono: $z < \frac{3-\sqrt{41}}{8} \vee z > \frac{3+\sqrt{41}}{8}$, cioè $2^x < \frac{3-\sqrt{41}}{8} \vee 2^x > \frac{3+\sqrt{41}}{8}$

La prima non ha ovviamente soluzioni, poiché $2^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Invece la seconda si risolve passando ai logaritmi: $x > log_2\left(\frac{3+\sqrt{41}}{8}\right) = \frac{log\left(\frac{3+\sqrt{41}}{8}\right)}{log(2)}$.

Risolvi le seguenti equazioni o disequazioni esponenziali

Livello 2

52. $2^x + 2^{x+1} - 2^{x-1} = 0$ [$\varnothing$] $\quad 3^{2x} + 3^x - 2 = 0$ [$x = 0$] $\quad 4^x - 3 \cdot 2^x - 1 = 0$ $\left[x = log_2\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)\right]$

53. $9^x - 2 \cdot 3^x - 4 = 0$ $\left[x = log_3\left(1+\sqrt{5}\right)\right]$ $\quad 3 \cdot 5^{2x} - 7 \cdot 5^x + 1 = 0$ $\left[x = log_5\left(\frac{7\pm\sqrt{37}}{6}\right)\right]$

54. $4 \cdot 6^{2x+1} - 5 \cdot 6^{x+1} + 3 = 0$ $\left[x = log_6\left(\frac{5\pm\sqrt{17}}{8}\right)\right]$ $\quad e^{2x} - e^x - 1 > 0$ $\left[x > ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right]$

55. $2 \cdot e^{2x} + 3 \cdot e^x - 2 < 0$ [$x > ln(2)$] $\quad 3 \cdot 4^x + 2^x - 3 > 0$ $\left[x > log_2\left(\frac{\sqrt{37}-1}{6}\right)\right]$ $\quad 3^{x+1} - 18^x - 3^x + 2 \cdot 18^{x+1}$ [$\varnothing$]

56. $2 \cdot 16^{x-1} + 3 \cdot 4^x - 1 \ge 0$ $\left[x > log_4\left(\frac{\sqrt{17}-3}{4}\right)\right]$ $\quad \pi^{2x} - \pi^x - 5 \le 0$ $\left[x \le log_\pi\left(\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)\right]$

57. $3 \cdot 4^{x-2} - 3 \cdot 2^x - 1 \ge 0$ $\left[x \ge log_2\left(\frac{24+4\cdot\sqrt{39}}{3}\right)\right]$ $\quad 5^x \cdot 2^{x-1} = 25^{3x-1} \cdot 8^{2x-3}$ $\left[x = \frac{2\cdot log(80)}{5}\right]$

58. $3^{x+1} \cdot 7^{3x+1} = 9^x \cdot 49^{2x-3}$ $\left[x = \frac{7\cdot log(7)+log(3)}{log(21)}\right]$ $\quad 4^{x+1} \cdot 125^{x-1} = 16^{2x-3} \cdot 5^{x-1}$ [$x = log_{5/8}(5/128)$]

59. $8^{2x} \cdot 9^{4x+7} = 4^{3x-2} \cdot 3^{x+5}$ $\left[x = -\frac{\log(314928)}{7\cdot\log 3}\right]$ $\quad 4 \cdot 3^x - 2^{x+1} = 3 \cdot 2^x + 3^{x-1}$ [$x = log_{3/2}(15/11)$]

60. $5 \cdot 10^x + 2^{x+2} = 3 \cdot 10^{x+1} + 2^x$ [$x = log_5(3)$] $\quad 6^{x+1} - 8^x = 2^{3x+1} - 6^{x-1}$ [$x = log_{3/4}(18/37)$]

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere il seguente sistema di equazioni esponenziali $\begin{cases} 3^{x+1} - 2^{y-2} = 4 \\ 3^{x-1} + 2^y = 5 \end{cases}$.

Riscriviamolo: $\begin{cases} 3\cdot 3^x - \frac{1}{4}\cdot 2^y = 4 \\ \frac{1}{3}\cdot 3^x + 2^y = 5 \end{cases}$. Adesso poniamo $3^x = z$, $2^y = t$, ottenendo il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} 3\cdot y - \frac{1}{4}\cdot t = 4 \\ \frac{1}{3}\cdot y + t = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12\cdot y - t = 16 \\ y + 3t = 15 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{\begin{vmatrix} 16 & -1 \\ 15 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 12 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{48+15}{36+1} = \frac{63}{37}; z = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 16 \\ 1 & 15 \end{vmatrix}}{37} = \frac{180-16}{37} = \frac{164}{37}$$

Quindi adesso dobbiamo risolvere le due equazioni esponenziali immediate:

$$3^x = \frac{63}{37}; 2^y = \frac{164}{37} \Rightarrow x = log_3\left(\frac{63}{37}\right) = \frac{log(63/37)}{log(3)}; y = log_2\left(\frac{164}{37}\right) = \frac{log(164/37)}{log(2)}.$$

Risolvi i seguenti sistemi.

Livello 1

61. $\begin{cases} 2^{x-1} + 3^{y-1} = 7 \\ 2^{x+1} - 3^y = 12 \end{cases}$ [$x = log_2(66/7)$, $y = log_3(48/7)$] $\begin{cases} 3^x - 2 = 3^{y+1} \\ 3^{y-2} + 4 = 3^{x-2} \end{cases}$ [$x = log_3(53)$, $y = log_3(17)$]

62. $\begin{cases} 3 \cdot 2^x + 2^y = 8 \\ 5 \cdot 2^y - 3 \cdot 2^x = 4 \end{cases}$ [$x = 1$, $y = 1$] $\begin{cases} 5^{x+1} - 5^y = 4 \\ 5^{y-1} + 5^x = 11 \end{cases}$ [$x = log_5(59/10)$, $y = log_2(51/2)$]

63. $\begin{cases} 2^x + 2^{2y-1} = 16 \\ 3 \cdot 4^{y-1} - 5 \cdot 2^{x-1} = 2 \end{cases}$ [$x = log_2(11/2)$, $y = log_4(21)$] $\begin{cases} 2^x + 2^{y+2} = 3 \\ 2^{y+3} - 2^{x+2} = -4 \end{cases}$ [$x = log_2(5/3)$, $y = log_2(1/3)$]

64. $\begin{cases} 4 \cdot \pi^x + \pi^{y+1} = 1 \\ 3 \cdot \pi^y + \pi^x = 5 \end{cases}$ $\left[x = log_\pi\left(\frac{2\pi^2 + 3\pi}{12 - \pi}\right), y = log_\pi\left(\frac{9\pi}{12 - \pi}\right)\right]$ $\begin{cases} 9^x - 3^{2y+1} = -18 \\ 3^{2x-3} - 9^{2-y} = -\frac{26}{3} \end{cases}$ [$x = 1$, $y = 1$]

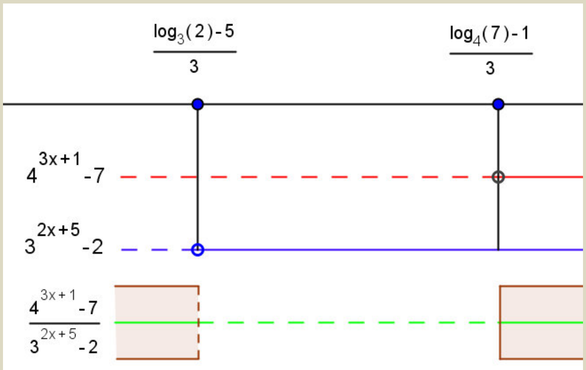
65. $\begin{cases} e^{2x+1} - e^{y-1} = 13 \\ e^y + e^{2x-1} = 3 \end{cases}$ $\left[x = 1 - ln\left(\sqrt{e^3} + 1\right) + ln\left(\sqrt{e} + 2\right), y = ln\left(e^2 \cdot \frac{2e^2 - 1}{e^3 + 1}\right)\right]$ $\begin{cases} 4^{x-2} - 2^{x-1} = 1 \\ 2^{x+3} + 4^x = 3 \end{cases}$ [$\varnothing$]

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere la seguente disequazione fratta: $\frac{4^{3x+1} - 7}{3^{2x+5} - 2} \geq 0$. Determiniamo singolarmente il segno di numeratore e denominatore.

$4^{3x+1} - 7 \geq 0 \Rightarrow 3x + 1 \geq log_4(7) \Rightarrow x \geq \frac{log_4(7) - 1}{3}$ e $3^{2x+5} - 2 > 0 \Rightarrow 2x + 5 > log_3(2) \Rightarrow x > \frac{log_3(2) - 5}{2}$

Adesso dobbiamo determinare quale dei due numeri è maggiore, dovremmo vedere abbastanza facilmente che il primo numero è positivo, dato che $log_4(7) > 1$, mentre il secondo è negativo, poiché $log_3(2) < 5$. Se non ci rendiamo conto possiamo usare la calcolatrice, ottenendo: $\frac{log_4(7) - 1}{3} \approx 0{,}13; \frac{log_3(2) - 5}{2} \approx -2{,}18$.



Quindi rappresentiamo graficamente:

Infine la soluzione è $x < \frac{log_3(2) - 5}{2} \vee x \geq \frac{log_4(7) - 1}{3}$.

Risolvere le seguenti disequazioni.

Livello 2

66. $\frac{2^{3x+1} - 3}{4^{x+2} - 5} \geq 0$ [$x < log_4(5) - 2 \vee x \geq log_8(3) - 1/3$] $\frac{4^{5x-1} - 1}{5^{2x+1} - 2} < 0$ [$x = log_{25}(2) - ½ < x < -¼$]

67. $3^{1+2x} \cdot 4^{2x-1} \leq 12^{3x-2}$ [$x \geq log_{12}(108)$] $2^{3-4x} \cdot 5^{x+1} > 10^{2x-1}$ [$x < log_{320}(400)$]

68. $\frac{2^{4x-5}-6}{2^{3x+1}-7}>0$ $[x < log_9(7/2) \vee x > log_{16}(192)]$ $\frac{5^{3x-2}+2}{3^{4x-1}-2}\le 0$ $[x < log_{81}(6)]$

69. $\frac{7^{3x+2}-3}{4^{2x}-3}\ge 0$ $[x \le log_{343}(3) - 2/3 \vee x > log_{16}(3)]$ $\frac{12^{3-x}-3}{18^{2-3x}-2}>0$ $[x < log_{5832}(162) \vee x > log_{12}(576)]$

70. $\frac{2^{\frac{x+1}{2}}-3^{\frac{4x+1}{3}}}{2^{2x-1}-3^{2x+1}}<0$ $[log_{9/4}(1/6) < x < log_{6561/8}(8/9)]$ $\frac{3^{2x-1}-2^{3-2x}}{4^x-3^{2-x}}\ge 0$ $[x < log_{12}(9) \vee x \ge log_{36}(24)]$

71. $\frac{6^{2x-3}-4^{x+2}}{4^{5x-2}-6^{3+2x}}\le 0$ $[log_{9/256}(1/3456) < x \le log_9(3456)]$ $2^{2x-1}\cdot 3^{1-x}\le 6^x$ $[x \ge log_{9/2}(6)]$

72. $\frac{3\cdot 2^{2^x}-4^{2^x}-2}{9^x-3^x-1}\ge 0$ $\left[0\le x < log_3\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right]$ $\frac{2\cdot 5^{2x}-5^x-2}{49^x-2\cdot 7^x-1}\le 0$ $\left[log_5\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)\le x < log_7\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$

Lavoriamo insieme

Abbiamo già parlato della legge di capitalizzazione composta, , detto C_0 il capitale iniziale, I il tasso di interesse e n il numero di anni: $C_n = C_0 \cdot (1 + I)^n$. Usando i logaritmi possiamo risolvere problemi che vogliono determinare il numero di rate necessarie per ottenere un dato capitale. Infatti per determinare n dobbiamo risolvere

$$\frac{C_n}{C_0}=(1+I)^n \Rightarrow log\left(\frac{C_n}{C_0}\right)=log\left[(1+I)^n\right]\Rightarrow log\left(\frac{C_n}{C_0}\right)=n\cdot log(1+I)\Rightarrow n=\frac{log(C_n/C_0)}{log(1+I)}$$

Livello 2

73. Un capitale iniziale di € 15000,00 è investito in un’obbligazione che paga un interesse annuo del 2,87%, che viene però aggiunto al capitale. Quale sarà la somma liquidata dopo 15 anni? [€ 22931,00]
74. Con riferimento al problema precedente, se l’inflazione annua è mediamente del 1,38% annuo, quale sarà il valore reale del capitale finale? [€ 18616,50]
75. Dopo quanti anni, minimo, un capitale di € 18000, diventa € 24000 o più, in regime di capitalizzazione composta al tasso del 2,15% annuo? [14]
76. Dopo quanti anni, minimo, un capitale, in regime di capitalizzazione composta al tasso del 3,19% annuo, raddoppia? [Più di 22]
77. Con riferimento al problema della capitalizzazione composta, se il capitale investito raddoppia, senza calcolare l’inflazione, dopo 23 anni, qual è l’interesse annuo? [circa 3,06%]
78. La popolazione di una città è inizialmente formata da 214000 abitanti, sapendo che essa aumenta in media del 3,12% l'anno, determinare dopo quanti anni raddoppia di numero. Il dato sul numero degli abitanti è necessario per risolvere il problema? [Circa 22,56; no]
79. La formula di Pogson: $m_x = -2,5 \cdot log(F_x)$ viene usata per misurare la magnitudine apparente di una stella, in cui F_x è il flusso osservato nella banda x. Venere ha magnitudine –4,4, Marte –2,8. Quante volte Venere è più luminoso di Marte? [circa 4,3]
80. Il sole ha una magnitudine apparente di –26,8 mentre la luna piena di –12,6. Quindi possiamo dire che il sole è quante volte circa più luminoso della luna piena? [≈447453]
81. Una differenza di h unità fra le magnitudini apparenti comporta una luminosità maggiore di? [$2,5^h$]
82. La scala Richter misura la magnitudine di un terremoto in base alla quantità di energia liberata all'epicentro è di tipo logaritmico. Per esempio un terremoto di magnitudine 4 rispetto a uno di magnitudine 3 è 10 volte più disastroso, in generale per passare da una magnitudine alla successiva si moltiplica per 10. Quante volte è più disastroso un terremoto di magnitudo 6 rispetto a uno di magnitudo 2? [10000]
83. Un terremoto che è 1500 volte più disastroso di uno di magnitudo 3, ha magnitudo circa? [6,17]
84. Il pH è una scala di misura dell'acidità o della basicità di una soluzione, ed è definito come $log(1/H^3O^+)$. Una soluzione viene detta Acida se il pH è < 7, Neutra se il pH è = 7, Basica se il pH è > 7. La Coca Cola ha un pH di 2,5 il succo d’arancia di 3,5. Quante volte la Coca Cola è più acida del succo d’arancia? [10]

85. Il sangue ha un pH di circa 7,4 un sapone per la mani standard, di circa 9. Quante volte circa il sapone è più basico del sangue? [40]
86. Una differenza di h unità fra i pH comporta un'acidità o basicità maggiore di quanto? [10^h]
87. Per eliminare i parassiti viene spruzzato un prodotto medicinale sulle arance, che assorbono il 100% del prodotto e ogni 4 giorni dimezzano il loro contenuto di tossicità. Dato che una percentuale superiore al 10% di residuo tossico fa sì che le arance non vengano dichiarate commestibili, qual è il minimo numero di giorni che devono attendersi affinché le arance possano essere mangiate? [14]
88. In una immaginaria nazione la crisi economica produce un'inflazione del 5% mensile. Se gli stipendi vengono adeguati mensilmente all'inflazione, un operaio che a Gennaio guadagna 2000 monete, quante monete guadagnerà il successivo Dicembre? [3420,68]
89. Il decibel, indicato con dB, è un'unità di misura usata per l'intensità acustica; è definita come $10\cdot log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, in cui I è l'intensità del suono e I_0 è la cosiddetta soglia di udibilità, pari a 10^{-12} W/m^2. Quanto è in decibel la soglia di udibilità? [0 dB]
90. Calcolare in decibel l'intensità del rumore in una discoteca, che è 10^{-2} W/m^2. [100 dB]
91. Il rumore di un colpo di pistola a 1 m è di circa 140 dB, quanto vale in W/m^2? [100 W/m^2]

Livello 3

92. Quanto vale in dB, il suono emesso da 100 sorgenti ciascuna delle quali emette uno stesso suono di 10dB? [30 dB]
93. Quante sorgenti che emettono uno stesso suono di 10dB, equivalgono a una sorgente che emette un suono di 20 dB? [10]
94. Se una sorgente emette un suono di x dB, n sorgenti uguali emetteranno complessivamente un suono di quanti dB? [$x + 10\ log(n)$]
95. Il tempo per il dimezzamento del livello di radioattività dell'Uranio 237 è di 6,75 giorni, dopo quanto tempo si riduce al 5%? Se un certo materiale riduce il suo livello radioattivo al 18% dopo 44 giorni, qual è il suo tempo di dimezzamento? [Circa 29; circa 17,8 giorni]
96. L'aspirina viene eliminata dai reni in ragione del 50% del farmaco presente ogni ½ ora. Dopo quanto tempo nel corpo è rimasto il 10% dell'aspirina inizialmente somministrata? Se avessimo ingerito del Cefotaxime, avremmo avuto bisogno di circa 4 ore e 6 minuti per smaltirne l'85%, qual è il tempo di dimezzamento di questo antibiotico? [circa 1 ora e 40 minuti; circa 1 ora e mezza]
97. Una coltura batterica triplica di numero ogni 35 minuti. Se inizialmente è formata da 450 batteri, dopo quanti minuti avremo almeno un milione di batteri? Se invece raggiungessimo i 100 milioni dopo 1000 minuti, quale sarebbe il tasso di accrescimento al minuto? [circa 246, circa 1,2%]
98. Il Ca_{45} perde il 90% della sua radioattività in circa 548 giorni, mentre il Ta_{182} in circa 382 giorni. Qual è il rapporto fra i tempi di dimezzamento dei due isotopi? [circa 1,44]
99. Nel tempo in cui le reni smaltiscono il 90% dell'antibiotico Meropenem, smaltiscono il 40% di Aztreonam. Se quest'ultimo ha un tempo di emivita di circa 1,7 ore, qual è il tempo di emivita del Meropenem? [circa 1,2 ore]
100. Un capitale di € 15000 viene investito in regime di capitalizzazione composta al 2,75% annuo, se dopo 12 anni il valore reale del capitale, al netto dell'inflazione, è di € 16703,64, quanto vale il tasso di inflazione medio? [1,8%]
101. Un capitale di € 15000 viene investito in regime di capitalizzazione composta al 3,25% annuo, se dopo x anni il valore reale del capitale, al netto dell'inflazione al 1,7% medio annuo, è di € 19591,86, quanto vale x? [18]
102. Per stimare l'età di alcuni reperti archeologici si usa il metodo del Carbonio 14, un isotopo del Carbonio, il quale dimezza il suo contenuto radioattivo ogni 5730 anni. Se in un certo reperto abbiamo trovato una percentuale radioattiva del 27%, possiamo dire che il manufatto è stato costruito quanti anni fa circa? Se avessimo misurato il Torio 230 invece ne avremmo trovato una percentuale di circa il 90,5 %. Quanto vale il tempo di dimezzamento di Th_{230}? [10824; circa 75000 anni]

L'angolo di Derive

Derive risolve equazioni e disequazioni esponenziali ma non di tutti i tipi.

#1: $\text{SOLVE}(2^{x+1} = 3^{4\cdot x-1}, x, \text{Real})$

#2: $x = \dfrac{\text{LN}(6)}{\text{LN}\left(\dfrac{81}{2}\right)}$

#3: $\text{SOLVE}(2^{x+1} < 3^{4\cdot x-1}, x, \text{Real})$

#4: $3^{4\cdot x} - 3\cdot 2^{x+1} > 0$

#5: $\text{SOLVE}(2^{x+y} = 8 \wedge 3^{x-y} = 27, [x, y], \text{Real})$

#6: $3^{x} - 3^{y+3} = 0 \wedge 2^{x+y} = 8$

#7: $\text{SOLVE}\left(\dfrac{2^{x+1}}{3^{x-1}} \ge 5, x, \text{Real}\right)$

#8: $x \le -\dfrac{\text{LN}\left(\dfrac{5}{6}\right)}{\text{LN}\left(\dfrac{3}{2}\right)}$

Come si vede risolve l'equazione #1 ma non la relativa disequazione #3. Non risolve il sistema #5, ma risolve la disequazione fratta #7.

Attività Mediante Derive controllare, quando Derive risolve, i risultati dei precedenti esercizi.

L'angolo di Microsoft Mathematics

Microsoft Mathematics non risolve disequazioni esponenziali di nessun tipo

$\text{solve}(2^{3x-2} > 5^{2x-1}, x)$

La parola o il simbolo evidenziato non è riconosciuto o non può essere calcolato.

Invece risolve equazioni anche esponenziali, anche se lo fa in modo approssimato

1

Input $\quad \text{nsolve}(2^{3x-2} = 5^{2x-1}, x)$

Soluzione $\quad x \approx 0.1958371400673$

Risolve anche sistemi di equazioni esponenziali.

Input $\quad \text{solve}(\{3^{x+y} = 1, 2^{3x-y} = 4\})$

Soluzione $\quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} = 0.5 \\ y = -\dfrac{1}{2} = -0.5 \end{cases}$

Osserviamo che abbiamo immesso **solve**, ma il software lo ha sostituito automaticamente con **nsolve**.

Equazioni e disequazioni logaritmiche

Abbiamo risolto equazioni esponenziali usando i logaritmi, risulta quindi naturale cercare invece di risolvere equazioni in cui le incognite sono all'interno della base o dell'argomento di uno o più logaritmi.

Definizione 3

Un'equazione in cui l'incognita è presente nella base o nell'argomento di un logaritmo si chiama **equazione logaritmica**.

La risoluzione di un'equazione logaritmica spesso si effettua usando le proprietà dei logaritmi.

Esempio 14

L'equazione $log_2(3x - 1) - log_2(5x + 1) = log_2(x + 1)$ è un'equazione logaritmica. Applichiamo le proprietà dei logaritmi: $log_2\left(\frac{3x-1}{5x+1}\right) = log_2(x+1)$. A questo punto, essendo le basi uguali, uguagliamo gli argomenti,. $\frac{3x-1}{5x+1} = x+1 \Rightarrow 3x-1 = 5x^2+5x+x+1 \Rightarrow 5x^2+3x+2=0 \Rightarrow \Delta = 9-40<0$. L'equazione non ha soluzioni.

Non dobbiamo dimenticare che vi sono delle condizioni da imporre per l'esistenza dei logaritmi. Cioè l'equazione $log_a[f(x)] > log_a[g(x)]$ è equivalente al sistema $\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)>g(x) \end{cases}$ se è $a > 1$, mentre è equivalente al sistema $\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)<g(x) \end{cases}$ se è $0 < a < 1$.

Esempio 15

L'equazione $log_2(x - 2) - log_2(1 - x) = log_2(3x + 2)$ non ha soluzioni, perché l'incognita deve verificare le seguenti condizioni di realtà: $\begin{cases} x-2>0 \\ 1-x>0 \\ 3x+2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>2 \\ x<1 \\ x>-\frac{2}{3} \end{cases}$, che ovviamente non danno soluzioni.

Le disequazioni logaritmiche si risolvono nel modo consueto tenuto conto però delle condizioni sulla base.

Esempio 16

La disequazione logaritmica $log_2(4x - 1) > log_2(3x + 1)$, equivale al sistema $\begin{cases} 4x-1>0 \\ 3x+1>0 \\ 4x-1>3x+1 \end{cases}$. Quindi le sue soluzioni sono: $\begin{cases} x > \dfrac{1}{4} \\ x > -\dfrac{1}{3} \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow x > 2$. Invece la disequazione logaritmica $log_{½}(4x - 1) > log_{½}(3x + 1)$, equivale al sistema $\begin{cases} 4x-1>0 \\ 3x+1>0 \\ 4x-1<3x+1 \end{cases}$. Quindi le sue soluzioni sono: $\begin{cases} x > \dfrac{1}{4} \\ x > -\dfrac{1}{3} \\ x < 2 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{1}{4} < x < 2$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere l'equazione $log(x^2 - 2x + 1) = -2$. Dobbiamo cercare di scrivere il secondo membro come un logaritmo in base 10, abbiamo così: $log(x^2 - 2x + 1) = 10^{-2}$. A questo punto possiamo passare dall'equazione logaritmica all'equazione algebrica fra gli argomenti:

$$x^2-2x+1=\frac{1}{100} \Rightarrow x^2-2x+\frac{99}{100}=0 \Rightarrow 100x^2-200x+99=0 \Rightarrow$$

$$x=\frac{200\pm\sqrt{40000-39600}}{200}=\frac{200\pm\sqrt{400}}{200}=\frac{200\pm 20}{200}=\prec \begin{matrix} \dfrac{220}{200}=\dfrac{11}{10} \\ \dfrac{180}{200}=\dfrac{9}{10} \end{matrix}$$

Risolvi le seguenti equazioni logaritmiche

Livello 1

1. $log_2(2x^2 - x) = 1$ $\left[x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{4}\right]$ $log_3(1 - x) = 2$ [$x = -8$] $log_{½}(3x - 1) = 3$ [$x = 3/8$]

2. $log_{\sqrt{2}}(2x+1)=2$ [$x = ½$] $log_4(x^2 - 1) = -1$ $\left[x=\dfrac{1\pm\sqrt{2}}{2}\right]$ $log_{¾}(x^2 + x - 1) = -2$ $\left[x=\dfrac{-3\pm\sqrt{109}}{6}\right]$

3. $log(3x - 2) = 2$ [$x = 34$] $log(2 + 5x) = -1$ [$x = -19/50$] $ln(1 - x) = 2$ [$x = 1 - e^2$]

4. $log_2(x^2 - 2x + 1) = -2$ [$x = ½ \vee x = 3/2$] $log_3(2x^2 + x) = -1$ $\left[x=\dfrac{-3\pm\sqrt{33}}{12}\right]$ $ln(x^2 - 2x + e) = -1$ [$\varnothing$]

5. $log_{\sqrt[3]{2}}(x^2+3x)=9$ $\left[x=\dfrac{-3\pm\sqrt{41}}{2}\right]$ $log_{1/\sqrt{2}}(4x^2-2x-1)=-4$ $\left[x=\dfrac{1\pm\sqrt{21}}{4}\right]$

6. $log(x^2 + 100) = 2$ [$x = 0$] $log(100x^2 + 101) = 2$ [$\varnothing$] $log(x^2 - x + 999) = 3$ $\left[x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right]$

7. $ln(x^2 - e) = 2$ $\left[x=\pm\sqrt{e^2+e}\right]$ $ln(x^2 + x) = 1$ $\left[x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4e}}{2}\right]$ $log_4(x^2 + x + 2) = ½$ [$x = -1 \vee x = 0$]

8. $log_2(x^2 - 3) = ½$ $\left[x = \pm\sqrt{2+\sqrt{3}}\right]$ $log_2(2x^2 + 1) = -½$ [∅] $log_{½}(1 - x^2) = -½$ [∅]

9. $log^2(x - 1) + 3\ log^2(x - 1) + 2 = 0$ [$x = 101/100 \vee x = 11/10$] $log^3(x^2 - 2) = 1$ $\left[x = \pm 2\cdot\sqrt{3}\right]$

10. $log^2(2 - x) = log(2 - x)$ [$x = -8 \vee x = 1$] $log^2{}_2(x - 2) - 5\ log_2(x - 2) = 6$ [$x = 5/2 \vee x = 66$]

11. $2log^2{}_2(2x + 1) + log_2(2x + 1) - 1 = 0$ $\left[x = \frac{3}{4} \vee x = \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right]$ $log_8(1 - x^2) = 1/3$ [∅]

Livello 2

12. $log_3(x - 3) - log_3(3x + 2) = log_3(1 + x)$ [∅] $log_4(3 - 4x) + log_4(5 + 2x) = log_4(3x + 7)$ $\left[x = \frac{\sqrt{545}-17}{16}\right]$

13. $log(x + 8) - log(1 - 5x)= log(2 + 3x)$ [∅] $log_\pi(13 + 3x) + log_\pi(7 - 3x) = log_\pi(5x - 2)$ $\left[x = \frac{\sqrt{3877}-23}{18}\right]$

14. $ln(x^2 - 3) - ln(x + 2) = ln(3 - 2x)$ $\left[x = \frac{-1-\sqrt{109}}{6}\right]$ $log_{2/3}(x + 2) - log_{2/3}(3x - 2) = 2$ [$x = 26/3$]

15. $log_4(1 + 3x) + log_4(11 - 5x) = log_4(x^2 - x + 1)$ $\left[x = \frac{29\pm\sqrt{1481}}{32}\right]$ $log_3(x + 1) - log_3(2x)= -1$ [$x = -3$]

16. $log(2x^2 + x) - log(x - 4) = log(1 + 3x)$ $\left[x = 6+2\cdot\sqrt{310}\right]$ $log(2 - 3x) + log(4x - 1)= log(3x^2 - x + 1)$ [∅]

17. $log_{\sqrt{2}}\left(2x^2-3x+1\right)-log_{\sqrt{2}}\left(1+x\right)=log_{\sqrt{2}}\left(4-x\right)$ $\left[x = 1\pm\sqrt{2}\right]$ $log_2(2x - 3) - log_2(3) = 1$ [$x = 9/2$]

18. $log_3(1 + 2x) + log_3(3x - 1) = log_3(x^2 + 4)$ $\left[x = \frac{-1+\sqrt{101}}{10}\right]$ $log_2(2x + 1) + log_2(1 - x) = 2$ [∅]

19. $2log_2(x - 1) - log_2(3x + 2)= 2$ $\left[x = 7+2\cdot\sqrt{14}\right]$ $log(x^2 - 1) - log(3x + 1) = 1$ $\left[x = 15+2\cdot\sqrt{59}\right]$

20. $log_{½}(1 - 3x) + log_{½}(4 + x)= -3$ $\left[x = \frac{-11\pm\sqrt{73}}{6}\right]$ $log(x - 2) + log(1 + x) = -1$ $\left[x = \frac{5+\sqrt{235}}{10}\right]$

21. $ln(x^2 + x) - ln(3x + 2) = -1$ $\left[x = \frac{3-e+\sqrt{e^2+2e+9}}{2e}\right]$ $ln(4x + 1) + ln(3 - 2x) = 2$ [∅]

22. $log_2(2x + 3) = log_{½}(3x - 2)$ $\left[x = \frac{-5+\sqrt{193}}{12}\right]$ $log_{¼}(5 - 3x) + log_4(3 - 5x) = 0$ [$x = -1$]

23. $log_2(3x + 1) = log_4(2 - x)$ $\left[x = \frac{-7+\sqrt{85}}{18}\right]$ $log_2(1 + x) - log_8(5x^2 + 8x - 5) = 0$ [$x = 1 \vee x = 3$]

24. $log_9(x^2 + 2x + 1) = log_3(2x - 1)$ [$x = 2$] $log_9(2 - 8x^2 + 3x) + log_{1/3}(2x + 1) = 0$ [$x = -1/3 \vee x = ¼$]

25. $log_2(3 + 5x) = log_{\sqrt{2}}\left(3x\right)$ $\left[x = \frac{5+\sqrt{133}}{8}\right]$ $log_{1/3}(1 + 7x) + log_{\sqrt{3}}\left(4x-1\right)=0$ [$x = 15/16$]

26. $log_2(x) - log_4(1 + x) = log_8(2x - 1)$ $\left[x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right]$ $log_{½}(1 - x) + log_2(1 - 2x) = log_4(1 + x)$ [$x = 0$]

Livello 3

27. $log_{2x}(3x + 2) - log_{2x}(1 + x^2) + log_{2x}(5 - 7x) = 0$ $\left[x = \frac{1+\sqrt{793}}{44}\right]$ $2\cdot log_{x^4-1}\left(3x^2-1\right)=1$ [∅]

28. $log_{x^2-1}\left(1-x\right)-log_{x^2-1}\left(3x^2+x\right)+log_{x^2-1}\left(1+3x\right)=0$ [∅] $log_{¼}[log_9(x^2 - x)] = ½$ $\left[x = \frac{1\pm\sqrt{13}}{2}\right]$

29. $\log_{\sqrt{2}}\left[\log_3(3x-1)\right]=2$ $[x = 10/3]$ $\log_{x^2}\left(1-3x^2+x\right)=\frac{1}{2}$ $\left[x=-\frac{1}{3}\vee x=\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

30. $\log_4[\log_3(x^2+2)] = \frac{1}{2}$ $\left[x=\pm\sqrt{7}\right]$ $\log_2\left\{\log_{\frac{1}{3}}\left[\log_{\sqrt{2}}\left(1-x^2\right)\right]\right\}=1$ $[\varnothing]$

31. $\log_2\left[\log_{\sqrt{3}}\left(x^2-x\right)\right]=2$ $\left[x=\frac{1\pm\sqrt{37}}{2}\right]$ $\log_{\sqrt{2}}\left[\log_2\left(2x^2+1\right)\right]=4$ $\left[x=\pm\frac{\sqrt{30}}{2}\right]$

32. $\log_3\{\log_2[\log_4(3x+1)]\} = 0$ $[x = 5]$ $\log_{81}[\log_3(3+2x)] = \frac{1}{4}$ $[x = 12]$

Spiega, senza effettuare alcun calcolo, perché le seguenti equazioni logaritmiche non hanno soluzioni

33. $\log_2(x^2-2) + \log_2(-x^2) = x$ $\log_2(x-2) - \log_3(2-x) = 1$ $\log^2(2x-1) = -5$

34. $\log_{x-1}(x-1) = 2$ $\log_{x^2-3x+1}\left(\frac{x-1}{2x-2}\right)=3$

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere il seguente sistema $\begin{cases}\log(x)+\log(y)=1\\ \log(x)-\log(y)=2\end{cases}$. Basta sostituire ai logaritmi delle incognite a piacere, per ottenere un semplice sistema di equazioni lineari.

$$\log(x)=a,\log(y)=b\Rightarrow\begin{cases}a+b=1\\ a-b=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{3}{2}\\ b=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\log(x)=\frac{3}{2}\\ \log(y)=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=10^{\frac{3}{2}}\\ b=10^{-\frac{1}{2}}\end{cases}$$

Livello 1

35. $\begin{matrix}\log_4(x)-\log_4(y)=0\\ \log_4(x)+\log_4(y)=1\end{matrix}$ $[x = 2, y = 2]$ $\begin{cases}\log_2(x)+\log_2(y)=-1\\ 2\cdot\log_2(x)-3\cdot\log_2(y)=2\end{cases}$ $[x = 2^{-1/5}, y = 2^{-4/5}]$

36. $\begin{cases}\log_3(x+1)-\log_3(y-1)=2\\ \log_3(x+1)-2\cdot\log_3(y-1)=-1\end{cases}$ $[x = 242, y = 28]$ $\begin{cases}\log_2(x+2)+3\cdot\log_3(y)=4\\ 3\cdot\log_2(x+2)-\log_3(y)=5\end{cases}$ $[x = 2^{19/10}-2, y = 3^{7/10}]$

37. $\begin{cases}\log_{\sqrt{2}}(2x+1)-2\cdot\log_{\sqrt{3}}(4y-1)=2\\ 3\cdot\log_{\sqrt{2}}(2x+1)-4\cdot\log_{\sqrt{3}}(4y-1)=0\end{cases}$ $\left[x=\frac{\sqrt{2}-2}{4},y=\frac{\sqrt[4]{3}+3}{12}\right]$

38. $\begin{cases}\log_2\left(x^2\right)+3\cdot\log_4\left(y^2\right)=4\\ 2\cdot\log_2(x)-4\cdot\log_4\left(\sqrt{y}\right)=1\end{cases}$ $\left[x=\pm\sqrt[8]{2^7},y=\pm\sqrt[4]{8}\right]$

39. $\begin{cases}2\cdot\log(2x+1)+5\cdot\log(1-2y)=1\\ 4\cdot\log(2x+1)-3\cdot\log(1-2y)=-3\end{cases}$ $\left[x=\frac{10^{-4/13}-1}{2},y=\frac{1-10^{5/13}}{2}\right]$

40. $\begin{cases}3\cdot\log(x+y)+2\cdot\log(x-y)=1\\ \log(x-y)-\log(x+y)=4\end{cases}$ $\left[x=\frac{10001\cdot10^{-7/5}}{2},y=\frac{9999\cdot10^{-7/5}}{2}\right]$

Livello 2

41. $\begin{cases}\log_{\frac{1}{3}}(3x+1)-\frac{4}{3}\cdot\log_3(4y)=\frac{4}{3}\\ \frac{3}{2}\cdot\log_3(4y)+\frac{2}{3}\cdot\log_{\frac{1}{3}}(3x+1)=-\frac{3}{4}\end{cases}$ $\left[x=\frac{3^{25/43}-3}{9},y=\frac{3^{27/86}}{12}\right]$

42. $\begin{cases} log_{1/2}(x+1)+4\cdot log_2(y-2)=\frac{1}{2} \\ \frac{2}{5}\cdot log_2(y-2)-\frac{5}{2}\cdot log_{1/2}(x+1)=\frac{1}{3} \end{cases}$ $[x = 2^{17/156} - 1, y = 2^{95/264} + 2]$

43. $\begin{cases} log_3\left(\frac{x+1}{2}\right)+\frac{2}{3}\cdot log_2\left(\frac{y-1}{3}\right)=\frac{4}{5} \\ log_3\left(\frac{x+1}{2}\right)-\frac{1}{3}\cdot log_2\left(\frac{y-1}{3}\right)=-\frac{3}{2} \end{cases}$ $\left[x=\frac{2\cdot 3^{4/15}-3}{3}, y=12\cdot 2^{3/10}+1\right]$

44. $\begin{cases} ln(x+2y)+ln(3x-y)=4 \\ 3\cdot ln(3x-y)+2\cdot ln(x+2y)=-3 \end{cases}$ $\left[x=\frac{2+e^{26}}{7e^{11}}, y=\frac{3e^{26}-1}{7e^{11}}\right]$ $\begin{cases} log_x(y)=2 \\ log_y(x)=1 \end{cases}$ $[\varnothing]$

45. $\begin{cases} log_{x+1}(y)=2 \\ log_{y-1}(x+1)=1 \end{cases}$ $\left[x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}, y=\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right]$ $\begin{cases} ln(x)+ln(y)=5 \\ ln(x)\cdot ln(y)=6 \end{cases}$ $[(x = e^2, y = e^3) \vee (x = e^3, y = e^2)]$

46. $\begin{cases} log_3(x-3)+log_3(2y+1)=4 \\ log_3(x-3)\cdot log_3(2y+1)-1=2 \end{cases}$ $[(x = 6, y = 13) \vee (x = 30, y = 1)]$

47. $\begin{cases} log_3(x^2)+log_3(y^3)=7 \\ log_3(x^3)-log_3(y^2)=-9 \end{cases}$ $[(x = 1/3, y = 27)]$ $\begin{cases} log_2(x^3)+log_2(y^2)=14 \\ log_2(x^2)-log_2(y^3)=-8 \end{cases}$ $[(x = 4, y = 16)]$

48. $\begin{cases} log_3^2(x)+log_2^2(y)=13 \\ log_3(x)\cdot log_2(y)=6 \end{cases}$ $[(x = 1/27, y = 1/4) \vee (x = 1/9, y = 1/8) \vee (x = 9, y = 8) \vee (x = 27, y = 4)]$

49. $\begin{cases} log_3(x+1)+log_3(y-1)=5 \\ log_3^2(x+1)\cdot log_3^2(y-1)=36 \end{cases}$ $[(x = -2/3, y = 730)\vee(x = 8, y = 28)\vee(x = 26, y = 10)\vee(x = 728, y = 4/3)]$

Livello 3

50. $\begin{cases} log_x(y)=2 \\ log_y(x)=\frac{1}{2} \end{cases}$ $[\forall\, x, y \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}: x^2 = y]$ $\begin{cases} log_x(y)=2 \\ log_y(x+1)=1 \end{cases}$ $\left[x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, y=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere la disequazione logaritmica: $log(x + 2) \geq log(2x - 1) + log(3x + 5)$. Imponiamo la condizione di realtà sugli argomenti dei logaritmi: $\begin{cases} x+2>0 \\ 2x-1>0 \\ 3x+5>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x>1/2 \\ x>-5/3 \end{cases} \Rightarrow x>\frac{1}{2}$.

Adesso scriviamo in altro modo la disequazione: $log(x + 2) \geq log[(2x - 1) \cdot (3x + 5)]$. Passiamo alla disequazione fra gli argomenti: $(x + 2) \geq (2x - 1) \cdot (3x + 5) \Rightarrow 6x^2 + 6x - 7 \geq 0$. La disequazione deve essere risolta tenuto conto della condizione di realtà: $\begin{cases} 6x^2+6x-7\geq 0 \\ x>\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\leq\frac{-3-\sqrt{51}}{6} \vee x\geq\frac{-3+\sqrt{51}}{6} \\ x>\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x\geq\frac{-3+\sqrt{51}}{6}$

Risolvi le seguenti disequazioni logaritmiche

Livello 1

51. $log_{4/3}(4x - 1) < log_{4/3}(x - 2)$ $[\varnothing]$ $log_{1/2}(x^2) < -2$ $[x < -2 \vee x > 2]$ $log_3(x^2 - x) \geq log_3(x - 1)$ $[x > 1]$

52. $log(2x - 1)<log(2 - 3x)$ $[1/2 < x < 3/5]$ $log_{4/5}(2 - x)\leq log_{4/5}(1 + x)$ $[-1 < x \leq 1/2]$ $ln(1 - x) > 2$ $[x < 1 - e^2]$

53. $log_{1/4}(3x^2 + 2x - 1) - log_{1/4}(2 - x^2) < 0$ $\left[-\sqrt{2} < x < \frac{-1-\sqrt{13}}{4} \vee \frac{-1+\sqrt{13}}{4} < x < \sqrt{2}\right]$ $log(x) \ge 1$ $[x \ge 10]$

54. $log_{\sqrt{2}}(2x+3) - log_{\sqrt{2}}(3x) < 1$ $\left[x > \frac{6+9\cdot\sqrt{2}}{14}\right]$ $log_{3/4}(2 - x^2) > log_{3/4}(5x - 4)$ $\left[1 < x < \sqrt{2}\right]$

55. $log_7(1 + x) - log_7(x^2 - 1) + log_7(3 - 4x) \le 0$ $[x < -1 \vee x > 1]$

56. $log_{2/3}(3x + 2) - log_{2/3}(3x^2 + 1) + log_{2/3}(1 + 3x) > 0$ $\left[-\frac{1}{3} < x < \frac{\sqrt{57}-9}{12}\right]$

57. $log_{2/5}(13x) - log_{2/5}(2x - x^2) + log_{2/5}(4 - 3x) \ge 0$ $[25/19 \le x < 4/3]$

58. $3log^2{}_3(x) - 8log_3(x) - 3 > 0$ $\left[0 < x < \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \vee x > 27\right]$ $log^2{}_{3/5}(x) - 3log_{3/5}(x) + 2 < 0$ $[9/25 < x < 3/5]$

59. $2log^2{}_5(4x + 1) - log_5(4x + 1) - 1 \le 0$ $\left[\frac{\sqrt{5}-5}{20} \le x \le 1\right]$

60. $8log^2{}_{1/2}(3 - 4x) - 31log_{1/2}(3 - 4x) - 4 \le 0$ $\left[\frac{3-\sqrt[8]{2}}{4} \le x \le \frac{47}{64}\right]$

61. $2\cdot log^2_{\sqrt{2}}(x^2+1) + 9\cdot log_5(x^2+1) + 4 < 0$ $\left[-\sqrt{3} < x < -\sqrt{\sqrt[4]{2}-1} \vee \sqrt{\sqrt[4]{2}-1} < x < \sqrt{3}\right]$

62. $9\cdot log^2_{1/\sqrt{3}}(2-x^2) - 26\cdot log_{1/\sqrt{3}}(2-x^2) - 3 \ge 0$

$\left[-\sqrt{2} < x \le -\frac{\sqrt{18-\sqrt{3}}}{3} \vee -\sqrt{2-\sqrt[18]{3}} \le x \le \sqrt{2-\sqrt[18]{3}} \vee \frac{\sqrt{18-\sqrt{3}}}{3} \le x < \sqrt{2}\right]$

63. $log^2_{\sqrt{3}}(2x^2+1) - 2\cdot log_{\sqrt{3}}(2x^2+1) - 8 \ge 0$ $[x \le -2 \vee x \ge 2]$

64. $log^2_{\sqrt{8}}(x+x^2) + 2\cdot log_{\sqrt{8}}(x+x^2) - 8 < 0$ $\left[\frac{-1-\sqrt{33}}{2} < x < \frac{-4-\sqrt{17}}{8} \vee \frac{-4+\sqrt{17}}{8} < x < \frac{-1+\sqrt{33}}{2}\right]$

Livello 2

65. $log_{3/2}(x^2 - 3x) - log_{3/2}(2 - x^2) \le 1$ $\left[\frac{3-\sqrt{39}}{5} \le x < 0\right]$

66. $log_4(4 - 7x + x^2) - log_4(x^2 - 2) \ge 1/2$ $\left[-8 \le x < -\sqrt{2}\right]$

67. $\dfrac{log^2_{\sqrt{2}}(2x+1) - 2}{log^2_2(1-3x) - 4} \le 0$ $\left[-\frac{1}{3} < x \le 2^{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \cdot \left(1 - 2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) \vee \frac{1}{6} < x \le \frac{2^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 1}{2}\right]$

68. $\dfrac{2\cdot log_3(x+1) - 1}{3\cdot log_4(3x) + 2} \le 0$ $\left[\frac{\sqrt[3]{2}}{12} < x \le \sqrt{3} - 1\right]$ $\dfrac{ln^2(x^2) - ln(x^2)}{log^2(x) + log(x)} > 0$ $\left[\left(0 < x < \frac{1}{10}\right) \vee x > \sqrt{e}\right]$

69. $\dfrac{1+2\cdot log(3-x)}{1-2\cdot log(3-x)} - \dfrac{4}{1-4\cdot log^2(3-x)} - 1 \le 0$ $\left[\frac{29}{10} \le x < 3 \vee x < \frac{30-\sqrt{10}}{10}\right]$

70. $\dfrac{4\cdot ln(x) - 1}{3\cdot ln(x) - 5} - \dfrac{2\cdot ln(x) + 7}{ln(x) + 1} + 3 > 0$ $\left[0 < x < \frac{1}{e} \vee x > \sqrt[3]{e^5}\right]$

71. $\dfrac{6\cdot log_{3/4}(x) - 1}{5\cdot log_{3/4}(x) + 3} - \dfrac{4\cdot log_{3/4}(x) + 7}{3\cdot log_{3/4}(x) + 5} \le 2$ $\left[0 < x < \frac{2\cdot\sqrt[5]{18}}{3} \vee \frac{4}{3} \le x \frac{8\cdot\sqrt[3]{6}}{9} \vee x \ge \frac{8\cdot\sqrt[4]{12}}{9}\right]$

Livello 3

72. $log_x(x-1) + log_x(2x+3) \le log_x(4x^2+1)$ $[x > 3/2]$ $x^{log_2(x)} > 8$ $\left[0 < x < 2^{-\sqrt{3}} \vee x > 2^{\sqrt{3}}\right]$

73. $log_{x-1}(2x-1) + log_{x-1}(3-x) > log_{x-1}(3x^2+x-1)$ $[1 < x < 2]$ $x^{log_3(x)} \le \sqrt{3}$ $\left[3^{-\sqrt{2}/2} \le x \le 3^{\sqrt{2}/2}\right]$

74. $log_{3x+1}(4x-1) + log_{3x+1}(5x-2) \ge log_{3x+1}(2x^2-1)$ $\left[x > \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ $x^{log_{1/4}(x)} \le \sqrt[3]{2}$ $[x > 0]$

75. $log_{x^2-1}(4x+1) + log_{x^2-1}(5+2x) < log_{x^2-1}(x^2-3x-2)$ $[\varnothing]$

L'angolo di Derive

Derive continua a non risolvere disequazioni, neanche logaritmiche, se non di tipo immediato

```
#1:   SOLVE(LOG(2 + x) - LOG(3 - x) + LOG(1 + x) = 0, x, Real)

#2:                                                          x = √5 - 2

#3:   SOLVE(LOG(y + x) = 1 ∧ LOG(3 - y) = LOG(x - y), [x, y], Real)

#4:                                                       x = 3 ∧ y = e - 3

#5:   SOLVE(LOG(x) > 1, x, Real)

#6:                                                              x > e

#7:   SOLVE(LOG(x) > LOG(2 + x), x, Real)

#8:                                                      LN(x + 2) - LN(x) < 0
```

Come si vede risolve equazioni logaritmiche (#1) e anche sistemi (#3), risolve solo la disequazione immediata #5, ma non la #7, non particolarmente complicata.
Attività Controllare i risultati degli esercizi usando, laddove possibile, Derive.

L'angolo di Microsoft Mathematics

Abbiamo già visto che il software non risolve disequazioni, risolve però, anche se in modo approssimato se le soluzioni non sono "semplici" sia equazioni logaitmiche

Input $\quad$ nsolve(log(3 x + 1) − 2 log(x − 1) = log(2 + 3 x) , x)

Soluzione $\quad$ $x \approx 1.9337094930553$

Che sistemi di equazioni logaritmiche

Input $\quad$ nsolve({log(x + y) = log(x − y) , log(2 x + y) = log(3 x − y)})

Soluzione $\quad$ $\begin{cases} x \approx 76.214599609375 \\ y \approx 17.90771484375 \end{cases}$

Rimarchiamo che il comando nsolve viene applicato automaticamente dal software, anche se noi immettiamo il comando di risoluzione "esatta" solve.

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi.

1. Quanti sono i distinti fattori primi di N, sapendo che $log_2\{log_3[log_5(log_7(N)]\} = 11$? [1]
2. Sia k un numero positivo diverso da 1. Se $log_k(x) \cdot log_3(k) = 2$, determinare x. [9]
3. Semplificare $log_2(3) \cdot log_3(4) \cdot log_4(5) \cdot \ldots \cdot log_{2^n-1}(2^n)$. $[n]$

4. Semplificare $log_3(4) \cdot log_4(5) \cdot log_5(6) \cdot ... \cdot log_{3^{n-1}}(3^n)$ [n]
5. Semplificare $log_n(n+1) \cdot log_{n+1}(n+2) \cdot log_{n+2}(n+3) \cdot ... \cdot log_{n^m-1}(n^m)$ [m]
6. Risolvere: $log_{3x}(36) = x$ [$x = 2$] $log_2\{log_3[log_4(log_5(x))]\} = 0$ $\left[x = 5^{4^3}\right]$

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.
A = Abacus (rivista on line)
AHSME = Annual High School Mathematics Examination
AMC = American Mathematical Contest
ARML = American Regions Mathematics League
HSMC = A&M University High School Mathematics Contest
RICE = Rice University Mathematics Tournament

Lavoriamo insieme

Il seguente quesito è stato assegnato all'AHSME del 1950.
Data l'identità $log(m) = b - log(n)$, determinare m.
Abbiamo $log(m) + log(n) = b$, da cui applicando le proprietà dei logaritmi: $log(m \cdot n) = b$. Quindi per il significato di logaritmo si ha: $m \cdot n = 10^b$, quindi $m = 10^b/n$.

1. (AHSME 1951) Sapendo che $log(8) \approx 0{,}9031$ e $log(9) \approx 0{,}9542$, quale dei seguenti numeri NON può essere calcolato, nemmeno in modo approssimato, senza l'uso della calcolatrice o delle tavole? Calcolare dei valori approssimati per gli altri valori.
A) log (17) B) $log(5/4)$ C) log (15) D) log (600) E) log (0,4)
[A); 0,0969; 1,1761; 2,7781; –0,3979]
2. (AHSME 1952) In che relazione devono essere p e q affinché si abbia la validità della seguente uguaglianza : $log(p) + log(q) = log(p + q)$? $\left[p = \dfrac{q}{q-1}\right]$
3. (AHSME 1954) Sapendo che $ln(2) \approx 0{,}3010$ e $ln(3) \approx 0{,}4771$ e $3^{x+3} = 135$, determinare un valore approssimato di x. [1,47]
4. (AHSME 1955) Risolvere $log(x) - 5\, log(3) = -2$. [2,43]
5. (AHSME 1958) Se $P = \dfrac{s}{(1+k)^n}$, ricavare n. $\left[\dfrac{log(s/P)}{log(1+k)}\right]$
6. (AHSME 1958) Risolvere in x: $log_k(x) \cdot log_5(k) = 3$, k è positivo e diverso da 1. [125]
7. (AHSME 1959) Risolvere in y: $log_3(x) \cdot log_x(2x) \cdot log_{2x}(y) = log_x(x^2)$. [$y = 9$]
8. (AHSME 1960) Risolvere: : $log_{2x}(216) = x$. [$x = 3$]
9. (AHSME 1961) Consideriamo i grafici delle funzioni: $y = 2 \cdot log(x)$, $y = log(2x)$, si intersecano e se sì in quanti punti? [Si incontrano in (2; $log(4)$)]
10. (AHSME 1961) Se $log(2) = a$ e $log(3) = b$, determinare $log_5(12)$. $\left[\dfrac{2a+b}{1-a}\right]$
11. (AHSME 1962) Se $log_8(225) = a$ e $log_2(15) = b$, determinare a in funzione di b. [$a = 2/3b$]
12. (AHSME 1962) Risolvere $x^{log_{10}(x)} = \dfrac{x^3}{100}$ [$x = 10 \vee x = 100$]
13. (AHSME 1964) Risolvere in x: $log_{b^2}(x) + log_{x^2}(b) = 1$, $b \neq 1 \wedge x \neq 1$. [$x = b$]

Lavoriamo insieme

Svolgiamo un quesito assegnato agli HSMC del 2004.
Sia k un numero positivo diverso da 1. Se $log_k(x) \cdot log_5(k) = 5/2$, determinare x.
Innalziamo tutto alla base 5: $5^{log_k(x) \cdot log_5(k)} = 5^{\frac{5}{2}} \Rightarrow \left(5^{log_5(k)}\right)^{log_k(x)} = 5^{\frac{5}{2}}$. Ricordiamo che in generale si ha:

$a^{log_a(b)} = b$, quindi: $k^{log_k(x)} = 5^{\frac{5}{2}} \Rightarrow x = 5^{\frac{5}{2}} = \sqrt{5^5} = 25 \cdot \sqrt{5}$.

14. (AHSME 1965) Risolvere in x: $log_a(x) \cdot log_b(x) = log_a(b)$. [$x = b \vee x = 1/b$]
15. (AHSME 1965) Provare che comunque si sceglie un numero positivo A, allora esiste $x > 2/3$ in modo che $log(x^2 + 3) - 2 \cdot log(x)$ sia più piccolo di A.
16. (AHSME 1966) Se $log_M(N) = log_N(M)$, $M \neq N$, $M \cdot N > 0$, $M, N \neq 1$, determinare $M \cdot N$. [1]
17. (AHSME 1971) Se $log_2[log_3(log_4(x))] = log_3[log_4(log_2(y))] = log_4[log_2(log_3(z))] = 0$, calcolare $x + y + z$. [89]
18. (AHSME 1972) Data $f(x) = log\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$, $-1 < x < 1$, calcolare $f\left(\frac{3x+x^3}{1+3x^2}\right)$ ed esprimerla mediante $f(x)$. $\left[log\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3\right] = 3 \cdot f(x)\right]$
19. (AHSME 1972) Risolvere $|x - log(y)| = x + log(y)$. [$x = 0 \vee y = 1$]
20. (AHSME 1974) Se $log_8(3) = p$, $log_3(5) = q$, determinare $log(5)$. $\left[\frac{3pq}{1+3pq}\right]$
21. (AHSME 1981) Risolvere in x: $(2x)^{log_b(2)} - (3x)^{log_b(3)} = 0$, $b > 1$, $x > 0$. [1/6]
22. (AHSME 1982) Se $a > 1$, $b > 1$, $p = \frac{log_b[log_b(a)]}{log_b(a)}$, determinare a^p. [$log_b(a)$]
23. (AHSME 1986) Indichiamo con $\lfloor x \rfloor$, il massimo intero contenuto in x, così per esempio $\lfloor 1.23 \rfloor = 1$, $\lfloor -2.14 \rfloor = -3$. Determinare il valore dell'espressione $\sum_{N=1}^{1024} \lfloor \log_2(N) \rfloor$. [8204]
24. (AHSME 1988) Se $log_9(p) + log_{12}(q) = log_{16}(p + q)$, determinare quanto vale q/p. $\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$
25. (AHSME 1990) Se $log_x(y)$, $log_y(x) = 10/3$, $x, y > 0$, $xy = 144$, calcolare $\frac{x+y}{2}$. $\left[13 \cdot \sqrt{3}\right]$
26. (AHSME 1995) Sapendo che si ha $A \cdot log_{200}(5) + B \cdot log_{200}(2) = C$, con A, B e C numeri naturali senza fattori comuni diversi da 1, determinare $A + B + C$. [6]

Lavoriamo insieme

Svolgiamo un quesito assegnato agli HSMC del 2004.
I tassi di nascita e di morte di una città sono entrambi proporzionali alla popolazione y con costanti di proporzionalità $k1$ e $k2$ rispettivamente. La popolazione della città raddoppia ogni 24 anni. Se non ci fossero nascite, la popolazione dimezzerebbe in 8 anni. In quanto tempo la popolazione raddoppierebbe se non ci fossero morti?
Noi sappiamo che ogni anno per ogni y abitanti ci sono $k1 \cdot y$ nati e $k2 \cdot y$ morti, ciò significa che la popolazione che al tempo 0 è y, dopo un anno sarà $y + (k1 - k2) \cdot y = (1 + k1 - k2) \cdot y$; dopo 2 anni diventerà ovviamente $(1 + k1 - k2) \cdot y + (k1 - k2) \cdot (1 + k1 - k2) \cdot y = (1 + k1 - k2)^2 \cdot y$. Generalizzando, dopo 24 anni sarà $(1 + k1 - k2)^{24} \cdot y$ e questo sarà pari a $2y$.
Cioè $(1 + k1 - k2)^{24} = 2 \Rightarrow 24ln(1 + k1 - k2) = ln(2) \Rightarrow ln(1 + k1 - k2) = ln(2)/24 \Rightarrow (1 + k1 - k2) = e^{ln(2)/24}$.
Se non ci fossero nascite invece la popolazione dopo un anno diventerebbe $y - k2 \cdot y = (1 - k2) \cdot y$, dopo due anni $(1 - k2) \cdot y - k2 \cdot (1 - k2) \cdot y = (1 - k2)^2 \cdot y$, dopo 8 anni $(1 - k2)^8 \cdot y$, che sarà uguale a $0{,}5y$.
Questo vuol dire che si ha: $(1 - k2)^8 = 0{,}5 \Rightarrow 8ln(1 - k2) = ln(0{,}5) = -ln(2) \Rightarrow ln(1 - k2) = -ln(2)/8 \Rightarrow$ $\Rightarrow (1 - k2) = e^{-ln(2)/8} \Rightarrow k2 = 1 - e^{-ln(2)/8}$. Quindi tenuto conto del risultato precedente possiamo scrivere: $1 + k1 - (1 - e^{-ln(2)/8}) = e^{ln(2)/24} \Rightarrow k1 = -e^{-ln(2)/8} + e^{ln(2)/24}$. Se non ci fossero morti, la popolazione dopo un anno diventerebbe $y + k1 \cdot y = (1 + k1) \cdot y$, dopo due anni $(1 + k1) \cdot y + k1 \cdot (1 + k1) \cdot y = (1 + k1)^2 \cdot y$, dopo x anni $(1 + k1)^x \cdot y$ e questo deve essere $2y$. Quindi

$$(1+k1)^x = 2 \Rightarrow ln\left[(1+k1)^x\right] = ln(2) \Rightarrow x \cdot ln(1+k1) = ln(2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \frac{ln(2)}{ln(1+k1)} = \frac{ln(2)}{\ln\left(1+e^{ln(2)/24} - e^{-ln(2)/8}\right)} \approx 4,$$

27. (AHSME 1996) Se $3 = k \cdot 2^r$ e $15 = k \cdot 4^r$, quanto vale r? [$log_2(5)$]
28. (AHSME 1997) La retta $x = k$ incontra il grafico di $y = log_5(x)$ e quello di $y = log_5(x + 4)$. La distanza fra i punti di intersezione è 0,5. Se $k = a + \sqrt{b}; a, b \in \mathbb{Z}$, quanto è $a + b$? [6]
29. (AHSME 1997) Per ogni numero naturale n, sia $f(n) = \begin{cases} log_8(n) & \text{se } log_8(n) \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$. Quanto vale $\sum_{n=1}^{1997} f(n)$? [55/3]
30. (AMC 2000) Quanti interi positivi b sono tali che $log_b(729)$ sia un intero positivo? [4]
31. (HSMC 2006) Calcolare $log_a\left(\sqrt{x} \cdot y^2\right)$, se $log_a\left(x^2 = 1\right), log_a\left(\sqrt{y}\right) = 2$. [33/4]
32. (HSMC 2007) Se $log_a(x) = ½$, $log_b(x) = 1//3$, $log_c(x) = –¼$, $log_d(x) = –1/5$, calcolare $log_{abcd}(x)$. [–¼]
33. (RICE 2007) Determinare è il minimo numero reale x per cui $log_3(27) \cdot log_x(7) = log_{27}(x) \cdot log_7(3)$. [1/343]
34. (ARML 2008) L'equazione $\dfrac{log_{12}\left(log_8\left(log_4(x)\right)\right)}{log_5\left(log_4\left(log_y\left(log_2(x)\right)\right)\right)} = 0$ ha una soluzione per x, se $1<y<b$, $y \neq a$. Calcolare la coppia ordinata (a, b) con b il massimo possibile. [(2, 16)]

Questions in English

Working together

This is a question assigned at HSMC in 2006.

What is the value of $log\left(\frac{2}{1}\right) + log\left(\frac{3}{2}\right) + log\left(\frac{4}{3}\right) + \ldots + log\left(\frac{99}{98}\right) + log\left(\frac{100}{99}\right)$, where the logarithms are base 10?

Writing the logs as the difference of the logs of the numerators and denominators, we see the sum is

$$log(2) - log(1) + log(3) - log(2) + log(4) - log(3) + \ldots + log(99) - log(98) + log(100) - log(99) =$$
$$= - log(1) + log(100) = 2.$$

35. (A 1999) There are two cell–cultures with an initial zero number of cells. You add 80 cells to the first culture at every 10th second and then you put half of the cells from the first culture to the second culture. In the second culture half of the cells die every 20 seconds starting in the 19th second of this experiment. What is happening in the 50th second? [188; 132]
36. (HSMC1999) Suppose $x, b > 0$ and $log_{b^2}(x) + log_{x^2}(b) = 1$. Find x. [b]
37. (HSMC1999) Given that $log_a(32) – log_a(4) = –3$, find a. [½]
38. (HSMC2005) What is the value of $log_2\{log_2[log_2(16)]\}$? [1]
39. (HSMC2006) Find all possible real values of x satisfying the equation: $log(x^2) = 0{,}25\ log(4x + 3)^4$. $\left[2 \pm \sqrt{7}, -1, -3\right]$

Working together

This is a question assigned at HSMC in 2002.

There exists a positive number k such that $log_2(x) + log_4(x) + log_8(x) = log_k(x)$, for all positive real numbers x. If $k = \sqrt[b]{a}$, where a and b are positive integers, what is the smallest possible value of $a + b$?

For all positive x, we have $log_2(x) + log_4(x) + log_8(x) = log_2(x) + log_2(x)/log_2(4) + log_2(x)/log_8(2) =$

$= log_2(x) \cdot (1 + ½ + 1/3) = 11/6 \cdot log_2(x)$.
So must be: $log_k(x) = 11/6 \cdot log_2(x) = 11/6 \cdot log_k(x)/log_k(2) \Rightarrow log_k(2) = 11/6 \Rightarrow k^{11/6} = 2 \Rightarrow k = 2^{6/11}$.
But $k = a^{1/b}$, thus: $a^{1/b} = 2^{6/11} \Rightarrow a^{1/b} = (2^6)^{1/11} \Rightarrow a = 64$ and $b = 1$, so $a + b = 75$. (Any other equivalent choice of a and b would have a equal to a power of 64 and b a multiple of 11.)

40. (HSMC2006) Given that $log_a(27) = b$, express $log_{\sqrt{3}}\left(\sqrt[6]{a}\right)$ in terms of b. [$1/b$]

41. (HSMC2006) Simplify the expression $\left(\sqrt{2}\right)^{log_2(9)}$ [3]

42. (HSMC2006) What is the value of $\dfrac{log_2(3)\cdot log_4(5)\cdot log_6(7)}{log_4(3)\cdot log_6(5)\cdot log_8(7)}$? [3]

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Accademia militare) Per $a, b, c, d > 0$ e a diverso da 1, se *"log"* indica *"logaritmo in base a"*, allora $log\ [(a \cdot b^2)^3 \cdot c/d]$ è uguale a:
A) $log(b) + log(c) – log(d)$ B) $3 + 6\ log(b) + log(c) – log(d)$
C) $log(a) + 2\ log(b) + 3\ log(c) – log(d)$ D) $log(b) – log(c) + log(d)$
2. (Accademia militare) Individuare l'ordine, per valore crescente, dei seguenti logaritmi naturali: $a = log\ (9/2)$; $b = log\ (15/4)$; $c = log\ (36/7)$; $d = log\ (8)$.
A) $b < a < c < d$ B) $c < a < b < d$ C) $a < c < b < d$ D) nessuna delle risposte date
3. (Accademia militare) Stabilire la base b dei logaritmi per cui si abbia $log_b(1/8) = 3$.
A) 2 B) 1/8 C) 1 D) ½
4. (Medicina 2000) L'espressione $log(x^2)$ equivale a
A) $2\ log(x)$ B) $log(2)$ C) $2\ log(|x|)$ D) $log\left(\sqrt{x}\right)$ E) $log\ (2|x|)$
5. (Medicina 2000) Quale di questi numeri: 10; e; 0,1; 100 possono essere presi come BASE di logaritmi?
A) Solo e B) Solo i numeri minori di 100 C) Solo i numeri maggiori di 1
D) Solo 10 ed e E) Tutti quelli indicati (e altri)
6. (Ingegneria – Politecnico di Torino 1999). L'equazione $log(4x) + log(9x) = 2$ è verificata per
A) $x = \pm\ 10/6$ B) $x = 10/6$ C) $x = 100/36$ D) $x = 20/13$ E) $x = 100/13$
7. (Ingegneria – Politecnico di Torino 2000). Quale dei seguenti numeri ha logaritmo in base 10 strettamente compreso tra 5 e 7? A) $10^7 – 10^4$ B) $–10^6$ C) $–10^{–6}$ D) $10^2 + 10^4$ E) 12345
8. (Ingegneria – Varie università 2002). Posto $a = 0{,}21$; $b = \dfrac{1}{5}; c = \dfrac{1}{log_2(5)}$ si ha
A) $c < b < a$ B) $a < c < b$ C) $a < b < c$ D) $c < a < b$ E) $b < a < c$
9. (Ingegneria – Varie università 2002). L'espressione $7^{2+log_7(x)}$ è uguale a
A) $49x$ B) $7^2 + x$ C) $49 + log_7(x)$ D) $49\ log_7(x)$ E) $7x$
10. (Ingegneria, 2009) Dato un qualunque numero reale positivo x, allora $log(x^3) – log(x^2)$ è uguale a
A) $log(x^5)$ B) $log(x^3)/log(x^2)$ C) $log(x)$ D) 0 E) $log(x^3 – x^2)$
11. (Ingegneria, 2009) L'espressione $log\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)\cdot log\left(1000\right)$ vale
A) $log\left[\dfrac{1000\cdot\left(x^2+1\right)}{3}\right]$ B) $log\left(x^2+1\right)$ C) $log\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)+log\left(1000\right)$
D) $\dfrac{1}{3}\cdot log\left[1000\cdot\left(x^2+1\right)\right]$ E) $log\left(1000\cdot\sqrt[3]{x^2+1}\right)$

12. (Ingegneria – Università di Padova 2010). Il numero $log_{25}(125)$ è uguale a
A) 2/3 B) 3/2 C) 5 D) Nessuna delle precedenti possibilità è corretta
13. (Ingegneria – Università di Padova 2010). Sia x un numero reale diverso da zero. L'espressione $log(5x^2)$ si può anche scrivere:
A) $2\ log\ (5x)$ B) $2 \cdot log\left(\sqrt{5}x\right)$ C) $2 \cdot log\left(\sqrt{5}|x|\right)$ D) $log(10x)$
14. (Ingegneria – Università di Padova 2010). Siano x e y numeri reali. Da $log_{1/2}(x) < log_{1/2}(y)$ si deduce:
A) $x > y > 0$ B) $0 < x < y$ C) $|x| \leq |y|$ D) Nessuna delle precedenti possibilità è corretta
15. (Ingegneria – Università di Padova 2010). Le soluzioni reali della disequazione $e^{2x} + 2\ e^x - 8 \leq 0$ sono: A) $x \leq log(2)$ B) $-\ log(4) \leq x \leq log(2)$ C) $0 \leq x \leq log(2)$ D) Nessuna delle precedenti possibilità è corretta
16. (Ingegneria – Università di Padova 2010). L'equazione $log(x - 2) + log(2x - 3) = 2 \cdot log(x)$ ha soluzioni: A) $x = 1, x = 6$ B) $x = 1$ C) l'equazione non ha soluzioni D) $x = 6$
17. (Ingegneria – Università di Padova 2010). Quale delle seguenti affermazioni è vera?
A) $log_2(3) < log_3(2)$ B) $log_2(3) < 3/2$ C) $log_3(2) < 2/3$ D) Nessuna delle precedenti

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_1_5.htm

Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
B	A	D	C	E	B	A	E	A
10	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	
C	B	B	C	A	A	D	C	

6. Geometria dello spazio ambiente

6.1 Rette e piani nello spazio

Prerequisiti

- Possedere nozioni intuitive di forma.
- Possedere nozioni elementari sugli insiemi.
- Avere il concetto di ordine.

Obiettivi

- Saper riconoscere forme geometriche spaziali.
- Saper riconoscere nello spazio ambiente oggetti geometrici, servendosi delle nozioni teoriche per descriverli.
- Saper descrivere oggetti geometrici spaziali.
- Imparare a costruire oggetti geometrici spaziali dei quali viene offerta una loro descrizione.
- Conoscere gli enti geometrici fondamentali della geometria euclidea dello spazio.
- Saper riconoscere le figure spaziali.
- Affinare l'intuizione geometrica controllando le proprie percezioni.

Contenuti

- Postulati della geometria euclidea nello spazio.
- Posizioni reciproche di piani nello spazio.
- Rette sghembe.
- Angoli diedri.
- Perpendicolarità nello spazio

Parole Chiave

Angolo diedro – Complanari – Rette sghembe – Semispazio

Richiamiamo le conoscenze

Postulato A

Ogni retta è formata solo da punti e fra due punti qualsiasi di essa ci sono sempre altri punti. Diciamo che la retta è un insieme continuo e infinito di punti.

Postulato B

Qualsiasi punto scegliamo sul piano per esso passano infinite rette.

Postulato C

Comunque scegliamo due punti distinti nel piano, vi è un'unica retta che li contiene entrambi.

Teorema A

Due rette distinte hanno zero punti o un solo punto in comune.

Definizione A

Due rette si dicono **parallele** se non hanno punti in comune, o se sono coincidenti.

Chiamare parallele due rette coincidenti serve a far valere la proprietà transitiva del parallelismo comunque scegliamo 3 rette, anche se due di esse sono la stessa retta.

Postulato D

Per un punto P fuori da una retta r si può condurre un'unica retta parallela a r.

Definizione B

Due rette che hanno un solo punto in comune si dicono fra loro **incidenti**.

Definizione C

Due rette che hanno più di un punto in comune si dicono fra loro **coincidenti**.

Definizione D

Ciascuno degli insiemi disgiunti determinati da una retta nel piano si chiama **semipiano**.

Definizione E

Diciamo **angolo** di lati le semirette r e s di origine comune C, ciascuno dei due insiemi di punti del piano determinati da r e s, che hanno in comune solo le semirette.

Definizione F

Si dicono fra loro **perpendicolari** o anche **ortogonali** due rette che incontrandosi formano quattro angoli isometrici Ciascuno degli angoli da esse formato si chiama angolo **retto**.

Teorema B

Per un punto P possiamo condurre un'unica retta perpendicolare a un'altra retta r.

Postulati ed enti primitivi della geometria euclidea dello spazio

L'ambiente geometrico in cui viviamo non è piano ma spaziale. Nella realtà gli oggetti piani non esistono, vi sono solo oggetti che possono essere assimilati a piani, come per esempio le pagine di un quaderno o un libro, solo perché una delle tre dimensioni, quella che chiamiamo spessore, è molto più piccola delle rimanenti. Per lo stesso motivo possiamo trattare un lungo filo di seta come un oggetto a una dimensione, perché una sola delle tre dimensioni è molto più grande delle altre due.
Risulta quindi opportuno conoscere meglio la geometria cosiddetta tridimensionale.
Cominciamo a porre qualche postulato.

Postulato 1
Per 3 punti non allineati passa uno e un solo piano. I punti si dicono **complanari**.

Postulato 2
Esistono almeno 4 punti non complanari.

Postulato 3
Un piano divide lo spazio in due parti, ciascuna delle quali si chiama **semispazio**. Ogni segmento che ha per estremi due punti di due semispazi diversi incontra il piano in un punto.

Dal Postulato 1 discende immediatamente il seguente risultato.

Teorema 1
Una retta e un punto fuori di essa determinano un unico piano.
Dimostrazione
La retta è determinata da due suoi punti qualsiasi, prendiamo per esempio A e B. sia C il punto esterno alla retta, ma allora A, B e C individuano un solo piano.

Da cui seguono i seguenti altri risultati.

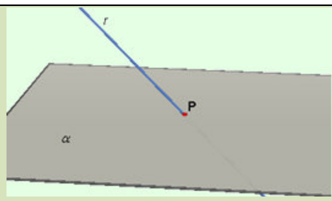
Corollario 1
Se una retta r e un piano α hanno in comune più di un punto allora tutti i punti della retta sono anche punti del piano e si dice che la retta **giace** sul piano.
Dimostrazione
Se r e α hanno in comune 2 punti, chiamiamoli A e B, ma c'è un punto C del piano che non appartiene a r, avremmo un altro piano β che contiene r e C. Quindi β contiene A, B e C, ma allora deve coincidere con α.

Corollario 2
Due rette incidenti individuano un solo piano.
Dimostrazione Lasciata per esercizio.

Corollario 3
Per ogni retta passano infiniti piani.
Dimostrazione Lasciata per esercizio.

Abbiamo già visto che una retta che ha più di un punto in comune con un piano giace sul piano. Poniamo una definizione.

Definizione 1

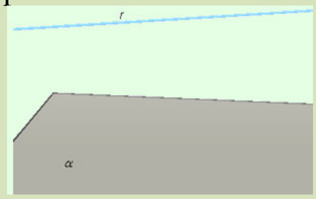
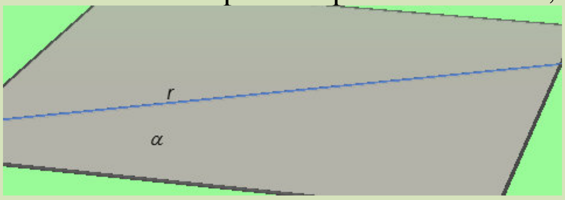


Una retta e un piano aventi un punto in comune si dicono fra loro **incidenti**.

V i è ancora una possibilità.

Definizione 2

Una retta e un piano si dicono fra loro **paralleli** se sono privi di punti in comune, o se la retta giace sul piano.

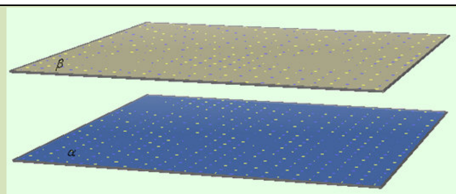
Anche in questo caso, come per la definizione A, la scelta di considerare parallela una retta che giace sul piano serve a garantire sempre la validità della proprietà transitiva del parallelismo, anche quando scegliamo due rette uguali.

Posizioni reciproche di piani nello spazio

I piani nello spazio sono i corrispondenti delle rette nel piano, quindi essi possono avere in coune nessun punto.

Definizione 3

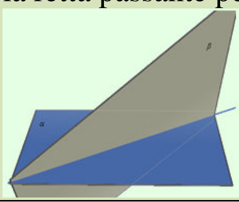
Due piani privi di punti comuni si dicono fra loro **paralleli**.



Possono avere qualcosa in comune e questo qualcosa deve essere un oggetto di dimensione appena inferiore, come accadeva per le rette nel piano.

Definizione 4

Due piani aventi 2 punti in comune, e quindi la retta passante per tali punti, si dicono fra di loro **incidenti**.



E infine possono avere in comune tutti i punti.

Definizione 5

Due piani aventi in comune almeno tre punti non allineati, si dicono fra di loro **coincidenti**.

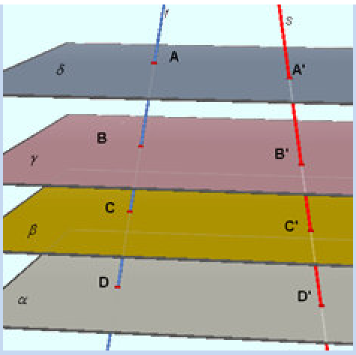
Quindi esattamente come per le rette nel piano, i piani nello spazio si trovano reciprocamente in 3 modi.
Per i piani paralleli vale un analogo del teorema di Talete.

Teorema 2 (di Talete nello spazio)

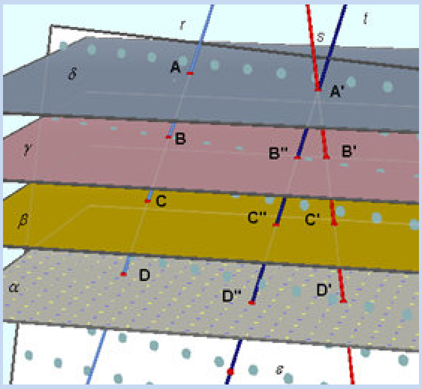
Due rette che incontrano un fascio di piani paralleli determinano su di essi due classi di segmenti proporzionali.

Dimostrazione

Con riferimento alla figura seguente vogliamo mostrare che, per esempio, si ha: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$



Se r ed s sono complanari siamo nel caso del teorema nel piano, in cui le rette parallele sono quelle passanti per AA', BB', CC', DD', e le trasversali sono sempre r ed s. Quindi il teorema è vero.
Se r ed s non sono complanari, consideriamo il piano ε contiene r e A'. Quindi su ε scegliamo una retta t passante per A'.



Allora r e t stanno sullo stesso piano e perciò possiamo applicare il teorema di Talete: $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B''}}{\overline{C''D''}}$.

Ma anche s e t sono complanari, quindi applichiamo il teorema di Talete nel loro piano: $\frac{\overline{A'B''}}{\overline{C''D''}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$

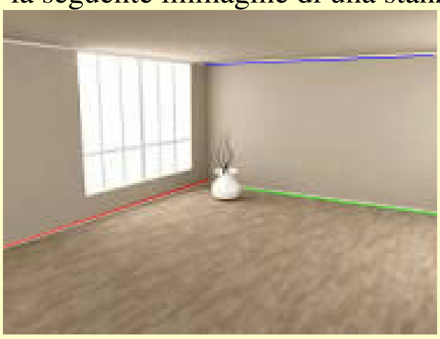
Dalla proprietà transitiva dell'uguaglianza segue la tesi.

Posizioni reciproche di rette nello spazio

Due rette nello spazio oltre ad essere incidenti, parallele e coincidenti possono avere un'altra reciproca posizione.

Esempio 1

Consideriamo come idea dello spazio la seguente immagine di una stanza



in cui ogni *parete*, pensata come infinita, rappresenta il modello di un piano e ogni spigolo, pensato come infinito, è il modello di una retta. Ora le "rette" blu e verde non hanno punti in comune (neanche se le continuiamo all'infinito) ma appartengono allo stesso piano (parete). Invece le rette blu e rossa non solo non appartengono a nessuna parete, ma non possiamo costruire nessuna parete che possa contenere entrambe le rette.

Pertanto in questo caso le rette sono più che parallele, quindi meritano un'apposita definizione.

Definizione 6

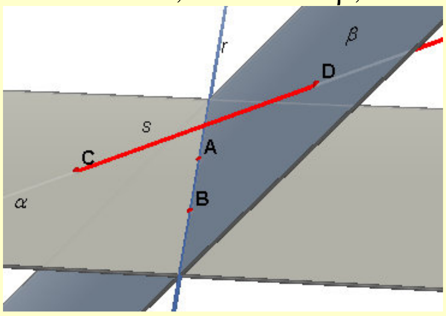
Due rette non complanari si dicono rette **sghembe**.

Che cosa significa?

Sghembo deriva dal latino *sclimbus* che significa obliquo, e infatti le rette sghembe ci appaiono oblique l'una rispetto all'altra

Esempio 2

L'esistenza di rette sghembe si deduce anche dal corollario 3: infatti dato che per una retta r passano infiniti piani, consideriamone due di questi e chiamiamoli α e β. Ora prendiamo due punti sulla retta r, diciamoli A e B, e due punti distinti uno su α che chiamiamo C, e l'altro su β, che diciamo D, ma non appartenenti a r.



Consideriamo la retta r e quella determinata da C e D, che chiamiamo s. Se r ed s non fossero sghembe dovrebbe esistere un piano che le contiene e che quindi contiene i quattro punti A, B, C e D. Questo piano però, contenendo A, B e C, dovrebbe coincidere con α e, contenendo A, B e D, con β, ma, poiché i due piani sono distinti, ciò non è possibile.

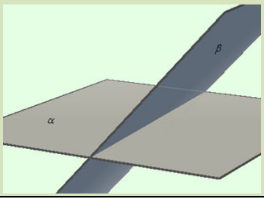
Adesso dobbiamo definire gli analoghi degli angoli nel piano.

Gli angoli diedri

Visto che un angolo piano è una parte di piano determinata da due semirette aventi la stessa origine, possiamo dare la seguente definizione.

Definizione 7

Diciamo **angolo diedro** la parte di spazio determinata da due semipiani con la retta origine comune.



Definizione 8

Diciamo angolo diedro nullo quello determinato da due semipiani coincidenti.

Definizione 9

Diciamo angolo diedro giro l'intero spazio.

Definizione 10

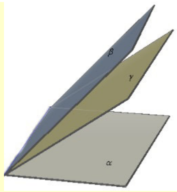
Diciamo angolo diedro piatto quello determinato da due semipiani facenti parte dello stesso piano.

Che cosa significa?

Diedro - Vocabolo composto da *di*, nel senso di due, e dal suffisso *edro* che caratterizza i corpi solidi. Quindi l'angolo diedro è qualcosa che viene originata da due corpi solidi (i semipiani)

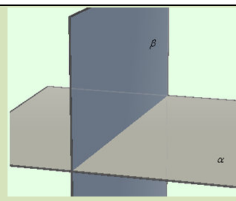
Possiamo confrontare due angoli diedri esattamente come facciamo con due angoli piani, basta fare coincidere l'origine comune e uno dei due semipiani. Se coincidono anche gli altri semipiani allora gli angoli sono uguali, se no uno dei due è minore dell'altro.

Esempio 3

In figura l'angolo determinato dai semipiani α e β è minore di quello determinato da α e γ. 

Possiamo fornire adesso un'altra definizione.

Definizione 11

Due piani incidenti che formano 4 angoli diedri uguali si dicono **perpendicolari**. 

Definizione 12

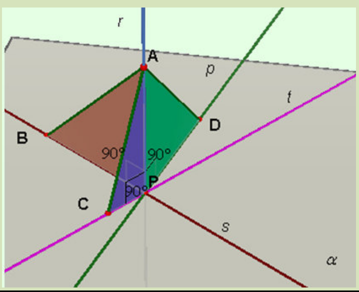
Un angolo diedro formato da due piani fra loro perpendicolari si chiama angolo **diedro retto**.

Perpendicolarità nello spazio

Vediamo adesso di definire il concetto di perpendicolarità fra rette e piani. Per fare ciò consideriamo la seguente immagine, in cui abbiamo una porta aperta , come si vede, anche se non sembra, ovviamente lo spigolo e la base inferiore della porta (che abbiamo evidenziato in nero) sono perpendicolari, diversamente la porta non *aprirebbe bene*. Ma ovviamente se diamo una diversa apertura alla porta, spigolo e base rimangono perpendicolari , d'altro canto lo spigolo è sempre perpendicolare al pavimento. Questo esempio ci conduce a fornire la seguente definizione.

Definizione 13

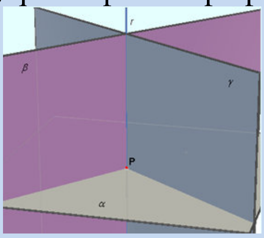
Una retta incidente a un piano, si dice **perpendicolare al piano** se è perpendicolare a tutte le rette del piano passanti per il punto di incidenza.



La precedente definizione ci fa vedere che nello spazio, non è vero che per ogni retta vi è una sola retta perpendicolare a essa passante per un punto dato.
In particolare abbiamo la validità del seguente fatto.

Teorema 3

Se r è una retta perpendicolare a un piano α, questo piano è perpendicolare ad ogni piano che contiene r.

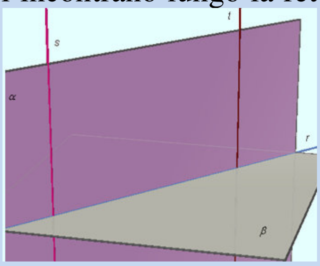


Dimostrazione
Sia $r \perp \alpha$, ciò vuol dire che r è perpendicolare a ogni retta di α passante per il punto di incidenza P.
Ma allora ogni piano β che contiene r e una qualsiasi retta di α passante per P forma con α 4 angoli diedri retti, quindi i piani sono perpendicolari.

Molto interessante anche quest'altro risultato.

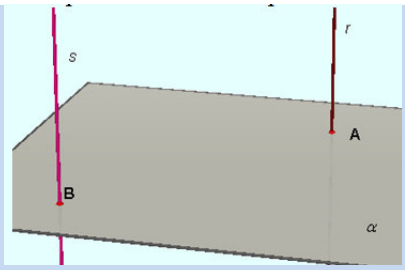
Teorema 4

Se due piani α e β sono perpendicolari e si incontrano lungo la retta r, ogni retta di α perpendicolare a r è perpendicolare a β.



Così come quest'altro, che nega la validità della proprietà transitiva per la perpendicolarità fra rette, come del resto accade nel piano.

Teorema 5



Due rette perpendicolari allo stesso piano sono fra loro parallele.
Dimostrazione
Consideriamo le rette r e s, che incontrano il piano rispettivamente nei punti A e B. Consideriamo il piano β determinato da r e B. Questo piano contiene anche s, perché s è perpendicolare a ogni retta di α passante per B, quindi è perpendicolare anche alla retta AB.
Poiché la perpendicolare condotta da un punto a una retta è unica, vuol dire che s sta su β. Ma r e s sono complanari e non hanno punti in comune. quindi sono parallele.

Possiamo definire quindi la distanza fra due piani paralleli.

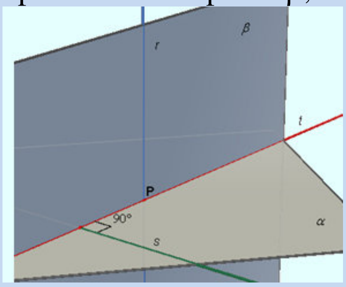
Definizione 14

Dati due piani fra loro paralleli, diciamo loro **distanza** la misura di un qualsiasi segmento condotto perpendicolarmente da uno dei piani all'altro.

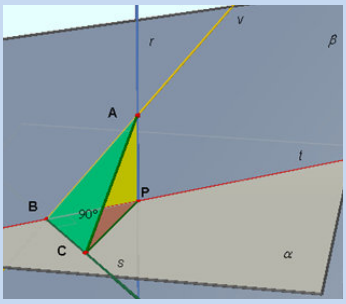
Ancora un risultato.

Teorema 6 (delle tre perpendicolari)

Sia *r* perpendicolare a un piano α nel punto *P* e *s* una qualsiasi retta di α non passante per *P*, allora se *t* è la retta di α, perpendicolare a *s* per *P*, *s* è perpendicolare al piano β, determinato da *r* e *t*.



Dimostrazione

Consideriamo la figura seguente 

Dobbiamo dimostrare che, una qualsiasi retta *v*, passante per il punto *B* intersezione di *s* e β, è perpendicolare a *s*. Che è lo stesso che provare che il triangolo *ABC* (con *A* e *C* scelti a caso sulle rette *r* ed *s* rispettivamente) è rettangolo di ipotenusa *AC*.

Noi sappiamo che i triangoli *ABP*, *PBC* e *ACP* sono rettangoli di ipotenuse rispettive *AB*, *PC* e *AC*, per le ipotesi $r \perp t$, $s \perp t$ e $t \perp \alpha$. Quindi possiamo scrivere:

$$\overline{AP}^2 + \overline{PB}^2 = \overline{AB}^2 ; \overline{PB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{PC}^2 ; \overline{AP}^2 + \overline{PC}^2 = \overline{AC}^2$$

Da cui abbiamo: $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \left(\overline{AP}^2 + \cancel{\overline{PB}^2} \right) + \left(\overline{PC}^2 - \cancel{\overline{PB}^2} \right) = \overline{AP}^2 + \overline{PC}^2 = \overline{AC}^2$. Che è proprio quello che volevamo provare.

L'Antologia

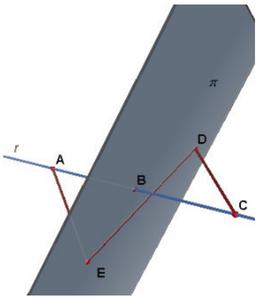
Euclide, *Elementi libro* XI

I Solido è ciò che ha lunghezza, larghezza e profondità.
II Limite di un solido è la superficie.
III Una retta è perpendicolare a un piano, quando forma angoli retti con tutte le rette che la incontrino e siano su quel piano.
IV Un piano è perpendicolare a un altro piano, quando le rete condotte, un uno dei piani, perpendicolarmente alla intersezione comune dei piani, sono perpendicolari all'altro piano.
VIII Sono paralleli i piani che non si incontrino.
XI Angolo solido è l'inclinazione di più di due linee rette, che si tocchino fra loro, ma non siano sulla stessa superficie.

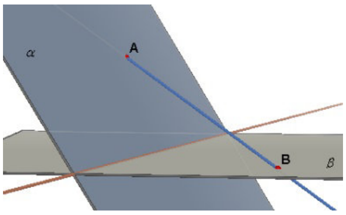
Verifiche

Di seguito sono presentate alcune figure e una loro descrizione a parole. All'interno di ciascuna descrizione scegliere fra le varie alternative i vocaboli che rendono corretta la descrizione.

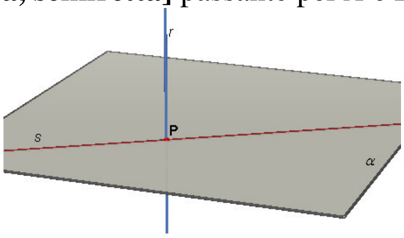
Livello **1**



1. Dato un piano π si fissi su di esso un **[punto, estremo]** *B* e per esso si conduca una **[semiretta, retta]** *r* che sia **[incidente, parallela]** a π. Si fissino poi i punti *A* e *C* su *r* in modo che **[uno solo dei due, tutti e due]** non appartengano a π. Da *A* si tracci **[un segmento, una retta]** che incontri π in *E* e lo stesso si faccia con *C*, ottenendo il punto *D* **[esterno, appartenente]** a π. Infine si costruisca **[la retta, il segmento]** *DE*.

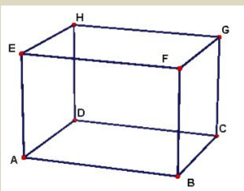


2. Siano i due **[segmenti, piani]** α e β fra loro **[incidenti, paralleli]**. Fissiamo i punti [$A \in \alpha$ **e** $B \in \beta$, $B \in \alpha$ **e** $A \in \beta$]. Tracciamo la **[retta, semiretta]** passante per *A* e *B*.



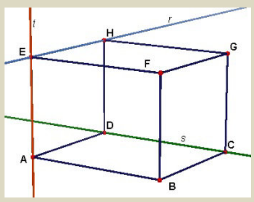
3. Sul piano α fissiamo **[un vertice, un punto]** *P*. Tracciamo **[il piano, la retta]** *r* perpendicolare al **[piano, punto *P*]**. Poi tracciamo una retta *s* passante per *P* e **[appartenente, non appartenente]** ad α.

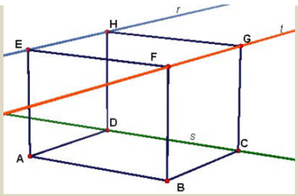
Lavoriamo insieme

Consideriamo il modello di spazio in figura, in cui ogni segmento rappresenta una retta e ogni quadrilatero un piano. 

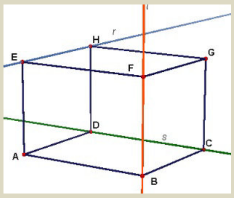
Grazie ad essa vogliamo far vedere che non vale la proprietà transitiva della relazione essere sghembe. Cioè vogliamo far vedere che se *r* è sghemba con *s* e *s* è sghemba con *t*, non è detto che *r* e *t* sono sghembe. Anzi faremo vedere che può accadere anche che *r* e *t* siano sghembe.

In questo caso abbiamo che *r* e *t* sono incidenti.

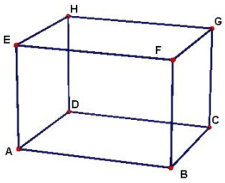




In questo caso abbiamo che *r* e *t* sono parallele.



E in questo caso abbiamo che *r* e *t* sono sghembe.



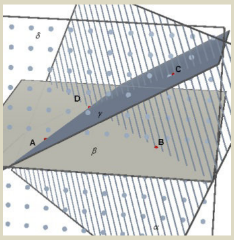
Con riferimento al modello di spazio in figura in cui ciascun segmento rappresenta una retta e ciascun quadrilatero un piano, rispondere alle seguenti richieste.

Livello 1

4. Individuare tutte le rette sghembe con *AD*. [*HG*, *EF*, *GC*, *FB*]
5. Individuare tutte le rette parallele ad *AD*. [*EH*, F*G*, *BC*]
6. Individuare tutti i distinti piani contenenti la retta per *EF* e uno almeno degli altri vertici (anche i piani non segnati). Quanti ve ne sono? [3]
7. Individuare tutti i distinti piani paralleli a quello contenente i punti *A*, *C* e *D*, e contenenti uno almeno degli altri vertici (anche i piani non segnati). Quanti ve ne sono? [1]
8. Individuare una retta sghemba sia con *EF* che con *HD*. [*BC*]
9. Individuare una retta sghemba con *EF* e parallela ad *HD*. [*GC*]
10. Individuare una retta sghemba con *BC* e incidente ad *EF*. [*AE*]
11. Individuare una retta sghemba sia con *EA* che con *GC*. [Non ce ne sono]
12. Individuare una retta sghemba con *AD* e parallela a *FG*. [Non ce ne sono]
13. Individuare una retta sghemba con *FG* e incidente ad *AD*. [*AE*, *HD*, *AB*, *CD*]

Lavoriamo insieme

Dati 4 punti nello spazio, quanti piani distinti contenenti ciascuno almeno tre dei punti dati, possono tracciarsi al massimo?



Per comodità indichiamo con *A*, *B*, *C*, D i quattro punti. Noi sappiamo che 3 punti appartengono a uno stesso piano α, per esempio *A*, *B* e *C*. Se anche *D* appartiene ad α, vi è un solo piano che contiene i quattro punti. Se invece *D* non appartiene ad α, vi sarà un piano β su cui stanno *A*, *B* e *D*; un piano γ su cui giacciono *A*, *C* e *D* e un piano δ che contiene *B*, *C* e *D*. quindi in totale si hanno quattro piani distinti.

Livello 2

14. Dati 5 punti nello spazio, quanti piani distinti contenenti ciascuno almeno tre dei punti dati, possono tracciarsi al massimo? [10]
15. Dati 6 punti nello spazio, quanti piani distinti contenenti ciascuno almeno tre dei punti dati, possono tracciarsi al massimo? [20]
16. Dati 4 punti nello spazio, quanti piani distinti contenenti ciascuno almeno tre dei punti dati e tutti fra di

loro paralleli, possono tracciarsi al massimo? [0]

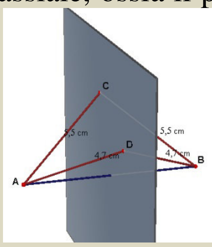
17. Dati 6 punti nello spazio, quanti piani distinti contenenti ciascuno almeno tre dei punti dati e tutti fra di loro paralleli, possono tracciarsi al massimo? [2]
18. Due piani incidenti dividono lo spazio in 4 parti a due a due prive di punti comuni. Tre piani incidenti in un punto, in quante parti lo dividono? [8]
19. Tre piani con una retta in comune, in quante parti dividono lo spazio? [6]
20. Tre piani a due a due con una retta in comune, ma senza punti in comune tutti e tre, in quante parti dividono lo spazio? [7]
21. Due piani fra loro paralleli e un terzo che li incontra entrambi in una retta, in quante parti dividono lo spazio? [6]

Livello **3**

22. Quattro piani con una retta in comune, in quante parti dividono lo spazio? [8]
23. Quattro a due a due con una retta in comune, ma senza punti in comune tutti e quattro, in quante parti dividono lo spazio? [14]
24. Due piani fra loro paralleli e altri due fra loro paralleli, che incontrano gli altri due in una retta, in quante parti dividono lo spazio? [9]

Lavoriamo insieme

Nel piano il luogo geometrico dei punti equidistanti da due punti è l'asse del segmento che ha per estremi i due punti, cioè la retta perpendicolare al detto segmento nel suo punto medio.
E nello spazio? Non è difficile capire che in questo caso il luogo è il cosiddetto piano assiale, ossia il piano perpendicolare al segmento nel suo punto medio, come mostrato in figura.



Livello **2**

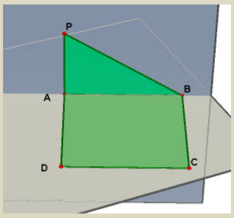
25. Nello spazio vale la proprietà transitiva del parallelismo fra rette? Giustificare la risposta. [Sì]
26. Nello spazio vale la proprietà transitiva del parallelismo fra piani? Giustificare la risposta. [Sì]
27. Provare che se ad un piano α conduciamo due rette parallele *r* ed *s*, allora il piano β determinato da queste rette è parallelo ad α.
28. Provare che due piani perpendicolari a una stessa retta sono fra loro paralleli.
29. Se i piani α e β sono fra di loro perpendicolari e i piani β e γ sono fra loro perpendicolari, anche i piani α e γ sono fra di loro perpendicolari? Giustificare la risposta. [No]
30. Se il piano α e la retta *r* sono perpendicolari e il piano α e il piano β sono fra loro paralleli, come sono fra di loro il piano β e la retta *r*? Giustificare la risposta. [Perpendicolari]
31. Se il piano α e la retta *r* sono perpendicolari e il piano α e il piano β sono fra loro perpendicolari, come sono fra di loro il piano β e la retta *r*? Giustificare la risposta. [Paralleli]

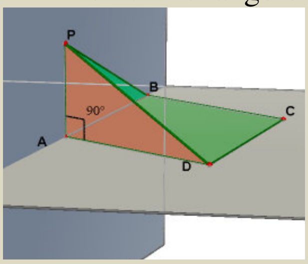
32. Provare che due piani distinti non possono avere più di 2 punti in comune.
33. Provare che esistono quattro punti non complanari.
34. Provare che esistono rette e piani che hanno un solo punto in comune.
35. Provare che esistono punti non appartenenti a un piano assegnato.
36. Se il piano α è parallelo al piano β e il piano β è parallelo al piano γ, anche i piani α e γ sono paralleli.
37. Dimostrare che se un piano α incontra due piani β e γ fra loro paralleli in due rette *r* ed *s* queste sono fra loro parallele.
38. Dimostrare che se *r* ed *s* sono due rette parallele, allora se *r* è parallela ad un piano α anche *s* lo è.
39. Dimostrare che se una retta *r* è parallela a due piani α e β che hanno in comune una retta intersezione *s*, allora *r* ed *s* sono parallele.
40. Dimostrare che se per un punto esterno ad un piano α conduciamo due rette *r* ed *s*, parallele ad α, il piano β determinato da *r* ed *s* è anch'esso parallelo ad α.

41. Dimostrare che se la retta r e la retta s sono fra di loro parallele ed un piano α che contiene r incontra un piano β, che contiene s, in una terza retta t, allora t è parallela ad r ed s.
42. Dimostrare che se due rette r ed s sono parallele ad una terza retta t allora r ed s sono parallele fra loro.
43. Dimostrare che se una retta r incontra due piani α e β fuori dalla loro retta intersezione s, allora r ed s sono sghembe.
44. Dimostrare che se due piani α e β sono paralleli allora ogni retta di α è parallela ad ogni retta di β.

Lavoriamo insieme

Questo problema è stato assegnato agli AHSME del 1996.
Il triangolo PAB e il quadrato $ABCD$ appartengono a piani perpendicolari. Si ha $PA = 3$, $PB = 4$, e $AB = 5$, quanto misura PD?

Consideriamo la figura seguente. 

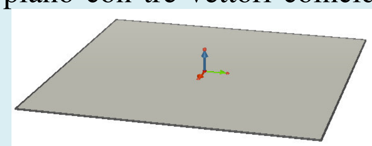
Poiché AD è perpendicolare al piano di PAB, $P\hat{A}D = 90°$. Quindi PAD è un triangolo rettangolo, con $PA = 3$ e $AD = AB = 5$. Perciò $\overline{PD} = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$. 

Osserviamo che il dato $PB = 4$ non è necessario.

Livello 3

45. Sia data una retta r e un punto P fuori di essa, descrivere una procedura per determinare la retta passante per P e parallela a r.
46. Sia data una retta r e un punto P fuori di essa, descrivere una procedura per determinare la retta passante per P e perpendicolare a r.
47. Dati due piani incidenti e un punto P non appartenente a nessuno dei due piani, quante rette parallele ai due piani possono condursi per P? Giustificare la risposta. [Una]
48. In due piani distinti siano posti due poligoni simili, dimostrare che le rette che congiungono vertici corrispondenti nella similitudine o sono parallele o passano tutte per uno stesso punto.

L'angolo di Cabri3D

Cabri3D è, attualmente, il più diffuso software per studiare la geometria dello spazio.
All'avvio viene presentato un piano con tre vettori coincidenti in un punto che forniscono le tre direzioni 
fondamentali.
Nella barra dei comandi sono presenti tutti i comandi necessari a rappresentare gli oggetti tridimensionali. Vediamone alcuni.

Punto. Traccia un punto su un oggetto già tracciato o nello spazio.

Punto (i) di intersezione. Traccia il punto o i punti di intersezione fra oggetti spaziali.

Retta. Traccia una retta passante per due punti.

Segmento. Traccia un segmento di estremi due punti.

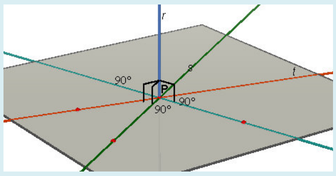
Semiretta. Traccia una semiretta di data origine.

Piano. Traccia un piano passante per 3 punti o per una retta e un punto fuori di essa o per due rette parallele o incidenti.

 **Parallelo (a)**. Traccia una retta parallela a un'altra retta o un piano parallelo a un altro piano.

 **Perpendicolare**. Traccia una retta perpendicolare a un piano o una retta perpendicolare a un'altra retta in un dato piano.

Possiamo per esempio costruire la retta perpendicolare a un piano e poi mostrare che qualsiasi retta per il punto di incidenza è perpendicolare alla retta data.



Per fare ciò usiamo il comando  **Misura di un angolo**.

I nomi degli oggetti si immettono semplicemente selezionandoli e digitando le lettere volute. I colori si cambiano selezionandoli e cliccando con il tasto destro del mouse, compaiono menu a tendina simili al seguente

Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi

1. (Liceo scientifico PNI suppletiva 1993/94) È assegnato il triangolo rettangolo *ABC*, retto in *B*, tale che $\overline{AB}=4$ e $\overline{BC}=3$ e sia *D* il punto di *BC* per cui $\overline{BD}=1$. Si indichi con α il piano per *B*, perpendicolare alla retta *CB*, e con β il piano per *D*, parallelo ad α. Sia $\overline{P}$ un punto del piano β, *P* la proiezione di $\overline{P}$ da *C* sul piano α e *P*' il punto di intersezione di α con la parallela per $\overline{P}$ alla retta *AC*. Si dimostri che, se $\overline{S}$ è l'area di un triangolo descritto da $\overline{P}$ su β e *S* e *S*' sono le aree dei triangoli descritti rispettivamente da *P* e da *P*' su α, si ha *S*' = 4/9*S*.
2. (Istituto magistrale 1997/98) Da un punto *P* esterno ad un piano α si conduca la perpendicolare *PA* al piano e la perpendicolare *PH* ad una qualsiasi retta *r* del piano non passante per *A*, essendo *H* ed *A* punti del piano α. a) Dimostrare che la retta *AH* è perpendicolare alla retta *r*. b) Considerati sulla retta *r* due punti distinti B e C tali che $\overline{BH}=\overline{CH}=\overline{AH}$, dimostrare che il triangolo *ABC* è rettangolo. c) Sapendo che $\overline{PA}=a$, dove *a* è una lunghezza nota, e che il piano dei punti *P*, *B*, *C* forma un angolo di 30° col piano α, determinare la distanza del punto *A* dal piano dei punti *P*, *B*, *C* e la distanza del punto *B* dal piano dei punti *P*, *A*, *C*. $\left[d\left(A,\Pi_{PBC}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}a; d\left(B,\Pi_{PAC}\right)=\sqrt{6}a\right]$
3. (Liceo scientifico 2002/03) Dopo aver fornito la definizione di "rette sghembe", si consideri la seguente proposizione: "Comunque si prendano nello spazio tre rette *x*, *y*, z, due a due distinte, se *x* ed *y* sono sghembe e, così pure, se sono sghembe *y* e z allora anche *x* e z sono sghembe". Dire se è vera o falsa e fornire un'esauriente spiegazione della risposta. [Falsa]
4. (Liceo scientifico 2010/2011) Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa.

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Accademia Navale) Si dimostri che una qualunque retta r di un piano α ed una retta s non contenuta in α e che incontra α in un punto P non appartenente ad r sono sghembe.
2. (Accademia Navale) Si riconosca che tre rette aventi a due a due un punto in comune, o giacciono in un piano o passano per uno stesso punto.
3. (Accademia Navale) Dati una retta e un punto P non appartenente a essa, giustificare l'esistenza e l'unicità della retta per P, perpendicolare e incidente r.
4. (Accademia Navale) Giustificare che i piani passanti per un punto e perpendicolari a un piano dato costituiscono un fascio proprio e descrivere la retta sostegno.
5. (Accademia Navale) Date due rette sghembe r e s e un punto P, individuare una retta passante per P e complanare con r e s.
6. (Accademia Navale) Date una retta r e un punto P (non necessariamente appartenente a r) giustificare che esistono infinite rette per P che formano un angolo acuto con r. Quante di esse sono complanari con r?
7. (Accademia Navale) Siano α e β due piani incidenti e sia r la loro retta intersezione. Si dimostri che fra le rette di α, quelle formanti angolo massimo con β sono le perpendicolari a r.
8. (Accademia Navale) Verificare che fra tutti i segmenti aventi un estremo assegnato e l'altro appartenente a un dato piano, ne esiste uno di lunghezza minima.
9. (Accademia Navale) Verificare che fra tutti i segmenti aventi gli estremi appartenenti a due piani paralleli, ne esistono di lunghezza minima.
10. (Accademia Navale) Individuare, mediante intersezioni con piani opportuni, il segmento di minima distanza tra due rette sghembe.
11. (Accademia Navale) Individuare tutte le rette equidistanti da due piani paralleli assegnati.
12. (Accademia Navale) È vero o falso che la distanza di un punto da un piano coincide con quella di tale punto da una qualsiasi retta contenuta nel piano? Giustificare la risposta.
13. (Accademia Navale) Individuare tutti i piani equidistanti da tre punti non allineati.

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_2_1.htm

Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

6	12	13
Tutte	Falso	I piani perpendicolari alla retta intersezione dei piani assiali dei segmenti che hanno per estremi due dei tre punti

6. Geometria dello spazio ambiente

6.2 Geometria dei poliedri

Prerequisiti

- Nozioni di geometria del piano
- Rette e piani nello spazio
- Parallelismo e perpendicolarità fra rette e fra piani
- Angoli diedri

Obiettivi

- Generalizzare il concetto di poligono nel piano
- Comprendere il concetto di poliedro regolare e semiregolare
- Acquisire il concetto di caratteristica di Eulero
- Affinare l'intuizione spaziale
- Abituarsi a pensare "tridimensionalmente"

Contenuti

- I poliedri
- I prismi
- Le piramidi e i tronchi di piramide
- La formula di Eulero
- I poliedri regolari
- I poliedri semiregolari

Parole Chiave

Duale – Faccia – Poliedro – Spigolo – Vertice

Richiamiamo le conoscenze

Definizione A

L'insieme formato dai punti del piano delimitati da segmenti a due a due consecutivi si dice **poligono,** i segmenti che lo compongono si chiamano **lati**, gli estremi dei lati si dicono **vertici**.

Definizione B

Una figura si dice **convessa** se, ogniqualvolta scegliamo due suoi punti qualsiasi, l'intero segmento che li congiunge è formato solo da punti appartenenti alla figura stessa, diversamente la figura si dice **concava**.

Esempio A

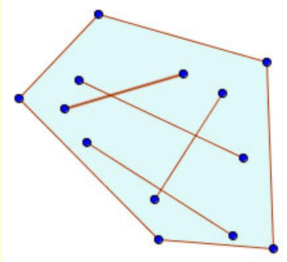
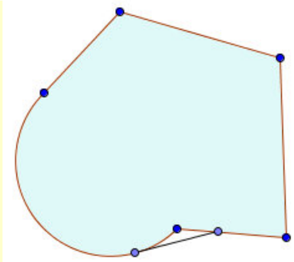
Figura convessa


Figura concava


I poliedri

Il problema

Qual è il corrispondente spaziale del poligono nel piano?

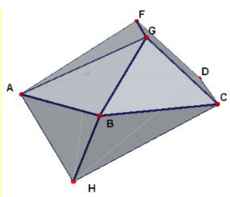
Vogliamo estendere il concetto di poligono. Ci rendiamo conto che dobbiamo considerare non segmenti ma poligoni i quali abbiano a due a due dei lati in comune, intendendo con questo termine che i due segmenti debbono coincidere, così come i rispettivi estremi. Il minimo numero di poligoni per racchiudere una parte di spazio è evidentemente quattro, purché a tre a tre abbiano anche un vertice in comune. Con lo stesso significato di *dentro* e *fuori* già illustrato e con il conseguente concetto di *spazio delimitato da*, possiamo dare la seguente definizione.

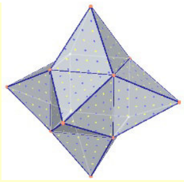
Definizione 1

Diciamo **poliedro** la parte di spazio delimitata da quattro o più poligoni aventi i lati a due a due **comuni**, in modo che non vi siano lati di alcun poligono che non siano comuni a un altro.
I poligoni che lo generano si dicono **facce** del poliedro, i loro lati si dicono **spigoli** del poliedro, i loro vertici si dicono **vertici** del poliedro.

A seconda del numero delle sue facce, un poliedro sarà chiamato con un vocabolo formato da un prefisso riferito a tale numero e dal suffisso edro (tetraedro, pentaedro, esaedro, ...).

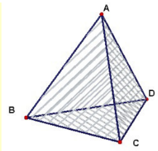
Esempio 1

Ecco un esempio di poliedro convesso con 8 vertici, 9 facce e 15 spigoli


E adesso uno di poliedro concavo 

Il poliedro minimo, quello cioè corrispondente al triangolo nel piano ha 4 facce, tutte triangolari e si chiama tetraedro.

Esempio 2

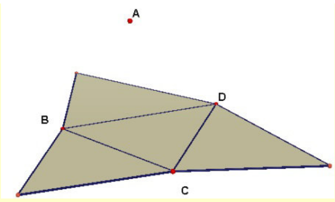
Un tetraedro ha 4 facce, 4 vertici e 6 spigoli. 

Osserviamo alcuni fatti, validi per ogni poliedro convesso.

1. Ogni vertice è incontro di non meno di tre facce e di non meno di tre spigoli.
2. In ogni vertice si possono incontrare poligoni tali che la somma degli angoli interni che hanno quel tale vertice in comune sia inferiore a 360°.

Quest'ultimo fatto dipende dalla possibilità che abbiamo di costruire un poliedro convesso a partire dal suo cosiddetto sviluppo piano, ossia dalla figura piana che si ottiene "scollando" alcuni degli spigoli comuni del poliedro convesso in modo da "appiattire" il solido.

Esempio 3

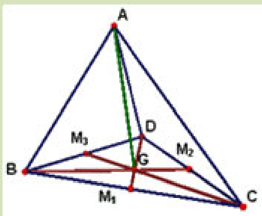
In figura vi è lo sviluppo piano di un tetraedro 

I vertici senza nome sono quelli che andranno ad unirsi nel vertice *A*, rimasto "sospeso in aria", per ricostruire il tetraedro. Come si vede vi è la possibilità di sollevare i detti punti dal piano, perché i tre angoli che essi determinano nei rispettivi triangoli sono acuti e quindi la loro somma non supererà 270° e a maggior ragione non raggiungerà i 360°.

Il tetraedro è il corrispondente spaziale del triangolo, e in effetti verifica alcune proprietà simili a quelle del triangolo. Per esempio ha alcuni punti notevoli, di cui ne vediamo per il momento due, rimandando all'unità sulle sfere gli altri due.

Definizione 2

Diciamo **mediana** di un tetraedro riferita a un vertice e alla sua faccia opposta (cioè faccia non complanare con il vertice), il segmento che ha per estremi il vertice e il baricentro di tale faccia.



AG è la mediana relativa al vertice *A* e alla faccia opposta *BCD*.

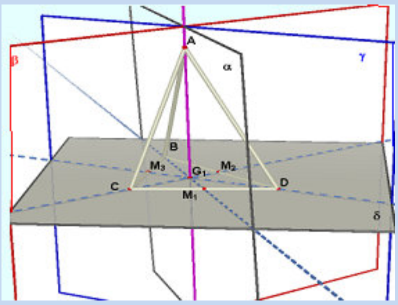
Valgono i seguenti risultati.

Teorema 1

Le mediane di un tetraedro si incontrano in un punto, che si chiama baricentro del tetraedro.

Dimostrazione

Consideriamo i tre piani in figura che contengono ciascuno uno degli spigoli *AB*, *AC* e *AD* e il punto medio delle facce opposte ai detti spigoli. Così α è determinato da *AB* e M_1, β è determinato da *AC* e M_2 e γ è determinato da *AD* e M_3.



Questi piani incontrano il piano determinato dal triangolo *BDC* ovviamente nelle mediane dello stesso triangolo, quindi, per quel che sappiamo sui triangoli determinano il baricentro G_1 di BCD. Quindi i tre piani hanno in comune la retta baricentrica AG_1. Ragionando allo stesso modo per le altre terne di piani, determineremo le altre rette baricentriche e quindi ovviamente queste rette essendo comuni a più piani devono incontrarsi in uno stesso punto, che è perciò il baricentro.

La precedente dimostrazione ha anche provato il seguente risultato

Corollario 1

I segmenti che congiungono i punti medi delle coppie di spigoli opposti, si incontrano nel baricentro, che è punto medio dei detti segmenti.

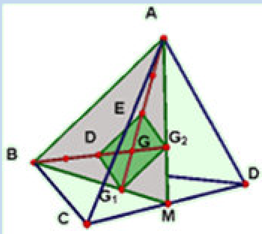
Esiste anche una proprietà del baricentro dei tetraedri simile a quella dei triangoli.

Teorema 2

Il baricentro di un tetraedro divide ciascuna mediana in modo che la parte che contiene il vertice è tripla dell'altra.

Dimostrazione

Consideriamo la figura seguente in cui *G* è il baricentro del tetraedro, AG_1 e BG_2 due sue mediane.



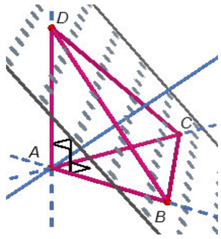
La dimostrazione è simile a quella che di solito si usa per la proprietà dei baricentri di un triangolo.
Per le proprietà di G_1 e G_2 nel triangolo *ABM*, abbiamo che dividono i rispettivi segmenti nel rapporto ½, quindi G_1G_2 è parallelo ad *AB* e misura 1/3 di esso. Adesso scegliamo i punti *D* ed *E* sulle mediane in modo che siano a un terzo delle stesse. Allora anche *DE* è parallelo ad *AB* e misura 1/3 di esso, cioè DEG_1G_2 è un parallelogramma. Pertanto *G* dimezza le diagonali. Ma allora G divide le mediane nel rapporto 1:3. Come volevasi dimostrare.

Invece in generale i tetraedri non hanno un ortocentro.

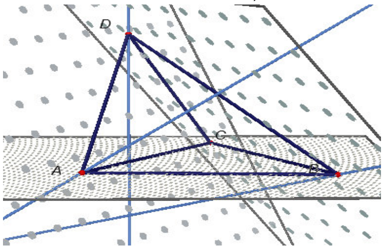
Definizione 3

Un tetraedro le cui altezze, rette condotte da ogni vertice perpendicolarmente al piano che contiene la faccia opposta, si incontrano in un punto, si dice **ortocentrico**.

Per esempio un tetraedro che ha tre delle sue facce che sono triangoli rettangoli, e che si chiama per questo



motivo trirettangolo, è ortocentrico, di ortocentro il vertice trirettangolo A.
Invece in generale un tetraedro qualsiasi non è ortocentrico, come mostrato nella successiva figura.



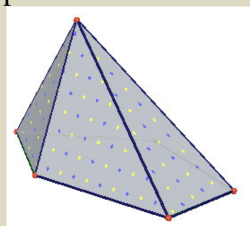
Cosa deve succedere affinché un tetraedro sia ortocentrico? Il più semplice risultato è il seguente.

Teorema 3
Un tetraedro è ortocentrico se e solo se il piede di un'altezza è ortocentro della faccia opposta.
Dimostrazione Omessa

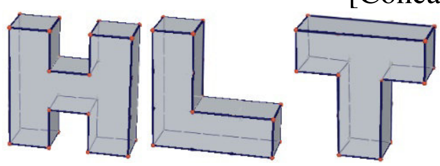
Verifiche

Lavoriamo insieme

Una faccia di un poliedro è pentagonale. Quante facce, minimo, può avere il poliedro?
Minimo possiamo costruire su ciascuno dei lati del poligono un triangolo e tutti i triangoli devono avere il terzo vertice in comune, quindi al minimo il poliedro ha sei facce, come mostrato in figura.



***Livello* 1**

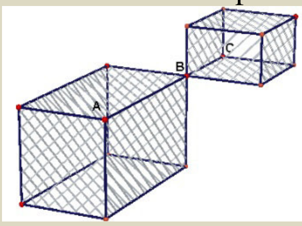
1. Se sulla faccia di un tetraedro costruiamo un altro tetraedro con una faccia coincidente, il poliedro ottenuto è concavo o convesso? Giustificare la risposta. [Concavo]
2. Dati i seguenti poliedri, contare quante facce ha ciascuno di essi.  [14; 8; 10]
3. Con riferimento al precedente esercizio, contare quanti spigoli ha ciascun poliedro. [36; 18; 24]
4. Esistono poliedri concavi con quattro facce? Giustificare la risposta. [No]
5. Una faccia di un poliedro è esagonale. Quante facce, minimo, può avere il poliedro? [7]
6. Esistono poliedri che hanno tutte le facce triangolari meno una? Se la risposta è positiva, dette n le facce triangolari ($n \geq 4$), quanti lati ha il poligono non triangolo? [Sì; n]
7. Esistono poliedri che hanno tutte le facce quadrilatere meno una? Se la risposta è positiva, dette n le facce triangolari ($n \geq 4$), quanti lati ha il poligono non triangolo? [No]
8. Esistono poliedri che hanno tutte le facce quadrilatere meno due? Se la risposta è positiva, dette n le facce quadrilatere ($n \geq 3$), quanti lati hanno i poligoni non quadrilateri? [Sì; entrambi n]

***Livello* 2**

9. Un poliedro ha 5 facce, quante di esse possono essere triangolari? Quante quadrate? Quante pentagonali? [4; 1; 0]
10. Un poliedro ha una faccia pentagonale e una quadrata, quante facce minimo ha? E quanti lati hanno le rimanenti? [6; 3 triangoli e 1 quadrilatero]
11. Un poliedro ha una faccia esagonale e una pentagonale, quante facce minimo ha? E quanti lati hanno le rimanenti? [8; 5 triangoli e 1 quadrilatero]

Lavoriamo insieme

Nel poliedro in figura *AC* è un unico spigolo o deve contarsi per due?

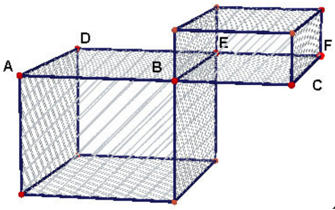


Che cos'è uno spigolo? Il lato di una faccia, quindi *AC* non è lato di alcuna faccia, mentre *AB* e *BC* sono lati di due diverse facce, quindi *AC* deve contarsi per due spigoli: *AB* e *BC*.

Livello 2

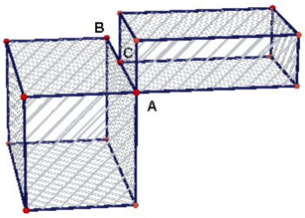
Nei seguenti quesiti le risposte vanno giustificate

12. Nel poliedro in figura

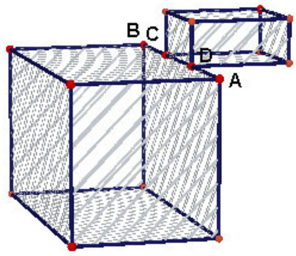


AC è un unico spigolo o deve contarsi per due? [2]

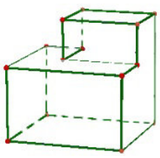
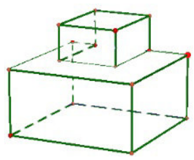
13. Nel poliedro in figura



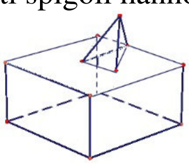
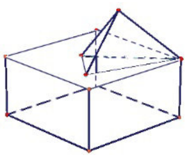
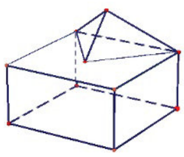
quali fra *AB*, *AC* e *BC* sono spigoli? [*AB* e *AC*]



14. Nel poliedro in figura quali fra *AB*, *AC*, *AD*, *BC*, *BD*, *CD* sono spigoli? [*AB* e *CD*]
15. Quante facce hanno i poliedri in figura? Giustificare la risposta.

 [8]  [8]  [10]

16. Quanti spigoli hanno i poliedri in figura? Giustificare la risposta.

 [19]  [18]  [17]

17. Possiamo costruire un tetraedro che ha tutte le facce che sono triangoli rettangoli? Isosceli? Equilateri? Ottusangoli? [Sì; Sì; Sì; Sì]

Livello 3

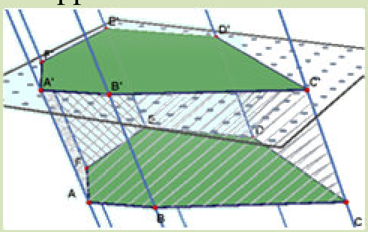
18. Un tetraedro ha tre facce che sono triangoli isosceli e una equilatera. Provare che il tetraedro è ortocentrico. Possiamo dire che le 4 altezze sono isometriche? [No]
19. Con riferimento al precedente problema, se i lati obliqui dei triangoli isosceli misurano 17 *cm* e l'altezza del tetraedro riferita alla faccia equilatera è 15 *cm*, determinare la misura del lato del triangolo equilatero. [16 *cm*]

I prismi

Adesso consideriamo dei particolari poliedri. Tracciamo un poligono convesso su un piano, e conduciamo da uno dei vertici una retta a piacere che incontra un piano parallelo al dato. Quindi tracciamo le parallele a tali rette per gli altri vertici, determinando così sull'altro piano un poligono isometrico al dato.

Definizione 4

- La parte di spazio delimitata da due poligoni isometrici, posti su due piani fra loro paralleli e dai parallelogrammi aventi una coppia di lati opposti formata dalle coppie di lati che si corrispondono

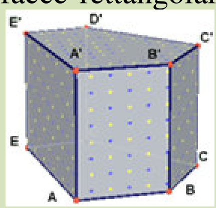


nell'isometria, si chiama **prisma**.
- I poligoni isometrici e paralleli si chiamano **basi**, i parallelogrammi si chiamano **facce laterali**.

Quindi in generale un prisma ha un numero di facce pari a due in più del numero di lati dei poligoni di base. Vi sono ovviamente prismi particolari.

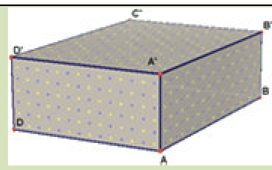
Definizione 5

Un prisma le cui facce laterali sono rettangoli si chiama **prisma** retto. Gli spigoli delle facce rettangolari



sono tutti fra loro isometrici e ciascuno di essi si chiama **altezza** del prisma retto.

Definizione 6

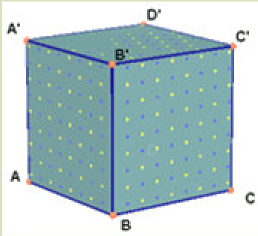


- Un prisma retto le cui basi sono rettangoli si chiama **parallelepipedo rettangolo**.
- I dodici spigoli di un parallelepipedo rettangolo si possono raggruppare in tre insiemi di segmenti a quattro a quattro isometrici. Quindi in generale ci sono tre diverse misure di spigoli in un parallelepipedo rettangolo che si chiamano **dimensioni del parallelepipedo**.
- I segmenti che uniscono vertici di facce opposte non appartenenti a una stessa faccia si chiamano **diagonali** del parallelepipedo.

Esempio 4
Facendo riferimento alla figura precedente, una diagonale del parallelepipedo è $D'B$, non sono invece diagonali $D'A$, $D'C$ e $D'D$. Perché tutti questi segmenti appartengono a una faccia del parallelepipedo. Le altre diagonali sono perciò $C'A$, $B'D$ e $A'C$. Ovviamente tutte e quattro le diagonali sono segmenti fra loro isometrici.

Teorema 4
Le diagonali di un parallelepipedo rettangolo si ottengono estraendo la radice quadrata della somma dei quadrati delle dimensioni. In formula $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
Dimostrazione
Per esercizio. Basta applicare il teorema di Pitagora a due opportuni triangoli rettangoli.

Definizione 7



Un parallelepipedo rettangolo, le cui facce sono tutti quadrati si chiama **cubo**.

In un cubo tutte le dimensioni sono isometriche, parleremo quindi semplicemente di spigolo del cubo.
Possiamo calcolare molto facilmente la superficie dei prismi retti, infatti le facce laterali sono tutte rettangoli, quindi abbiamo il seguente risultato.

Teorema 5
La superficie di un prisma retto si ottiene moltiplicando il perimetro di una delle basi per l'altezza e sommando le superfici di base.

Si hanno i seguenti immediati corollari.

Corollario 2
La superficie di un parallelepipedo rettangolo è data dal doppio della somma dei prodotti delle dimensioni a due a due. In formula indicate con a, b, c, le misura delle dimensioni si ha: $S = 2 \cdot (ab + ac + bc)$.

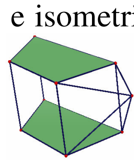
Corollario 3
La superficie di un cubo è pari a sei volte quella di una sua faccia. In formula, indicata con ℓ la misura dello spigolo si ha: $S = 6 \cdot \ell^2$.

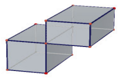
Verifiche

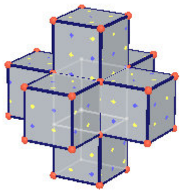
Lavoriamo insieme

Un prisma ha 2002 vertici. Quanti spigoli ha?
Un prisma è formato da due poligoni con lo stesso numero di vertici collegati fra loro da segmenti, quindi in generale un prisma le cui basi sono poligoni con n vertici hanno un totale di $2n$ vertici e di $3n$ spigoli. Pertanto per $n = 1001$, avremo 3003 spigoli.

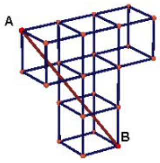
Livello 1

1. È sufficiente dire che un prisma è un poliedro con due facce appartenenti a piani paralleli e isometriche? Giustificare la risposta. [No; ]

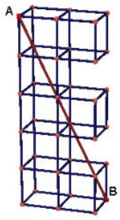
2. Con riferimento al precedente quesito cosa dobbiamo aggiungere alla definizione perché sia corretta? [Che il poliedro sia convesso]
3. Possiamo dire che un parallelepipedo rettangolo è un poliedro le cui facce sono tutte rettangoli? Se la risposta è negativa fornire un esempio di poliedro con facce rettangolari che non è un parallelepipedo rettangolo. [No, ]
4. Con riferimento al precedente problema, possiamo dire che un parallelepipedo rettangolo è un poliedro convesso le cui facce sono tutte rettangoli? [Sì]
5. Da un panetto di burro a forma di parallelepipedo rettangolo tagliamo gli angoli in modo da ottenere delle sezioni triangolari, quante facce ha il solido così ottenuto? [14]
6. Con riferimento al precedente esercizio, quanti spigoli ha il solido ottenuto? [36]
7. Incolliamo 6 cubetti uguali, in modo da ottenere un poliedro a forma di croce, come mostrato in figura.



Quanti vertici ha? Quanti spigoli? Quante facce? [32; 60; 30]
8. In un parallelepipedo rettangolo uno spigolo misura 5 *cm* e la diagonale della faccia che ha per dimensioni gli altri due spigoli misura 12 *cm*, determinare la misura della diagonale del parallelepipedo. [13 *cm*]
9. In un parallelepipedo rettangolo la somma delle tre dimensioni è 21 cm e le dimensioni sono una doppia dell'altra, determinare tali dimensioni. [3 *cm*, 6 *cm*, 12 *cm*]
10. In un parallelepipedo rettangolo due dimensioni sono isometriche e doppie della terza, la diagonale misura 6 *cm*. Determinare la misura delle dimensioni. [2 *cm*, 4 *cm*, 4 *cm*]
11. Incolliamo 5 cubetti di lato 1 *cm*, in modo da ottenere un poliedro a forma di T, come mostrato in figura. Quanto misura la distanza *AB*?



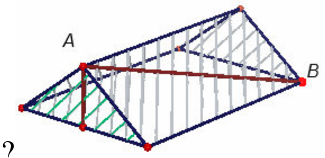
[$\sqrt{14}$ *cm*]
12. Incolliamo 8 cubetti di lato 1 *cm*, in modo da ottenere un poliedro a forma di E, come mostrato in figura. Quanto misura la distanza *AB*?



[$\sqrt{30}$ *cm*]

Livello 2

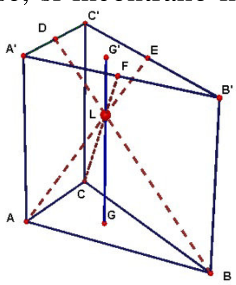
13. In un parallelepipedo rettangolo le dimensioni sono nel rapporto 1: 2: 3, la diagonale misura $2\cdot\sqrt{7}\ cm$. Determinare la misura delle dimensioni. $\left[\sqrt{2}\ cm, 2\cdot\sqrt{2}\ cm, 3\cdot\sqrt{2}\ cm\right]$
14. Un prisma retto a base triangoli equilateri, ha gli spigoli della stessa misura, se la sua superficie è $\left(12+2\cdot\sqrt{3}\right)cm^2$, quanto misura lo spigolo? [2 *cm*]
15. Dimostrare che in un parallelepipedo rettangolo le diagonali si incontrano nel loro punto medio.
16. Dimostrare che se in un prisma a base quadrangolare le diagonali si incontrano nel loro punto medio, allora il prisma è un parallelepipedo rettangolo.
17. Dimostrare che se in un prisma a base quadrangolare le diagonali sono isometriche, allora il prisma è un parallelepipedo rettangolo.
18. In un parallelepipedo rettangolo le dimensioni sono una doppia dell'altra, se tutte le misure sono intere, la somma delle tre dimensioni è multipla di quale numero? [7]
19. In figura è mostrata una tenda canadese a forma di prisma retto. Se la porta d'ingresso ha la massima ampiezza di 4 *m*, la lunghezza della tenda è 6 *m* e l'altezza di 1,5 *m*. Quanto sarà lungo un cavo teso



che congiunge in punti A e B? [6,5 m]

Livello 3

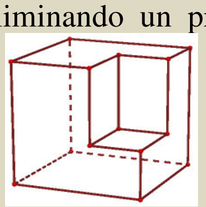
20. Con riferimento al precedente problema determinare una formula per trovare AB in funzione dell'ampiezza a, la lunghezza l e l'altezza h. $\left[\dfrac{\sqrt{4h^2+a^2+4l^2}}{2}\right]$
21. Dimostrare che in un prisma retto a base triangolare, i segmenti che uniscono un vertice di una base con il punto medio del lato opposto nell'altra base, si incontrano in uno stesso punto, che è allineato



con il segmento che unisce i baricentri delle basi.
22. Con riferimento al precedente esercizio, in che modo il punto d'incontro divide il segmento che ha per estremi i baricentri? [Nel rapporto 2:1]
23. Dimostrare che un prisma quadrangolare le cui facce opposte sono isometriche è un parallelepipedo rettangolo.
24. Dimostrare che un prisma quadrangolare le cui diagonali si incontrano nei loro punti medi è un parallelepipedo rettangolo.
25. Dimostrare che un parallelepipedo con le diagonali isometriche è rettangolo.
26. Dimostrare che in un parallelepipedo rettangolo, la somma dei quadrati delle misure degli spigoli è uguale alla somma dei quadrati delle diagonali.
27. Un problema di Dudeney. Una stanza a forma di parallelepipedo rettangolo ha dimensioni, in centimetri, $12 \times 30 \times 12$. Un ragno è sulla linea centrale di una parete terminale a 1 cm dal soffitto. Una mosca è sulla linea centrale del muro terminale opposto, a 1 cm dal pavimento. Qual è la minima distanza che il ragno deve percorrere per raggiungere la mosca? **Suggerimento:** Espandere sul piano la superficie della stanza. [40 cm]

Lavoriamo insieme

Il solido nella figura seguente è ottenuto eliminando un prisma rettangolare da un cubo di lato 8 m.



Vogliamo determinare la superficie del solido.
Osserviamo che la scelta delle dimensioni del prisma da tagliare sono ininfluenti perché il solido ottenuto ha sempre la stessa superficie. Infatti essa non è altro che la superficie del cubo. Poiché ogni pezzo di superficie eliminata dal cubo viene compensata da una faccia del parallelepipedo rimasta.
Pertanto la superficie è $6 \times 8^2\ m^2 = 6 \times 64\ m^2 = 384\ m^2$.

Livello 1

28. Calcolare la superficie di un solido formato da un cubo di lato lungo 8 cm, con un altro cubo incollato sulla sua base superiore le cui facce hanno la diagonale che misura 6 cm. [456 cm^2]
29. Calcolare la superficie di un solido formato da un cubo di lato che misura 4 cm, con un buco a forma di cubo di lato 2 cm. [112 cm^2]
30. In un parallelepipedo rettangolo, sommando a due a due le aree delle facce non parallele, si ottengono i numeri 27, 32, 35. Determinare la misura delle tre dimensioni. [3, 4, 5]

31. Un prisma equilatero retto a basi triangolari ha superficie $\left(18\cdot\sqrt{3}+108\right)cm^2$, determinare la misura del perimetro di base. [18 *cm*]
32. Un prisma retto ha per basi due triangoli equilateri di area $4\cdot\sqrt{3}\,cm^2$. Sapendo che il prisma ha superficie $\left(8\cdot\sqrt{3}+93\right)cm^2$, determinare la misura dell'altezza del prisma. [7,75 *cm*]
33. Un prisma retto ha per basi due triangoli equilateri di perimetro 18 *cm*. Sapendo che l'altezza del prisma misura 4 *cm*, determinare la misura della superficie. $\left[\left(18\cdot\sqrt{3}+72\right)cm^2\right]$
34. Un prisma retto ha per basi due triangoli rettangoli di cateti lunghi 3 *cm* e 4 *cm*, se l'altezza del prisma misura 6 *cm*., determinare la misura della superficie. [84 cm^2]
35. Un prisma retto ha per basi due rombi di lato lungo 3 *cm* e formanti un angolo di 60°. Se l'altezza del prisma è lunga 5 *cm*, determinare la superficie del prisma. $\left[\left(9\cdot\sqrt{3}+60\right)cm^2\right]$
36. Un prisma retto ha per basi due rombi di diagonali una doppia dell'altra ed altezza isometrica alla diagonale maggiore, se la superficie del prisma è $\left(64\cdot\sqrt{5}+32\right)cm^2$, determinare la misura della diagonale minore. [4 *cm*]
37. Un prisma retto ha per basi due esagoni regolari di lato lungo 4 *cm* e altezza lunga 6 *cm*. Determinare la misura della superficie. $\left[48\cdot\left(3+\sqrt{3}\right)cm^2\right]$
38. Un prisma equilatero retto a basi esagonali ha superficie 27 cm^2, determinare la misura dello spigolo. $\left[3\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}\;cm\right]$

Livello 2

39. Determinare una formula per il calcolo della superficie di un prisma retto a base triangolo equilatero, in funzione del lato ℓ della base e dell'altezza *h* del prisma. $\left[\ell\cdot\left(3\cdot h+\ell\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$
40. Determinare una formula per il calcolo della superficie di un prisma retto a base triangolo rettangolo, in funzione dei cateti *a*, *b*, della base e dell'altezza *h* del prisma. $\left[\left(a+b+\sqrt{a^2+b^2}\right)\cdot h+a\cdot b\right]$
41. Determinare una formula per il calcolo della superficie di un prisma retto a base esagono regolare, in funzione del lato ℓ della base e dell'altezza *h* del prisma. $\left[\ell\cdot\left(6h+3\ell\cdot\sqrt{3}\right)\right]$

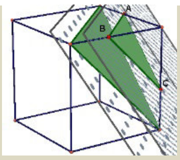
Livello 3

42. Consideriamo due cubi identici di lato ℓ, su uno di questi sovrapponiamo un cubo di lato $\ell' < \ell$, sull'altro produciamo un buco a forma di cubo di lato $\ell' < \ell$. In che relazione sono le superfici dei due solidi? [Sono uguali]
43. Esprimere la misura della diagonale di un parallelepipedo rettangolo mediante la superficie *S* e la somma *s* delle 3 dimensioni. $\left[d=\sqrt{s^2-S}\right]$
44. La superficie di un parallelepipedo rettangolo è 1012 cm^2, la somma di tutti gli spigoli è 156 *cm*. Determinare la misura della diagonale. $\left[\sqrt{509}\;cm\right]$

Lavoriamo insieme

Possiamo sezionare un cubo in modo da ottenere un triangolo equilatero?
La risposta è positiva, basta per esempio prendere il piano passante per 3 vertici del cubo, come mostrato in

figura.
In effetti ogni altro piano parallelo a questo, che incontra solo tre spigoli del cubo ha per sezione un

triangolo equilatero. 

Livello 2

45. Considerando il piano che passa per 3 vertici di un cubo, che tipo di sezioni si possono ottenere?
[Quadrato se i vertici sono di una stessa faccia; Rettangolo non quadrato altrimenti]
46. Considerando il piano che passa per i punti medi di due spigoli paralleli e di un terzo spigolo non parallelo ai precedenti due, che tipo di sezioni si possono ottenere? [Rettangolo non quadrato]
47. Sezioniamo un cubo con un piano, ottenendo una sezione formata da un poligono regolare di n lati. Per quali valori di n si ha soluzione? Giustificare la risposta. [n = 3, 4, 5, 6]
48. Come dobbiamo sezionare un cubo per ottenere sezioni a forma di quadrato?
[Con un piano parallelo a una delle facce]

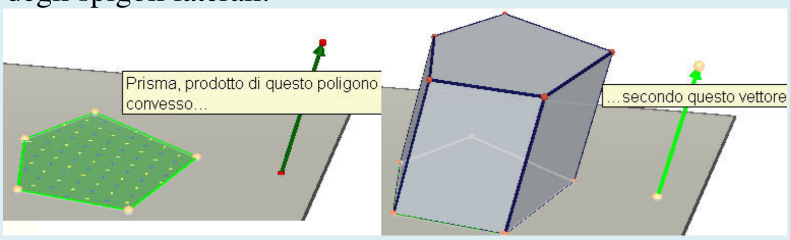
Livello 3

49. Come dobbiamo sezionare un cubo per ottenere sezioni a forma di trapezio isoscele?
[Con un piano passante per due vertici opposti di una stessa faccia e secante altri due spigoli]
50. E a forma di trapezio rettangolo? [Non è possibile]
51. E a forma di esagono regolare?
[Con un piano passante per i punti medi di 3 spigoli a due a due incidenti]

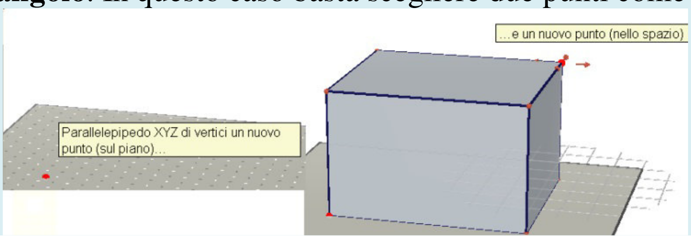
L'angolo di Cabri3D

Con Cabri3D possiamo costruire facilmente prismi e parallelepipedi rettangoli. Vediamo i comandi predefiniti.

Prisma. Per il comando è necessario avere costruito prima un poligono, come base del prisma, e un vettore, come direzione degli spigoli laterali.



Parallelepipedo rettangolo. In questo caso basta scegliere due punti come vertici opposti.

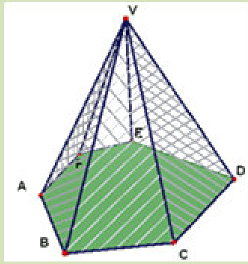


Le piramidi e i tronchi di piramide

Il tetraedro è non solo il poliedro più semplice, cioè con meno facce, ma anche il più semplice di una famiglia di poliedri particolari. Infatti se consideriamo un vertice qualsiasi del tetraedro e invece di unirlo con i vertici di un triangolo, non complanare con esso, lo uniamo con un poligono convesso di n lati ovviamente otterremo ancora un poliedro convesso.

Definizione 8

Il poliedro delimitato da un poligono convesso P e dai triangoli che hanno un lato in comune con P e un vertice V comune a tutti loro, ma esterno al piano del poligono, si chiama **piramide**.

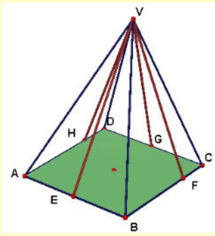


Il punto V si chiama **vertice della piramide.**

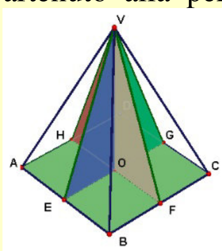
Calcolare la superficie di una piramide qualsiasi non è in genere semplice, nel senso che non riusciamo a ottenere una semplice formula. Dobbiamo infatti sommare l'area del poligono di base con le aree dei triangoli laterali che in generale sono tutti privi di relazioni fra di loro. Una formula semplice si ottiene se riusciamo a fare in modo che le altezze delle facce, relative agli spigoli di base risultino isometriche. Vediamo se e quando ciò risulta possibile.

Esempio 5

Considerando una piramide a base quadrata, possiamo dire che in generale i triangoli di base hanno tutti la stessa altezza relativa agli spigoli di base? Ovviamente no, come mostrato nella figura seguente.



Ciò sarebbe invece accaduto se il vertice fosse appartenuto alla perpendicolare condotta al piano del quadrato per il suo centro, come mostrato di seguito.



In questo caso infatti addirittura le quattro facce sono fra loro isometriche, ma quel che più conta è che le altezze VE, VF, VG e VH sono fra loro isometriche. E quindi la superficie della piramide si ottiene aggiungendo alla superficie di base la moltiplicazione del valore comune di tale altezza per il perimetro della base e dividendo per due.

La prima questione che dobbiamo risolvere è se quello che abbiamo visto accade solo quando i poligoni di base sono regolari, come il quadrato, o può accadere più in generale anche per poligoni non regolari.
Quello che deve succedere è che l'altezza della piramide debba avere il piede in un particolare punto della base, a partire dal quale possiamo tracciare perpendicolari ai lati fra loro isometriche. Ma ciò accade solo se questo punto è il centro di una circonferenza inscritta nel poligono. Possiamo perciò porre questa definizione.

Definizione 9

Una piramide la cui base è un poligono circoscrivibile a una circonferenza e la cui altezza ha per piede il centro della detta circonferenza si dice **piramide retta**. Se la base è un poligono regolare la piramide retta si dice **regolare**.

Per quanto detto vale il seguente risultato.

Teorema 6

Le altezze delle facce di una piramide retta, relative agli spigoli di base della piramide sono segmenti fra loro isometrici.

Poniamo quindi la seguente definizione.

Definizione 10

Le altezze delle facce di una piramide retta, relative agli spigoli di base si chiamano **apotema della piramide**.

A questo punto possiamo enunciare il risultato sulla superficie delle piramidi rette.

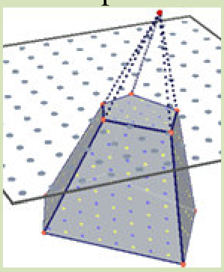
Teorema 7

La superficie di una piramide retta si ottiene aggiungendo alla superficie di base il semiprodotto del perimetro della base per l'apotema, in formula: $S = S_b + p \cdot a$.

Un altro interessante poliedro si ottiene a partire dalle piramidi.

Definizione 11

Il solido ottenuto sezionando una piramide con un piano parallelo alla base ed eliminando la parte che



contiene il vertice si chiama **tronco di piramide**.

Ovviamente sezionando una piramide retta il tronco sarà detto anch'esso retto e per esso abbiamo anche il concetto di apotema.

Definizione 12

Le altezze isometriche delle facce trapezoidali di un tronco di piramide retto, si chiamano **apotema del tronco**.

Anche in questo caso abbiamo un semplice risultato sul calcolo della superficie dei tronchi di piramidi retta.

Teorema 8

La superficie di un tronco di piramide retta si ottiene aggiungendo alle superfici di base il semiprodotto della somma dei due perimetri della base per l'apotema, in formula: $S = S_b + S'_b + (p + p') \cdot a$.

Dimostrazione

Per esercizio, basta tenere conto del tipo di poligoni delle facce laterali.

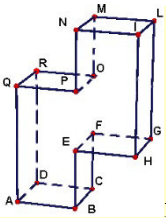
Considerando una generica piramide costruita su un poligono di n vertici, osserviamo che essa ha n+1 vertici (quelli della base e quello esterno che a questi si unisce), $n + 1$ facce (la base e gli n triangoli ottenuti unendo il vertice esterno con i vertici della base) e $2n$ spigoli (gli n della base e gli n che uniscono i detti vertici con il vertice esterno). Osserviamo che $(n + 1) + (n + 1) - 2n = 2$. Allo stesso modo osserviamo che per un generico prisma costruito su due poligoni di n vertici ciascuno, ha $2n$ vertici (quelli delle basi), $n + 2$ facce (le due basi e gli n parallelogrammi ottenuti unendo i vertici corrispondenti dei poligoni di base isometrici) e $3n$ spigoli (n per ogni base e n che uniscono i vertici corrispondenti). Stavolta avremo: $2n + (n + 2) - 3n = 2$. Questo fatto ci suggerisce di enunciare il seguente risultato

Teorema 9

In ogni poliedro convesso, i numeri: V dei suoi vertici, F delle sue facce e S dei suoi spigoli verificano la seguente uguaglianza: $V + F - S = 2$.
Dimostrazione Omessa

La precedente relazione è nota come **formula di Eulero**. Essa può essere valida anche per poliedri non convessi.

Esempio 6

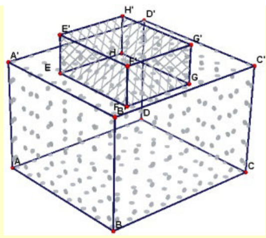
Consideriamo il seguente poliedro non convesso 

i suoi vertici sono 16, le facce sono 10 e gli spigoli sono 24 e $16 + 10 - 24 = 2$.

Ma ci sono anche poliedri non convessi per cui la precedente espressione non vale 2.

Esempio 7

Per il seguente poliedro convesso si ha: $V + F - S = 16 + 11 - 24 = 3$



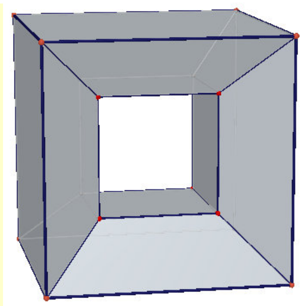
Definizione 13

Per ogni poliedro la quantità $V + F - S$ si dirà sua **caratteristica di Eulero**.
I poliedri la cui caratteristica di Eulero è 2 si chiamano **euleriani**.

La caratteristica di Eulero è sempre un numero intero, che può essere anche nullo o negativo.

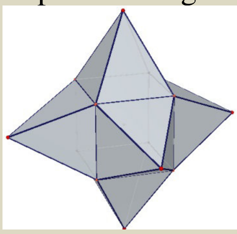
Esempio 8

Per il seguente poliedro si ha: $V + F - S = 16 + 16 - 32 = 0$.

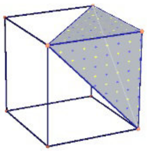
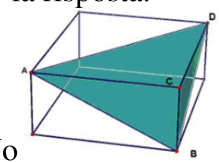


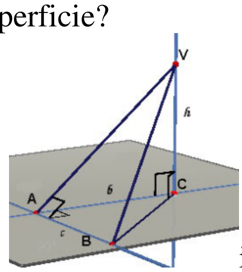
Verifiche

Lavoriamo insieme

Sulle facce di un cubo costruiamo delle piramidi regolari la cui altezza misura quanto lo spigolo del cubo, ottenendo il seguente poliedro stellato 
Calcoliamo la misura della sua superficie. Essendo l'altezza lunga ℓ, l'apotema, usando il teorema di Pitagora, sarà lunga $\sqrt{\ell^2+\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}=\ell\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\ell\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}$. Quindi la superficie laterale di una piramide è $\cancel{2}\cdot\ell\cdot\ell\cdot\frac{\sqrt{5}}{\cancel{2}}=\sqrt{5}\cdot\ell^2$. Infine la superficie del poliedro stellato è $6\cdot\sqrt{5}\cdot\ell^2$.

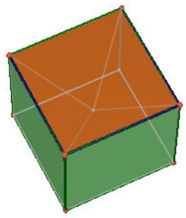
Livello **1**

1. Determinare la misura della superficie di una piramide regolare a base un triangolo equilatero, le cui facce sono tutti triangoli equilateri isometrici, in funzione dello spigolo ℓ. $\left[\sqrt{3}\cdot\ell^2\right]$
2. In figura abbiamo un cubo e una piramide  che viene chiamata tetraedro trirettangolo perché tre delle sue facce sono triangoli rettangoli. Che tipo di triangolo è la quarta faccia? [Equilatero] Possiamo dire che la piramide è retta? Giustificare la risposta. [Sì] Se lo spigolo del cubo è lungo 2 m, quanto misura la superficie del tetraedro? $\left[2\cdot\left(3+\sqrt{3}\right)m^2\right]$
3. Con riferimento al quesito precedente. Dividiamo a metà gli spigoli del cubo e tronchiamo il tetraedro trirettangolo. Quanto misura la superficie del tronco di piramide così ottenuto? $\left[\left(\frac{12+5\cdot\sqrt{3}}{2}\right)m^2\right]$
4. Ripetiamo in un parallelepipedo rettangolo la costruzione effettuata nel cubo per ottenere un tetraedro trirettangolo. Possiamo dire che in generale si ottiene una piramide retta? Giustificare la risposta. [No 

]
5. Nella dimostrazione del Teorema delle 3 perpendicolari abbiamo costruito una particolare piramide le cui facce sono tutti triangoli rettangoli. Essa si chiama tetraedro quadrirettangolo. Quanti fra i sei spigoli dobbiamo conoscere, al minimo, per potere determinare la misura della superficie? [3]
6. Determinare la misura della superficie del tetraedro quadrirettangolo in figura, 

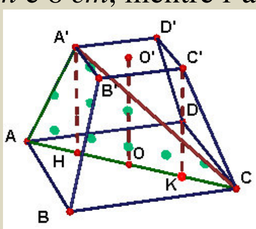
in cui $b = 21$, $c = 20$, $h = 28$. [1260]
7. Quanti fra i sei spigoli di un tetraedro trirettangolo dobbiamo conoscere, al minimo, per potere determinare la misura della superficie? [3]
8. Con riferimento al precedente quesito, determinare la misura della superficie del tetraedro ottenuto a

partire da un parallelepipedo di dimensioni 5, 12 e 35. **Sugg**: per determinare l'area della faccia non triangolo rettangolo usare la formula di Erone: $\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$. $\left[\frac{655+25\cdot\sqrt{337}}{2}\right]$

9. Su una faccia di un cubo di lato 1 *m* scaviamo una cavità a forma di piramide, la cui base coincide con la faccia del cubo e il cui vertice è il centro dello stesso cubo. Quanto misura la superficie laterale di tale piramide?  $\left[\sqrt{2}\,m^2\right]$
10. Il tronco di piramide ottenuto sezionando una piramide con un piano passante per il punto medio dell'altezza, ha superficie laterale metà di quello della piramide? Giustificare la risposta. [No]
11. Con riferimento al precedente quesito, in che rapporto sono invece le superfici laterali della piramide iniziale e del tronco da essa ottenuto? [4:3]
12. Tronchiamo un tetraedro quadrirettangolo con $b = 6$, $c = 8$, $h = 10$ (vedi figura Es. 6) con un piano parallelo al piano determinato da A, B e C, in modo da dividere a metà h. Quanto misura la superficie del tronco così ottenuto? $\left[6\cdot\sqrt{34}+90\right]$
13. Un tronco di piramide retta ha per base maggiore un triangolo rettangolo i cui cateti misurano 21 *cm* e 72 *cm*. Il perimetro della base minore misura 56 cm e l'altezza 18 *cm*. Determinare la misura dell'altezza della piramide dalla quale è stato ottenuto il tronco. [24 *cm*]
14. Trovare la misura della superficie laterale di un tronco di piramide regolare a basi quadrangolari di lati 80 *cm* e 10 *cm* e il cui spigolo misura 37 *cm*. [2160 cm^2]

Lavoriamo insieme

Determinare la misura delle diagonali di un tronco di piramide regolare a basi quadrangolari, sapendo che gli spigoli delle basi misurano 4 *cm* e 8 *cm*, mentre l'altezza misura 2√7 *cm*.

Consideriamo la figura seguente 

. Ovviamente tutte le diagonali hanno la stessa misura. E altrettanto ovviamente l'altezza AH del triangolo ABC relativa al lato AC è lunga quanto l'altezza OO′ del tronco. Stessa misura ha anche C′K, condotto perpendicolarmente ad AC da C′. Quindi possiamo scrivere:

$$\overline{HC}=\overline{AC}-\overline{AH}=\overline{AC}-\frac{\overline{AC}-\overline{A'C'}}{2}=\frac{\overline{AC}+\overline{A'C'}}{2}=\frac{8\cdot\sqrt{2}-4\cdot\sqrt{2}}{2}cm=2\cdot\sqrt{2}\,cm$$

Pertanto avremo: $\overline{A'C}=\sqrt{\overline{A'H}^2+\overline{HC}^2}=\sqrt{\left(2\cdot\sqrt{7}\right)^2+\left(2\cdot\sqrt{2}\right)^2}\,cm=\sqrt{28+8}\,cm=6\,cm$.

Livello 2

15. Determinare l'altezza di una piramide retta di base un quadrato di lato $\sqrt{2}\,cm$ e di facce triangoli equilateri. [1 *cm*]
16. Determinare lo spigolo di base di una piramide retta di base un quadrato di lato e di facce triangoli equilateri, la cui altezza è $\sqrt{8}\,cm$. [4 *cm*]
17. In un tronco di piramide retto a base quadrata, lo spigolo laterale forma con la diagonale della base maggiore un angolo di 60° e misura $2\cdot\sqrt{2}\ cm$. Sapendo che la differenza delle aree delle due basi è 12 cm^2, determinare la misura della superficie del tronco. $\left[\left(20+12\cdot\sqrt{7}\right)cm^2\right]$
18. Il rapporto dei pentagoni di base di un tronco di piramide regolare è 16. Sapendo che la differenza dei

lati delle due basi è 12 *cm* e che lo spigolo laterale forma con il lato della base maggiore un angolo di 60°, determinare la misura della superficie laterale. $\left[300\cdot\sqrt{3}\,cm^2\right]$

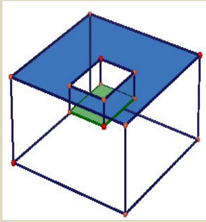
19. I lati delle basi di un tronco di piramide quadrangolare regolare hanno per somma 46 *cm* e lo spigolo laterale forma con il lato della base maggiore un angolo di 45°. Se la superficie di una faccia laterale misura 184 cm^2, determinare la misura dello spigolo laterale. $\left[32\cdot\sqrt{2}\,cm\right]$
20. La superficie totale di una piramide regolare quadrangolare misura 800 cm^2. Trovare la misura della superficie laterale sapendo che l'altezza misura 15 *cm*. [544 cm^2]
21. In una piramide quadrangolare regolare la superficie di base è 5/26 di quella laterale; sapendo che l'altezza è 24 *cm* trovare la misura dell'apotema. [26 *cm*]
22. Un rombo di diagonale minore lunga 20 *cm* è base di una piramide retta di altezza 15 *cm*. Sapendo che il raggio del cerchio inscritto nel rombo è lungo 8 *cm*, trovare la misura della superficie della piramide. $\left[\frac{2500}{3}cm^2\right]$
23. Una piramide regolare a base quadrangolare ha l'altezza che misura quanto il semiperimetro di base. Quanto vale il rapporto fra l'apotema e lo spigolo di base? $\left[\sqrt{17}/2\right]$
24. Il raggio del cerchio inscritto nel triangolo di base di una piramide retta regolare è lungo 28 *cm*; trovare la misura della superficie laterale della piramide sapendo che l'altezza è di 45 *cm*. $\left[17808\cdot\sqrt{3}\,cm^2\right]$
25. In una piramide regolare a base quadrata l'altezza è 56/65 dell'apotema; trovare la misura della superficie laterale della piramide, sapendo che quella totale misura 3234 cm^2. [2145 cm^2]
26. Determinare l'area della superficie di un solido composto da un cubo di lato ℓ, sulla cui base maggiore è sovrapposto una piramide regolare a base triangolare che ha uno spigolo coincidente con uno del cubo. $\left[\left(6+\sqrt{3}/2\right)\cdot\ell^2\right]$
27. Consideriamo un cubo di lato 1 e il suo centro *O*. Determinare la misura della superficie laterale della piramide che ha per vertice *O* e per base una delle facce del cubo. $\left[\sqrt{2}\right]$
28. Calcolare l'altezza di una piramide a base quadrata di area 16 cm^2 e con uno spigolo di 5 *cm*. $\left[\sqrt{17}\,cm\right]$

Livello 3

29. Dimostrare che in un tronco di piramide le basi sono poligoni simili, le cui aree stanno fra loro come i quadrati delle loro distanze dal vertice della piramide troncata.
30. Determinare una formula per il calcolo della superficie di un tetraedro trirettangolo ottenuto a partire da un cubo di spigolo ℓ. $\left[\frac{3+\sqrt{3}}{2}\cdot\ell^2\right]$
31. Determinare una relazione fra l'altezza *h* di un tetraedro trirettangolo a base un triangolo equilatero e lo spigolo della base ℓ. $\left[\ell=\sqrt{6}\cdot h\right]$
32. Determinare una formula per il calcolo della superficie di un tronco di tetraedro trirettangolo ottenuto tagliando a metà gli spigoli ℓ del cubo generatore del tetraedro. $\left[\left(\frac{12+5\cdot\sqrt{3}}{8}\right)\cdot\ell^2\right]$
33. Determinare la misura della superficie di un tetraedro quadrirettangolo in funzione degli spigoli *b*, *c* e *h* nella figura dell'esercizio 6. $\left[\frac{b\cdot c+b\cdot h+\sqrt{b^2+c^2}\cdot h+c\cdot\sqrt{b^2+h^2}}{2}\right]$
34. Determinare l'altezza di una piramide retta di base un quadrato di lato ℓ e di facce triangoli equilateri. $\left[\ell/\sqrt{2}\right]$
35. Determinare lo spigolo di base di una piramide retta di base un quadrato di lato e di facce triangoli e-

quilateri, la cui altezza è h. $\left[\sqrt{2}\cdot h\right]$

Lavoriamo insieme

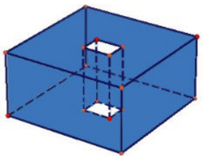
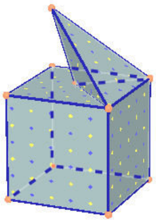
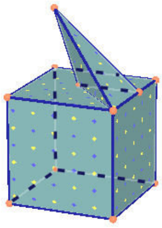
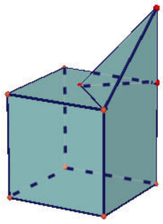
Vogliamo calcolare la caratteristica di Eulero per il solido in figura, in cui abbiamo “scavato” una faccia di un parallelepipedo pieno, ottenendo un altro piccolo parallelepipedo.  I vertici sono la somma dei vertici dei due parallelepipedi, cioè 16, le facce invece sono la somma delle facce dei due solidi diminuita di 1, perché il parallelepipedo piccolo è privo della faccia superiore, cioè sono 11. Gli spigoli sono somma degli spigoli dei due poliedri, cioè 24. Quindi la caratteristica è 16 + 11 – 24 = 3.

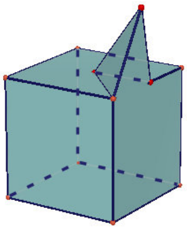
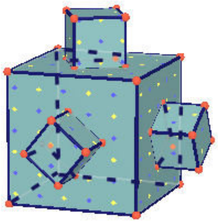
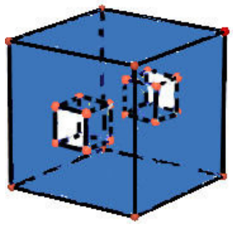
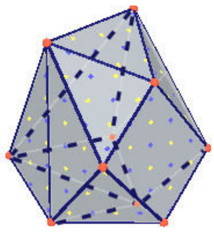
Calcolare la caratteristica di Eulero per i seguenti poliedri

Livello 1

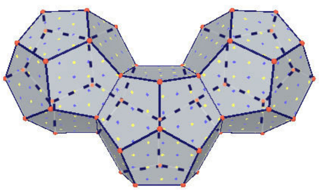
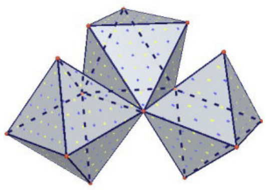
36. Poliedro a forma di E [2] A forma di F [2] A forma di L [2] A forma di H [2]

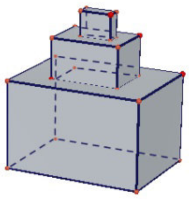
Nelle figure seguenti le parti bianche indicano che il poliedro è bucato.

37.  [2]  [2]  [3]  [3]

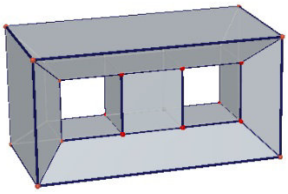
38.  [2]  [5]  [4]  [2]

Livello 2

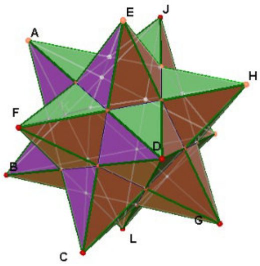
39.  [2]  [4]

40. Poliedro ottenuto sovrapponendo 20 parallelepipedi rettangoli tutti di diverse dimensioni, in modo che la base di quello posto di sopra sia interna alla base di quello di sotto, senza che vi siano né vertici né spigoli in comune. In figura vi è il caso con 3 parallelepipedi.  [21]

41. Con riferimento all’esercizio precedente, calcolare la caratteristica di Eulero del poliedro ottenuto sovrapponendo n parallelepipedi rettangoli. $[n + 1]$



42. Poliedro “doppia cornice” in figura [–2]

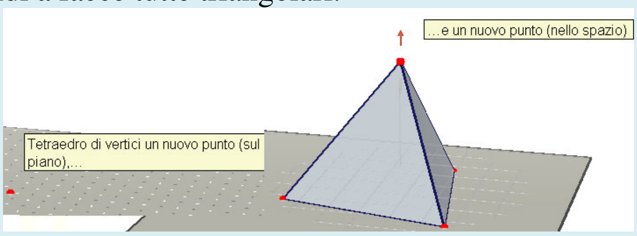


43. Poliedro stellato di Keplero mostrato in figura, si tenga conto che i poligoni di uguale colore, come quello verde non sono considerati come 5 facce, ma come un’unica faccia, poiché giacciono sullo stesso piano. [–6]

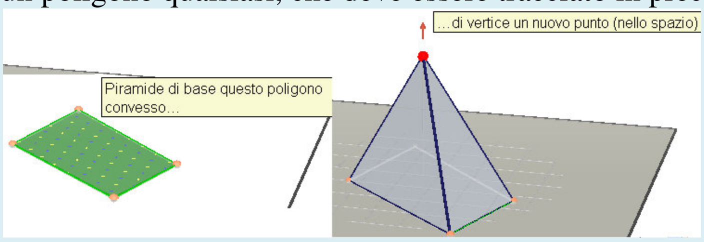
L’angolo di Cabri3D

Abbiamo due comandi per tracciare piramidi.

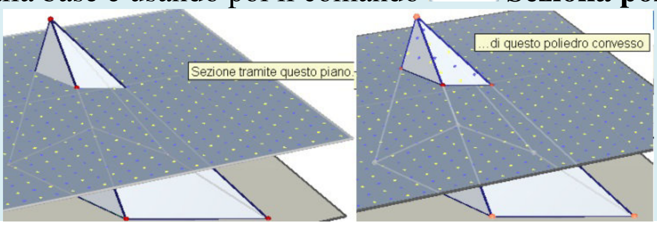
Tetraedro. Cioè piramidi a facce tutte triangolari.

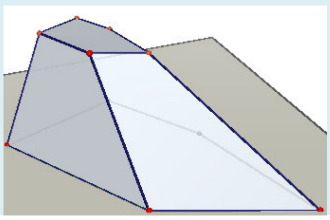


Piramide. Con base un poligono qualsiasi, che deve essere tracciato in precedenza.



Non c’è un comando predefinito per il tronco di piramide, ma esso può ottenersi sezionando con un piano parallelo alla base e usando poi il comando **Seziona poliedro**.





I poliedri regolari

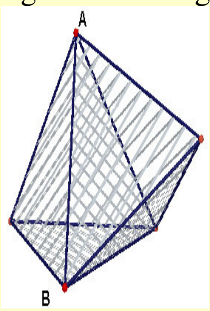
Il problema

Esistono dei poliedri corrispondenti ai poligoni regolari?

Nella geometria del piano i poligoni regolari hanno un posto importante, vogliamo quindi stabilire se possiamo trovare dei loro corrispondenti fra i poliedri. I poligoni regolari sono equilateri ed equiangoli, i poliedri dovranno avere uguali gli spigoli, quindi le facce ed infine gli angoli diedri che determinano tali facce quando si incontrano in un vertice. Che vuol dire? Che le facce devono essere tutti poligoni regolari e che in ogni vertice si devono incontrare lo stesso numero di facce.

Esempio 9

Il poliedro in figura non è regolare, perché nel vertice A si incontrano tre facce, mentre nel vertice B se ne incontrano 4.



Quindi l'angolo diedro determinato dalle facce che si incontrano in A non è uguale a quello di quelle che si incontrano in B.

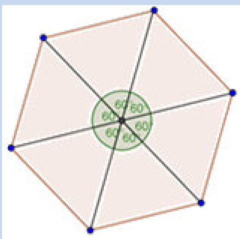
Sappiamo anche che i poligoni regolari sono infiniti, quindi pensiamo che accada lo stesso anche per i poliedri. Questa idea è invece sbagliata. Vale infatti il seguente risultato

Teorema 10

Esistono solo 5 poliedri regolari.

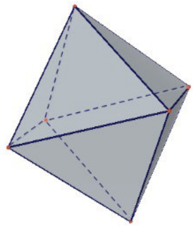
Dimostrazione

Tutto dipende dal fatto che in ogni vertice non si possono incontrare un numero qualsiasi di poligoni regolari, infatti per esempio 6 triangoli equilateri con un vertice in comune giacciono sullo stesso piano.

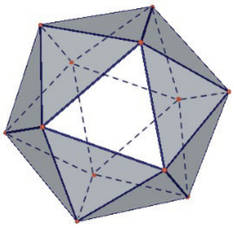


Addirittura più di 6 triangoli equilateri si sovrappongono. Lo stesso accade per più di 3 quadrati; per più di 3 pentagoni regolari e per più di 2 poligoni regolari che hanno più di 5 lati.
Quindi esistono sono poliedri regolari in cui in ogni vertice si incontrano 3, 4 o 5 triangoli equilateri, 3 quadrati o 3 pentagoni regolari.

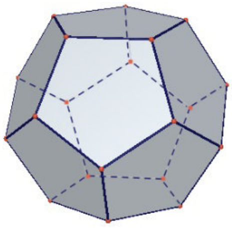
Il poliedro regolare con 3 facce triangolari che si incontrano in un vertice lo conosciamo già, perché è una particolare piramide. Così come conosciamo il poliedro a facce quadrate, che è un particolare parallelepipedo regolare, cioè il cubo o esaedro regolare.
Vediamo di conoscere anche gli altri tre poliedri regolari.
Il poliedro che ha 4 facce triangolari che si incontrano in ogni vertice è dato dalla sovrapposizione di due pi-



ramidi regolari a base quadrata coincidente; si chiama **ottaedro regolare**.
Il poliedro in cui 5 triangoli equilateri si uniscono a formare un vertice ha un totale di 20 facce e si chiama



icosaedro regolare.
Infine l'ultimo poliedro regolare, in cui in ogni vertice si incontrano tre pentagoni regolari ha dodici facce e



si chiama **dodecaedro regolare**.
Nella tabella seguente riportiamo il numero di vertici, spigoli e facce dei poliedri regolari.

Poliedro regolare	N. Vertici	N. Facce	N. Spigoli
Tetraedro	4	4	6
Esaedro	8	6	12
Ottaedro	6	8	12
Dodecaedro	20	12	30
Icosaedro	12	20	30

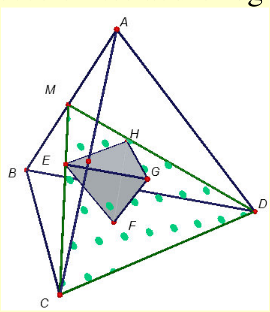
Osserviamo che esaedro ed ottaedro, rispettivamente dodecaedro ed icosaedro, hanno il numero di vertici e di facce che si scambiano tra loro. Essendo tutti poliedri euleriani, ciò comporta che hanno lo stesso numero di spigoli.

Definizione 14

Il poliedro che ha per vertici i centri delle facce di un altro poliedro si dice **poliedro duale** di quello dato.

Esempio 10

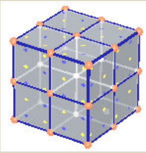
Quindi il tetraedro è duale di se stesso, cioè, come mostrato in figura, il poliedro che ha per vertici i centri delle facce di un tetraedro regolare è esso stesso un tetraedro regolare.



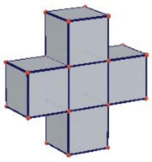
La dimostrazione è semplice e tiene conto del fatto che per esempio il triangolo *CDM*, con *M* punto medio di *AB*, ha i punti *E* ed *H* che, per le proprietà dei baricentri, (dato che *E* è baricentro di *ABC* ed *H* di *ABD*), dividono i lati *CM* e *DM* nel rapporto 1: 2. Pertanto *EH* è parallelo a *CD* e misura 1/3 di esso. Con analoghe costruzioni si prova che anche gli altri spigoli *FE*, *GH* ed *HF* misurano quanto 1/3 dello spigolo del tetraedro *ABCD*. Quindi *EFGH* è equilatero. Ma i tetraedri equilateri, come i triangoli, sono regolari.

Verifiche

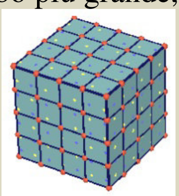
Lavoriamo insieme

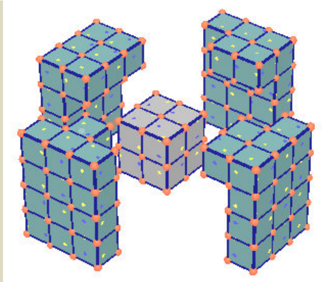
Un cubo può essere formato incollando cubetti più piccoli, che devono essere in numero pari al cubo di un numero intero. Quindi possiamo costruire un cubo a partire da 1, 8, 27, 64, …, n^3 cubetti più piccoli ma tutti uguali fra loro. 

Livello 1

1. Quanti tagli sono necessari per dividere un cubo di lato 3 *cm* in 27 cubi di lato 1 *cm*? [6]
2. Con 100 cubetti possiamo costruire un cubo più grande? Giustificare la risposta. [No]
3. Con 125 cubetti possiamo costruire un cubo più grande? Giustificare la risposta. [Sì]
4. Un cubo è costruito usando 27 cubi più piccoli e tutti uguali fra loro. Sappiamo che tre delle facce del cubo grande sono verniciate di rosso e le altre tre di blu. Come minimo quanti dei cubi piccoli presentano almeno due facce verniciate di colori diversi? [3]
5. Consideriamo un cubo di superficie 120 cm^2 e lo dividiamo in 4 cubi uguali, quanto misura la superficie di ciascuno di questi cubi più piccoli? E se lo dividiamo in 10 cubi uguali? [30 cm^2; 12 cm^2]
6. Possiamo dire che se dividiamo un cubo di superficie *n* in *k* cubi uguali la superficie dei cubi più piccoli è *n*/*k*? Giustificare la risposta. [Sì]
7. In che rapporto sono le superfici di due cubi di spigolo uno doppio dell'altro? [4:1]
8. Su una faccia di un cubo di superficie 180 cm^2 incolliamo un cubo di spigolo metà di quello dato, quanto misura la superficie di questo nuovo solido? [210 cm^2]
9. Una diagonale di un cubo misura 1, quanto misura la superficie del cubo? [2]
10. Calcolare il rapporto fra l'altezza e lo spigolo di un tetraedro regolare. $\left[\sqrt{6}/3\right]$
11. Calcolare il rapporto fra l'altezza e lo spigolo di un ottaedro regolare. $\left[\sqrt{2}/2\right]$
12. Calcolare la misura della superficie di un ottaedro regolare di spigolo 1. $\left[2\cdot\sqrt{3}\right]$
13. Calcolare la misura della superficie di un icosaedro regolare di spigolo 1. $\left[5\cdot\sqrt{3}\right]$
14. Con 5 cubetti uguali formiamo un solido a forma di croce la cui superficie è di 22 m^2. Quanto misura lo spigolo del cubetto iniziale?  [1 *m*]

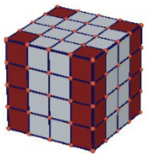
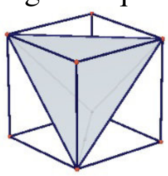
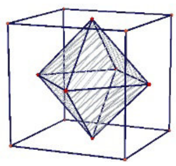
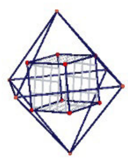
Lavoriamo insieme

Con 64 cubetti bianchi costruiamo un cubo più grande, quindi passiamo una mano di vernice sulla superficie del cubo grande come mostrato in figura  Vogliamo sapere quanti cubetti sono rimasti con tutte le facce bianche. I cubetti possono essere suddivisi in quelli "esterni", che hanno almeno una faccia appartenente al cubo grande e sono ovviamente 16 per la faccia "superiore" e 16 per quella "inferiore", ce ne sono poi altri 24 nelle rimanenti facce. Per un totale di 56. Quelli interni e perciò rimasti bianchi sono perciò



8, cioè tanti quanti sono necessari a formare un cubo di lato 2.

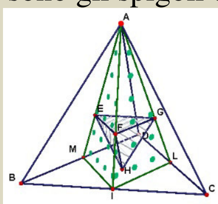
Livello 2

15. Con riferimento al problema del box Lavoriamo insieme, quanti dei cubetti iniziali hanno una sola faccia colorata? E quanti due? [24; 24]
16. Incolliamo fra loro 1000 cubi di lato 1, ottenendo un cubo di lato 10. Quanti dei cubi incollati sono *invisibili*? [512]
17. Incolliamo fra loro 125 cubi a formare un cubo più grande, quindi coloriamo la superficie del cubo. Quanti dei 125 cubetti iniziali ha una sola faccia colorata? Quanti due facce? Quanti tre facce? Quanti quattro facce? [54; 36; 8; 0]
18. Con dei cubetti uguali vogliamo costruire un cubo più grande, che per ogni spigolo ha 6 dei cubetti. Poiché non ne abbiamo a sufficienza mettiamo solo i cubetti che si vedono. Di quanti ne abbiamo bisogno? [152]
19. Sessantaquattro cubi di lato 1 cm, sono uniti a formare un cubo di lato 4 cm. Viene passata una mano di vernice a formare due strisce che si incontrano, come mostrato in figura. Quanti cubi non vengono colorati per niente?  [24]
20. Su ciascuna faccia di un cubo di lato 3, viene prodotto un foro a forma cubica di lato 1, in posizione concentrica a ciascuna faccia. Determinare la superficie del poliedro così ottenuto. [78]
21. Aumentiamo ciascuno spigolo di un cubo del 50%, qual è l'aumento percentuale della superficie del cubo? [125%]
22. Dimostrare che congiungendo quattro degli otto vertici di un cubo come mostrato in figura, si ottiene un tetraedro regolare. 
23. Con riferimento al precedente esercizio, calcolare quanto misura la superficie del tetraedro se il lato del cubo misura 1. $\left[2\cdot\sqrt{3}\right]$
24. Dimostrare che l'ottaedro duale del cubo è regolare. 
25. Detti ℓ_4 la misura dello spigolo dell'esaedro e ℓ_8 quella dello spigolo dell'ottaedro suo duale, determinare ℓ_4/ℓ_8. $\left[\sqrt{2}\right]$
26. Dimostrare che l'esaedro duale dell'ottaedro è regolare. 
27. Detti ℓ_8 la misura dello spigolo dell'ottaedro regolare e ℓ_6 quella dello spigolo dell'esaedro suo duale, determinare ℓ_4/ℓ_6. $\left[\sqrt{2}/3\right]$

28. Calcolare la superficie di un solido formato da un cubo di lato che misura 8 *cm*, con un altro cubo incollato sulla sua base superiore le cui facce hanno la diagonale che misura 6 *cm*. [456 cm^2]
29. Calcolare la misura della superficie di un icosaedro regolare sapendo che il suo lato misura quanto la metà di quello di un cubo di superficie 600 cm^2. $\left[125\cdot\sqrt{3}\right]$
30. Calcolare la superficie di un solido formato da un cubo di lato che misura 5 *cm*, con una cavità concentrica alla sua base superiore a forma di cubo, in modo che la superficie rimasta della faccia bucata misuri 10 cm^2. [210 cm^2]
31. Calcolare la superficie di un ottaedro regolare sapendo che il segmento che ha per estremi i vertici delle due piramidi che formano l'ottaedro misura 4 *cm*. $\left[16\cdot\sqrt{3}\ cm^2\right]$
32. Determinare l'area della superficie di un solido composto da un cubo il cui lato misura 6 cm, sulla cui base maggiore è sovrapposto un tetraedro regolare con uno spigolo in comune con quello del cubo. $\left[\left(18\cdot\sqrt{3}+216\right)cm^2\right]$
33. Determinare la misura della superficie di un ottaedro regolare il cui lato di base ha la stessa misura dell'altezza di un tronco di piramide retta a basi quadrate, la cui superficie laterale misura 120 cm^2 ed in cui il lato della base maggiore supera l'apotema (isometrico al lato della base minore) di 2 *cm*. $\left[48\cdot\sqrt{3}\,cm^2\right]$
34. Determinare la superficie di un tetraedro regolare, sapendo che il suo lato misura quanto la diagonale di un parallelepipedo rettangolo, di cui conosciamo la misura della superficie totale, 208 cm^2, e di uno spigolo, 4 *cm*, mentre le altre due dimensioni differiscono fra loro di 2 *cm*. $\left[116\cdot\sqrt{3}\,cm^2\right]$

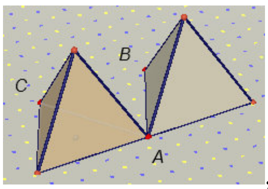
Lavoriamo insieme

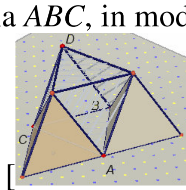
Abbiamo visto che unendo i centri delle facce di un tetraedro regolare si ottiene un altro tetraedro regolare, adesso vogliamo determinare in che relazione sono gli spigoli dei due tetraedri.



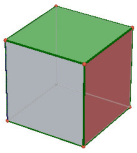
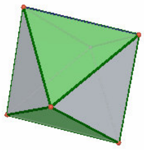
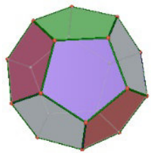
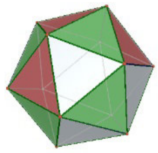
Detta ℓ la misura dello spigolo del tetraedro maggiore, abbiamo: $\overline{IL}=\frac{1}{2}\ell$. D'altro canto abbiamo anche $\overline{FG}=\frac{2}{3}\overline{IL}=\frac{1}{3}\ell$. Quindi il tetraedro più piccolo ha spigolo 1/3 di quello più grande.

Livello 3

35. Dimostrare che considerando due tetraedri regolari isometrici che hanno un vertice in comune, come mostrato in figura 

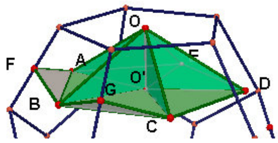
, possiamo *inserire* un ottaedro regolare di faccia *ABC*, in modo che abbia altre tre facce complanari con quelle dei tetraedri. [

]
36. Vogliamo colorare le facce di un tetraedro regolare in modo che non vi siano due facce con uno spigolo in comune che abbiano lo stesso colore, quanti colori dobbiamo usare al minimo? [4]
37. Vogliamo colorare le facce di un poliedro regolare in modo che non vi siano due facce con uno spigolo in comune che abbiano lo stesso colore, quanti colori dobbiamo usare al minimo, per i vari poliedri

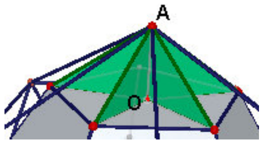
regolari, escluso il tetraedro? [3  ; 2  4  3 ]

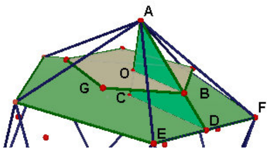
38. Incolliamo fra loro n^3 cubi a formare un cubo più grande, quindi coloriamo la superficie del cubo. Quanti dei cubetti iniziali hanno 0, 1, 2, 3, più di 3 facce colorate? [$(n-2)^3$; $6 \cdot (n-2)^2$; $12\,(n-2)$;8;0]

39. Su una faccia di un cubo di superficie $n^2\ cm^2$ incolliamo un cubo di spigolo metà di quello dato, quanto misura la superficie di questo nuovo solido? [$7/6n^2$]

40. Dimostrare che l'icosaedro duale del dodecaedro regolare è anch'esso regolare. **Sugg.** Usare la figura seguente: 

41. Detti ℓ_{12} la misura dello spigolo del dodecaedro regolare e ℓ_{20} quella dello spigolo dell'icosaedro suo duale, determinare $\ell_{20}/\ \ell_{12}$. **Sugg.** Può servire sapere che, detto ℓ_5 il lato di un pentagono regolare e r il raggio della circonferenza a esso circoscritta, si ha: $r = \dfrac{\sqrt{50+10\cdot\sqrt{5}}}{10}\cdot \ell_5$. $\left[\dfrac{3\cdot\sqrt{5}+5}{10}\right]$

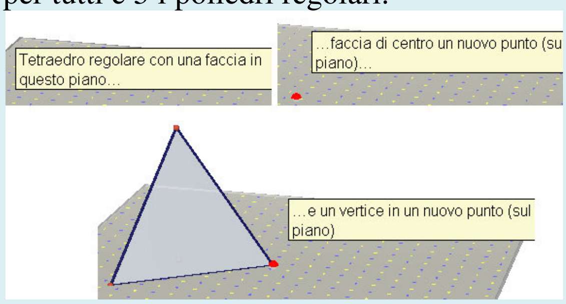
42. Dimostrare che il dodecaedro duale dell'icosaedro regolare è anch'esso regolare. **Sugg.** Usare la figura seguente: 

43. Detti ℓ_{20} la misura dello spigolo dell'icosaedro regolare e l_{12} quella dello spigolo del dodecaedro suo duale, determinare ℓ_{20}/ℓ_{12}. **Sugg.** Usare la figura 

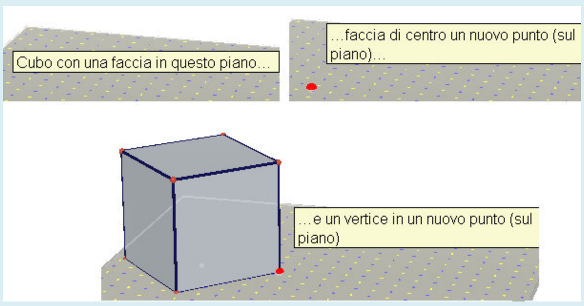
$\left[\dfrac{3}{2}\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)\right]$

L'angolo di Cabri3D

Ci sono i comandi predefiniti per tutti e 5 i poliedri regolari.

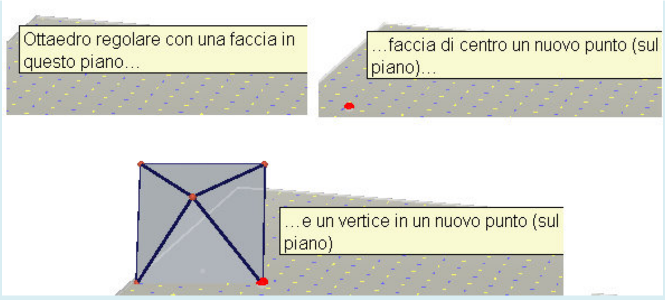


 Tetraedro regolare

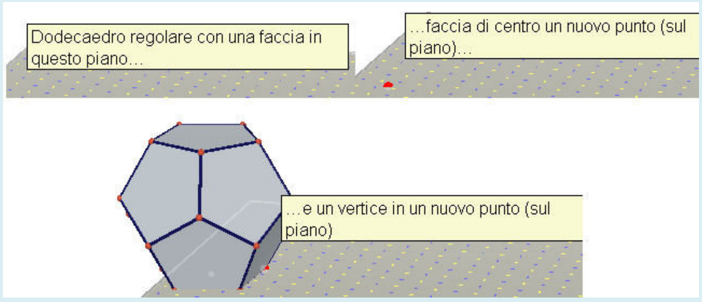


 Cubo

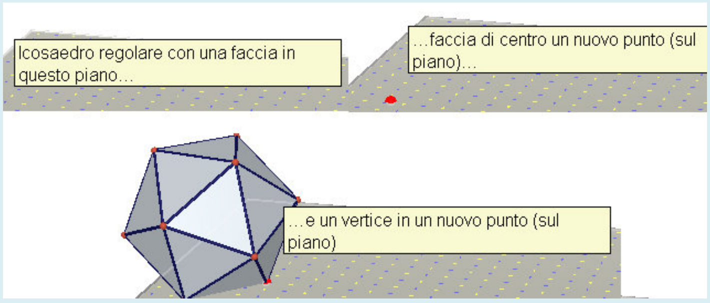
 Ottaedro regolare



 Dodecaedro regolare



 Icosaedro regolare



I poliedri semiregolari

Vogliamo considerare adesso dei poliedri quasi regolari, di cui forniamo la definizione.

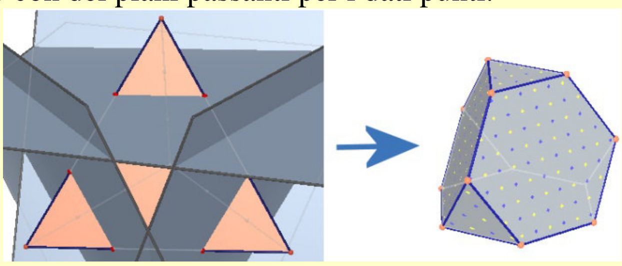
Definizione 15

Un poliedro convesso non prisma, le cui facce sono tutte poligoni regolari di almeno due tipi diversi e i cui angoloidi interni sono isometrici, si chiamano **semiregolari** o **archimedei**.

Abbiamo escluso dai poliedri semiregolari i prismi perché allora ogni prisma le cui facce laterali sono quadrati e le cui basi sono poligoni regolari non quadrate, sarebbe un poliedro archimedeo, che quindi sarebbero infiniti.

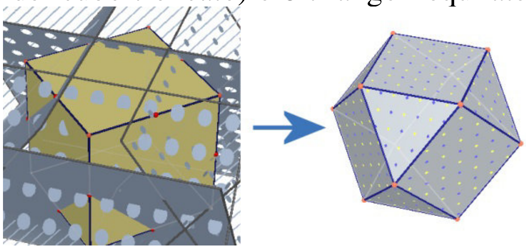
Esempio 11

Consideriamo un tetraedro regolare e dividiamo ciascuno dei suoi spigoli in 3 parti uguali. Quindi, come mostrato in figura, sezioniamo con dei piani passanti per i dati punti.

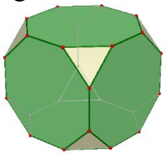


Come si vede abbiamo ottenuto un poliedro le cui facce sono 4 esagoni e 4 triangoli. Intanto vediamo che in ogni vertice si incontrano 2 esagoni e 1 triangolo, quindi gli angoloidi sono uguali. Adesso notiamo anche che entrambi i poligoni sono regolari, quindi il poliedro ottenuto è effettivamente semiregolare. Esso si chiama **tetraedro troncato**.

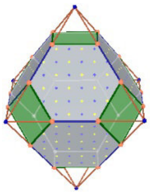
Questo metodo di troncatura degli spigoli dei poliedri regolari permette di ottenere altri poliedri semiregolari. Per esempio dividendo ciascuno spigolo di un cubo in due parti uguali, si ottiene un poliedro archimedeo con 14 facce, 6 quadrati (uno per ogni faccia del cubo troncato) e 8 triangoli equilateri (uno per ogni verti-



ce). Esso si chiama **cubottaedro**.
Dividendo in 3 parti uguali, invece non si ottiene un poliedro semiregolare, come si vedrà nelle verifiche. Dividendo invece ogni lo spigolo in tre parti in modo da formare un ottagono regolare, si ottiene il poliedro archimedeo detto **cubo troncato** con 6 facce ottagonali e 8 triangolari, che di seguito proponiamo.

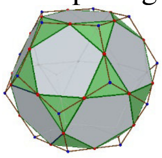


Dividendo in 3 parti uguali ogni spigolo di un ottaedro regolare si ottiene l'**ottaedro troncato** che ha 6 facce

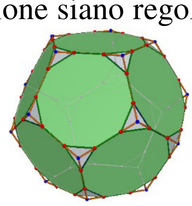


quadrate (una per vertice dell'ottaedro) e 8 esagonali (una per faccia).

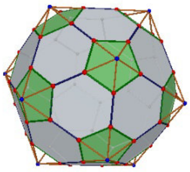
Dividendo gli spigoli di un dodecaedro regolare in due parti uguali, otteniamo un poliedro con 20 facce triangolari (una per vertice del dodecaedro) e 12 pentagonali (una per faccia del dodecaedro), detto **icosido-**



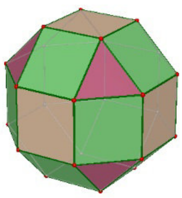
decaedro.
Dividendo gli spigoli di un dodecaedro regolare in tre parti in modo che i decagoni sezione siano regolari, si



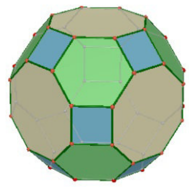
ottiene il **deodecaedro troncato**, formato da 20 facce triangolari e 12 decagonali.
Dividendo in 3 parti uguali ciascuno spigolo di un icosaedro regolare otteniamo l'**icosaedro troncato** formato da 12 facce pentagonali e 20 esagonali, sostanzialmente la struttura del classico pallone da calcio.



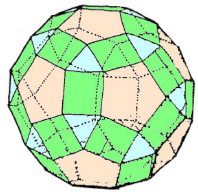
Abbiamo così costruito solo sette dei tredici poliedri archimedei. Ve ne sono altri sei che riportiamo di seguito



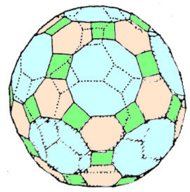
Il **rombicubottaedro** ha 8 facce triangolari e 18 quadrate.



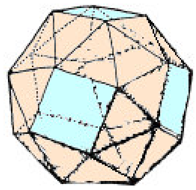
Il **cubottaedro troncato** ha 6 facce ottagoni regolari, 8 esagoni regolari e 12 quadrati.



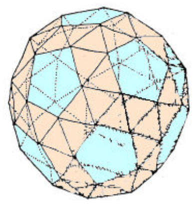
Il **rombicosidodecaedro** ha 20 facce triangolari, 30 quadrate e 12 pentagonali.



L'**icosidodecaedro troncato** ha 30 facce quadrate 20 esagonali e 12 decagonali.



Il **cubo camuso** ha 32 facce triangolari e 6 quadrate.

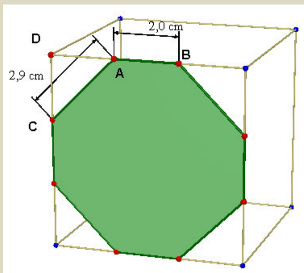


Il **dodecaedro camuso** ha 80 facce triangolari e 12 pentagonali.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Abbiamo visto che dividendo gli spigoli di un cubo in 3 parti isometriche non si ottiene un poliedro semiregolare perché non si ottengono sezioni regolari.



Infatti né l'ottagono né i triangoli che vediamo in figura sono equilateri, poiché AC è ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele i cui cateti sono isometrici ad AB. Quindi perché la troncatura funzioni dobbiamo dividere lo spigolo in modo che AB ed AC abbiano la stessa misura. Cioè, detta ℓ la misura dello spigolo del cubo, ed x la misura di AD deve essere $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 \Rightarrow 2x^2 = (\ell - 2x)^2 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2} \cdot \ell$

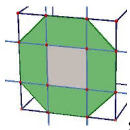
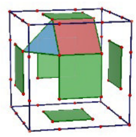
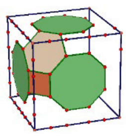
Ovviamente a noi interessa solo la soluzione minore di ℓ, cioè $x = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \cdot \ell$.

Livello 2

1. Dimostrare che dividendo ciascuno spigolo di un tetraedro regolare in due parti uguali si ottiene un tetraedro regolare.
2. Dimostrare che dividendo ciascuno spigolo di un ottaedro regolare in due parti uguali si ottiene il cubottaedro.

3. Dimostrare che dividendo gli spigoli di un dodecaedro regolare in tre parti uguali, non si ottiene un poliedro semiregolare
4. Dimostrare che dividendo gli spigoli di un icosaedro regolare in due parti uguali, si ottiene l'icosidodecaedro.
5. Determinare una formula per il calcolo della superficie del tetraedro troncato in funzione della misura dello spigolo ℓ. $\left[7\cdot\sqrt{3}\cdot\ell^2\right]$
6. Un tetraedro troncato ha superficie di $14\cdot\sqrt{3}\,cm^2$, quanto misura il suo spigolo? $\left[\sqrt{2}\,cm\right]$
7. Determinare una formula per il calcolo della superficie dell'ottaedro troncato in funzione della misura dello spigolo ℓ. $\left[\left(12\cdot\sqrt{3}+6\right)\cdot\ell^2\right]$
8. Un ottaedro troncato ha superficie di $\left(1+2\cdot\sqrt{3}\right)cm^2$, quanto misura lo spigolo? $\left[\sqrt{6}/6\,cm\right]$
9. Determinare una formula per il calcolo della superficie del cubottaedro in funzione della misura dello spigolo ℓ. $\left[\left(2\cdot\sqrt{3}+6\right)\cdot\ell^2\right]$
10. Un cubottaedro ha superficie di $\left(3+\sqrt{3}\right)cm^2$, quanto misura il suo spigolo? $\left[\sqrt{2}/2\,cm\right]$
11. Determinare una formula per il calcolo della superficie del rombicubottaedro in funzione della misura dello spigolo ℓ. $\left[\left(2\cdot\sqrt{3}+18\right)\cdot\ell^2\right]$
12. Un rombicubottaedro ha superficie di $\left(27+3\cdot\sqrt{3}\right)cm^2$, quanto misura lo spigolo? $\left[\sqrt{6}/2\,cm\right]$
13. Determinare una formula per il calcolo della superficie del cubo camuso in funzione della misura dello spigolo ℓ. $\left[\left(8\cdot\sqrt{3}+6\right)\cdot\ell^2\right]$
14. Un cubo camuso ha superficie di $\left(15+20\cdot\sqrt{3}\right)cm^2$, quanto misura il suo spigolo? $\left[\sqrt{10}/2\,cm\right]$
15. Determinare il rapporto fra la superficie del tetraedro troncato e quella del tetraedro da cui è stato ottenuto. [8/9]
16. Determinare il rapporto fra la superficie del cubottaedro e quella del cubo da cui è stato ottenuto. $\left[\dfrac{3+\sqrt{3}}{12}\right]$
17. Determinare il rapporto fra la superficie dell'ottaedro troncato e quella dell'ottaedro da cui è stato ottenuto. $\left[\dfrac{6+\sqrt{3}}{9}\right]$

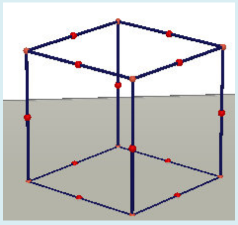
Livello 3

18. Il rombicubottaedro si ottiene con la costruzione seguente sulle facce di un cubo , in modo che l'ottagono sia regolare. Quindi uniamo i vertici fra loro, come mostrato in figura  Dimostrare che i triangoli ottenuti sono equilateri e che gli altri quadrilateri sono quadrati.
19. Per il cubottaedro troncato si usa la costruzione seguente  su ogni faccia di un cubo L'ottagono deve essere regolare, ma anche il quadrilatero e l'esagono mostrati devono esserlo. Determinare quanto deve misurare il lato di tutti e tre i poligoni regolari, in funzione dello spigolo del cubo. $\left[\dfrac{2\cdot\sqrt{2}-1}{7}\cdot\ell\right]$

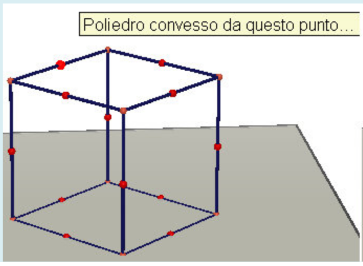
20. Sugli spigoli di un cubottaedro scegliamo i punti medi e costruiamo il poliedro che ha tali punti per vertici. Quanti vertici e spigoli ha? Quante facce e di che tipo sono?
[24; 48; 6 quadrati, 8 triangoli equilateri, 12 rettangoli]

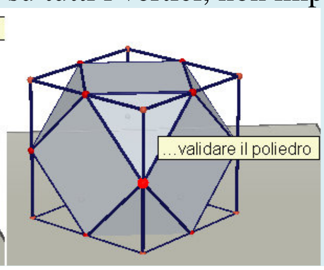
L'angolo di Cabri3D

Per costruire i poliedri semiregolari abbiamo bisogno del comando **Poliedro convesso**, che costruisce un poliedro convesso a partire dai suoi vertici. Per esempio supponiamo di volere costruire il cubottaedro. Costruiamo il cubo con il comando predefinito e i punti medi di ciascuno spigolo, sempre con il comando predefinito.



Quindi usiamo il comando Poliedro convesso cliccando su tutti i vertici, non importa in quale ordine.





Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi

1. (Liceo scientifico 1993/94) Una piramide ha per base il triangolo *ABC*, isoscele e rettangolo in *A*, e ha per altezza il segmento *AV*. Inoltre la faccia *VBC* forma un angolo di 45° col piano della base e lo spigolo *VB* è lungo $2h\cdot\sqrt{3}$, dove *h* è una lunghezza nota. Calcolare la distanza del vertice *A* dal piano della faccia *VBC* e trovare per quale valore di *h* tale distanza vale $4\cdot\sqrt{2}$. [$h = 4$]
2. (Istituto magistrale 1996/97) È assegnato il tetraedro regolare di vertici *A*, *B*, *C*, *D* e di spigolo lungo *s*. a) Dopo aver dato sufficiente spiegazione della costruzione geometrica del piano α, condotto per il punto *D* perpendicolarmente alla retta dello spigolo *AB*, calcolare l'area della sezione *S*' di α con il tetraedro e la distanza del punto *A* dal piano α. $\left[\frac{s^2\cdot\sqrt{2}}{4};\frac{s}{2}\right]$ b) Chiamati *X*, *Y*, *Z*, *T* i punti medi rispettivamente degli spigoli *AC*, *BC*, *BD*, *AD*, dimostrare che la figura *XYZT* è un parallelogrammo. c) (facoltativo) Dimostrare che il parallelogrammo *XYZT* è un quadrato.
3. (Liceo scientifico PNI 1998/99) In un piano α è assegnato il triangolo *ABC*, retto in *B*, i cui cateti *AB* e *BC* misurano rispettivamente 4 e 3. Si conduca per il punto *A* la perpendicolare al piano α e sia *V* un punto di questa per cui $\overline{VA}=\overline{AB}$. Il candidato a) dimostri, geometricamente o algebricamente, che, come tutte le altre facce del tetraedro *VABC*, anche la faccia *VBC* è un triangolo rettangolo, il cui angolo retto è $V\hat{B}C$; b) calcoli la superficie totale del tetraedro. $\left[6\cdot\left(4+\sqrt{2}\right)\right]$

4. (Liceo scientifico 2000/2001) Si consideri il cubo di spigoli AA', BB', CC', DD', in cui due facce opposte sono i quadrati $ABCD$ e $A'B'C'D'$. Sia E il punto medio dello spigolo AB. I piani $ACC'A'$ e $D'DE$ dividono il cubo in quattro parti. Dimostrare che la parte più estesa è il quintuplo di quella meno estesa.
5. (Liceo scientifico 2002/2003) Un piano interseca tutti gli spigoli laterali di una piramide quadrangolare regolare: descrivere le caratteristiche dei possibili quadrilateri sezione a seconda della posizione del piano rispetto alla piramide. [Quadrilatero convesso che può diventare un quadrato, un trapezio isoscele o un "aquilone" ossia un quadrilatero con i lati a due a due paralleli ma non isometrici]

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi.

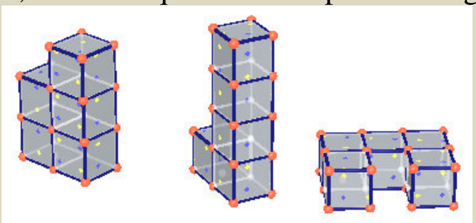
1. Un tetraedro con tutte le facce isometriche si chiama *equifacciale*. Dimostrare che in un tetraedro equifacciale gli spigoli sono a due a due isometrici, così come gli angoli diedri opposti.
2. Congiungendo opportunamente 4 dei vertici di un parallelepipedo rettangolo, costruire un tetraedro equifacciale.
3. Dimostrare che in un tetraedro equifacciale gli angoli piani che si incontrano in un vertice misurano quanto un angolo piatto.
4. Dimostrare che in un tetraedro equifacciale tutte le mediane sono isometriche.
5. Dimostrare che in un tetraedro trirettangolo (cioè con tre facce che sono triangoli rettangoli), il doppio della somma dei quadrati degli spigoli concorrenti nell'angolo retto equivalgono ala somma dei quadrati dei rimanenti spigoli.
6. Dimostrare che in un tetraedro trirettangolo il quadrato dell'area della faccia che non è un triangolo rettangolo è somma dei quadrati delle rimanenti facce.
7. Dimostrare che in un tetraedro quadrirettangolo (che ha tutte le facce che sono triangoli rettangoli), la somma dei quadrati degli spigoli che concorrono nei due vertici che sono retti per due delle facce cui appartengono è costante.
8. Dimostrare che in un tetraedro quadrirettangolo la somma dei quadrati di due facce con uno spigolo in comune che non sia cateto per entrambe, è costante.
9. Dimostrare che le mediane di un tetraedro si incontrano in un punto, che si chiama baricentro del tetraedro, il quale divide ciascuna mediana in modo che la parte che contiene il vertice è tripla dell'altra.
10. Dimostrare che il quadrato della misura di una mediana di un tetraedro è pari alla differenza fra un terzo della somma dei quadrati degli spigoli che hanno in comune il vertice da cui è condotta la mediana e un nono della somma dei quadrati dei rimanenti spigoli.
11. Dimostrare che in un tetraedro trirettangolo le altezze condotte da ciascun vertice alla faccia opposta si incontrano nel vertice trirettangolo.
12. Dimostrare che dato un parallelepipedo rettangolo e un punto P qualsiasi, la somma dei quadrati delle distanze di P dai vertici del parallelepipedo è uguale alla somma dei quadrati delle tre dimensioni del parallelepipedo aumentata di 8 volte il quadrato della distanza di P dal centro del parallelepipedo.

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.
AHSME = Annual High School Mathematics Examination
AMC = American Mathematical Contest
HSMC = A&M University High School Mathematics Contest
NC = State Matematical Finals of North Carolina
RICE = Rice University Mathematics Tournament

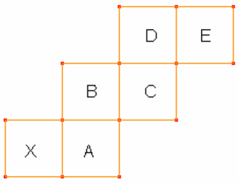
Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere il seguente quesito assegnato ai giochi organizzati dalla Rice University nel 2008.
Qual è la più piccola area possibile di un oggetto costruito unendo le facce di 5 cubi di spigolo lungo uno?
Possiamo unire i cubi in diversi modi, vediamo qualche esempio nelle figure seguenti

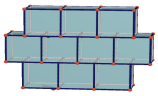


Ovviamente le superfici non sono uguali, ma si ottengono togliendo dalla somma di quelle di tutte le facce dei 5 cubi staccati, cioè di 30 facce, quelle facce che sono in comune. Così nel primo caso avremo una superficie pari a 30 – 14 = 16 facce, nel secondo caso 30 – 8 = 22 facce e nel terzo 30 – 10 = 20 facce. Non è difficile capire che quest ultimo caso è quello che ci interessa, dato che non è possibile avere meno facce in comune.

1. (AHSME 1985) Un cubo di legno è formato da n^3 cubetti bianchi incollati insieme. Coloriamo di rosso la superficie esterna del cubo maggiore e poi separiamo di nuovo i cubetti. Se i cubetti che hanno rossa una sola faccia è uguale al numero di cubetti rimasti tutti bianchi, quanti sono i cubetti? [8]
2. (AHSME 1988) I sei spigoli del tetraedro $ABCD$ misurano 7, 13, 18, 27, 36 e 41. Determinare la misura di CD sapendo che $\overline{AB} = 41$. [13]
3. (AHSME 1993) Quale dei seguenti insiemi non può costituire l'insieme delle misure delle diagonali delle facce di un parallelepipedo rettangolo? [B)]
   A) {4, 5, 6} B) {4, 5, 7} C) {4, 6, 7} D) {5, 6, 7} E) {5, 7, 8}
4. (AHSME 1995) Un cubo è formato da 27 cubetti più piccoli e isometrici fra loro. Un piano è condotto perpendicolarmente a una delle diagonali interne del cubo bisecandola. Quanti sono i cubetti incontrati dal piano? [19]
5. (AHSME 1995) La figura mostrata può essere ricomposta a forma di cubo. Nel cubo risultante, quale delle lettere è opposta alla faccia con la X? [C]



6. (AHSME 1996) La somma delle lunghezze dei 12 spigoli di un parallelepipedo rettangolo è 140, e la distanza da un vertice al vertice più lontano è 21. calcolare la superficie totale del parallelepipedo. [784]
7. (AHSME 1998) Un cubo di lato 9 è formato da 27 cubi di lato 3. Il cubo grande viene 'forato' nel modo seguente. Prima sono eliminati i 6 cubi di lato 3 che formano il centro di ogni faccia, così come il cubo, sempre di lato 3, centro del cubo. Poi ognuno dei 20 cubi di lato 3 rimasti è "forato" allo stesso modo, ovviamente con cubi di lato 1. Quanto vale l'area del solido ottenuto? [1056]
8. (AMC 2001) Un insetto vive sulla superficie di un tetraedro regolare di spigolo lungo 1. Esso vuole viaggiare sulla superficie del tetraedro dal punto medio di uno spigolo al punto medio dello spigolo opposto. Qual è la lunghezza del cammino più corto? (Nota: due spigoli sono opposti se non hanno estremi in comune) [1]
9. (HSMC 2006) Dieci cubi di spigolo unitari sono incollati come mostrato in figura. Quanto vale l'area



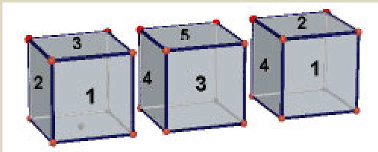
del solido così ottenuto? [34]

10. (HSMC 2007) Il coperchio di una scatola ha area 120, le facce laterali hanno aree rispettive 96 e 80. determinare l'altezza della scatola. [8]
11. (NC 2007) Quante facce ha un poliedro convesso con 18 vertici e 32 spigoli? [16]

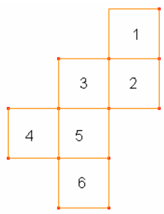
Questions in English

Working together

This is a question assigned at HSMC in 2006.
The figure below shows three views of the same numbered cube. One number actually occurs twice on the cube. Also, the number that appears twice is not on the bottom of any of the views. What number appears twice?



Assume face 3 is unique. It borders faces 1, 2, 4 and 5. Picture three rotates to picture one putting 4 on the bottom and 3 on top. So 4 is unique. Our assumption that 3 is unique puts faces 4 and 5 on the back and right side of picture one. But 4 is unique and is the bottom side of figure one. This contradiction implies 3 is not unique.

12. (AHSME 1980) Four of the eight vertices of a cube are the vertices of a regular tetrahedron. Find the ratio of the surface area of the cube to the surface area of the tetrahedron. $\left[\sqrt{3}\right]$
13. (AHSME 1984) The total area of all the faces of a rectangular solid is 22 cm^2, and the total length of all its edges is 24 cm. Then the length in cm of any one of its interior diagonals is? $\left[\sqrt{14}\right]$
14. (AHSME1996) How many line segments have both their endpoints located at the vertices of a given cube? [28]
15. (HSMC 2000) A 4×4×4 cube made of white styrofoam[1] is painted maroon and then cut into 64 unit cubes. How many of these small cubes will have paint on exactly two faces? [24]
16. (NC 2002) The height of a square pyramid formed by four equilateral triangles is 10. What is the surface area of one of these triangles? $\left[50\cdot\sqrt{3}\right]$
17. (NC 2004) Consider a regular pyramid of unknown height and a 12 ×12 meter square base. If the height is increased by 2 meters, the lateral surface area is increased by 24 square meters. How high is the original pyramid? (The lateral surface does not include the pyramid's base.) [2,5m]
18. (HSMC2004) When this net of six squares  is cut out and folded to form a cube, what is the product of the numbers on the four faces adjacent to the one labelled with a 1? [144]

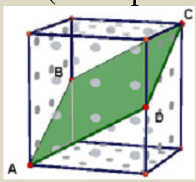
19. (NC 2007) A rectangular solid with a black surface area and dimensions $10\times 12\times 4$ is cut into unit cubes. Assuming the solid's interior is not black, what fraction of these cubes has only one black side? [29/60]

Working together

This is a question assigned at HSMC, in 2008. In the cube with side length 1 shown below, points A and C

[1] Polistirolo

are opposite vertices and points B and D are midpoints of the (other pair of) opposite edges. Points A, B, C, and D are coplanar. Find the area of quadrilateral $ABCD$

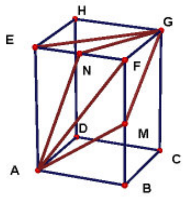


It is very easy to prove that the sides of $ABCD$ are all equal, so it is a rhombus and its area is $\frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD}$. AC is the diagonal of the cube, hence: $\overline{AC} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$, while BD is the diagonal of a face of the cube, thus: $\overline{BD} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Then the area is $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

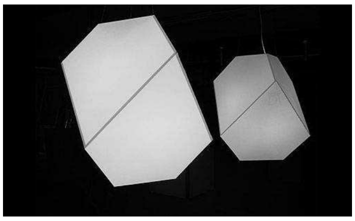
20. (Rice 2010) Suppose we have a polyhedron consisting of triangles and quadrilaterals, and each vertex is shared by exactly 4 triangles and one quadrilateral. How many vertices are there? [24]

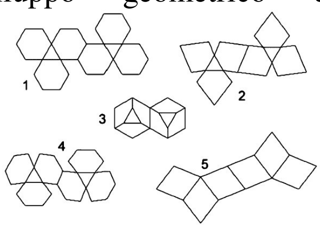
Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Accademia Navale) Determinare perimetro e area della figura individuata dalle intersezioni di un cubo di spigolo L con un piano perpendicolare a una diagonale del cubo nel suo punto medio.
2. (Accademia Navale) Determinare la distanza tra due facce opposte (ovvero situate su piani paralleli) di un ottaedro regolare di spigolo L.
3. (Scuola Superiore di Catania) Una piramide e un prisma hanno, ciascuno, 12 spigoli. Il numero delle facce della piramide è maggiore, minore o uguale al numero delle facce del prisma? Il numero dei vertici della piramide è maggiore, minore o uguale al numero dei vertici del prisma? Rispondere alle domande precedenti se gli spigoli totali sono 18. Rispondere alle domande precedenti se gli spigoli totali sono uno stesso numero s. Che valori può assumere s?
4. (Medicina 2000) Il parallelepipedo è una figura solida con A) 8 vertici, 12 spigoli, 4 diagonali B) 8 vertici, 8 spigoli, 2 diagonali C) 4 vertici, 8 spigoli, 2 diagonali D) 8 vertici, 14 spigoli, 4 diagonali E) 12 vertici, 8 spigoli, 4 diagonali
5. (Architettura 2002) Dire quale tra le seguenti coppie di figure piane non può essere ottenuta sezionando un cubo con un piano.
1: Triangolo rettangolo 2: Rettangolo 3: Trapezio isoscele 4: Rombo 5: Triangolo scaleno
A) 1 – 5 B) 1 – 4 C) 3 – 4 D) 1 – 3 E) 3 – 5
6. (Veterinaria 2005) Il solido rappresentato in figura è un parallelepipedo retto di altezza $2a$ e base quadrata di lato a, N è il punto medio di EF ed M è il punto medio di BF. Per andare dal vertice A al vertice G qual è il percorso più breve tra quelli indicati?

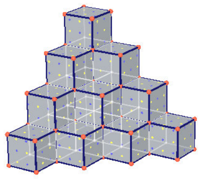


A) AEG B) ANG C) AFG D) AMG E) $ABFG$
7. (Architettura 2007) La foto mostra la lampada Melancolía di Santa&Cole (2005), ispirata alla celebre incisione di Dürer del 1514, che propone la geometria di un poliedro. Quale delle cinque figure numerate costituisce il corretto sviluppo geometrico del paralume della lampada?



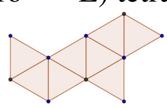


A) Figura 1 B) Figura 2 C) Figura 3 D) Figura 4 E) Figura 5

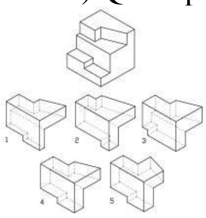
8. (Architettura 2007) Voglio costruire una 'piramide' alta 4 livelli con pietre a forma di cubi, come indicato nella figura seguente: al livello più alto c'è un solo cubo, al livello immediatamente inferiore ne abbiamo 3 e così via. Quanti cubi devo utilizzare in totale? 
A) 16 B) 18 C) 19 D) 20 E) 22

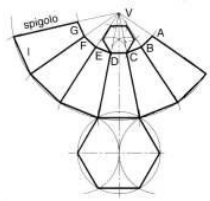
9. (Architettura 2007) Abbiamo 60 contenitori uguali di forma cubica disposti in modo da formare un parallelepipedo le cui dimensioni misurano 5×4×3. Alla fine dell'inverno scopriamo che si sono rovinati i contenitori che avevano almeno una faccia verso l'esterno o sul fondo del parallelepipedo. Quanti sono i contenitori rimasti integri? A) 6 B) 12 C) 24 D) 30 E) nessuno

10. (Architettura 2008) Quale dei seguenti poliedri, se opportunamente sezionato da un piano, può generare tutte le seguenti figure: rettangolo, quadrato, esagono regolare e irregolare, pentagono, triangolo?
A) cubo B) cono C) prisma triangolare retto D) cilindro E) tetraedro

11. (Architettura 2009) Di quale solido è rappresentato lo sviluppo in figura? 
A) esaedro B) ottaedro C) tetraedro D) nessun solido E) prisma a base triangolare

12. (Facoltà scientifiche, Roma La Sapienza 2008) Si vuole riempire completamente un parallelepipedo a base quadrata di lato 30 *cm* ed altezza 50 *cm* con dei cubi indeformabili uguali. Qual è il minimo numero di tali cubetti? A) 15 B) 45 C) 75 D) 150

13. (Architettura 2010) Quale parte manca per completare il solido qui riportato, in maniera tale da ottenere un cubo?  A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

14. (Architettura 2010) A quale solido appartiene lo sviluppo in figura? 

A) Ad un tronco di piramide a base esagonale regolare B) Ad un prisma esagonale
C) Ad un tronco di piramide a base ottagonale D) Ad una piramide a base esagonale regolare
E) Ad un tronco di cono a base esagonale regolare

15. (Scuola superiore di Catania) La superficie totale di un parallelepipedo rettangolo è 22 cm^2 e la somma delle lunghezze di tutti gli spigoli è 24 *cm*. Qual è la lunghezza della diagonale?

16. (Scuola superiore di Catania) Un piano ortogonale alla retta passante per due vertici opposti di un cubo di lato 2 taglia le sei facce del cubo formando un esagono. Calcolare il perimetro nel caso che il piano passi per il centro del cubo; Calcolare il perimetro nel caso che il piano non passi per il centro del cubo, ma formi sempre un esagono. In questo caso il perimetro è più grande o più piccolo che nel caso precedente?

17. (Corso di laurea in Informatica, Udine 2009) Un solido S è costituito da due cubi sovrapposti, in modo che due facce dei cubi coincidano. Se lo spigolo di ciascun cubo misura 1, qual è la massima lunghezza possibile di un segmento che unisce due punti di S? A) $2\cdot\sqrt{2}$ B) $2\cdot\sqrt{3}$ C) $\sqrt{5}$ D) $\sqrt{6}$

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_2_1.htm

Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1	**2**	**3**
$2p = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot L, A = 27 \cdot \sqrt{3} \cdot L^2$	$\sqrt{2} \cdot L$	Le facce della piramide sono sempre più di quelle del prisma, i vertici del prisma sono sempre più di quelle della piramide. *N* è un multiplo di 6 maggiore o uguale a 12
4	**5**	**6**
A	B	D
7	**8**	**9**
B	D	A
10	**11**	**12**
B	A	B
13	**14**	**15**
B	D	A
16	**17**	**18**
$\sqrt{14}\ cm$	$6 \cdot \sqrt{2}\ ;\ 6 \cdot \sqrt{2}$	D

6. Geometria dello spazio ambiente

6.3 Geometria dei solidi di rotazione

Prerequisiti

- Rette e piani nello spazio
- Circonferenza e sue parti
- Concetto di rotazione

Obiettivi

- Comprendere il concetto di solido rotondo
- Sapere riconoscere i solidi rotondi più diffusi
- Sapere distinguere le varie parti di una sfera.
- Sapere risolvere semplici problemi di geometria dei corpi rotondi.
- Comprendere che vi sono molti oggetti nello spazio reale che possono essere assimilati a corpi rotondi.

Contenuti

- Il cilindro, il cono e il tronco di cono
- La sfera e le sue parti.
- Poliedri inscrivibili e circoscrivibili a una sfera.

Parole Chiave

Calotta sferica – Fuso sferico – Segmento sferico – Spicchio sferico – Zona sferica

Richiamiamo le conoscenze

Definizione A

Diciamo **circonferenza** di **centro** il punto C e di **raggio** il segmento r, l'insieme dei punti del piano che si ottengono come estremi di tutti i possibili segmenti isometrici a r, di cui l'altro estremo è C.

Definizione B

Diciamo **cerchio** di **centro** il punto C e di **raggio** il segmento r, l'insieme dei punti del piano appartenenti a tutti i possibili segmenti isometrici a r, di cui l'altro estremo è C.

Definizione C

Diciamo **arco** di estremi A e B punti di una stessa circonferenza Γ, l'insieme dei punti di Γ che, nel verso di rotazione stabilito su Γ, seguono A e precedono B.

Definizione D

Diciamo **segmento circolare** di base una corda AB di un cerchio Γ, la parte di Γ delimitata dall'arco AB e dalla corda da esso sottesa.

Definizione E

Diciamo **segmento circolare a due basi** la parte di piano delimitata da due corde di una stessa circonferenza fra di loro parallele.

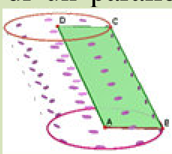
Definizione F

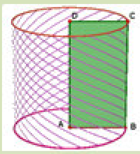
Diciamo **settore circolare** la parte di piano intersezione fra un cerchio di circonferenza Γ e un angolo al centro di Γ.

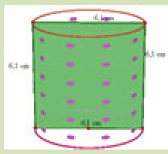
Il cilindro, il cono e il tronco di cono

Oltre ai poliedri esistono altre figure solide che non sono contornate da poligoni e per le quali quindi non possiamo parlare di vertici, facce o spigoli. Essi sono i corpi rotondi e si trovano facendo ruotare nello spazio un poligono attorno a una sua parte.

Definizione 1

La figura ottenuta dalla rotazione completa di un parallelogramma attorno a uno dei suoi lati si chiama  **cilindro**.

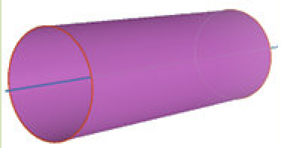
Se il parallelogramma è un rettangolo il cilindro si chiama **retto** e il segmento rispetto cui avviene la  rotazione si chiama **altezza** del cilindro.

Se in un cilindro retto l'altezza è uguale al diametro della base il cilindro si chiama **equilatero**. 

Possiamo anche considerare un cilindro infinito.

Definizione 2

La figura ottenuta dalla rotazione completa di una retta attorno a un'altra retta a essa parallela si chiama

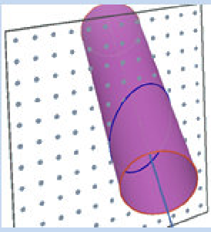


cilindro indefinito.
La retta rispetto cui avviene la rotazione si chiama **asse**, l'altra retta si chiama **generatrice**.

In generale quindi un cilindro è il luogo geometrico dei punti dello spazio equidistanti da una retta.
Vale il seguente risultato.

Teorema 1

Le sezioni di un piano non parallelo all'asse con un cilindro sono ellissi. Se le sezioni sono perpendicolari



all'asse sono circonferenze.

Determinare la superficie di un cilindro in funzione della sua altezza e del raggio delle sue basi è molto semplice.

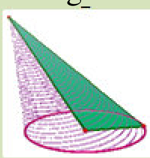
Teorema 2

La superficie laterale di un cilindro retto si ottiene moltiplicando la misura dell'altezza per la lunghezza della circonferenza di base. In simboli $2\pi \cdot r \cdot h$.
Dimostrazione
Se tagliamo il cilindro e lo "apriamo", otteniamo un rettangolo le cui dimensioni sono appunto l'altezza e la circonferenza di base.

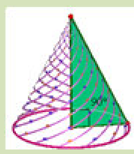
Il cilindro si può considerare, in qualche maniera, come l'analogo solido di rotazione del prisma. Se vogliamo è un prisma le cui basi sono poligoni con infiniti lati. E infatti la formula per il calcolo della sua superficie è simile, dato che il perimetro della circonferenza è appunto lungo $2\pi \cdot r$.
Vogliamo adesso trovare l'analogo della piramide.

Definizione 3

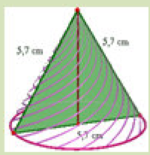
La figura ottenuta dalla rotazione completa di un triangolo attorno a uno dei suoi lati si chiama **cono**.



Se il triangolo è rettangolo e la rotazione avviene attorno a uno dei cateti il cono si chiama **retto**, il segmento rispetto cui avviene la rotazione si chiama **altezza** del cono, l'altro cateto si chiama **raggio di base** e



l'ipotenusa si chiama **apotema**.



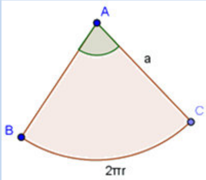
Se in un cono retto l'apotema è uguale al diametro della base il cono si chiama **equilatero**.

Determinare la superficie di un cono retto in funzione del suo apotema e del raggio della sua base è molto semplice.

Teorema 3

La superficie laterale di un cono retto si ottiene moltiplicando la misura dell'apotema per la lunghezza della semicirconferenza di base. In simboli $\pi \cdot r \cdot a$.

Dimostrazione

Se tagliamo il cono e lo "apriamo", otteniamo un settore circolare, di raggio l'apotema del cono e di argo lungo quanto la circonferenza di base. 

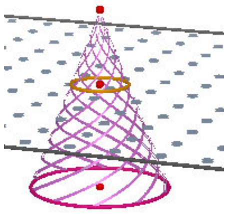
L'area del settore circolare sta all'area del cerchio cui appartiene (di raggio a in questo caso), come la lunghezza del suo arco sta alla lunghezza della circonferenza. Si ha perciò: $\frac{A_S}{\pi \cdot a^2} = \frac{\cancel{2 \cdot \pi} \cdot r}{\cancel{2 \cdot \pi} \cdot a} \Rightarrow A_S = \frac{\pi \cdot a^{\cancel{2}} \cdot r}{\cancel{a}} = \pi \cdot a \cdot r$, che è quanto dovevamo dimostrare.

Il cono si può considerare, in qualche maniera, come l'analogo solido di rotazione della piramide. Quindi una piramide la cui base è un poligono con infiniti lati.
Abbiamo anche il corrispondente del tronco di piramide.

Definizione 4

La figura ottenuta dalla rotazione completa di un trapezio rettangolo attorno alla sua altezza si chiama **tronco di cono retto**. Il lato obliquo del trapezio è l'**apotema** del tronco di cono. 

Il tronco di cono si può anche determinare come sezione di un cono con un piano parallelo alla sua base.

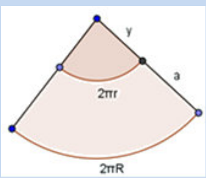


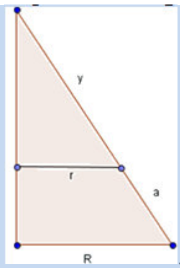
Possiamo determinare la superficie di un tronco di cono retto in funzione del suo apotema e dei raggi delle sue basi.

Teorema 4

La superficie laterale di un tronco di cono retto si ottiene moltiplicando la misura dell'apotema per la lunghezza di una semicirconferenza il cui raggio è la somma dei raggi delle due basi. In simboli $\pi \cdot (R + r) \cdot a$.

Dimostrazione

Se tagliamo il tronco di cono e lo "apriamo", stavolta otteniamo la differenza dei due settori circolari in figura. 

. Abbiamo già visto che l'area di un settore circolare in termini dell'arco e del raggio della circonferenza è π volte il semiprodotto fra arco e raggio. Quindi la superficie del tronco, che è quella della parte chiara è $\pi \cdot (a + y) \cdot R - \pi \cdot y \cdot r = \pi \cdot (a \cdot R + y \cdot R - y \cdot r)$ (*). Adesso consideriamo il trapezio rettangolo e il triangolo rettangolo che hanno generato rispettivamente il tronco e il cono. 

. Dalla similitudine fra i triangoli rettangoli, si ha la proporzione: $(a + y) : y = R : r$. Da cui $y \cdot R = a \cdot r + y \cdot r$. Sostituendo nella (*): $\pi \cdot (a \cdot R + a \cdot r + y \cdot r - y \cdot r) = \pi \cdot (a \cdot R + a \cdot r) = \pi \cdot (R + r) \cdot a$. Come dovevamo dimostrare.

Verifiche

Lavoriamo insieme

In un cilindro l'altezza è il triplo del raggio e la superficie totale è di 100 m^2, calcolare la misura dell'altezza.
La superficie è $2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 100 \Rightarrow \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot h = 50$, d'altro canto è $h = 3r$, quindi si ha:

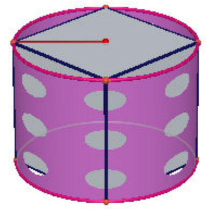
$$\pi \cdot \left(\frac{h}{3}\right)^2 + \pi \cdot \frac{h}{3} \cdot h = 50 \Rightarrow \pi \cdot \frac{h^2}{9} + \pi \cdot \frac{h^2}{3} = 50 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \cdot h^2 + 3 \cdot \pi \cdot h^2 = 150 \Rightarrow 4 \cdot \pi \cdot h^2 = 150 \Rightarrow h^2 = \frac{75}{2\pi} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{75}{2\pi}}$$

Livello 1

1. Determina una formula per il calcolo della superficie totale di un cilindro equilatero in funzione del solo raggio. [$4\pi \cdot r^2$]
2. Determina una formula per il calcolo della superficie totale di un cilindro equilatero in funzione della sola altezza. [$\pi \cdot h^2$]
3. La somma dell'altezza e del raggio di un cilindro è 12 *cm*, la loro differenza 7 *cm*. Determinare la misura della superficie laterale. [$42{,}5\pi$]
4. La superficie totale di un cilindro equilatero è 100 π, determinare la misura di raggio ed altezza. [$r = 5$, $h = 10$]
5. Il rapporto della misura dell'altezza rispetto a quella del raggio di un cilindro è 5/3, se la superficie laterale è 15 π, determinare la superficie totale. [$24\,\pi$]
6. Determinare il rapporto delle superfici laterali di due cilindri, i cui raggi sono uno doppio dell'altro e le altezze una metà dell'altra. [1]
7. La somma dell'altezza e del raggio di un cilindro è 15 *cm*, la superficie laterale è $24\pi\ cm^2$, determinare la misura del raggio di base. $\left[\frac{15 \pm \sqrt{177}}{2} cm\right]$
8. La differenza fra l'altezza e il raggio di un cilindro è 23 *cm*, la superficie totale è $37\pi\ cm^2$, determinare la misura del raggio di base. $\left[\frac{69 + \sqrt{677}}{4} cm\right]$

Lavoriamo insieme

In un cilindro inscriviamo un cubo, cioè facciamo in modo che due facce opposte del cubo siano inscritte nelle basi del cilindro. Chiediamoci intanto se ciò sia possibile per qualsiasi cilindro. Consideriamo la figura seguente . Osserviamo che il raggio di base del cilindro è pari alla metà della diagonale di una faccia del cubo, mentre l'altezza misura quanto lo spigolo del cubo. Pertanto possiamo effettuare quanto detto solo per cilindri per i quali il rapporto fra l'altezza e il raggio è $h/r = \ell / \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \ell\right) = \sqrt{2}$.

Livello 2

9. Determinare il rapporto fra le superfici laterali di un cilindro e del cubo in esso inscritto. $\left[\sqrt{2}\pi/4\right]$
10. Possiamo sempre circoscrivere un cubo a un cilindro? Se la risposta è negativa, per che tipi di cilindro ciò è possibile? [Solo per cilindri equilateri]
11. Tenendo conto del precedente esercizio, determinare il rapporto fra le superfici laterali del cubo e del cilindro. [4/π]
12. Un prisma regolare a base triangolare è inscritto in un cilindro, determina il rapporto della superficie laterale del cilindro con quella del prisma. $\left[2\cdot\sqrt{3}\cdot\pi/9\right]$
13. Un prisma regolare a base esagonale è inscritto in un cilindro, determina il rapporto della superficie laterale del cilindro con quella del prisma. [π/3]
14. Una piramide retta a base quadrata è inscritta in un cilindro, cioè la base è inscritta in uno dei cerchi e il vertice della piramide è il centro dell'altro cerchio di base del cilindro. Se il raggio misura 1 *m* e l'altezza 2 *m*, determina il rapporto della superficie laterale del cilindro con quella della piramide. $\left[\sqrt{10}\cdot\pi/5\right]$
15. Un prisma retto a base quadrata è circoscritto a un cilindro, cioè le basi sono circoscritte ai cerchi e le altezze sono congruenti. Determina il rapporto della superficie laterale del cilindro con quella della piramide. [π/4]
16. Un prisma retto a base quadrata è inscritto in un cilindro, cioè le basi sono inscritte nei cerchi e le altezze sono congruenti. Determina il rapporto della superficie laterale del cilindro con quella del prisma. $\left[\sqrt{2}\cdot\pi/4\right]$
17. Un prisma regolare a base triangolare è circoscritto a un cilindro, determina il rapporto della superficie laterale del cilindro con quella del prisma. $\left[\sqrt{3}\cdot\pi/9\right]$
18. Un prisma regolare a base esagonale è circoscritto a un cilindro, determina il rapporto della superficie laterale del cilindro con quella del prisma. $\left[\sqrt{3}\cdot\pi/6\right]$

Livello 3

19. Possiamo sempre inscrivere un ottaedro regolare in un cilindro? Cioè in modo che i vertici delle due piramidi che formano l'ottaedro siano i centri delle due circonferenze di base e gli altri vertici appartengano al cilindro. Se la risposta è negativa, per che tipi di cilindro ciò è possibile? [Solo per cilindri equilateri]
20. Tenendo conto del precedente esercizio, determinare il rapporto fra le superfici totali del cilindro e dell'ottaedro. $\left[2\cdot\sqrt{3}\cdot\pi\right]$
21. Possiamo sempre circoscrivere un ottaedro regolare a un cilindro? Se la risposta è negativa, per che tipi di cilindro ciò è possibile? [Sempre]
22. Tenendo conto del precedente esercizio, determinare la misura del raggio del cilindro equilatero inscritto in funzione dello spigolo ℓ dell'ottaedro. $\left[\left(2-\sqrt{2}\right)\cdot\ell/2\right]$
23. Possiamo sempre inscrivere un tetraedro regolare in un cilindro? Cioè in modo che una faccia sia inscritta in una delle due basi del cilindro e il vertice rimanente coincida con il centro dell'altra base. Se

la risposta è negativa, per che tipi di cilindro ciò è possibile?

[Solo per cilindri in cui l'altezza è $\sqrt{2}$ volte il raggio]

24. Tenendo conto del precedente esercizio, determinare il rapporto fra le superfici totali del cilindro e del tetraedro. $\left[2\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)\cdot\pi/9\right]$
25. Sezioniamo un cilindro di raggio 1 con un piano perpendicolare all'asse, ottenendo un'ellisse il cui diametro maggiore supera del 50% quello minore. Quanto misurano gli assi dell'ellisse? [2; 3]

Lavoriamo insieme

In un cono equilatero l'apotema misura quanto il diametro di base, quindi la superficie laterale si trova con la formula $\pi\cdot r\cdot a = 2\cdot\pi\cdot r^2 = \pi\cdot\frac{a^2}{2}$. Mentre la superficie totale sarà data dalle formule equivalenti: $\pi\cdot r\cdot(a+r) = 3\cdot\pi\cdot r^2 = \frac{3}{4}\cdot\pi\cdot a^2$. Possiamo esprimere il tutto anche mediante la sola altezza: $h=\sqrt{a^2-r^2}=\sqrt{4r^2-r^2}=r\cdot\sqrt{3}$, quindi avremo $S_L=\frac{2}{3}\cdot\pi\cdot h^2; S_T=\pi\cdot h^2$.

Livello 1

26. Determinare la superficie laterale di un cono retto in funzione del raggio e dell'altezza.

$\left[\pi\cdot r\cdot\sqrt{r^2+h^2}\right]$

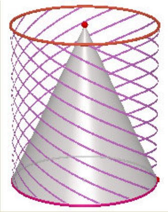
27. Calcolare la misura della superficie laterale di un cono retto di raggio 3 *cm* e altezza 4 *cm*. [15π cm^2]
28. Calcolare la misura del raggio di un cono retto di superficie laterale 609π cm^2 e altezza 20 *cm*. [21 *cm*]
29. Determinare la superficie laterale di un cono retto in funzione dell'apotema e dell'altezza.

$\left[\pi\cdot a\cdot\sqrt{a^2-h^2}\right]$

30. Calcolare la misura della superficie laterale di un cono retto di apotema 17*m* e altezza 15*m*. [136π m^2]
31. Calcolare la misura dell'apotema di un cono retto di superficie laterale 1484πm^2 e altezza 45*m*. [53*m*]
32. Trovare la misura dell'area laterale di un cono equilatero sapendo che la sua altezza misura 3*m*. [6πm^2]
33. È possibile che la superficie totale di un cono sia il doppio della superficie di base? Giustificare la risposta. [No, perché allora l'apotema dovrebbe essere quanto il raggio]
34. Un cono retto ha il raggio di base di 5 *cm*. Trovare la misura dell'altezza sapendo che la superficie laterale misura 65π cm^2. [12 *cm*]
35. La superficie totale di un cono retto misura 12π cm^2. Trovare la misura dell'altezza sapendo che il raggio misura 2 *cm*. $\left[2\cdot\sqrt{3}\ cm\right]$
36. Con riferimento al precedente quesito, cosa accade se la superficie è 5π cm^2. [Impossibile]
37. Trovare la misura dell'area totale di un cono retto sapendo che la somma delle misure del raggio di base e dell'apotema è 5 *cm* e che la superficie laterale misura 6π cm^2. [10π cm^2]
38. Trovare la misura dell'altezza di un cono retto che ha il raggio di base che misura 4 *cm* e l'area totale i 3/2 di quella di base. $\left[4\cdot\sqrt{3}\ cm\right]$
39. Sezioniamo un cono circolare retto di apotema lungo 9 *cm*, con un piano in modo da ottenere un tronco di base minore di area 16π cm^2. Trovare l'area laterale del tronco di cono se il raggio di base del cono misura 6 *cm*. [30π cm^2]

Lavoriamo insieme

Un cono è inscritto in un cilindro, ossia i due solidi hanno una base in comune e il vertice del cono è il centro dell'altra base del cilindro. Vogliamo determinare il rapporto fra le superfici laterali dei due solidi.



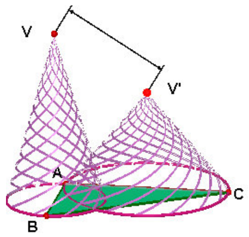
Ovviamente i due solidi hanno la stessa altezza e lo stesso raggio di base, quindi abbiamo: $\frac{S_{Ci}}{S_{co}} = \frac{2\cdot \cancel{\pi}\cdot r\cdot h}{\cancel{\pi}\cdot r\cdot a} = \frac{2\cdot h}{a}$. Se il cono è equilatero avremo: $a = 2r \Rightarrow h = \sqrt{a^2 - r^2} = \sqrt{4r^2 - r^2} = \sqrt{3}\cdot r$. Quindi in questo caso: $\frac{S_{Ci}}{S_{co}} = \frac{2\cdot\sqrt{3}\cdot r}{2\cdot r} = \sqrt{3}$

Livello 2

40. Una piramide retta a base quadrata è inscritta in un cono, cioè la base della piramide è inscritta nel cerchio di base del cono e i vertici coincidono. Determina il rapporto della superficie laterale del cono con quella della piramide. $\left[\sqrt{2}\cdot\pi/4\right]$
41. L'apotema di un tronco di cono misura 25 *cm* e la sua altezza 24 *cm*. Determinare i raggi delle due basi sapendo che l'area laterale è uguale alla somma delle aree delle due basi. [21 *cm*, 28 *cm*]
42. Determinare una formula per il calcolo della superficie laterale di un tronco di cono in cui l'apotema è lungo quanto il raggio della base maggiore, in funzione del raggio della base maggiore. [$3\pi r^2$]
43. Con riferimento al problema precedente, se la superficie del tronco è $48\pi\ m^2$, quanto misura il raggio della base minore? [2 *m*]
44. Un tronco di piramide retta a base quadrata è inscritto in un tronco di cono, cioè le basi del tronco di piramide sono inscritte nei cerchi di base del tronco di cono. Determina il rapporto della superficie laterale del tronco di cono con quella del tronco di piramide. $\left[\sqrt{2}\cdot\pi/4\right]$
45. Un tronco di cono di altezza 4 *cm* è ottenuto sezionando un cono di altezza 12 *cm*. Quanto vale il rapporto fra le aree delle basi del tronco? [9/4]
46. Un cilindro equilatero è inscritto in un cono di altezza 4 *cm* e raggio 3 *cm*. Determinare le misure del raggio e dell'altezza del cilindro. [1,2 *cm*; 2,4 *cm*]
47. Un cilindro in cui l'altezza è isometrica al raggio è inscritto in un cono di altezza 12 *cm* e raggio 5 *cm*. Determinare la misura della superficie laterale del cilindro. [$7200\pi/289\ cm^2$]
48. Alle basi di un cilindro incolliamo due coni di altezza isometrica a quella del cilindro. determinare la superficie del solido in funzione dell'altezza e del raggio di base. $\left[2\cdot\pi\cdot r\cdot\left(h+\sqrt{r^2+h^2}\right)\right]$
49. Un tetraedro è inscritto in un cono in modo che una sua faccia sia inscritta nella circonferenza base del cono e il quarto vertice coincida con il vertice del cono. Quanto vale il rapporto fra lo spigolo del tetraedro e l'apotema del cono? [1]
50. In relazione al precedente esercizio, possiamo inscrivere un tetraedro regolare in un qualsiasi cono? [No, solo in quelli in cui l'apotema è $\sqrt{3}$ volte il raggio]
51. Un tetraedro regolare e un cono hanno il vertice in comune e la faccia opposta al detto vertice è circoscritta alla circonferenza base del cono. Quanto vale il rapporto fra l'apotema del cono e lo spigolo del tetraedro? $\left[\sqrt{3}/2\right]$
52. In relazione al precedente esercizio, cosa deve accade perché sia possibile la detta costruzione? [L'apotema del cono deve essere il triplo del raggio]
53. Un cubo è circoscritto a un cono in modo che in una sua faccia è inscritta la circonferenza base del cono e il vertice del cono è il centro della faccia opposta. Quanto vale il rapporto fra l'apotema del cono e lo spigolo del cubo? $\left[\sqrt{5}/2\right]$
54. In relazione al precedente esercizio, possiamo circoscrivere un cubo a un cono qualsiasi cono? [No, solo a quelli in cui l'apotema è $\sqrt{5}$ volte il raggio]

Livello 3

55. Facciamo ruotare un triangolo rettangolo non isoscele di cateti lunghi a e b ($a > b$), di un giro completo rispetto a ciascuno dei cateti, quanto misura la distanza fra i vertici dei due coni così determinati?



$$\left[\frac{\sqrt{5a^2-8ab+5b^2}}{2}\right]$$

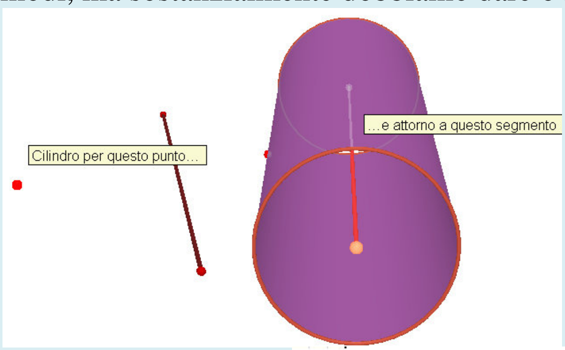
56. Un cono retto ha la superficie totale che è k volte la superficie laterale, per quali valori reali di k ciò è possibile? $[1 < k < 2]$
57. Dimostrare che se un tronco di cono di altezza h *cm* è ottenuto sezionando un cono di altezza k *cm*, il rapporto fra le aree delle basi del tronco è k^2/h^2.
58. Studiare la risolubilità del problema di determinare la misura dell'altezza di un cono retto, nota la misura della superficie totale S e del raggio r. $[S > 2\pi r^2]$
59. Un triangolo rettangolo di cateti lunghi a e b ruota di un giro completo attorno a ciascuno dei tre lati, generando tre solidi, determinare le loro superfici laterali.

$$\left[\pi\cdot a\cdot\sqrt{a^2+b^2};\pi\cdot b\cdot\sqrt{a^2+b^2};\frac{\pi\cdot a\cdot b\cdot(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$$

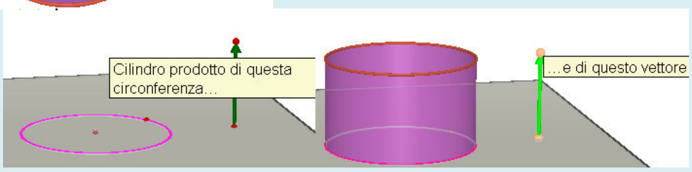
L'angolo di Cabri3D

Per entrambi i solidi di rotazione qui trattati vi sono i comandi predefiniti.

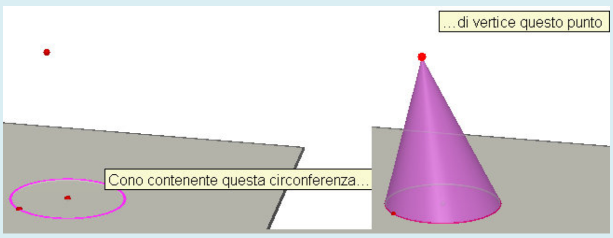
Cilindro Si usa in diversi modi, ma sostanzialmente dobbiamo dare o la generatrice e un punto



Oppure una base e la direzione



Il comando **Cono** costruisce un cono mediante una circonferenza come base e un punto non complanare con la circonferenza come vertice.



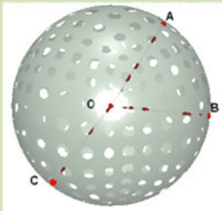
Non vi è un comando predefinito per il tronco di cono e non possiamo ottenerlo neanche come sezione con un piano.

La sfera e le sue parti

A questo punto possiamo ottenere il corrispondente tridimensionale della circonferenza e del cerchio.

Definizione 5

- Diciamo **superficie sferica** di centro il punto O e di raggio il segmento di misura r, il luogo geometrico dei punti dello spazio la cui distanza da O misura r.
- Diciamo **sfera** delimitata dalla superficie sferica di centro il punto O e di raggio il segmento di misura r, il luogo geometrico dei punti dello spazio la cui distanza da O non è maggiore di r.
- Diciamo **sfera interna** delimitata dalla superficie sferica di centro il punto O e di raggio il segmento di misura r, il luogo geometrico dei punti dello spazio la cui distanza da O è minore di r.



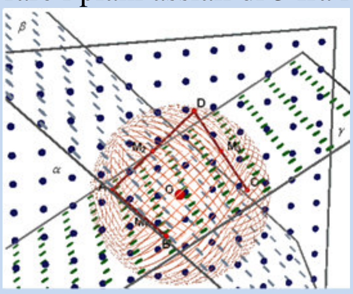
Un risultato analogo a quello stabilito per la circonferenza, vale anche per la sfera.

Teorema 5

Per quattro punti non complanari passa una e una sola sfera.

Dimostrazione

Come per la circonferenza, basta considerare i piani assiali di 3 fra le 6 corde ottenibili con i 4 punti.



I tre piani si incontrano in un punto O che è il centro della sfera cercata, dato che, appartenendo a tutti e tre i piani assiali è equidistante da tutti e 4 i punti.

Come immediato corollario del risultato precedente si ha il seguente risultato.

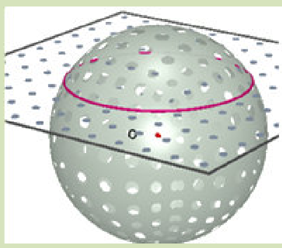
Corollario 1

I piani assiali degli spigoli di un tetraedro si incontrano in un punto, che è il centro della sfera circoscritta al tetraedro.

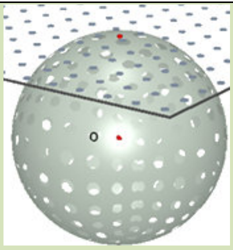
Prendiamo in considerazione le reciproche posizioni che possono avere un piano e una sfera.

Definizione 6

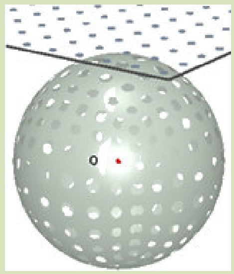
Dati un piano Π e una sfera Σ.



Π è **secante** a Σ, se hanno in comune infiniti punti.



Π è **tangente** a Σ, se hanno in comune un solo punto.



Π è **esterno** a Σ, se non hanno punti in comune.

Nasce immediatamente una questione: quando un piano e una sfera hanno più di un punto in comune, quanti sono questi punti? È intuitivo capire che essi sono infiniti. Nasce allora un'altra domanda, questi punti appartengono al piano, quindi costituiscono un insieme di punti nel piano, questo insieme di punti è uno di quelli che già conosciamo? Da un punto di vista intuitivo pensiamo che la sezione debba essere una curva chiusa. Nel seguente risultato precisiamo, ma non dimostriamo, rigorosamente questa questione.

Teorema 6

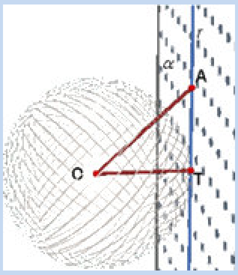
Un piano Π e una sfera Σ fra loro secanti hanno in comune un cerchio.

Valgono anche questi altri importanti risultati.

Teorema 7

Se un piano Π e una sfera Σ sono fra loro tangenti in un punto T, allora il raggio che ha T come uno dei suoi estremi è perpendicolare a Π.

Dimostrazione



Consideriamo la figura seguente, in cui T è il punto di tangenza.

Per dimostrare che OT è perpendicolare ad α, dobbiamo provare che è perpendicolare a ogni retta di α, passante per T. Sia r una di queste, consideriamo un qualsiasi suo punto A, diverso da T. Per definizione di piano tangente A è esterno alla sfera, quindi OA è maggiore del raggio, mentre OT è il raggio. Ma allora OT è la distanza fra O e α, quindi OT è perpendicolare ad α.

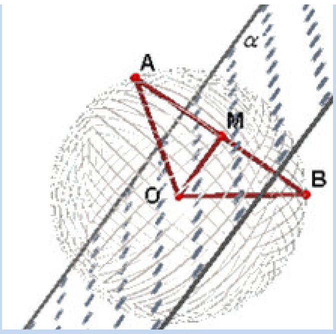
Consideriamo un altro risultato analogo di uno ben noto per le circonferenze.

Teorema 8

Il piano assiale di una qualsiasi corda di una sfera passa per il centro della sfera e viceversa, il piano passante per il centro di una sfera e perpendicolare a una corda è assiale per la corda.

Dimostrazione

Consideriamo la figura, in cui AB è una corda ed α il piano assiale.

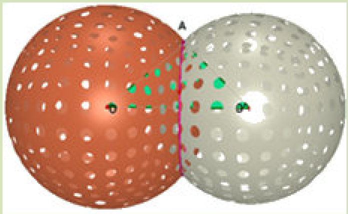


Per sua stessa definizione α contiene tutti e soli i punti equidistanti da *A* e da *B*, quindi contiene anche *O*. Viceversa, se α contiene *O* ed è perpendicolare ad *AB*, allora, detta M la sua intersezione con *AB*, questo è punto medio di *AB*. Infatti *OM* è perpendicolare ad *AB*, ma allora i triangoli rettangoli *AOM* e *OMB* sono isometrici, quindi *AM* e *BM* sono fra loro isometrici.

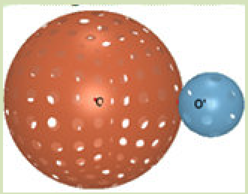
Consideriamo adesso la reciproca posizione di due sfere.

Definizione 7

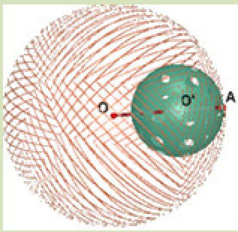
Date due sfere esse sono



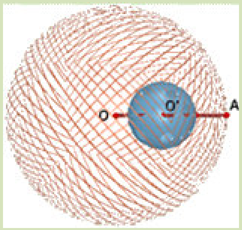
- **secanti** se hanno in comune infiniti punti.
- **tangenti esternamente** se le superfici hanno in comune un solo punto e le sfere interne non hanno punti



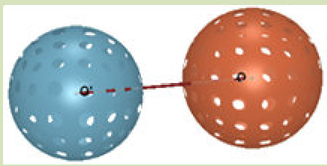
  in comune.
- **tangenti internamente** se le superfici hanno in comune un solo punto e una sfera interna contiene i



  rimanenti punti della superficie sferica dell'altra.
- **una interna all'altra** se le superfici non hanno punti in comune ma una sfera interna contiene tutti i punti



  della superficie sferica dell'altra.



- **esterne** se né le superfici, né le sfere interne hanno punti in comune.

Non è difficile provare i seguenti intuitivi risultati.

Teorema 9

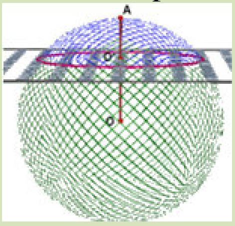
Date due rette di raggi $r \le R$ e la cui distanza fra i centri è D, allora le sfere sono

- Secanti se e solo se $R - r < D < R + r$
- Tangenti esternamente se e solo se $D = R + r$
- Tangenti internamente se e solo se $D = R - r$
- Una interna all'altra se e solo se $D < R - r$
- Esterne se e solo se $D > R + r$

Continuiamo a estendere i concetti della circonferenza e del cerchio alla superficie sferica e alla sfera.

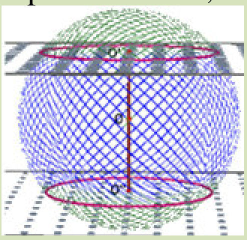
Definizione 8

Diciamo **segmento sferico** di base la circonferenza Γ, la parte di spazio delimitata da una sfera Σ e da Γ ottenuta come sezione di Σ e di un piano Π a essa secante. La parte di superficie sferica facente parte di un segmento sferico si chiama **calotta sferica**. Condotto il raggio perpendicolare al piano sezione, la parte di raggio interna alla calotta si chiama **altezza** della calotta.



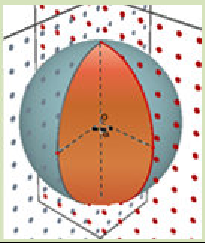
Definizione 9

Diciamo **segmento sferico a due basi** la parte di sfera delimitata da due segmenti sferici le cui circonferenze basi appartengono a piani paralleli fra di loro. La parte di superficie sferica appartenente a un segmento sferico a due basi si dice **zona sferica**. Condotto il diametro perpendicolare al piano sezione, la parte di diametro interna alla zona sferica si chiama **altezza** della zona.



Definizione 10

La parte di sfera ottenuta come intersezione con due semipiani aventi l'origine comune coincidente con una retta diametrale della sfera si chiama **spicchio sferico**. La parte di superficie sferica appartenente a uno spicchio sferico si dice **fuso sferico**. L'angolo formato dai due piani si chiama **angolo del fuso**.



Già Archimede provò un importante risultato relativo alla misura della superficie sferica in funzione del raggio.

Teorema 10

La superficie sferica è equiestesa al quadruplo della circonferenza di raggio massimo della stessa sfera. In simboli $S = 4\pi \cdot r^2$.

Valgono anche i seguenti risultati relativi alle superfici delle parti della superficie sferica.

Teorema 11

La superficie di una calotta sferica di altezza h relativa a una sfera di raggio r è data da $2\pi \cdot r \cdot h$.

Teorema 12

La superficie di una zona sferica di altezza h relativa a una sfera di raggio r è data da $2\pi \cdot r \cdot h$.

Teorema 13

La superficie di un fuso sferico di angolo α relativo a una sfera di raggio r è data da $\frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{90}$.

Concludiamo con i concetti di inscrivibilità e circoscrivibilità.

Definizione 11

Un poliedro si dice **inscrivibile** in una sfera se esiste una sfera che passa per tutti i suoi vertici. Si dice **circoscrivibile** se esiste una sfera tale che i piani delle facce del poliedro sono a essa tangenti.

Valgono i seguenti risultati.

Teorema 14

Tutti i poliedri regolari sono inscrivibili e circoscrivibili a una sfera.

Teorema 15

Tutti i poliedri semiregolari sono inscrivibili e circoscrivibili a una sfera.

Teorema 16

I piani assiali degli spigoli di un tetraedro si incontrano in un punto, che è il centro della sfera circoscritta al tetraedro.

Teorema 17

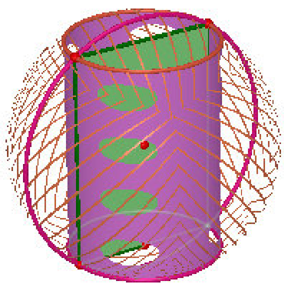
I piani bisettori degli angoli diedri di un tetraedro si incontrano in un punto, che è il centro della sfera inscritta al tetraedro.

Definizione 12

Un solido rotondo generato dalla rotazione di un poligono attorno a uno dei suoi lati si dice **inscrivibile in** (rispettivamente **circoscrivibile a**) una sfera se il poligono unione di quello generatore e del suo simmetrico rispetto all'asse è inscrivibile in (rispettivamente circoscrivibile a) una circonferenza.

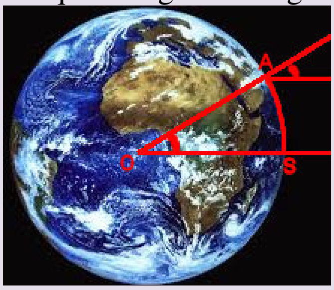
Esempio 1

Un qualsiasi cilindro è inscrivibile in una sfera? Poiché il cilindro è generato da un rettangolo, che è un poligono sempre inscrivibile, possiamo dire che ogni cilindro è inscrivibile in una sfera.



L'angolo storico

Spesso si crede che nell'antichità la terra fosse ritenuta piatta e che fosse stata la scoperta dell'America, da parte di Colombo nel 1492, a fare sì che cominciasse a pensarsi che la terra è invece "rotonda", cioè sferica. Ciò non è affatto vero, intanto perché il famoso filosofo Aristotele aveva osservato che durante un eclissi di luna la terra "proiettava" un'ombra circolare. Non solo, ma era tanta la convinzione della sfericità della terra che circa 300 anni prima della nascita di Cristo un famoso scienziato, Eratostene, quello del crivello dei numeri primi, determinò un ottimo valore del diametro terrestre proprio partendo dal presupposto che la terra fosse rotonda.
Egli considerò una situazione simile a quella qui di seguito raffigurata:



In cui l'arco *OA* era quello passante per le città di Alessandria (indicata con *A*) e Siene (indicata con *S*), l'attuale Assuan, dato che le città appartenevano allo stesso meridiano. (ovviamente nell'immagine mostrata non è così). Eratostene doveva misurare il valore di *OA*, per far ciò aveva a disposizione solo la conoscenza dell'arco *AS*. È facile però osservare che gli angoli indicati sono uguali, e questi valori potevano determinarsi sperimentalmente, ed ecco come fece Eratostene. Il giorno del solstizio estivo, l'attuale 21 giugno dei calendari moderni, si recò a Siene osservando che il sole a mezzogiorno era perpendicolare alla superficie, proiettando i suoi raggi sul fondo di un pozzo. Invece nello stesso momento ad Alessandria che si trovava a 5000 stadi da Siene, il sole formava delle ombre, quindi non era perpendicolare, in modo che l'angolo veniva misurato in 7° 12', cioè un cinquantesimo di 360°. Ciò voleva dire che il tratto *AS* doveva essere circa un cinquantesimo della misura della circonferenza terrestre, che misurava perciò 250 000 stadi. Dato che uno stadio era pari a circa 157 *m*, la circonferenza terrestre doveva essere circa 250 000 · 157 *m* = 39 250 000 *m* = 39 250 *Km*, questo valore non è molto distante da quello reale che è di circa 40 003 *Km*.

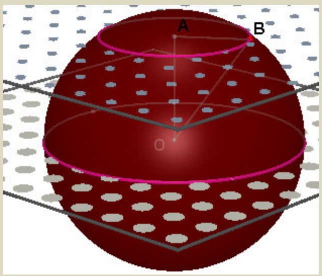
I protagonisti

Eratostene nacque a Cirene, che attualmente si trova in Libia, nel 276 a.C., ma visse per gran parte della sua vita ad Alessandria, dove fu anche bibliotecario del famoso museo. È noto poiché risulta il "destinatario" de Il metodo, opera minore di Archimede in cui questi descrive il suo metodo di scoperta di molte formule per il calcolo dei volumi di alcuni corpi rotondi. Ma ha portato parecchi contributi in diverse scienze, fra cui, come abbiamo visto la geografia ma anche l'astronomia e la matematica, con il metodo di determinazione dei numeri primi, detto appunto crivello di Eratostene. Morì nel 194 a.C., secondo la leggenda si suicidò perché avendo perduta la vista non poteva più godere delle grazie del mondo, né della lettura dei libri.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Un piano seca una sfera di raggio $R = 13$ *cm*, secondo una circonferenza di raggio *r* che dista $h = 12$ *cm* dal centro della sfera. Determinare la misura di *r*.

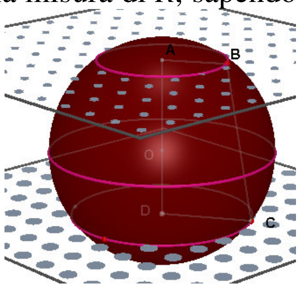
Consideriamo la seguente figura 

Abbiamo costruito un triangolo rettangolo, *AOB*, i cui cateti sono il raggio della circonferenza sezione, *AB*, e la distanza *AO* fra il piano sezione e il piano a esso parallelo contenente la circonferenza di raggio massimo. L'ipotenusa è invece il raggio della sfera, *OB*. Pertanto è semplicissimo risolvere il problema posto:

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{BO}^2 - \overline{AO}^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$$

Livello 1

1. Un piano taglia una sfera di raggio R secondo una circonferenza di raggio $r = 6$ *cm* che dista 7 *cm* dal centro della sfera. Determinare R. $\left[\sqrt{85}\,cm\right]$
2. Un piano taglia una sfera di raggio $R = 17$ *cm*, secondo una circonferenza di raggio $r = 8$ *cm* che dista h *cm* dal centro della sfera. Determinare h. [15 *cm*]
3. Un piano taglia una sfera di raggio $R = 12$ *cm*, secondo un cerchio di area $25\,\pi\,cm^2$ che dista h *cm* dal centro della sfera. Determinare h. $\left[\sqrt{119}\,cm\right]$
4. Data una sfera di raggio R, consideriamo due piani paralleli a essa secanti, come in figura. Se i raggi delle due circonferenze sezione misurano 1 *cm* e 2 *cm*, determinare la misura di R, sapendo che la distanza *AD* fra i piani misura 4 *cm*. Determinare altresì la distanza *BC*.



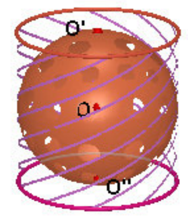
$\left[5\cdot\sqrt{17}/8\,cm; \sqrt{17}\,cm\right]$
5. Data una sfera di raggio lungo 5 *cm*, consideriamo due piani paralleli a essa secanti, le cui circonferenze sezione hanno raggi rispettivamente lunghi 2 *cm* e 3 *cm*. Determinare la distanza fra i piani. $\left[\left(\sqrt{21}\pm 4\right)cm\right]$
6. Data una sfera di raggio lungo 25 *cm*, consideriamo due piani paralleli a essa secanti, le cui circonferenze sezione hanno raggi rispettivamente lunghi r *cm* e 24 *cm*. Determinare r sapendo che la distanza fra i piani è di 16 *cm*. $\left[4\cdot\sqrt{34}\,cm \vee 4\cdot\sqrt{6}\,cm\right]$
7. Una palla di raggio 10 *cm* rotola su un marciapiede, quando si incastra in un buco a sezione circolare di raggio 8 *cm*. A che distanza dalla superficie è il punto più alto della palla? [16 *cm*]

Livello 2

8. Data una sfera di raggio R, consideriamo un piano a essa secante, la cui circonferenza sezione abbia raggio r, è possibile che la distanza h fra il piano e il centro della sfera sia uguale a R? [No]
9. Con riferimento al problema precedente, è possibile che sia $h = r$? [Sì se $R = \sqrt{2}\cdot r$]
10. Data una sfera di raggio R, consideriamo due piani paralleli a essa secanti distanti D. Dette r_1 e r_2 le misure dei raggi delle due circonferenze sezione, determinare il rapporto in cui il centro della sfera divide il segmento che unisce i centri delle circonferenze. $\left[\dfrac{D^2 - r_1^2 + r_2^2}{D^2 + r_1^2 - r_2^2}\right]$

Lavoriamo insieme

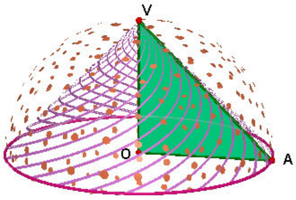
Vogliamo determinare il rapporto fra le superfici di una sfera e laterale del suo cilindro circoscritto. Intanto cominciamo ad osservare che i cilindri circoscrivibili sono solo quelli equilateri, perché fra i rettangoli solo il quadrato è circoscrivibile. Osserviamo anche che il raggio della sfera è isometrico al raggio delle basi del



cilindro. A questo punto allora abbiamo che la superficie laterale del cilindro è $2\pi rh = 2\pi r 2r = 4\pi rh^2$. Cioè esattamente uguale a quella della sfera, pertanto il rapporto richiesto è 1.

***Livello* 1**

11. Determinare il rapporto fra la superficie di una sfera e la superficie totale del suo cilindro circoscritto. [2/3]
12. Un cilindro qualsiasi è inscrivibile in una sfera? [Sì]
13. Determinare il rapporto fra la superficie di una sfera e la superficie laterale del suo cilindro equilatero inscritto. [2]
14. Determinare il rapporto fra la superficie di una sfera e la superficie totale del suo cilindro equilatero circoscritto. [4/3]
15. Un cono qualsiasi è inscrivibile in una sfera? [Sì]
16. In una sfera possiamo inscrivere un solo cono? [No]
17. Un cono qualsiasi è circoscrivibile a una sfera? [Sì]
18. Determinare il rapporto fra la superficie di una sfera e la superficie laterale del suo cono equilatero inscritto. [8/3]
19. Determinare il rapporto fra la superficie di una sfera e la superficie laterale del suo cono equilatero circoscritto. [3/2]
20. Un cono circolare retto è inscritto in una semisfera, quanto vale il rapporto fra l'apotema e il raggio?



$\left[\sqrt{2}\right]$

21. Un cono circolare retto è inscritto in una semisfera di superficie laterale $72\pi\ cm^2$. Determinare la misura dell'apotema del cono e della superficie laterale del tronco ottenuto sezionando il cono in modo da dividere la sua altezza in due segmenti isometrici. $\left[6\cdot\sqrt{2}\,cm;\ 27\cdot\sqrt{2}\,\pi cm^2\right]$

***Livello* 2**

22. Un tronco di cono qualsiasi, può inscriversi in una sfera? [Sì]
23. Qual è il centro della sfera circoscritta a una sfera? [Il punto intersezione fra i piani assiali di due diametri paralleli delle due basi e il trapezio isoscele sezione che ha i detti diametri come basi]
24. Un tronco di cono inscritto in una sfera può avere il raggio della base maggiore più lungo del raggio della sfera? [No]
25. Un tronco di cono di basi i cui raggi sono lunghi 2 *cm* e 5 *cm* è inscritto in una sfera di raggio 7 *cm*. Determinare la misura del suo apotema. $\left[\left(2\cdot\sqrt{15}+3\cdot\sqrt{2}\right)cm\right]$
26. Un tronco di cono qualsiasi, può inscriversi in una semisfera? [No]
27. Un tronco di cono di basi i cui raggi sono lunghi 4 *cm* e 8 *cm* è inscritto in una semisfera. Determinare la misura del suo apotema. [8 *cm*]
28. Tenuto conto dell'esercizio precedente, possiamo dire che se un tronco di cono è inscritto in una semisfera il suo apotema è isometrico al raggio della semisfera? [No, ciò succede solo se i raggi delle basi del tronco sono uno doppio dell'altro]
29. Determinare la relazione fra l'apotema di un tronco di cono inscritto in una semisfera e i raggi delle basi del tronco. $\left[\sqrt{2\cdot R\left(R-r\right)}\right]$
30. Una sfera è inscritta in un cono il cui raggio di base misura 5 *cm* e l'altezza 12 *cm*. Determinare il raggio della sfera e la superficie laterale del tronco che si ottiene sezionando il cono con un piano paralle-

lo alla base che passa per i punti di tangenza della sfera con le facce laterali del cono (i punti T ed U in

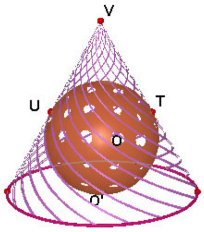
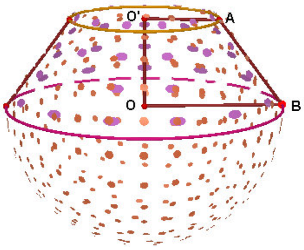


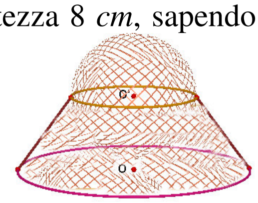
figura). [10/3 *cm*; 525/13π cm^2]

31. Calcolare la superficie del solido formato da un tronco di cono sovrapposto ad una semisfera, di raggio 17 *cm*, sapendo che il tronco è generato da un trapezio rettangolo di area 150 cm^2 e di altezza 15 *cm*.



$$\left[\left(587+20\cdot\sqrt{421}\right)\pi cm^2\right]$$

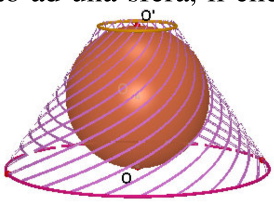
32. Determinare la misura della superficie di un solido formato da una semisfera sovrapposta ad un tronco di cono il cui apotema misura 10 *cm* e l'altezza 8 *cm*, sapendo che la superficie laterale del tronco è



4/3 della somma delle aree delle sue basi. [219π cm^2]

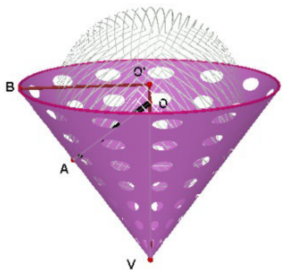
Livello 3

33. Un tronco di cono qualsiasi, può circoscriversi a una sfera? [No]
34. Se un tronco di cono retto è circoscritto ad una sfera, il che relazione è l'apotema *a* con i raggi *r* e *R*

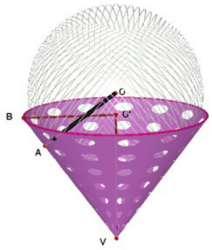


delle basi del tronco? [$a = r + R$]

35. Un tronco di cono retto è circoscritto ad una sfera; sapendo che le misure dei raggi delle basi hanno per somma 25 *cm* e per differenza 7 *cm*, determinare la misura della superficie della sfera. [576 π cm^2]



36. Una sfera tocca un cono come mostrato in figura determinare la misura del suo raggio sapendo che il cono ha raggio di 4,5 *cm*, altezza di 6 *cm* e $\overline{VA} = 4\,cm$. [3 *cm*]
37. Con relazione al precedente esercizio determinare la relazione fra il raggio *R* della sfera, il raggio del cono *r*, la sua altezza *h* e la distanza $\overline{VA} = d$. [$Rh = rd$]
38. La relazione precedente continua a valere anche se il centro della sfera è al disopra di quello della base

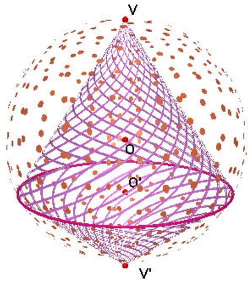


del cono? [Sì]

39. Un problema di Dudeney. Una mosca è all'interno di un bicchiere cilindrico alto 4 pollici e la cui circonferenza di base è 6 pollici. La mosca è a un pollice dal fondo poggiata sulla superficie del bicchiere. Una goccia di miele si trova all'esterno del bicchiere a un pollice dalla sommità del bicchiere e sulla faccia opposta a quella su cui è poggiata la mosca. Quanto vale il minimo cammino necessario alla mosca per raggiungere il miele? [5 pollici]

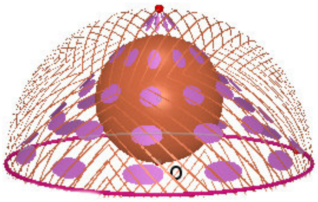
40. Una palla sferica di raggio 1 è appoggiata a due pareti adiacenti di una stessa stanza. Quanto vale il massimo raggio di un'altra palla sferica che possa immettersi fra la palla e il muro? $\left[\left(\sqrt{2}-1\right)/2\right]$

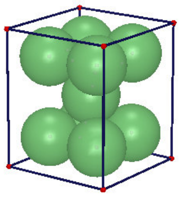
41. Sezioniamo una sfera di raggio 3 *cm*, con un piano che divide il diametro in parti proporzionali a 4/9.



quindi costruiamo due coni come in figura. Determinare la misura del raggio di base dei coni e le misure degli apotemi. $\left[r=\frac{36}{13}cm; a'=\frac{20\cdot\sqrt{10}}{13}cm; a''=\frac{2\cdot\sqrt{493}}{13}cm\right]$

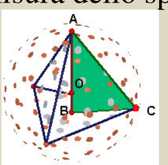
42. Con riferimento al precedente esercizio, determinare una relazione fra il raggio delle basi dei coni, il raggio della sfera e il rapporto p in cui è diviso il diametro. $\left[r_c=\frac{2\cdot\sqrt{p}\cdot r_S}{1+p}\right]$

43. In figura  un cono è inscritto in una semisfera ed è circoscritto a un'altra sfera. Se la sfera minore ha raggio 1, quanto misura il raggio di quella maggiore? $\left[1+\sqrt{2}\right]$

44. In una scatola cubica inseriamo 9 sfere uguali come in figura, 8 di esse sono a due a due tangenti fra loro e con 3 facce della scatola, la nona è tangente alle altre 8. Determinare i raggi delle sfere in funzione dello spigolo ℓ del cubo.  $\left[\left(\sqrt{3}-\frac{3}{2}\right)\cdot\ell\right]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare la misura dello spigolo di un tetraedro regolare inscritto in una sfera di raggio r.

Consideriamo la figura  . Il centro O della sfera è il baricentro del tetraedro, ossia il punto di incontro delle sue mediane, pertanto il raggio della sfera, AO, è 3/4 dell'altezza AB. Possiamo ricavare tale misura dal triangolo rettangolo ABC. Si ha perciò

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = \ell^2 - \left(\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{\ell}{\cancel{2}}\cdot\sqrt{3}\right)^2 = \ell^2 - \frac{1}{3}\cdot\ell^2 = \frac{2}{3}\cdot\ell^2$$

Allora avremo: $$r = \overline{AO} = \frac{3}{4}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\ell = \sqrt{\frac{\cancel{9}^3}{\cancel{16}_8}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}}\cdot\ell = \sqrt{\frac{3}{8}}\cdot\ell \Rightarrow \ell = \sqrt{\frac{8}{3}}\cdot r.$$

Livello 2

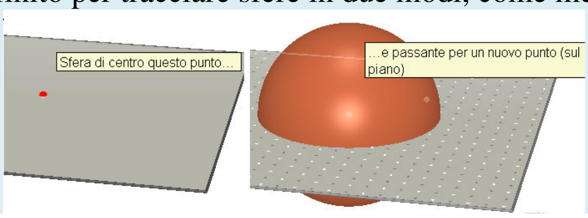
45. Esprimere lo spigolo di un cubo mediante il raggio r della sua sfera circoscritta. $\left[\frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot r\right]$
46. Esprimere lo spigolo di un ottaedro regolare mediante il raggio r della sua sfera circoscritta. $\left[\sqrt{2}\cdot r\right]$
47. Esprimere lo spigolo di un tetraedro regolare mediante il raggio r della sua sfera inscritta. $\left[2\cdot\sqrt{6}\cdot r\right]$
48. Esprimere lo spigolo di un cubo mediante il raggio r della sua sfera inscritta. [$2r$]
49. Esprimere lo spigolo di un ottaedro regolare mediante il raggio r della sua sfera inscritta. $\left[\sqrt{6}\cdot r\right]$
50. Calcolare il rapporto fra il raggio della sfera circoscritta e quello della sfera inscritta in uno stesso tetraedro regolare. [3]
51. Calcolare il rapporto fra il raggio della sfera circoscritta e quello della sfera inscritta a uno stesso cubo. $\left[\sqrt{3}\right]$
52. Calcolare il rapporto fra il raggio della sfera circoscritta e quello della sfera inscritta a uno stesso ottaedro regolare. $\left[\sqrt{3}\right]$

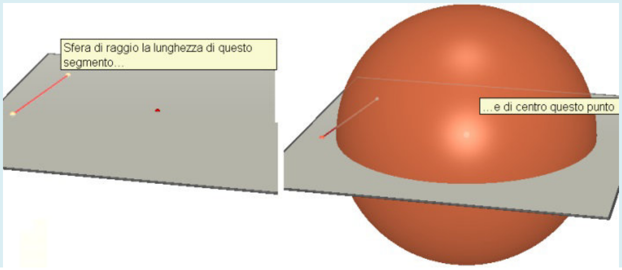
Livello 3

53. Dopo avere dimostrato che esiste una sfera, detta intersfera, che è tangente a tutti gli spigoli di un cubo, determinare il rapporto spigolo/raggio. $\left[\sqrt{2}\right]$
54. Dopo avere dimostrato che esiste l'intersfera per un tetraedro regolare, determinare il rapporto spigolo/raggio. $\left[2\cdot\sqrt{2}\right]$
55. Dopo avere dimostrato che esiste l'intersfera per un ottaedro regolare, determinare il rapporto spigolo/raggio. [2]
56. Dimostrare che un tetraedro troncato non è circoscrivibile a una sfera.
57. Dopo avere dimostrato che un cubottaedro è inscrivibile in una sfera, determinare il rapporto spigolo/raggio. $\left[\sqrt{2}\right]$
58. Dopo avere dimostrato che esiste l'intersfera per un cubottaedro, determinare il rapporto spigolo/raggio. $\left[2/\sqrt{3}\right]$
59. Dopo avere dimostrato che esiste l'intersfera per un ottaedro troncato, determinare il rapporto raggio/spigolo. [3/2]

L'angolo di Cabri3D

Sfera è il comando predefinito per tracciare sfere in due modi, come meglio mostrato nelle figure.





Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi

1. (Liceo scientifico PNI 1996/97) Si consideri in un piano α un rettangolo $ABCD$ i cui lati BC e AB misurano rispettivamente a e $2a$. Sia AEF con $E \in AB$ e $F \in CD$, un triangolo isoscele la cui base AE ha misura $2r$. Il candidato: a) dimostri che una retta parallela ad AB, a distanza x da essa, interseca i triangoli AEF e AEC secondo segmenti uguali; b) detta C_1 la circonferenza di diametro AE e appartenente al piano γ passante per AB e perpendicolare ad α, e detti T_1 e T_2 i coni di base C_1 e vertici rispettivamente nei punti F e C, dimostri che le sezioni C'_1 e C'_2 di detti coni con il piano γ', passante per la retta se parallelo al piano γ, sono circonferenze; c) determini, per via sintetica o analitica, il valore di x per il quale C'_1 e C'_2 sono tangenti esternamente. $\left[x = \dfrac{2ar}{r+2a}\right]$
2. (Liceo scientifico 2003/2004) Provate che la superficie totale di un cilindro equilatero sta alla superficie della sfera ad esso circoscritta come 3 sta a 4.

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi.

1. Dimostrare che i piani assiali degli spigoli di un tetraedro si incontrano in un punto, che è il centro della sfera circoscritta al tetraedro.
2. Dimostrare che in un tetraedro equifacciale, cioè con tutte le facce triangoli isometrici,
   - baricentro, circocentro e incentro coincidono;
   - il quadrato del raggio della sfera circoscritta è pari a 1/8 della somma dei quadrati delle misure di tre spigoli aventi un vertice in comune;
   - la sfera inscritta tocca le facce nei loro circoncentri.
3. Dopo avere dimostrato che esiste l'intersfera per un dodecaedro regolare, determinare il rapporto spigolo/raggio. $\left[3-\sqrt{5}\right]$
4. Dopo avere dimostrato che esiste l'intersfera per un icosaedro regolare, determinare il rapporto spigolo/raggio. $\left[\sqrt{5}-1\right]$
5. Dopo avere dimostrato che esiste l'intersfera per un tetraedro troncato, determinare il rapporto spigolo/raggio. $\left[\sqrt{8}/3\right]$
6. Dopo avere dimostrato che un tetraedro troncato è inscrivibile in una sfera, determinare il rapporto raggio/spigolo. $\left[\sqrt{22}/4\right]$
7. Dopo avere dimostrato che un ottaedro troncato è inscrivibile in una sfera, determinare il rapporto rag-

gio/spigolo. $\left[\sqrt{10}/2\right]$

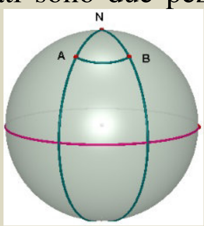
8. Dopo avere dimostrato che esiste l'intersfera per un rombicubottaedro, determinare il rapporto spigolo/raggio. $\left[\sqrt{2-\sqrt{2}}\right]$
9. Dopo avere dimostrato che un rombicubottaedro è inscrivibile in una sfera, determinare il rapporto raggio/spigolo. $\left[\sqrt{5+2\cdot\sqrt{2}}/2\right]$

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.
AHSME = Annual High School Mathematics Examination
AMC = American Mathematical Contest
HSMC = A&M University High School Mathematics Contest
NC = State Matematical Finals of North Carolina
Rice = Rice University Mathematics Tournament
TAMU = Texas A&M University

Lavoriamo insieme

Un classico problema di matematica ricreativa è il seguente.
"Un cacciatore parte dalla sua capanna, percorre 10 *Km* verso Sud e 10 verso Est. A questo punto incontra un orso e lo uccide, lo scuoia e torna a casa percorrendo 10 *Km* verso Nord. Si chiede di che colore è la pelle dell'orso".
La cosa più sorprendente nel quesito è la richiesta, apparentemente priva di senso e soprattutto non "legata" ai dati. Infatti pensiamo che non sia possibile, su una superficie piana, percorrere 10 *Km* verso Sud, Nord, Est e ritrovarsi al punto di partenza. È però possibile su una superficie sferica, soprattutto se si parte da certi punti. Infatti se partiamo dai poli possiamo percorrere un triangolo "sferico" i cui lati sono due pezzi di meridiani e un pezzo di parallelo, come mostrato in figura, che appunto torna indietro.



Solo partendo dal polo Nord si può percorrere il tragitto Sud – Est (o Ovest) – Nord, mentre partendo dal polo Sud, dovremmo percorrere Nord – Est (o Ovest) – Sud. Ciò significa che il cacciatore partiva dal polo Nord, quindi la pelle dell'orso è bianca.

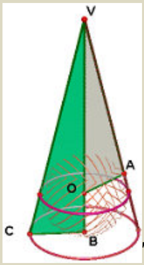
1. (AHSME 1980) Quattro sfere di raggio 1 sono poggiate sul pavimento in modo che tre di esse stiano sul pavimento reciprocamente tangenti e la quarta sia poggiate sulle altre. Circoscriviamo un tetraedro alle sfere, quanto misura il suo spigolo? $\left[2\cdot\left(1+\sqrt{6}\right)\right]$
2. (AHSME 1983) Una grande sfera è adagiata su un terreno soleggiato, e la sua ombra raggiunge la massima distanza dal punto di contatto con il suolo pari a 10*m*. Nello stesso momento un'asta da 1 *m* posta verticalmente al terreno proietta un'ombra lunga 2 *m*. determinare la misura del raggio della sfera. Si supponga che i raggi del sole siano segmenti fra loro paralleli e l'asta sia assimilabile ad un segmento. $\left[10\cdot\left(\sqrt{5}-2\right)m\right]$
3. (AHSME 1987) Un pallone galleggiava su un lago quando questo ghiacciò. Senza rompere il ghiaccio il pallone fu tolto dalla superficie ghiacciata sulla quale in tal modo rimase una buca larga 24 *cm* e profonda 8 *cm*. Determinare la misura del raggio del pallone, che si suppone esattamente sferico. [13 *cm*]
4. (AHSME 1995) Il raggio della terra all'equatore è circa 4000 miglia. Supponiamo che un jet giri attorno alla terra alla velocità di 500 miglia orarie relativamente alla terra. Se il percorso avviene a un'altezza trascurabile sull'equatore, allora fra le seguenti, la migliore stima del numero di ore di volo è A) 8 B) 25 C) 50 D) 75 E) 100 [C]
5. (TAMU1999) La cima di un cono il cui raggio base è 10 pollici e l'altezza 8 pollici è rimosso con un taglio orizzontale a 3 pollici dal vertice. Determinare il raggio del cerchio che così si forma. [15/4"]

6. (HSMC1999) Un cubo di volume 216 è inscritto in una sfera. Determinare la superficie della sfera. [108π]
7. (AMC 2001) Dato un settore circolare di 252° e di raggio 10, quale dei seguenti coni possiamo costruire unendo i suoi estremi? Indichiamo con h l'altezza h, con r il raggio r e con a l'apotema.
   A) $r = 6$, $a = 10$ B) $r = 6$, $h = 10$ C) $r = 7$, $a = 10$ D) $r = 7$, $h = 10$ E) $r = 8$, $a = 1$ [C]
8. (AMC 2001) Un cilindro circolare retto con il diametro isometrico all'altezza è inscritto in un cono retto. Il cono ha diametro 10 e altezza 12, e gli assi dei due solidi coincidono. Determinare la misura del raggio del cilindro. [30/11]
9. (Rice 2006) Sia il triangolo ABC, con $A \equiv (0; 0)$, $B \equiv (20; 0)$ e C sul semiasse positivo y. Il cono M si forma ruotando ABC attorno all'asse x, e il cono N ruotando ABC attorno all'asse y. Se il volume del cono M meno il volume del cono N fa 140π, determinare la misura di BC. [29]

Questions in English

Working together

This is a question assigned at HSMC, in 1999.
A conical hat is 40 *cm* tall and has a perimeter along the brim[1] of 60π *cm*. what is the radius of the largest sphere that can be put on a table and covered entirely by the hat, so that the hat rests on the table surface and conceals the sphere

Consider the following figure. 

Triangles *VOA* and *VBC* are similar, hence:

$$\overline{VO} : \overline{OA} = \overline{VC} : \overline{BC} \Rightarrow (40 - R) : R = 50 : 30 \Rightarrow 50R = 30 \cdot (40 - R) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 5R = 120 - 3R \Rightarrow 8R = 120 \Rightarrow R = 15cm$$

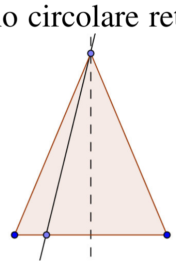
10. (HSMC1999) A can is in the shape of a right circular cylinder. The circumference of the base of the can is 12 inches, and the height of the can is 5 inches. A spiral stripe is painted on the can in such a way that it winds around the can exactly once as it reaches from the bottom of the can to the top. It reaches the top of the can directly above the spot where it left the bottom. What is the length, in inches, of the stripe? [13]
11. (NC2002) A string is wrapped around a cylinder in such a way that it starts at the bottom wraps around the cylinder three times and ends up on top. If the cylinder has a diameter 10 *cm* and a height of 30 *cm* what is the shortest possible length of the piece of string? $\left[30 \cdot \sqrt{\pi^2 + 1}\, cm\right]$
12. (HSMC2008) Two points A and B lie on a sphere of radius 12. The length of the line segment from A to B is $12 \cdot \sqrt{3}$. What is the length of the shortest path from A to B if every point of the path is on the sphere? [8π]

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Accademia Navale) Descrivere la sfera come luogo di punti, il cono e il cilindro come luogo di rette.
2. (Accademia Navale) Descrivere il luogo dei punti dello spazio equidistanti da due punti assegnati.
3. (Accademia Navale) Descrivere il luogo dei punti dello spazio equidistanti da due piani assegnati.
4. (Accademia Navale) Descrivere il luogo dei punti dello spazio equidistanti dai punti di una circonferenza assegnata.

[1] orlo

5. (Accademia Navale) Individuare il centro della sfera passante per una circonferenza γ e per un punto P non appartenente al piano di γ.
6. (Accademia Navale) Individuare il centro della sfera tangente a un piano α in un suo punto A e passante per un ulteriore punto B non appartenente ad α.
7. (Accademia Navale) Descrivere il luogo dei centri delle sfere di raggio assegnato e tangenti a due piani non paralleli.
8. (Accademia Navale) Dimostrare che le circonferenze circoscritte alle quattro facce di un tetraedro appartengono alla superficie di una stessa sfera.
9. (Scuola superiore di Catania) Una piramide a base quadrata ha per facce laterali quattro triangoli equilateri. Se ogni spigolo della piramide ha lunghezza unitaria, qual è la lunghezza del raggio della sfera circoscritta alla piramide?
10. (Medicina 1997) Sono date due sfere di raggi rispettivamente $R1$, $R2$ e superfici $S1$, $S2$. Se $R1/R2 = 4$ allora S1/S2: A) 2 B) 4 C) 8 D) 16 E) 64
11. (Veterinaria 1998) Se una sfera e un cubo hanno uguale volume, la superficie della sfera è:
A) minore di quella del cubo B) maggiore di quella del cubo C) uguale a quella del cubo
D) doppia di quella del cubo E) i dati forniti non sono sufficienti per rispondere
12. (Odontoiatria 2005) Se si raddoppia il raggio di una sfera, la sua superficie si moltiplica per:
A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 2π
13. (Scienze della formazione primaria, Università di Cagliari 2008-09) Se due coni hanno area di base differente, allora di sicuro hanno:
A) superficie differente B) volume differente C) altezza differente
D) apotema differente E) nessuna delle precedenti
14. (Architettura 2009) Nei riguardi della rotazione nello spazio di un segmento AB, tenuto fisso il suo punto medio M ed escludendo le rotazioni con asse diretto come AB o ortogonale ad esso, quale delle seguenti figure si ottengono?
A) cilindro B) ellissoide C) paraboloide D) cono a una falda E) cono a due falde
15. (Architettura 2009) Consideriamo l'intersezione di un cilindro circolare con un piano secante. Allora l'intersezione: A) è un punto B) sono due rette incidenti C) è sempre una circonferenza
D) può essere un'ellisse E) può essere una parabola
16. (Ingegneria 2009) A parità di tutte le altre condizioni (materiale, rugosità, stato di pulizia, etc.) serve meno quantità di pittura per tinteggiare: A) un cono circolare retto di altezza 1 m e raggio 1 m
B) una sfera di raggio 1 m C) un cubo di lato 1 m D) un tetraedro regolare di spigolo 1 m
E) un cilindro circolare retto di altezza 1 m e raggio 1 m
17. (Architettura 2010) Quale affermazione riguardante la sfera non è vera?
A) Sezionando la sfera con piani si ottengono cerchi ed ellissi B) La sfera è una figura simmetrica
C) Sulla superficie della sfera sono identificabili meridiani e paralleli
D) La superficie sferica non è sviluppabile sul piano
E) La superficie sferica è una superficie di rotazione
18. (Architettura 2010) Dato un cono circolare retto sezionato con un piano "α" inclinato come in figura,



quale sezione piana si ottiene?
A) Circonferenza B) Ellisse C) Iperbole D) Triangolo E) Parabola

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_2_1.htm

Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

9	**10**	**11**	**12**	**13**
$\sqrt{2}/2$	D	A	C	E
14	**15**	**16**	**17**	**18**
E	D	D	A	D

6. Geometria dello spazio ambiente

6.4 Il volume

Prerequisiti

- Punti, rette e piani nello spazio
- I poliedri
- I corpi rotondi

Obiettivi

- Comprendere il concetto di volume racchiuso da un corpo
- Sapere risolvere semplici problemi relativi al calcolo del volume di poliedri e di corpi rotondi

Contenuti

- Concetto di volume e volume dei poliedri
- Volume dei corpi rotondi

Parole Chiave

Volume

Concetto di volume e volume dei poliedri

Se consideriamo due scatole, una dentro l'altra, dal punto di vista "pratico" diciamo che la scatola più grande ha un maggiore *volume*, cioè contiene più materiale dello stesso tipo che non quella più piccola. Per esempio più aria o più acqua. Quindi dal punto di vista intuitivo diciamo che un poliedro o un solido rotondo racchiude un volume. Come abbiamo fatto con le aree, anche con i volumi vogliamo assegnare dei numeri a tali grandezze.

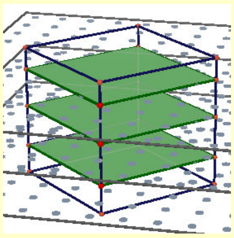
Esempio 1

Come possiamo calcolare il volume racchiuso dalla bottiglia in figura?  Un modo "pratico" consiste nell'immergere la bottiglia in un contenitore pieno d'acqua fino all'orlo, del quale conosciamo quanta acqua contiene. L'immersione ovviamente fa uscire fuori l'acqua in esubero, cioè quella il cui "posto" viene ad essere occupato dalla bottiglia. Quindi si estrae la bottiglia e si rimisura quanta acqua è rimasta. La differenza fra i due numeri è il volume della bottiglia.

Il precedente procedimento è soggetto a diverse contestazioni, la prima e più importante delle quali è: "come calcoliamo il volume iniziale della scatola piena d'acqua?" Dobbiamo quindi considerare un diverso approccio. Poiché sappiamo come calcolare le aree, potremmo cercare di ricondurre il problema del volume a quello delle aree.
Se tagliamo la bottiglia con un taglio parallelo alla sua base otterremo una sezione di forma variabile, della quale però supponiamo di sapere calcolare l'area. Se di tagli del genere ne facciamo non uno, ma centinaia, otterremo centinaia di sezioni, la somma delle cui aree si può considerare come un valore approssimato per difetto del volume della bottiglia. Ovviamente se aumentiamo il numero di tagli, la somma delle aree sarà un valore migliore del precedente. Se riuscissimo a effettuare infiniti tagli avremmo ridotto la bottiglia alla somma di infinite aree. Ovviamente il problema non è risolto, perché non sappiamo come sommare infiniti numeri. In alcuni casi però possiamo ugualmente calcolare tale valore.

Esempio 2

Torniamo all'esempio della bottiglia e al suo contenitore. Se il contenitore è un cubo, come possiamo calcolare il suo volume? Tagliamo il cubo con infiniti tagli paralleli a una faccia, come mostrato in figura (ovviamente con solo alcuni tagli mostrati)



In questo caso tutte le sezioni sono uguali e hanno area pari a una faccia del cubo, cioè ℓ^2. Ora è vero che non sappiamo quanto fa la somma di infiniti quadrati uguali, ma è anche vero che possiamo dire che questi quadrati messi uno accanto all'altro sono tanti quanto è lungo il terzo spigolo, quindi possiamo dire che il volume è il prodotto dell'area per lo spigolo, cioè è $\ell^2 \cdot \ell = \ell^3$.

Ovviamente il precedente procedimento non è matematicamente rigoroso, ma è "convincente" e ci permette quindi di enunciare il seguente risultato.

Teorema 1

Il volume di un cubo di spigolo lungo ℓ unità è ℓ^3 unità cubiche.

Possiamo quindi considerare il volume di un cubo di lato 1 come l'unità di misura dei volumi di qualunque solido, esattamente come abbiamo fatto con i quadrati di lato 1 che abbiamo considerato unità di misura delle aree. Pertanto per misurare il volume di un solido dobbiamo stabilire quanti cubetti unitari riempiono, senza "vuoti", il solido. Ovviamente non sempre il volume è misurato da un numero intero, quindi prendiamo per buono il concetto di sottomultiplo di un cubetto unitario. Così se suddividiamo in 10 parti uguali ogni spigolo di un cubo unitario, otterremo $10^3 = 1000$ cubetti il cui volume sarà 1/1000 di quello iniziale, che perciò può essere usato per misurare spazi più piccoli di una unità cubica. E così via.
Vediamo adesso di determinare delle formule per il calcolo del volume di altri poliedri. Premettiamo alcuni postulati.

Postulato 1

Solidi isometrici hanno uguali volumi

Postulato 2

Il solido ottenuto dall'unione di n altri solidi in modo che essi possano avere al massimo in comune punti sulle loro superfici esterne, ha volume dato dalla somma dei volumi di tutti gli n solidi.

Postulato 3

Se due solidi possono dividersi in n solidi $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$, $\{S'_1, S'_2, \ldots, S'_n\}$, in modo che si abbia S_k e S'_k di uguale volume per ogni k: $1 \leq k \leq n$, essi hanno uguali volumi.

Postulato 4

Se da un solido eliminiamo uno o più sue parti, il solido così ottenuto ha volume dato dalla differenza fra il volume del solido iniziale e il volume dei solidi eliminati.

Il primo caso è ovviamente quello dei parallelepipedi rettangoli, di cui il cubo è un caso particolare.

Teorema 2

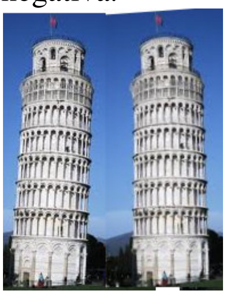
Il volume di un parallelepipedo di dimensioni a, b e c unità ha volume $a \cdot b \cdot c$ unità cubiche.
Dimostrazione (pseudo)
Si tenga conto che una sezione del parallelepipedo con un piano parallelo alla faccia di lati a e b è un rettangolo di area $a \cdot b$. Di rettangoli del genere ce ne sono un totale di c, quindi il volume è appunto $a \cdot b \cdot c$.

Analogamente possiamo provare il risultato sui prismi retti.

Teorema 3

Il volume di un prisma retto di base di area A, e altezza h unità ha volume $A \cdot h$ unità cubiche.
Dimostrazione (pseudo)
Per esercizio.

E se il prisma non fosse retto? Facciamo un altro ragionamento. Se la torre di Pisa non fosse inclinata, il suo volume varierebbe? Ovviamente la risposta è negativa.

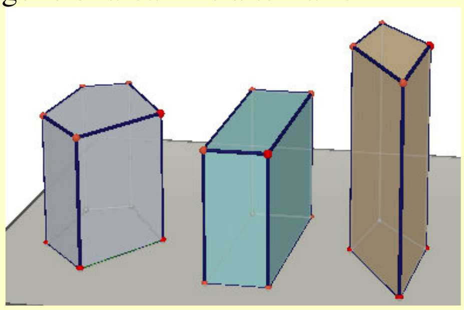


Quindi se "incliniamo" un prisma senza deformarlo, il suo volume non dovrebbe cambiare. E se invece abbiamo due figure completamente diverse, come potrebbero essere due bottiglie di forma diversa, che sappiamo essere entrambe di un litro? In questo caso sarà il metodo "pratico" a dire che le due bottiglie in figura (esclusi i tappi) contengono lo stesso volume.

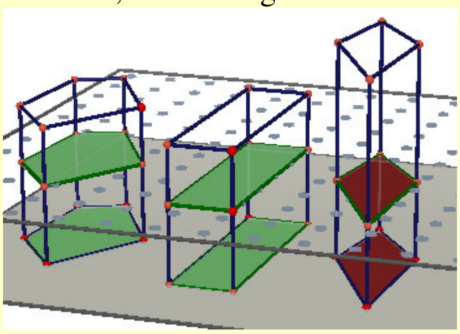
Vi è però un caso in cui possiamo affermare con ragionevole certezza che due oggetti di forma diversa hanno lo stesso volume.

Esempio 3

Un prisma retto di base un poligono di area 16 e altezza 3 ha volume $16 \times 3 = 48$ unità cubiche. Un parallelepipedo rettangolo di spigoli lunghi 2, 3 e 8 unità ha anch'esso un volume di 48 unità cubiche, così come un prisma retto di base un poligono di area 12 e altezza 4.



Come si vede, in figura abbiamo posto tutti e tre i solidi sullo stesso piano, in modo che i primi due prismi abbiano la stessa altezza. Ciò non è possibile per il terzo solido. Ora consideriamo un piano parallelo alle basi di appoggio che sezioni tutti e tre i solidi, come in figura.



Osserviamo una affinità fra i primi due solidi che non c'è con il terzo. Ossia le sezioni hanno determinato in entrambi i solidi due aree uguali (entrambe di 16 unità quadrate). Non solo, ma ciò accadrà per qualsiasi sezione ottenuta con piani paralleli alla base di appoggio.

Quanto visto nel precedente esempio ci permette quindi di enunciare una condizione sufficiente, ma non necessaria, atta ad assicurarci che due solidi abbiano lo stesso volume.

Principio di Cavalieri

Dati due solidi appoggiati su un certo piano α, se qualsiasi sezione effettuata con un piano parallelo ad α, determina su entrambi i solidi o due poligoni di uguale area o il vuoto, allora i due solidi hanno lo stesso volume.

I protagonisti

Bonaventura Cavalieri nacque a Milano nel 1598 e morì a Bologna nel 1647. Come molti dei matematici italiani di quel periodo era un religioso, apparteneva all'ordine dei Gesuiti. La sua fama è legata al procedimento che abbiamo descritto per sommi capi e che fu esposto nella sua opera *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* del 1635. Si occupò comunque di altri argomenti, sempre nell'ambito geometrico e nel 1647 pubblicò l'opera *Exercitationes geometricae sex*, che divenne un'opera fondamentale per i matematici del XVII secolo.

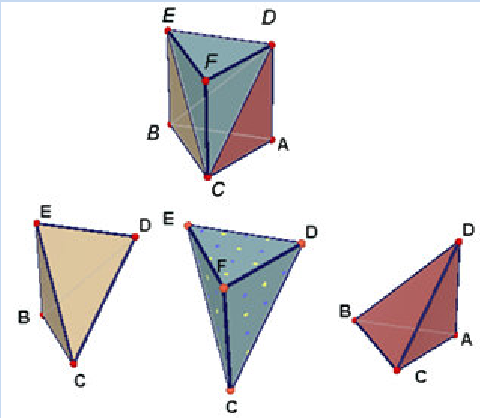
Useremo questo metodo nel paragrafo successivo per determinare i volumi di alcuni solidi rotondi. Intanto riprendiamo il discorso sui volumi dei poliedri. Se cerchiamo di applicare il metodo di Cavalieri al calcolo del volume di una piramide abbiamo una difficoltà, le sezioni sono tutte poligoni simili fra loro e non uguali come invece accadeva per i prismi, e non sappiamo come sommare le aree di infiniti poligoni simili. Dobbiamo quindi trovare un diverso approccio.

Teorema 4

Ogni prisma che abbia base triangolare si può dividere in tre piramidi uguali fra loro ed aventi basi triangolari.

Dimostrazione

Suddividiamo il prisma come mostrato in figura, in cui abbiamo anche disegnato le tre piramidi "staccate" dal prisma, per capire come siano state costruite.



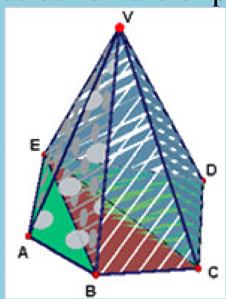
Non è difficile vedere che le tre piramidi sono isometriche e hanno la stessa altezza del prisma. Il che è proprio quello che volevamo provare.

Segue quindi il risultato che cercavamo per determinare una formula per il calcolo del volume di una piramide.

Corollario 1

Ogni piramide è la terza parte di un prisma che abbia la stessa base e la stessa altezza.

Dimostrazione

Ogni piramide può suddividersi in un certo numero di piramidi triangolari, come mostrato in figura, nel caso particolare di una base pentagonale. 

Basta infatti dividere il poligono di base in $n - 2$ triangoli, ciascuno di area A_i e quindi considerare le piramidi che hanno queste basi e il vertice della piramide iniziale. Tali piramidi hanno tutte la stessa altezza e la somma dei loro volumi fornisce il volume della piramide iniziale. Quindi il volume della piramide è $1/3 \cdot (A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-2}) \cdot h = 1/3 \cdot A \cdot h$

Ci rimane da considerare il tronco di piramide.

Teorema 5

Il volume di un tronco di piramide è dato da un terzo del prodotto dell'altezza per la somma delle aree e della radice quadrata del prodotto delle dette aree. In formula $\frac{A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 \cdot A_2}}{3} \cdot h$.

Dimostrazione

Il volume è ovviamente la differenza fra il volume della piramide che abbiamo troncato e il volume della parte troncata. Cioè è $1/3 \cdot (A_1 \cdot h_1 - A_2 \cdot h_2)$. Dobbiamo sostituire le altezze delle due piramidi con l'altezza del tronco. Sappiamo che: $\begin{cases} h = h_1 - h_2 \\ \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{h_1^2}{h_2^2} \end{cases}$. Risolvendo il sistema con un metodo a piacere, troviamo due soluzioni, una sola delle quali accettabile: $\begin{cases} h_1 = \dfrac{\sqrt{A_1}}{\sqrt{A_1} - \sqrt{A_2}} \cdot h \\ h_2 = \dfrac{\sqrt{A_2}}{\sqrt{A_1} - \sqrt{A_2}} \cdot h \end{cases}$. Adesso sostituiamo:

$$\frac{1}{3} \cdot \left(A_1 \cdot \frac{\sqrt{A_1}}{\sqrt{A_1} - \sqrt{A_2}} - A_2 \cdot \frac{\sqrt{A_2}}{\sqrt{A_1} - \sqrt{A_2}} \right) \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{A_1 \cdot \sqrt{A_1} - A_2 \cdot \sqrt{A_2}}{\sqrt{A_1} - \sqrt{A_2}} \cdot h$$

Semplifichiamo:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{\left(A_1 \cdot \sqrt{A_1} - A_2 \cdot \sqrt{A_2}\right) \cdot \left(\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2}\right)}{\left(\sqrt{A_1} - \sqrt{A_2}\right) \cdot \left(\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2}\right)} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{A_1^2 + A_1 \cdot \sqrt{A_1 \cdot A_2} - A_2 \cdot \sqrt{A_1 \cdot A_2} - A_2^2}{A_1 - A_2} \cdot h =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\cancel{(A_1 - A_2)} \cdot (A_1 + A_2) + \cancel{(A_1 - A_2)} \cdot \sqrt{A_1 \cdot A_2}}{\cancel{A_1 - A_2}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \left(A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 \cdot A_2}\right) \cdot h$$

che è la tesi.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Un panetto di burro ha dimensioni $120 \times 65 \times 34$ *mm*, per la spedizione i panetti confezionati in cartoni di $250 \times 75 \times 330$ *mm*, vogliamo sapere quanti panetti al massimo possiamo mettere in ogni cartone.
Il volume del singolo panetto è 265200 mm^3. Il volume del cartone è invece 6187500 *mm*^{3}. Dividiamo i due volumi, ottenendo circa 23. Non è detto però che riusciamo effettivamente a metterli, perché ovviamente non possiamo né tagliare, né deformare i panetti. Supponiamo di mettere i panetti appoggiandoli tutti sulla stessa base, se questa è la base maggiore ciascuno occupa una superficie di 120×65 *mm*^{2} = 7800 *mm*^{2}. Se li appoggiamo sulla base maggiore del cartone, che occupa una superficie di 250×330 *mm*^{2} = 82500 *mm*^{2}, possiamo mettere 82500/7800 ≈ 10 panetti. Poiché ognuno ha un'altezza di 34 *mm*, possiamo disporre un totale di 75/34 ≈ 2 strati, quindi massimo 20 panetti, lasciando uno spazio di $(6187500 - 20 \times 265200)$ *mm*^{3} = 883500 *mm*^{3}.

Livello 1

1. Con riferimento all'esercizio svolto, calcolare quanti panetti possiamo mettere nella scatola se poggiamo i panetti sulla loro faccia minore e ogni strato lo poggiamo sempre sulla base maggiore della scatola. Quanto spazio vuoto rimane? [0, l'altezza del panetto è maggiore di quella della scatola]
2. Con riferimento all'esercizio svolto, calcolare quanti panetti possiamo mettere nella scatola se poggiamo i panetti sulla loro faccia minore e ogni strato lo poggiamo sulla base minore della scatola. Quanto spazio vuoto rimane? [16; 1944300 *mm*^{3}]
3. In un ambiente di lavoro le normative vigenti dispongono che ogni lavoratore debba avere un minimo di 12 m^3 di aria a disposizione, elevabili a 15 m^3 se le condizioni di ventilazione non sono ottimali. Quanti studenti possono essere messi, unitamente all'insegnante, in un'aula di dimensioni $6{,}50 \times 7{,}20 \times 3{,}10$ m^3, nelle due configurazioni predette? [da 8 a 11]
4. Il problema precedente, a parità di volume disponibile, ha sempre la stessa soluzione? Giustificare la risposta. [No, dipende anche dalla superficie a disposizione, nonché dalla forma della stanza]

5. Tenuto conto di quanto stabilito nell'esercizio precedente, quanto deve essere larga al minimo un'aula magna alta 8,45 *m* e larga 23,40 *m*, per potere contenere 250 persone, nell'ipotesi normativa minima? [≈ 15,18 *m*]
6. Numericamente il volume di un cubo uguaglia la superficie esterna. Determinare la misura dello spigolo. [6]
7. Per effettuare un calco di statuine alte 6 *cm* sono necessari 0,81 *dl* di gesso. Quanti litri di gesso sono necessari per creare 750 statuine simili alla precedente ma alte 2 *cm*? [22,5]
8. Sezioniamo una piramide con un piano parallelo alla base in modo da ottenere un tronco di piramide di altezza metà di quella della piramide. Se il volume della piramide è 1 m^3, quanto misura quello del tronco? [7/8 m^3]
9. La piramide di Cheope ha una base quadrata di lato circa 230,34 *m* e un'altezza di circa 138 *m*. Nell'antichità la sua altezza era invece di circa 146,6 *m*. Di quanto è diminuito in percentuale il volume racchiuso dall'attuale piramide rispetto all'antichità? [≈5,9%]
10. La Camera del Re, all'interno della piramide di Cheope, ha dimensioni di 10,47 *m* × 5,234 *m* e un soffitto piatto alto 5,974 *m*. In percentuale il suo volume rappresenta che parte della piramide? [≈ 0,013%]
11. Un parallelepipedo rettangolo ha dimensioni 5 × 5 × 8. Quadruplichiamo il suo volume raddoppiando lo spigolo della base quadrata. Di quanto aumenta la sua superficie? [≈ 248%]
12. Con riferimento al precedente quesito, se invece ci limitiamo a quadruplicare lo spigolo più lungo, di quanto aumenta la superficie? [≈ 329%]

Livello 2

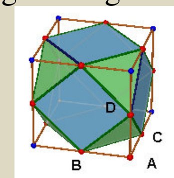
13. Calcolare il volume di un parallelepipedo rettangolo le cui facce hanno aree che misurano rispettivamente 12, 8 e 6. [24]
14. Un parallelepipedo rettangolo a base quadrata ha il terzo spigolo metà degli altri due. Se la superficie totale è 1296 m^2, calcolare il volume. [2916 m^3]
15. Sezioniamo una piramide con un piano parallelo alla base in modo da ottenere un tronco di piramide di volume metà di quello della piramide. Se l'altezza della piramide è 1 *m*, quanto misura quella del tronco? **Sugg.** Se l'altezza della piramide eliminata è *x* volte quella della piramide iniziale la sua area rispetto a quella della piramide è x^2 volte. $\left[\left(1-\sqrt[3]{2}/2\right)m\right]$
16. Il volume di un parallelepipedo rettangolo è 8 cm^3, la superficie è 32 cm^2. Se le tre dimensioni sono tali che, scritte in ordine crescente, il rapporto fra la seconda e la prima è uguale a quello fra la prima e la seconda, quanto misura la loro somma? [8]
17. Aumentiamo ciascuno spigolo di un cubo del 50%, qual è l'aumento percentuale del volume del cubo? [12,5%]
18. Congiungendo quattro degli otto vertici di un cubo si ottiene un tetraedro regolare, quanto misura il volume del cubo se il lato del tetraedro misura $2\cdot\sqrt{3}$? [64]
19. A partire da un foglio rettangolare 10 × 14 costruiamo una scatola aperta, tagliando da ogni angolo del foglio un quadrato di lato 1. Determinare il volume della scatola. [96]
20. Determinare il rapporto fra i volumi del cubo e dell'ottaedro regolare suo duale, i cui vertici sono i punti medi delle facce del cubo. [6]
21. Determinare il rapporto fra i volumi di un tetraedro regolare e del tetraedro in esso inscritto i cui vertici sono i centri delle facce. [27]
22. Determinare il rapporto fra i volumi di un ottaedro regolare e del cubo suo duale. [9/2]
23. Un parallelepipedo rettangolo ha facce di aree *x*, *y* e *z* unità quadrate. Calcolare la misura del volume. $\left[\sqrt{x\cdot y\cdot z}\right]$
24. Qual è il massimo numero di scatole di dimensioni 2 × 2 × 3 che possono essere messe dentro una scatola di dimensioni 3 × 4 × 5? [4]

Livello 3

25. La piramide di Micerino attualmente ha una base quadrata di lato 103,4 *m* e un'altezza di 62*m*. Se pensiamo di sezionare la piramide di Cheope (es. 9 per i dati) con un piano parallelo alla base in modo che togliendo tutta la parte al di sopra, quella rimanente abbia lo stesso volume racchiuso dalla piramide di Micerino, a che altezza dal suolo dovremmo porre il piano sezione? [≈ 76*m*]

Lavoriamo insieme

Abbiamo visto che il cuboottaedro si ottiene eliminando da ogni *angolo* di un cubo un tetraedro regolare in modo da far divenire ogni faccia quadrata a forma di esagono regolare. Se il cubo ha volume 6 unità



cubiche, quanto misura il volume del cuboottaedro?
In pratica abbiamo tagliato dal cubo 8 tetraedri uguali. Consideriamone uno di questi, per esempio ABCD in figura. In esso AD è altezza relativa alla base ABC che è un triangolo rettangolo di ipotenusa BC, quindi il volume del tetraedro ABCD è 1/3 · ½ · ℓ^2 · ℓ = 1/6 · ℓ^3, dove abbiamo indicato con ℓ la misura comune agli spigoli AB, AC e AD. Ma ℓ è metà dello spigolo del cubo, che è $\sqrt[3]{6}$. Quindi abbiamo eliminato un volume di $8 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{\sqrt[3]{6}}{2}\right)^3 = 8 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{8} = 1$. Infine il volume del cubottaedro è 5 unità cubiche.

Livello 2

Determinare una formula per il calcolo del volume dei seguenti poliedri in funzione del loro spigolo ℓ

26. Cubottaedro $\left[5 \cdot \sqrt{2}/3 \cdot \ell^3\right]$ Tetraedro regolare $\left[\sqrt{2}/12 \cdot \ell^3\right]$ Tetraedro troncato $\left[23 \cdot \sqrt{2}/12 \cdot \ell^3\right]$
27. Cubo troncato $\left[\left(7 + \frac{14}{3} \cdot \sqrt{2}\right) \cdot \ell^3\right]$ Ottaedro regolare $\left[\sqrt{2}/3 \cdot \ell^3\right]$
28. Ottaedro troncato $\left[5 \cdot \sqrt{2}/3 \cdot \ell^3\right]$ Rombicubottaedro $\left[\left(4 + \frac{10}{3} \cdot \sqrt{2}\right) \cdot \ell^3\right]$
29. Ricordando che il cubo troncato si ottiene dividendo ogni spigolo di un cubo secondo i numeri $\left(1 - \sqrt{2}/2; \sqrt{2} - 1; 1 - \sqrt{2}/2\right)$, determinare una formula per il calcolo del volume di un cubo troncato in funzione dello spigolo del cubo. $\left[7 \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)/3 \cdot \ell^3\right]$
30. Determinare una formula per il calcolo volume del tetraedro troncato in funzione della misura dello spigolo dell'ottaedro ℓ. $\left[8 \cdot \sqrt{2}/27 \cdot \ell^3\right]$
31. Determinare una formula per il calcolo volume del tetraedro troncato in funzione della misura dello spigolo del tetraedro ℓ. $\left[23 \cdot \sqrt{2}/324 \cdot \ell^3\right]$
32. Una piramide ha per base un triangolo equilatero di lato che misura ℓ, se gli altri spigoli della piramide hanno misura *s*, determinarne il volume. $\left[\ell^2 \cdot \sqrt{3s^2 - \ell^2}/12\right]$
33. Tenuto conto del problema precedente stabilire la condizione che devono verificare le misure degli spigoli *s* se ℓ = 1. $\left[s > \sqrt{3}/3\right]$

Volume dei corpi rotondi

Quanto detto nel paragrafo precedente si può adesso applicare anche al calcolo dei volumi dei corpi rotondi.

Teorema 6

Il volume di un cilindro si ottiene moltiplicando l'area della base per l'altezza. In simboli $\pi r^2 \cdot h$.
Dimostrazione (pseudo)
Come già visto per i prismi, di cui il cilindro è l'analogo nei corpi rotondi, le sezioni con piani paralleli alla base sono tutte cerchi uguali. Essi sono infiniti, ma tali da costituire con i loro "spessori" l'altezza. Pertanto il volume è, come per il prisma, area di base per altezza.

Possiamo quindi enunciare anche i seguenti ovvi risultati.

Teorema 7

Il volume di un cono si ottiene moltiplicando l'area della base per un terzo dell'altezza. In simboli $1/3 \cdot \pi r^2 h$.

Dimostrazione

Basta porre sullo stesso piano un cono e una piramide di uguale altezza e con la base equivalente a quella del cerchio, quindi applichiamo il principio di Cavalieri.

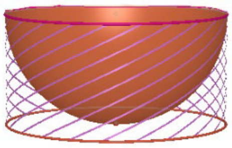
Esempio 4

Il confronto fra i risultati dei teoremi 7 e 8 dicono che, come già visto per prisma e piramide, possiamo suddividere un cilindro in 3 coni uguali.

Teorema 8

Il volume di un tronco di cono è $1/3 \cdot \pi (R^2 + r^2 + rR) \cdot h$, in cui r e R sono i raggi delle basi e h è l'altezza.

Dimostrazione Per esercizio

Per determinare il volume della sfera consideriamo prima quello di una particolare figura.
Nei "*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*", Galileo Galilei descrive la costruzione di un solido che chiama *scodella* considerando una semisfera di raggio r e il cilindro a essa circoscritto che perciò ha altezza pari al raggio della semisfera; la scodella è il solido ottenuto togliendo la semisfera dal cilindro, come mostrato in figura.  Vogliamo provare il seguente risultato.

Teorema 9

Il volume di una scodella di Galileo è lo stesso di un cono che ha la base equivalente a quella del cilindro e l'altezza isometrica al raggio della semisfera.

Dimostrazione

Per il principio di Cavalieri se poniamo scodella e cono con le basi sullo stesso piano, in modo che abbiamo anche altezze parallele e ovviamente isometriche, allora le sezioni con qualsiasi piano parallelo alle basi devono avere la stessa area. Considerando la figura seguente 

, il cerchio di centro O' deve essere equivalente alla corona circolare di centro O.

Infatti i cateti OB e VO' dei due triangoli rettangoli in figura sono ovviamente isometrici, diciamo z la loro misura. Quindi avremo $\overline{OC} = \sqrt{r^2 - z^2}$. Dato che r è anche il raggio di base del cilindro, la corona circolare ha area pari a $\pi r^2 - \pi\left(r^2 - z^2\right) = \pi z^2$, Questa è proprio la tesi, dato che il cono ha altezza uguale al proprio raggio, quindi anche il triangolo $VO'A$ è isoscele, cioè $\overline{O'A} = \overline{VO'} = z$.

Segue allora il risultato che cercavamo sulla sfera.

Corollario 2

Il volume di una sfera è $4/3 \cdot \pi r^3$.

Dimostrazione

Infatti il volume della scodella è dato dalla differenza fra il volume del cilindro, $\pi r^2 h = \pi r^3$, dato che abbiamo già osservato che l'altezza del cilindro è pari al raggio della semisfera, che a sua volta è isometrico a quello del cilindro. Pertanto abbiamo: $\pi r^3 - V_S = 1/3 \cdot \pi r^3 \Rightarrow V_S = 4/3 \cdot \pi r^3$

Abbastanza facilmente possiamo dimostrare i seguenti risultati sui volumi delle parti della sfera.

Teorema 10

Il volume di un segmento sferico a una base di altezza h, e raggio r è $1/3\cdot \pi\,(3r - h)\cdot h^2$.

Teorema 11

Il volume di un segmento sferico a due basi di altezza h e raggi r_1 e r_2 è $1/6\cdot \pi\,(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2)\cdot h$.

Teorema 12

Il volume di uno spicchio sferico di ampiezza $\alpha°$ è $\pi r^3\alpha°/270°$.

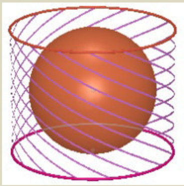
Esempio 5

Una semisfera è uno spicchio sferico di ampiezza 180°, quindi secondo la formula del Teorema 12 il suo volume è $\pi r^3 180°/270° = 2/3\cdot \pi r^3$, cioè quello che otterremmo dimezzando il volume della sfera.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Inscriviamo una sfera in un cilindro, vogliamo determinare il rapporto fra i volumi dei due solidi.

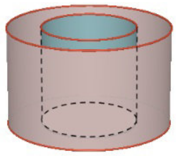


La figura ci suggerisce che l'altezza del cilindro è quanto il diametro della sfera, che è anche diametro della base del cilindro. Cioè il cilindro è equilatero. Quindi abbiamo:

$$V_C = \pi\cdot r^2\cdot 2r = 2\pi\cdot r^3; V_S = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3 \Rightarrow \frac{V_C}{V_S} = \frac{\cancel{2}\pi\cdot r^3}{\frac{\cancel{4}^2}{3}\cdot\pi\cdot r^3} = \frac{3}{2}$$

Livello **1**

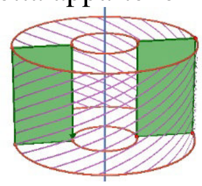
1. Determinare il rapporto fra il volume di una sfera e del cilindro in essa inscritto. $\left[\sqrt{3}\right]$
2. Determinare il rapporto fra il volume di una sfera e del cono in essa inscritto. [Non si può determinare, perché in una sfera si possono inscrivere infiniti coni]
3. Determinare il rapporto fra il volume di una sfera e del cono equilatero in essa inscritto. [32/9]
4. Determinare il rapporto fra il volume di un cono equilatero e della sfera in esso inscritta. [5/4]
5. Un contenitore cilindrico contenente olio combustibile è pieno per 2/5, sapendo che aggiungendo 6 litri sarà pieno per 5/8, determinare la capacità del contenitore. [80/3]
6. Un cono è inscritto in una semisfera, in modo che i due solidi abbiamo la base in comune e il vertice del cono sia un punto della semisfera, qual è il rapporto dei due volumi? [2]
7. Un cilindro ha altezza 3 e raggio di base 8. A partire da esso costruiamo altri due cilindri, uno di altezza $(3 + x)$ e raggio 8, l'altro di altezza 3 e raggio $(8 + x)$. Se i due cilindri hanno lo stesso volume, quanto vale x? [16/3]
8. Un cilindro ha altezza 2 e raggio di base r. A partire da esso costruiamo altri due cilindri, uno di altezza 8 e raggio r, l'altro di altezza 2 e raggio $(6 + r)$. I due cilindri hanno lo stesso volume, quant'è r?[6]
9. Un cono circolare retto ha la base che ha il raggio isometrico a quello di una data sfera, il cui volume è doppio di quello del cono. Determinare il rapporto fra l'altezza e il raggio di base del cono. [2]
10. Facciamo ruotare un triangolo rettangolo di cateti lunghi 3 e 4, di un giro completo rispetto a ciascuno dei cateti, quanto misura il rapporto dei volumi dei due coni così determinati? [¾]



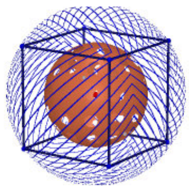
11. Un pozzo ha forma di cilindro di diametro 2 *m*. Per evitare infiltrazioni si costruisce tutto attorno al pozzo un rivestimento di muratura per un certo spessore. Se sappiamo che il volume della parte in muratura è uguale al volume del pezzo, quanto misura lo spessore? $\left[\left(\sqrt{2}-1\right)m\right]$
12. Una lattina standard è un cilindro di diametro 5,24 *cm*. Se può contenere 250 *ml*, quanto è alta, in centimetri? [≈11,6]
13. Con riferimento al precedente esercizio, senza mutare il diametro di base, quanto sarà alta la lattina se conterrà 330 *ml*? [≈15,3]
14. Una lattina *slim* invece ha un diametro di 5 *cm*, se ha la stessa altezza del precedente esercizio, quanto liquido potrà contenere? [≈ 300 *ml*]
15. In una scatola di scarpe di 140 *mm* × 280 *mm* × 93 *mm*, inseriamo sfere di polistirolo di diametro 3 *cm*. Quante sfere mettiamo al massimo e quanta aria rimane nella scatola? [108; ≈ 36,32 cm^3]

Livello 2

16. Facciamo ruotare un rettangolo di lati lunghi 3 e 4, di un giro completo attorno a una retta appartenen-



te allo stesso piano del rettangolo, parallela al lato più lungo e distante da esso 2. Quanto misura il volume della regione anulare così determinata? [84π]
17. Con riferimento al precedente esercizio, cambia qualcosa se la rotazione avviene attorno a una retta parallela al lato più corto, sempre distante 2 da esso? [Sì, il volume diventa 96π]
18. Dimostrare che se in un cilindro equilatero inscriviamo un cono e una sfera, il volume della sfera è dato dalla differenza fra il volume del cilindro e quello del cono.
19. In una stessa sfera inscriviamo e circoscriviamo un cilindro equilatero, quanto misura il rapporto dei loro volumi? $\left[2\cdot\sqrt{2}\right]$
20. In una stessa sfera inscriviamo e circoscriviamo un cono equilatero, quanto misura il rapporto dei loro volumi? [8]
21. Un cilindro è inscritto in una sfera. Il rapporto fra il raggio della sfera e l'altezza del cilindro è 3/2, determinare il rapporto fra i loro volumi. [18/5]
22. Una bolla di sapone si posa su un tavolo senza spezzarsi, ma formando una semisfera di uguale volume della bolla. Determinare il rapporto fra i raggi r e R dei due solidi. $\left[\sqrt[3]{2}\right]$
23. Per raddoppiare il volume di una lattina di aranciata aumentiamo il diametro del 20%, di quanto dobbiamo aumentarne l'altezza, in percentuale? [≈ 38,9%]
24. In una lattina di forma cilindrica vi sono 2 palle da tennis che hanno lo stesso diametro della lattina e, insieme, la stessa altezza della lattina. Quanto spazio all'interno resta libero? [1/3]
25. In un cubo inscriviamo e circoscriviamo una sfera. Determinare il rapporto fra i volumi delle due sfe-

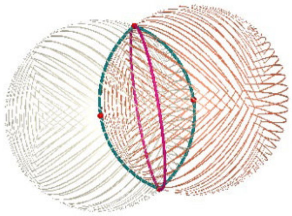


re. $\left[3\cdot\sqrt{3}\right]$

Livello 3

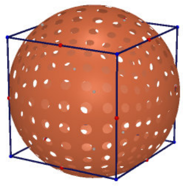
26. Con riferimento al problema 24, cosa accade se le palline sono n? [Lo spazio libero è in ogni caso 1/3]
27. Una lattina cilindrica è formata usando un pezzo di metallo quadrato e due dischi circolari di diametro 5,24 *cm*. Quanto liquido può contenere, in *ml*? [≈ 355]
28. In un quadrato di lato 1 *m*, fatto di un certo materiale, tracciamo un arco di centro uno dei vertici A e passante per altri due vertici consecutivi ad A. Tagliamo il settore circolare così determinato e con esso costruiamo un cono. Qual è il volume di tale solido? $\left[\sqrt{15}\pi/192\,m^3\right]$

29. Consideriamo la sfera passante per il centro di un'altra sfera uguale. Le due sfere hanno un volume



comune, quanto misura in funzione del raggio? $\left[5\pi/12 \cdot r^3\right]$

30. Il centro delle sfere inscritta e circoscritta a un cubo è anche centro della sfera che tocca tutti gli spigo-



li del cubo (mostrata in figura). Determinare il rapporto dei volumi delle due sfere inscritta e circoscritta con questa terza sfera. $\left[\frac{1}{2\cdot\sqrt{2}};\frac{3}{4}\cdot\sqrt{6}\right]$

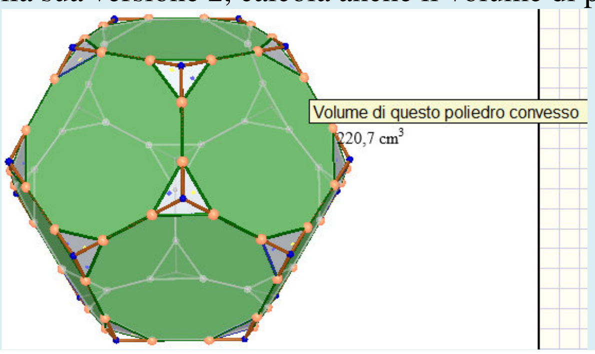
31. In due cubi cavi isometrici immettiamo delle sfere tutte isometriche fra loro in modo che non sia possibile inserirne altre. Nel primo ne immettiamo 27, nel secondo 64 più piccole delle precedenti. Se le sfere sono costituite dello stesso materiale, quale dei due cubi così riempiti ha al suo interno maggiore spazio vuoto? [I due cubi hanno uguali spazi vuoti]

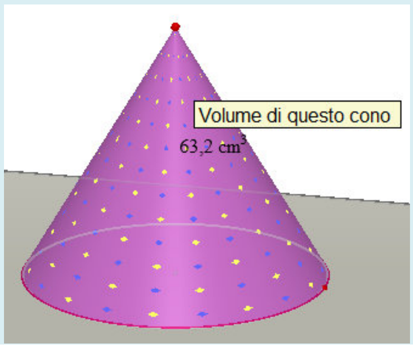
32. Una semicirconferenza di diametro 12 *cm* è piegata in modo da formare un cono, il cui vertice è il centro della semicirconferenza e gli estremi del diametro coincidano. Quanto misura il volume?

$\left[9\cdot\sqrt{3}\cdot\pi\, cm^3\right]$

L'angolo di Cabri3D

Cabri3D nella sua versione 2, calcola anche il volume di poliedri e solidi rotondi.





Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi

1. (Liceo scientifico suppletiva 1977/78) In un sistema di assi coordinati si considerino: la parabola di equazione $y = 2x - x^2$ che incontra l'asse delle ascisse nei punti O e C; la retta di equazione $y = k$ (con $0 < k < 1$) che incontra la parabola nei punti A e B. Si esprima, mediante il parametro k, il volume del solido generato dal trapezio $OABC$ in una rotazione completa attorno all'asse delle ascisse. $\left[V(k) = \frac{2}{3}\pi k^2 \cdot \left(1 + 2 \cdot \sqrt{1-k}\right)\right]$
2. (Liceo scientifico suppletiva 1983/84) Si considerino le parabole di equazioni $y^2 = ½\, x^2$, $y^2 = -x + a^2$. Nella regione finita di piano compresa fra le due curve e l'asse delle ascisse si inscriva il rettangolo con i lati paralleli agli assi coordinati, si determini il volume del cilindro ottenuto in una rotazione completa attorno all'asse delle ascisse del predetto rettangolo, in funzione della retta $y = h$. $[V(h) = \pi\,(-3h^4 + a^2h^2)]$
3. (Istituto magistrale 1990/91) Il quadrangolo $ABCD$ ha le diagonali AC e DB tra loro perpendicolari e tali che, detto E il loro punto d'incontro, risulta: $\overline{DE} = \overline{EB} = 2 \cdot \overline{CE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{EA} = 2$. Si dimostri che i triangoli DEC, DEA e DAC sono fra loro simili. Si calcoli il rapporto dei volumi dei solidi che si ottengono facendo ruotare di un giro completo il quadrangolo intorno a due suoi lati diseguali. [4/3]
4. (Istituto magistrale 1996/97) È assegnato il tetraedro regolare di vertici A, B, C, D e di spigolo lungo s. a) Calcolare il suo volume. $\left[s^3 \cdot \sqrt{2}/12\right]$ b) Indicato con E il punto dello spigolo AC che a partire da A lo divide internamente in parti direttamente proporzionali ai numeri 2 e 3, condurre per E il piano β parallelo ad α e, indicata con S'' la sezione di β con il tetraedro, calcolare il volume della piramide avente come vertice A e come base S''. $\left[s^3 \cdot \sqrt{2}/375\right]$
5. (Liceo scientifico PNI 1996/97) Si consideri in un piano α un rettangolo $ABCD$ i cui lati BC e AB misurano rispettivamente a e $2a$. Sia AEF con $E \in AB$ e $F \in CD$, un triangolo isoscele la cui base AE ha misura $2r$. Il candidato: a) detta C_1 la circonferenza di diametro AE e appartenente al piano γ passante per AB e perpendicolare ad α, e detti T_1 e T_2 i coni di base C_1 e vertici rispettivamente nei punti F e C, dimostri che le sezioni C'_1 e C'_2 di detti coni con il piano γ', passante per la retta se parallelo al piano γ, sono circonferenze; b) determini i volumi dei coni T_1 e T_2. $[V_1 = V_2 = 1/3\pi ar^2]$
6. (Istituto magistrale 1998) In una sala ben arredata fa bella mostra di sé un vaso il cui interno ha la forma di un cono circolare retto di apotema 30 cm e altezza 24 cm. Nel vaso è adagiata una sfera che tocca le pareti del cono ad una distanza di 10 cm dal vertice, si calcoli il raggio della sfera; si dica, data anche l'impenetrabilità della sfera, se nel vaso possono essere versati sei litri di acqua e, nel caso affermativo, l'altezza, approssimata ai decimi di millimetro, da questa raggiunta. [7,5 *cm;* sì; 22,9 *cm*]
7. (Istituto magistrale PNI 1998/99) Un gioiello è stato realizzato prevalentemente in oro (peso specifico = 19,32 g/m^3) e la sua forma geometrica è un tetraedro regolare di altezza $\sqrt{3}\,cm$. L'oro impiegato nella realizzazione del gioiello occupa il 75% del volume del tetraedro. Quale è stato il costo dell'oro se la sua quotazione al momento della realizzazione era di 8,35 euro per grammo? [€ 102,09]
8. (Liceo scientifico PNI 1998/99) In un piano α è assegnato il triangolo ABC, retto in B, i cui cateti AB e BC misurano rispettivamente 4 e 3. Si conduca per il punto A la perpendicolare al piano α e sia V un punto di questa per cui $\overline{VA} = \overline{AB}$. Il candidato a) dimostri, geometricamente o algebricamente, che, come tutte le altre facce del tetraedro $VABC$, anche la faccia VBC è un triangolo rettangolo, il cui angolo retto è $V\hat{B}C$; b) calcoli il volume e la superficie totale del tetraedro; $\left[8; 6 \cdot \left(4 + \sqrt{2}\right)\right]$ c) detto M il punto medio di VA e P un punto dello stesso segmento a distanza x da V, esprima in funzione di x il volume V del tetraedro $MPQR$, essendo Q ed R le rispettive intersezioni degli spigoli VB e VC con il piano β parallelo ad α e passante per P. $[V(x) = 1/8x^2 \cdot |x - 2|]$

9. (Istituto magistrale 2000/2001) La misura, in *decimetri*, del raggio di una sfera è data dalla soluzione dell'equazione: $(x-1)^3 + x^2 = x \cdot (x-1)^2 + 4$. Nella sfera sono inscritti due coni *circolari retti* aventi la base comune e le superfici laterali nel rapporto ¾. Il candidato calcoli: a) il rapporto tra i volumi dei due coni; [9/16] b) la misura del raggio della base comune dei coni; [2,4 *dm*] c) il peso, approssimato ai *grammi*, del solido costituito dai due coni, supposto che sia realizzato con legno di noce di peso specifico 0,82. [24,7]
10. (Liceo scientifico 2000/2001) Si consideri il cubo di spigoli AA', BB', CC', DD', in cui due facce opposte sono i quadrati $ABCD$ e $A'B'C'D'$. Sia E il punto medio dello spigolo AB. I piani $ACC'A'$ e $D'DE$ dividono il cubo in quattro parti. Dimostrare che la parte più estesa è il quintuplo di quella meno estesa.
11. (Liceo scientifico 2001/2002) Due tetraedri regolari hanno rispettivamente aree totali A' e A'' e volumi V' e V''. Si sa che $A'/A'' = 2$. Calcolare il valore del rapporto V'/V''. $\left[\sqrt[3]{2}\right]$
12. (Liceo scientifico 2001/2002) Il rapporto fra la base maggiore e la base minore di un trapezio isoscele è 4. Stabilire, fornendone ampia spiegazione, se si può determinare il valore del rapporto tra i volumi dei solidi ottenuti facendo ruotare il trapezio di un giro completo dapprima intorno alla base maggiore e poi intorno alla base minore o se i dati a disposizione sono insufficienti. [2/3]
13. (Liceo scientifico 2002/2003) Si consideri un tetraedro regolare T di vertici A, B, C, D. a) Indicati rispettivamente con V ed S il volume e l'area totale di T e con r il raggio della sfera inscritta in T, trovare una relazione che leghi V, S ed r. $[V = r/3 \cdot S]$ b) Considerato il tetraedro regolare T' avente per vertici i centri delle facce di T, calcolare il rapporto fra le lunghezze degli spigoli di T e T' e il rapporto fra i volumi di T e T'. [27] c) Condotto il piano α, contenente la retta AB e perpendicolare alla retta CD nel punto E, e posto che uno spigolo di T sia lungo s, calcolare la distanza di E dalla retta AB. $\left[s/\sqrt{2}\right]$ d) Considerata nel piano α la parabola p avente l'asse perpendicolare alla retta AB e passante per i punti A, B ed E, riferire questo piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali e trovare l'equazione di p. $\left[p: y = -\frac{2\cdot\sqrt{2}}{s}\cdot x^2 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right]$
14. (Liceo scientifico 2004/2005) I centri delle facce di un cubo sono i vertici di un ottaedro. È un ottaedro regolare? Quale è il rapporto tra i volumi dei due solidi? [Sì; 6]
15. (Liceo scientifico 2005/2006) La capacità di un serbatoio è pari a quella del cubo inscritto in una sfera di un metro di diametro. Quanti sono, approssimativamente, i litri di liquido che può contenere il serbatoio? [≈ 192,4]
16. (Liceo scientifico 2007/2008) Si consideri la seguente proposizione: "*Se due solidi hanno uguale volume, allora, tagliati da un fascio di piani paralleli, intercettano su di essi sezioni di uguale area*". Si dica se essa è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta. [No]
17. (Liceo scientifico 2007/2008) Il triangolo rettangolo ABC ha l'ipotenusa $AB = a$ e l'angolo $C\hat{A}B = \pi/3$ ed è la base di un solido W. Si calcoli il volume di W sapendo che le sue sezioni, ottenute tagliandolo con piani perpendicolari ad AB, sono tutti quadrati. $[a^3/16]$
18. (Liceo scientifico 2012/2013) Di un tronco di piramide retta a base quadrata si conoscono l'altezza h e i lati a e b delle due basi. Si esprima il volume V del tronco in funzione di a, b e h, illustrando il ragionamento seguito. $[1/3 \cdot (a^2 + ab + b^2) \cdot h]$

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi.

1. Dimostrare che in un tetraedro trirettangolo (che ha tre facce che sono triangoli rettangoli), i cui spigoli della faccia che non è un triangolo rettangolo, misurano a, b e c, il volume è $\sqrt{\left(S^2-a^2\right)\cdot\left(S^2-b^2\right)\cdot\left(S^2-c^2\right)}/6$, in cui S^2 è la somma dei quadrati degli altri tre spigoli.
2. Dimostrare che il raggio della sfera inscritta in un tetraedro è il rapporto fra il triplo del volume e la superficie.

3. Dimostrare che unendo il baricentro di un tetraedro ai vertici dello stesso si ottengono 4 tetraedri di uguale volume.
4. Dimostrare che il raggio R della sfera circoscritta a un tetraedro equifacciale di spigoli ℓ_i, $i = 1, \dots, 3$ e la cui faccia generica ha area S misura ¼ $\sqrt{9 \cdot V^2 + \ell_1^2 \cdot \ell_2^2 \cdot \ell_3^2}\,/S$.
5. Dimostrare che il raggio della sfera inscritta in un tetraedro è uguale al rapporto fra il triplo del volume e la superficie del tetraedro.

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

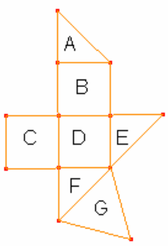
Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.

AHSME = Annual High School Mathematics Examination
ARML = American Regions Math League
HSMC = A&M University High School Mathematics Contest
K = Kangarou
NC = State Matematical Finals of North Carolina
RICE = Rice University Mathematics Tournament
SC = South Carolina Mathematical Contest

Lavoriamo insieme

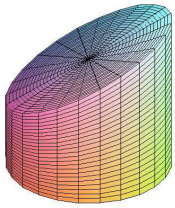
Il seguente quesito è stato assegnato ai giochi matematici organizzati dall'Università della Nord Carolina nel 2007.
Un cubo è inscritto in una sfera, cioè tutti i suoi vertici sono punti della sfera. Determinare il rapporto fra il volume della sfera e il volume del cubo.
È facile capire che il diametro della sfera non è altri che la diagonale del cubo. Poiché tale diagonale, in termini dello spigolo è $\ell \cdot \sqrt{3}$, abbiamo $2r = \ell \cdot \sqrt{3} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \ell$. Quindi il rapporto cercato è

$$\frac{\frac{4}{3} \cdot \pi r^3}{\ell^3} = \frac{\frac{4}{3} \cdot \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \cdot \ell^3}{\ell^3} = \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}} \cdot \pi \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi$$

1. (AHSME 1951) Il raggio di una scatola cilindrica è 8 pollici e la sua altezza 3 pollici. Di quanti pollici dobbiamo aumentare il raggio e l'altezza affinché non cambi il volume? [16/3]
2. (AHSME 1985) Il volume di un certo solido rettangolare è 8 cm^3, la sua superficie totale è 32 cm^2, e le tre dimensioni sono in progressione geometrica (cioè sono del tipo a, ab, ab^2, con $b > 0$ e diverso da 1). Quanto misura la somme delle lunghezze di tutti gli spigoli in cm? [32]
3. (AHSME 1994) Incolliamo fra loro tre cubi di volumi 1, 8 e 27. In tal modo possono ottenersi diversi solidi. Quanto vale la minima superficie ottenibile? [72]
4. (AHSME 1996) Dato un parallelepipedo rettangolo di lati lunghi 4, 4 e 3. A, B, e C sono adiacenti al vertice D. quanto vale la distanza perpendicolare di D dal piano determinato da A, B, e C? $\left[12/\sqrt{34}\right]$
5. (AHSME 1997) In figura 

, i poligoni A, E, ed F sono triangoli rettangoli isosceli; B, C, e D sono quadrati di lato 1; G è un triangolo equilatero. La figura può essere usata per formare un poliedro le cui facce sono i poligoni. Determinare la misura del volume di tale poliedro. [5/6]
6. (AHSME 1998) Un cono retto di volume V, un cilindro retto di volume M, e una sfera di volume K hanno tutti lo stesso raggio, inoltre le altezze del cono e del cilindro sono uguali fra loro e al diametro della sfera. Quale delle seguenti scritte è vera? [A]
A) V −M + K = 0 B) V + M = K C) 2V = M + K D) $V^2 - M^2 + K^2 = 0$ E) 2V + 2M = 3K
7. (NC 2004) Una conduttura lunga 20 metri e di diametro 1 cm, serve a portare l'acqua calda, con un flusso di 2,8 litri al minuto. In quanto tempo, all'incirca l'acqua calda prodotta dalla caldaia riempie tutta la conduttura? [≈ 33,7 secondi]

8. (NC 2005) Una tanica cilindrica di altezza 22 pollici e diametro 18 pollici è posta sul terreno appoggiata sulla sua altezza ed è riempita d'acqua fino a una profondità di 13,5 pollici. Sapendo che un gallone è circa 231 pollici cubici, trovare approssimativamente quanti galloni d'acqua vi sono nella tanica. [19,5]
9. (ARLM 2008) Un cubo ha area laterale A e volume 8A, determinare la lunghezza del suo spigolo. [48]
10. (HSMC 2006) Un'industria vende burro d'arachidi in contenitori cilindrici. Studi di mercato suggeriscono di usare contenitori più larghi per aumentare le vendite. Se il diametro dei contenitori è aumentato del 25% senza alterare il volume, di quale percentuale dobbiamo diminuire l'altezza? [36%]
11. (K2007) Un cono e un cilindro circolari, entrambi di altezza h e con le basi di raggio r, sono in posizione tale che il volume della parte del cono contenuta nel cilindro è esattamente metà del volume del cono. Che frazione del volume del cilindro fornisce il volume della parte del cilindro contenuta nel cono? [1/6]
12. (NC2007) Un parallelepipedo rettangolo è costruito incollando dei cubetti di spigolo 1, ottenendo una superficie di 52 unità quadrate e uno spigolo di 2 unità. Quale fra i seguenti valori può misurare il volume del parallelepipedo? A) 18 B) 22 C) 24 D) 26 E) 32 [C]



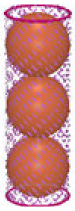
13. (SC 2008) Un cilindro è sezionato da un piano formando il solido mostrato in figura.
La base inferiore del solido è un cerchio di raggio 3. Quella superiore è un'ellisse. Il punto più in alto dell'ellisse è 6 unità più in alto della base. Il punto più basso dell'ellisse è 2 unità sopra la base. Quanto misura il volume del solido, in unità cubiche? [36π]

Questions in English

Working together

This problem was assigned at HSMC in 2006. Given a cube, determine the ratio of the volume the cube to the volume of the octahedron whose vertices are the centers of each face of the cube.
Let s be the length of an edge of the cube. Then the octahedron is composed of two pyramids with height s/2 and square base with side length of $\frac{s}{\sqrt{2}}$. Hence the volume of the octahedron is $2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\frac{s}{2}=\frac{s^3}{6}$, and so the requested ratio is 6.

14. (AHSME 1950) The number of circular pipes with an inside diameter of 1 inch which will carry the same amount of water as a pipe with an inside diameter of 6 inches is? [36]
15. (HSMC 1999) An open rectangular box is to be constructed with single ply cardboard on the sides and double ply on the bottom. Single ply cardboard costs 10 cents per square foot and double ply runs 15 cents per square foot. What is the cost of a box with square base and height twice its length if the volume is to be 54 ft^3. [$8,55]
16. (HSMC 1999) A cube of volume 216 cubic inches is inscribed in a sphere. What is the surface area of the sphere? [$108\pi\ in^2$]
17. (NC 2001) If the volume of a tetrahedron is doubled without changing its shape, by what factor is the surface area increased? $\left[\sqrt[3]{4}\right]$
18. (NC 2002) If the height of a cylindrical can is increased by 28%, by approximately what percentage should the diameter be increased in order to double the volume of the can? [25%]
19. (HSMC 2001) A box with an open top is to be constructed from a rectangular piece of cardboard with dimensions 12 by 20 by cutting out equal squares of side x at each corner and then folding up the sides. Express the volume as a function of x. [$4x\cdot(6-x)\cdot(10-x)$]
20. (HSMC 2003) A box with an open top is to be constructed from a square piece of cardboard with side 12 inches by cutting out equal squares of side x at each corner and then folding up the sides. Express the volume of the box as a function of x. [$(12-2x)^2\cdot x$]

21. (HSMC 2003) Two cylindrical cans have the same volume. The height of one can is triple the height of the other. If the radius of the narrower can is 12 units, how many units are in the length of the radius of the wider can? Express your answer in simplest radical form. $\left[12\cdot\sqrt{3}\right]$
22. (NC 2004) A conical paper cup with height 16 cm and a 12 cm diameter for its top is filled to the top with water. If a fifth of the liquid is drunk by what percentage did the water level drop? (Round off[1] error to the nearest 0.1%.) [≈ 7.2%]
23. (HSMC 2004)  Three tennis balls are stacked in a cylinder that touches the stack on all sides, on the top and on the bottom. Find the ratio of the volume of the balls to the volume inside the can. [2/3]
24. (HSMC 2008) A cylindrical tank with radius 4 feet and length 9 feet is lying on its side. The tank is filled with water to a depth of 2 feet. What is the volume of the water in cubic feet? $\left[48-36\cdot\sqrt{3}\right]$
25. (Rice 2010) A sphere of radius 1 is internally tangent to all four faces of a regular tetrahedron. Find the tetrahedron's volume. $\left[8\cdot\sqrt{3}\right]$

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Accademia militare) Un prisma retto regolare a base esagonale è equivalente a un prisma retto regolare a base pentagonale avente la stessa altezza. Si può concludere che lo spigolo di base del primo prisma, rispetto a quello del secondo, è: A) non si può stabilire, perché i dati sono insufficienti B) maggiore C) uguale D) minore
2. (Accademia militare) Un recipiente ha la forma di un parallelepipedo rettangolo e le sue misure interne sono rispettivamente di metri 0,3; 0,4; 1,2. Quanti litri d'acqua può contenere il recipiente?
   A) 144 B) 1,44 C) 14,4 D) 0,144
3. (Accademia Navale) Calcolare il rapporto tra i volumi di un cubo inscritto e di uno circoscritto a una stessa sfera.
4. (Scuola Superiore di Catania) Un contenitore a forma cilindrica ha una base circolare di raggio 2. all'interno vi è acqua fino a un'altezza *h*. all'interno del contenitore viene poggiato un cono d'acciaio con base circolare di raggio 1 e altezza *L*. Calcolare sotto quali condizioni su *L* e *h* il cono risulta completamente immerso dal liquido.
5. (Scuola Superiore di Catania) Calcolare il volume della porzione di sfera di raggio *r* delimitata da due piani paralleli, uno dei quali passante per il centro e distanti *r*/2 tra loro.
6. (Medicina 1997) Un cono e un cilindro circolari retti hanno uguale altezza e il raggio di base del cono uguale al diametro del cilindro. Detto V il volume del cono e W il volume del cilindro, il rapporto V/W è: A) = 4/3 B) = 1 C) = 3/4 D) = 2 E) dipendente dal raggio
7. (Odontoiatria 1997) Dato un cilindro retto a base circolare di raggio R e altezza h = 2R, qual e' il rapporto fra il suo volume e quello della sfera massima contenibile?
   A) 3/2 B) 4/3 C) $6/\pi$ D) $\pi/2$ E) 3π
8. (Odontoiatria 1997) Dato un cubo di volume *Vc* ed una sfera di volume *Vs* (diametro sfera = lato del cubo), calcolare il rapporto (*Vc* – *Vs*)/*Vc*: A) $1-\frac{\pi}{6}$ B) $1-\frac{\pi}{2}$ C) $\frac{\pi}{6}$ D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{2}$
9. (Odontoiatria 1998) Un cono circolare retto ha una base di raggio *R* e un'altezza di uguale valore *R*. Una sfera ha come raggio ancora il valore *R*. Quale è il rapporto tra il volume del cono e quello della sfera? A) 100 B) 1/250 C) 20 D) 0,25 E) 0,0005
10. (Odontoiatria 1998) Se il volume di un cubo è pari a $10^{-9}m^3$ quanto vale in metri il lato del cubo?
    A) $10^{-27}m$ B) $10^{-18}m$ C) $10^{-9}m$ D) $10^{-6}m$ E) $10^{-3}m$

[1] Arrotonda

11. (Veterinaria 1999) Due coni $C1$ e $C2$ circolari retti hanno uguale base di raggio R. L'altezza $H1$ del cono C1 è uguale alla metà dell'altezza $H2$ del cono $C2$. In che rapporto stanno i volumi $V1$ e $V2$ dei due coni? A) ½ B) 1/3 C) ¼ D) 1/9 E) 1/π
12. (Ingegneria 1999) Un cono circolare retto ha raggio di base r e altezza h. Se si raddoppia il raggio di base e si dimezza l'altezza, il volume del cono
 A) aumenta di πr^2 B) diviene il doppio C) diviene la metà D) non cambia E) diviene il quadruplo
13. (Ingegneria 2000) Una sfera di raggio 2 *cm* e un cilindro circolare retto di raggio di base 2 *cm* hanno lo stesso volume. Allora l'altezza del cilindro è di A) 4/3 *cm* B) 8/3 *cm* C) 2/3 *cm* D) 4 *cm* E) 6 *cm*
14. (Ingegneria 2000) Un triangolo rettangolo, avente cateti lunghi 1 *cm* e 2 *cm*, viene fatto ruotare di un giro completo una vola intorno al cateto minore, generando un cono C_1, e una volta intorno al cateto maggiore, generando un altro cono C_2. Quale delle seguenti affermazioni è esatta?
 A) il volume di C_1 è il quadruplo del volume di C_2 B) il volume di C_1 è il doppio del volume di C_2
 C) il volume di C_1 è uguale al volume di C_2 D) il volume di C_1 è la metà del volume di C_2
 E) il volume di C_1 è un quarto del volume di C_2
15. (Veterinaria 2000) Un cilindro retto ha base di raggio r e altezza lunga $2r$. una sfera ha raggio r, possiamo affermare che: A) il volume della sfera è maggiore del volume del cilindro B) il volume della sfera è minore del volume del cilindro C) il rapporto tra il volume della sfera è quello del cilindro è $4/3\pi$ D) il volume della sfera è metà del volume del cilindro E) il prodotto tra i due volumi è $4/3\pi$
16. (Ingegneria 2002) Un cocomero di forma sferica viene tagliato in 16 fette tutte uguali tra loro. Se il diametro del cocomero è di 40 cm, il volume di ciascuna fetta è di
 A) $40\pi/16\ cm^3$ B) $40^3\ \pi/16\ cm^3$ C) $\pi^3/16\ cm^3$ D) $2000\pi/3\ cm^3$ E) $\pi/16\ cm^3$
17. (Facoltà scientifiche, Roma La Sapienza) Nel piano cartesiano è dato un triangolo di vertici (1; 0), (0; 3), (3; 0). Qual `e il volume del solido che si ottiene facendo ruotare il triangolo intorno all'asse y?
 A) 8π B) 12 π C) 16 π D) 24 π
18. (Facoltà scientifiche, Roma La Sapienza 2009) Sia dato un cubo avente volume uguale a 8. Allora la diagonale di una faccia del cubo ha lunghezza uguale a:
 A) $\sqrt{2}$ B) $2\cdot\sqrt{2}$ C) $4\cdot\sqrt{2}$ D) $8\cdot\sqrt{2}$
19. (Ingegneria 2009) Date due sfere concentriche di raggio 1 e $r < 1$, che valore deve assumere r affinché il volume della parte esterna alla sfera minore sia la metà del volume della sfera maggiore?
 A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ C) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
20. (Facoltà scientifiche CISIA 2010) Dato un cono di altezza h, volume V e vertice P, si consideri un secondo cono con vertice P, che si ottiene sezionando il primo cono con un piano parallelo alla base a distanza h/3 dal punto P. Il secondo cono ha volume
 A) $V/9$ B) $V/12$ C) $V/24$ D) $V/27$ E) $V/18$

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_2_1.htm

Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1	**2**	**3**	**4**
D	A	$\sqrt{3}/9$	$L\leq 12/11h$
5	**6**	**7**	**8**
$2\pi r^3/9$	A	A	A
9	**10**	**11**	**12**
D	E	A	B
13	**14**	**15**	**16**
B	D	B	D
17	**18**	**19**	**20**
A	B	C	D

6. Geometria dello spazio ambiente

6.5 Geometria analitica in 3D

Prerequisiti

- Concetto di funzione.
- Concetto di luogo geometrico.
- Concetto di equazione e sua risoluzione.
- Geometria analitica dei punti.
- Geometria analitica delle coniche.
- Matrici e determinanti.

Obiettivi

- Rappresentare punti, rette e piani nello spazio.
- Comprendere che alcuni enti piani possono generalizzarsi facilmente nello spazio.
- Risolvere semplici questioni relative a rette e piani nello spazio cartesiano.
- Riconoscere le quadriche canoniche.

Contenuti

- Geometria analitica degli spazi a più di 2 dimensioni
- Piani e rette nello spazio cartesiano

Quelli che vogliono sapere di più …
- Le quadriche canoniche

Parole Chiave

Cilindro – Cono – Ellissoide – Paraboloide – Sfera – Quadriche

Geometria analitica degli spazi a più di 2 dimensioni

Il problema

Vogliamo rappresentare su un foglio di carta o su un monitor, una scatola a forma di cubo o di parallelepipedo. Come possiamo fare?

In questa Unità abbiamo parlato finora di riferimenti unidimensionali (sulla retta) e soprattutto bidimensionali (sul piano). Il mondo in cui viviamo ha però almeno 3 dimensioni: oltre le dimensioni comunemente chiamate *lunghezza* e *larghezza* vi è infatti la cosiddetta *profondità*.
Sembrerebbe quindi più naturale e anche più semplice parlare di spazi a tre dimensioni. Da un punto di vista geometrico però, ciò non è né semplice, né naturale. Infatti uno dei problemi più grossi con i quali ci scontriamo è quello della cosiddetta *visualizzazione*: quasi tutti i supporti più comuni che utilizziamo per rappresentare oggetti spaziali sono bidimensionali (la lavagna, il foglio di quaderno, il monitor, ...), o comunque hanno una *profondità* irrisoria.
L'enorme difficoltà nella rappresentazione di paesaggi o di persone, proprio per la mancanza di *profondità* è testimoniata anche dalle arti pittoriche. Persino i quadri di sommi artisti come Giotto o Cimabue possono apparirci sotto certi punti di vista quasi *ridicoli* nelle loro rappresentazioni *sproporzionate*. Solo l'applicazione delle matematiche all'arte pittorica, a partire da Leon Battista Alberti, Piero delle Francesca e altri, ha portato alla scoperta della *prospettiva*, cioè a una rappresentazione pittorica che, pur rimanendo bidimensionale, *simulava* meglio gli spazi tridimensionali che voleva descrivere.
Analoghi problemi si presentano anche per la geometria analitica, almeno quando cerchiamo di visualizzare gli oggetti (punti, segmenti, rette poliedri, ...); vengono invece del tutto superati quando ci limitiamo ad associare ai punti dei numeri che ne rappresentano la *posizione* e operiamo poi su di essi con le regole dell'algebra. In questo modo, anzi, arriviamo quasi all'assurdo di operare con tecniche matematiche su oggetti che non solo non riusciamo a visualizzare ma nemmeno a *immaginare*.

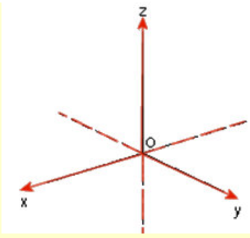
Cominciamo a impostare il problema per gli spazi a 3 dimensioni.

Definizione 1

L''insieme $\{O, x, y, z, u\}$, formato da tre rette x, y e z a due a due ortogonali fra loro e incidenti nel punto O e dalla misura u di un segmento, si chiama **sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico nello spazio**.

Si capisce il perché di una retta in più, essa rappresenta né più e né meno che il riferimento necessario per la terza dimensione.

Esempio 1



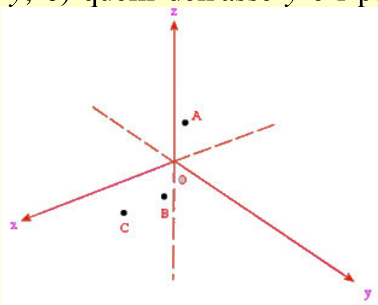
In figura vediamo un esempio di spazio cartesiano ortogonale.
Notiamo subito che le difficoltà a cui abbiamo accennato si sono mostrate reali, e il disegno (effettuato in parte con il software Derive) risente del fatto che è solo una simulazione dell'ambiente spaziale. Per cercare di migliorare la *sensazione spaziale* abbiamo tratteggiato i semiassi negativi.

Non vi sono invece difficoltà nel definire che cosa intendiamo per punto dello spazio cartesiano.

Definizione 2

Diciamo **punto dello spazio cartesiano ortogonale** una terna ordinata di numeri reali, $(x; y; z)$ che rappresentano le coordinate delle proiezioni del dato punto sui tre assi coordinati.

Esempio 2

Per quanto affermato nella definizione precedente i punti (x; 0; 0) sono tutti e soli quelli che appartengono all'asse x, i punti (0; y; 0) quelli dell'asse y e i punti (0; 0; z) quelli dell'asse z. L'origine naturalmente ha coordinate (0; 0; 0). 

Nella figura precedente abbiamo rappresentato (sempre con Derive) i punti $A \equiv (1; 2; 3)$, $B \equiv (-1; -2; -3)$ e $C \equiv (1; -2; -3)$:, notiamo che è facile individuarne la posizione, indipendentemente dal fatto che l'unità di misura venga o meno esplicitata.

Dato che si rivela particolarmente efficace la trattazione algebrica, sfruttiamola. Così enunciamo il seguente risultato, generalizzazione dell'analogo teorema del piano.

Teorema 1

Nello spazio cartesiano ortogonale il segmento di estremi $A \equiv (x_A; y_A; z_A)$, $B \equiv (x_B; y_B; z_B)$, misura, nell'unità di misura prescelta, $\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$.

Esempio 3

Vogliamo misurare il segmento di estremi $A \equiv (1; -2; 4)$ e $B \equiv (0; -1; 2)$. Applicando la formula stabilita dal Teorema 1; abbiamo: $\overline{AB} = \sqrt{(1-0)^2 + (-2-(-1))^2 + (4-2)^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$.

Allo stesso modo possiamo enunciare i seguenti teoremi, generalizzazioni dei corrispondenti teoremi validi nel piano cartesiano.

Teorema 2

Il punto che nello spazio cartesiano ortogonale divide il segmento di estremi $A \equiv (x_A; y_A; z_A)$, $B \equiv (x_B; y_B; z_B)$ in modo che si abbia $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \dfrac{m}{n}$, è $\left(\dfrac{(n-m)\cdot x_A + m\cdot x_B}{n}, \dfrac{(n-m)\cdot y_A + m\cdot y_B}{n}, \dfrac{(n-m)\cdot z_A + m\cdot z_B}{n}\right)$.

Corollario 1

Il punto medio del segmento di estremi $A \equiv (x_A; y_A; z_A)$ e $B \equiv (x_B; y_B; z_B)$ è: $M \equiv \left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}; \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$

Corollario 2

Il baricentro di un triangolo di vertici $A \equiv (x_A; y_A; z_A)$, $B \equiv (x_B; y_B; z_B)$, $C \equiv (x_C; y_C; z_C)$, è

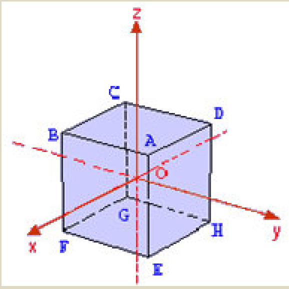
$$G \equiv \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right).$$

Concludiamo osservando che la potenza dell'algebra travalica qualsiasi problema di natura geometrica, infatti possiamo benissimo parlare di un punto in uno spazio a 2000 dimensioni, la cui natura ci è del tutto ignota, semplicemente come una 2000–upla ordinata di numeri reali.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo rappresentare, in uno spazio cartesiano ortogonale, i vertici di un cubo di lato 2.
Un modo per risolvere la questione consiste nello sfruttare le proprietà di simmetria del solido. In particolare consideriamo l'origine degli assi come centro di simmetria del cubo. Così gli otto vertici del cubo avranno coordinate il cui valore assoluto è 1. Saranno perciò: $A \equiv (1; 1; 1)$, $B \equiv (1; -1; 1)$, $C \equiv (-1; -1; 1)$, $D \equiv (-1; 1; 1)$, $E \equiv (1; 1; -1)$, $F \equiv (1; -1; -1)$, $G \equiv (-1; -1; -1)$, $H \equiv (-1; 1; -1)$.



Calcoliamo adesso la misura di una diagonale, per esempio $\overline{AG} = \sqrt{(1+1)^2 + (1+1)^2 + (1+1)^2} = 2 \cdot \sqrt{3}$

Abbiamo verificato che la diagonale di un cubo si ottiene moltiplicando la misura del lato per $\sqrt{3}$.

Livello 2

1. Determinare una formula che calcoli la distanza di un punto $P \equiv (x_P; y_P; z_P)$ dall'origine degli assi. $\left[\sqrt{x_P^2 + y_P^2 + z_P^2}\right]$
2. Individuare la caratteristica di tutti i punti appartenenti ai piani formati dalle rette
   x e y [$(x; y; 0)$] x e z [$(x; 0; z)$] y e z [$(0; y; z)$]
3. Determinare una formula che calcoli la distanza di due punti entrambi appartenenti al piano
   xy $\left[\sqrt{(x_p - x_Q)^2 + (y_p - y_Q)^2}\right]$ xz $\left[\sqrt{(x_p - x_Q)^2 + (z_p - z_Q)^2}\right]$ yz $\left[\sqrt{(y_p - y_Q)^2 + (z_p - z_Q)^2}\right]$
4. Calcolare la misura dei seguenti segmenti, di cui forniamo le coordinate degli estremi.
   (1; 2; –4), (3; –1; 0) $\left[\sqrt{29}\right]$ (3; 1; 0), (–1; –2; –3) $\left[\sqrt{34}\right]$ (½; 2; –1/3), (–½; 0; –1/3) $\left[\sqrt{5}\right]$
   (–3/2; ¼; –2/3), (¼; 3/2; –2/3) $\left[\sqrt{74}/4\right]$ $\left(\sqrt{2}; -1; \sqrt{3}\right), \left(-2\cdot\sqrt{2}; \sqrt{3}; 1\right)$ $\left[\sqrt{26}\right]$
5. Determinare le coordinate dei punti medi dei segmenti i cui estremi sono dati nell'esercizio precedente.
   [(2; ½; –2); (1; –½; –3/2); (0; 1; –1/3); (–5/8; 7/8; –2/3); $\left(-\sqrt{2}/2; \left(\sqrt{3}-1\right)/2; \left(\sqrt{3}+1\right)/2\right)$]

Livello 3

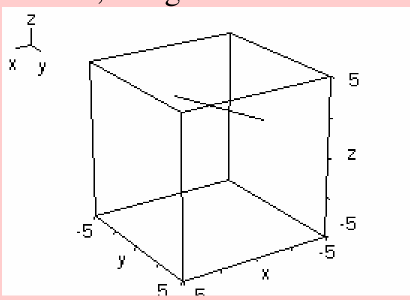
6. Determinare l'altro estremo del segmento in cui un estremo è (2; –1; 4) e il punto medio è (0; 1; 3). [(–2; 3; 2)]
7. Determinare per quali valori del parametro reale m il punto medio del segmento di estremi (1; –2; 3) e (m^2; $1 - m$; $2 + m$) appartiene di volta in volta ai piani: xy [–5] xz [–1] yz [∅]
8. Determinare le coordinate dei vertici di un cubo di lato 1; che ha un vertice nell'origine e tre spigoli appartenenti agli assi coordinati.
   [8 soluzioni possibili, p.e.: (0; 0; 0), (1; 0; 0), (1; 1; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1), (1; 0; 1), (1; 1; 1), (0; 1; 1)]
9. Si dimostra che l'area del triangolo di vertici i punti $(x_A; y_A; z_A)$, $(x_B; y_B; z_B)$, $(x_C; y_C; z_C)$ si calcola con la formula $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_A & z_A & 1 \\ y_B & z_B & 1 \\ y_C & z_C & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_A & z_A & 1 \\ x_B & z_B & 1 \\ x_C & z_C & 1 \end{vmatrix}^2}$. Verificare che se i punti appartengono tutti al piano xy, la detta formula coincide con quella già nota.
10. Si dimostra che il volume del tetraedro di vertici $(x_A; y_A; z_A)$, $(x_B; y_B; z_B)$, $(x_C; y_C; z_C)$, $(x_D; y_D; z_D)$ si cal-

cola con la formula $\frac{1}{6}\cdot\left|\left(\begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_C & y_C & z_C & 1 \\ x_D & y_D & z_D & 1 \end{vmatrix}\right)\right|$ (il determinante in valore assoluto). Calcolare il volume del tetraedro i cui vertici sono l'origine e i punti (1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1). [1/6]

11. Dimostrare il Corollario 1.
12. Dimostrare il Corollario 2.

L’angolo di Derive

Derive ha un ambiente grafico 3D, al quale si accede mediante la pressione del pulsante . Così facendo l'ambiente nel quale ci troviamo è, per default, il seguente:



Vi è cioè un cubo di lato 10 che rappresenta l'ambiente all'interno del quale saranno rappresentate le nostre figure.

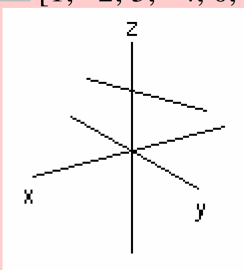
Possiamo naturalmente apportare variazioni alla rappresentazione grafica: per far ciò basta fare doppio clic in un qualsiasi punto all'interno del foglio di lavoro, oppure scegliere **Opzioni Visualizzazi**one o ancora premere il tasto **F11**.

In ogni caso sarà visualizzata una finestra con cinque schede: **Assi**, **Box**, **Legenda, Rotazione**, **Sfondo**, nelle quali effettueremo le nostre scelte. Per esempio potremo visualizzare gli assi, colorarli e così via.

Per rappresentare un punto basta scriverne le relative coordinate all'interno di parentesi quadre, separate da virgole. Per esempio:  [1; –2; 3]

Se immettiamo più di un punto, e per far ciò separiamo le coordinate dei due punti con punto e virgola, automaticamente essi saranno congiunti da un segmento:  [1; –2; 3; –4; 0, 1]

Permette la seguente visualizzazione:

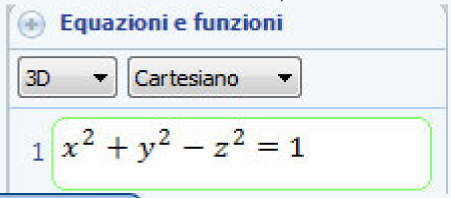


Attività

Rappresentare i punti e i segmenti degli esercizi precedenti e i poliedri aventi le dimensioni doppie, triple e quadruple di quelle del cubo presentato nel box “**Lavoriamo insieme**”.

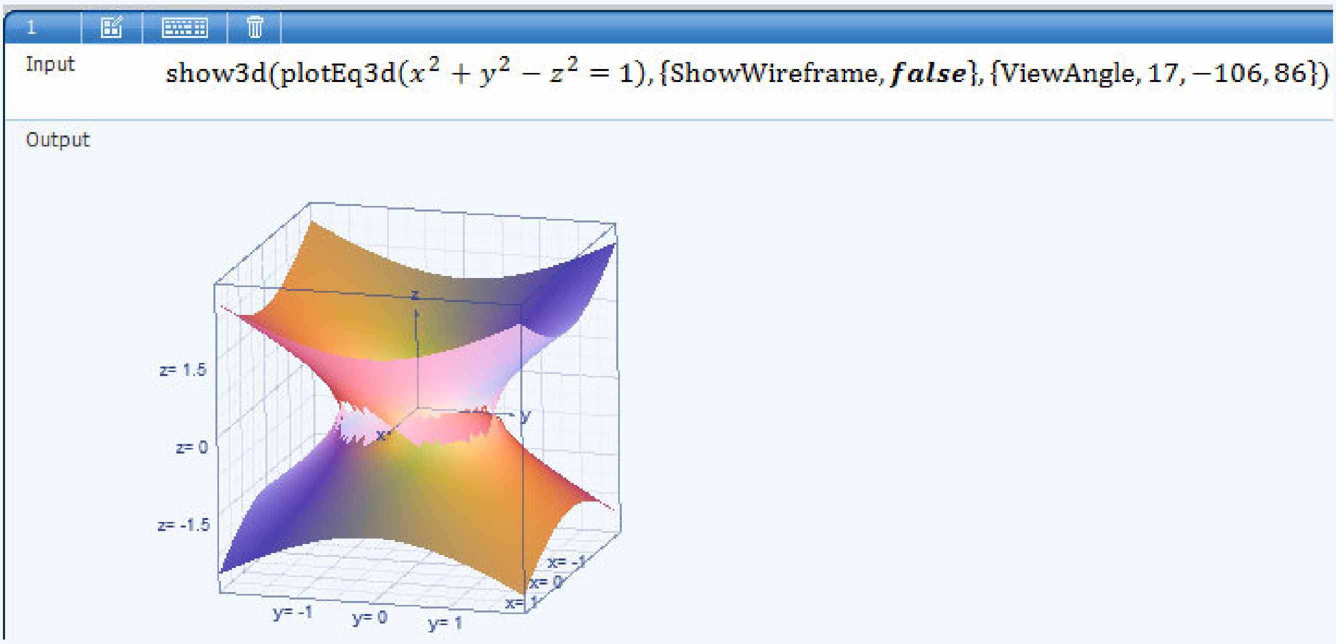
L'angolo di Microsoft Mathematics

Possiamo immettere e visualizzare funzioni a due variabili, come mostrato in figura

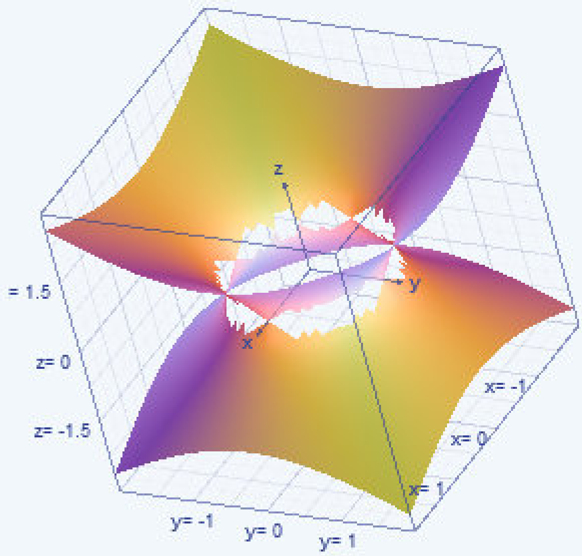


A questo punto clicchiamo su 

e otteniamo quanto mostrato in figura, che può anche essere mostrato insieme con la sintassi del comando



Con il solo uso del mouse possiamo ruotare facilmente il grafico, come mostrato di seguito.



Piani e rette nello spazio cartesiano

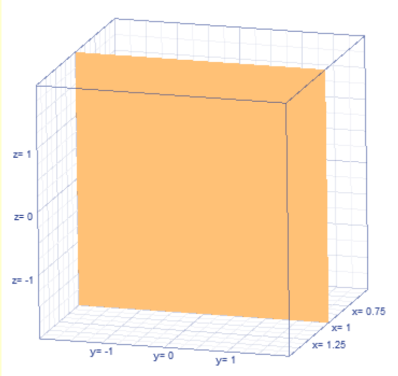
Il problema

Un'equazione di primo grado in due incognite nel piano cartesiano ortogonale rappresenta una retta. Che cosa rappresenterà nello spazio cartesiano un'equazione di primo grado in tre incognite?

Per risolvere il problema precedente possiamo continuare a ragionare con il linguaggio e gli strumenti dei luoghi, solo che questa volta siamo nello spazio e quindi i nostri punti sono determinati da 3 coordinate.

Esempio 4

L'equazione $x = 1$, anche nello spazio continua a rappresentare i punti che hanno l'ascissa costante uguale a 1, solo che tali punti, $P \equiv (1;\ y;\ z)$, non stanno su una retta, come accadeva nel caso del piano cartesiano, bensì su un piano, come mostrato nella figura ottenuta con Microsoft Mathematics.



L'esempio mostra con chiarezza la validità del seguente teorema.

Teorema 3

L'equazione $ax + by + cz + d = 0$, nello spazio cartesiano rappresenta un piano se uno almeno dei coefficienti a, b, c è non nullo. In particolare si ha la validità del seguente schema

a	b	c	d	Tipo di piano
$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	Piano non parallelo ai piani coordinati e non passante per l'origine.
$\neq 0$	$= 0$	$= 0$	$\neq 0$	Piano parallelo al piano yz e non passante per l'origine.
$\neq 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	Piano yz
$= 0$	$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$	Piano parallelo al piano xz e non passante per l'origine.
$= 0$	$\neq 0$	$= 0$	$= 0$	Piano xz
$= 0$	$= 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	Piano parallelo al piano xy e non passante per l'origine.
$= 0$	$= 0$	$\neq 0$	$= 0$	Piano xy
$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$= 0$	Piano non parallelo ai piani coordinati e passante per l'origine.

Ma allora come si rappresenta una retta nello spazio cartesiano? Una retta può ottenersi dall'intersezione di due piani non paralleli.

Esempio 5

I piani coordinati di equazioni $x = 0$ e $y = 0$, si incontrano nell'asse z. L'asse z è quindi rappresentato dalle equazioni: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

Possiamo allora enunciare il seguente teorema.

Teorema 4

Il sistema $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$, rappresenta l'equazione di una retta nello spazio cartesiano se le due equazioni rappresentano piani fra loro incidenti.

In effetti non sappiamo ancora qual è la condizione affinché due piani possano essere considerati incidenti o paralleli. Ci limitiamo per ora a elencare una serie di risultati che sono semplice generalizzazione dei corrispondenti risultati per le rette nel piano cartesiano. (Nelle Attività proporremo qualche ulteriore esempio di applicazione.)

Teorema 5

La retta passante per i punti $A \equiv (x_A; y_A; z_A)$, $B \equiv (x_B; y_B; z_B)$ ha equazione $\frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A} = \frac{z-z_A}{z_B-z_A}$

Dimostrazione

Come nel caso del piano, applicando i concetti di similitudine nello spazio.

Esempio 6

L'equazione della retta passante per i punti $A \equiv (1; –2; 1)$ e $B \equiv (3; 0; –1)$ è:

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y+2}{0+2} = \frac{z-1}{-1-1} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-2} \Rightarrow x-1 = y+2 = 1-z \Rightarrow \begin{cases} x-y-3=0 \\ x+z-2=0 \end{cases}$$

Noi abbiamo scelto un modo di scrivere le due equazioni, ma ve ne sono altri:

$$\begin{cases} x-y-3=0 \\ y+z+1=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x+z-2=0 \\ y+z+1=0 \end{cases}$$

Come si vede i piani che intersecati a due a due determinano la retta sono sempre gli stessi tre. Ciò significa che i tre piani si incontrano appunto nella data retta.

Sappiamo che un piano è individuato da 3 punti non allineati, deve perciò essere possibile scrivere l'equazione di un piano conoscendo le coordinate di tre dei suoi punti, purché non tutti appartenenti alla stessa retta.

Teorema 6

Il piano passante per i punti $A \equiv (x_A; y_A; z_A)$, $B \equiv (x_B; y_B; z_B)$, $C \equiv (x_C; y_C; z_C)$ ha equazione

$$\begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A & z_C-z_A \end{vmatrix} = 0$$

Esempio 7

Il piano passante per $A \equiv (1; 2; 3)$, $B \equiv (–1; 0; 2)$ e $C \equiv (0; 1; –1)$, ha equazione

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -1-1 & 0-2 & 2-3 \\ 0-1 & 1-2 & -1-3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)\cdot\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} - (y-2)\cdot\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} + (z-3)\cdot\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)\cdot(8-1) - (y-2)\cdot(8-1) + (z-3)\cdot 0 = 0 \Rightarrow 7\cdot(x-1) - 7\cdot(y-2) = 0 \Rightarrow x-y+1=0$$

Verifichiamo: 1 – 2 + 1 = –1 – 0 + 1 = 0 – 1 + 1 = 0.

Teorema 7

Condizione necessaria e sufficiente affinché i piani $ax + by + cz + d = 0$ e $a'x + b'y + c'z + d' = 0$, siano paralleli è che si abbia: $a/a' = b/b' = c/c' = d/d'$, se sono tutti diversi da zero. Se qualcuno è zero anche il corrispondente coefficiente dell'altra retta deve essere zero.

Esempio 8

- I piani di equazioni $x - y + z - 1 = 0$ e $2x - 2y + 2z - 1 = 0$ sono fra loro paralleli.
- I piani di equazioni $x - y + z - 1 = 0$ e $2x - 2y + 2z - 2 = 0$ sono fra loro coincidenti.
- I piani di equazioni $x - y + z - 1 = 0$ e $2x + 2y + 2z - 1 = 0$ sono fra loro incidenti.

Teorema 8

L'equazione del piano passante per $P\equiv(x_P; y_P; z_P)$ e parallelo al piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$ è $a \cdot (x - x_P) + b \cdot (y - y_P) + c \cdot (z - z_P) = 0$.

Esempio 9

L'equazione del piano passante per il punto $P \equiv (1; -2; 0)$ e parallelo al piano di equazione $3x + 2z - 1 = 0$ è $3 \cdot (x - 1) + 0 \cdot (y + 2) + 2\cdot (z - 0)= 0 \Rightarrow 3x - 3 + 2z = 0$.

Teorema 9

Condizione necessaria e sufficiente affinché i piani $ax + by + cz + d = 0$ e $a'x + b'y + c'z + d' = 0$, siano perpendicolari è che si abbia: $aa' + bb' + cc' = 0$.

Esempio 10

I piani di equazioni $x - y + z - 1 = 0$ e $x - y - 2z = 0$ sono fra loro perpendicolari, dato che, si ha:

$$1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) = 1 + 1 - 2 = 0.$$

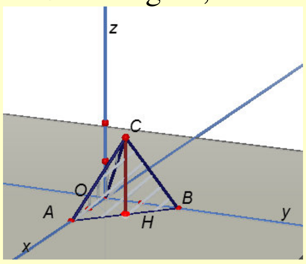
Teorema 10

La distanza del punto $P \equiv (x_P; y_P; z_P)$ dal piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$, è

$$\frac{|a \cdot x_P + b \cdot y_P + c \cdot z_P + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Esempio 11

Consideriamo il tetraedro di vertici $O \equiv (0; 0; 0)$, $A \equiv (2; 0; 0)$, $B \equiv (0; 2; 0)$, $C \equiv (1; 1; 2)$. Vogliamo calcolare il suo volume. Poiché un tetraedro altri non è che una piramide, sappiamo che la formula da applicare è *area di base per altezza diviso* 3. Dato che i punti OAB appartengono al piano xy conviene scegliere come base questo triangolo, del quale calcoliamo facilmente l'area dato che è un triangolo reattangolo di cateti OA e OB, quindi ha area ½ · 2 · 2 = 2. L'altezza sarà il segmento CH in figura, condotto perpendicolarmente da C al piano xy, quindi è la terza coordinata di C, cioè 2.



Il volume richiesto sarà quindi: 1/3 · 2 · 2 = 4/3.

Verifiche

Determinare le equazioni delle rette passanti per i punti accanto indicati

Livello 1

1. (1; 2; 3) (2; 3; 4) [$x = y – 1 = z – 2$] (1; 2; 3), (1; 3; 2) [$x = 1; y = 5 – z$]
2. (1; 2; 3) (0; 2; 4) [$y = 2, x = z – 2$] (1; 2; 3) (–1; –2; –3) [$2x = y, 3y = 2z$]
3. (1; 2; 3), (0; 0; 0) [$2x = y, 3y = 2z$] (0; 0; 1) (0; 1; 0) [$x = 0, y = 1 – z$]
4. (1; 0; 2) (2; 0; 1) [$y = 0, x = 1 – z$] (1; 2; 3), (2; 4; 6) [$2x = y, 3y = 2z$]
5. (–1; 0; 1) (1; 0; –1) [$y = 0, y + z = 0$] (1; 0; 0) (0; 1; 1) [$x = 1 – y, y = z$]
6. (1; 0; 1), (0; 1; 1) [$x = 1 – y, z = 1$] (1; 1; 1) (2; 2; 2) [$x = y = z$]
7. (2; 1; –1) (–1; 2; –2) [$x = 5 – 3y, y + z = 0$] (–2; 1; –2), (1; –2; 2) [$x + y + 1 = 0, 4y + 3z – 2 = 0$]

Lavoriamo insieme

Dati i piani di equazione α: $3x – 5y – z + 1 = 0$ e β: $5x + 2y – 3z – 4 = 0$, vogliamo stabilirne le reciproche posizioni.
Per il Teorema 7, basta considerare i rapporti delle coordinate omonime: 3/5, –5/2, 1/3, dato che sono diversi tra loro i piani sono incidenti e determinano perciò la retta di equazione: $r:\begin{cases} 3x-5y-z+1=0 \\ 5x+2y-3z-4=0 \end{cases}$
Adesso consideriamo il punto $P \equiv (1; 2; –1)$, che non appartiene a nessuno dei due piani, come facilmente si verifica, vogliamo determinare la sua distanza dai detti piani. Si ha:

$$d(P,\alpha)=\frac{|3-10+1+1|}{\sqrt{9+25+1}}=\frac{9}{\sqrt{35}};d(P,\beta)=\frac{|5+4+3-4|}{\sqrt{25+4+9}}=\frac{8}{\sqrt{38}}$$

Livello 1

Scrivere l'equazione del piano passante per i punti indicati

8. (1; 0; 1), (1; 2; 3), (1; 3; 2) [$x = 1$] (1; 1; 1), (2; 2; 2), (3; 3; 3) [Punti allineati]
9. (1; 1; 0), (0; 1; 1), (1; 0; 1) [$x + y + z = 2$] (0; 0; 0), (2; 1; 1), (–1; 2; 3) [$x – 7y + 5z = 0$]
10. (1; 0; 0), (2; 0; 3), (0; 1; 2) [$3x + 5y – z = 3$] (3; –1; 1), (–1; 2; –1), (1; –2; 1) [$x – 2y – 5z = 0$]
11. (1; –1; 1), (–1; 1; 1), (–1; 1; –1) [$x + y = 0$] (1; 2; 3), (2; 3; 1), (3; 2; 1) [$x + y + z = 6$]
12. (2; 1; 0), (0; 2; –1), (–1; –2; 1) [$4x – y – 9z = 7$] (–1; 0; –1), (–2; 0; 0), (0; –3; 1) [$x + y + z + 2 = 0$]

Determinare le reciproche posizioni dei piani di seguito indicati

13. α: $2x – 3y – z + 1 = 0$ e β: $4x + 6y – 2z = 0$ [Incidenti]
14. α: $x – y – z + 1 = 0$ e β: $x + y – z – 1 = 0$ [Incidenti]
15. α: $2x – z + 1 = 0$ e β: $4x + y – 2z – 1 = 0$ [Incidenti]
16. α: $x – y + 1 = 0$ e β: $2x – 2y – 4 = 0$ [Paralleli]
17. α: $x – 2y + 1 = 0$ e β: $2x – 4z – 3 = 0$ [Incidenti]
18. α: $2x – 3y – z = 0$ e β: $6x – 9y – 3z = 0$ [Coincidenti]

Livello 2

Determinare le distanze dei punti indicati dai piani accanto segnati

19. $P \equiv (2; 3; –1)$, α : $x – 2y + z – 3 = 0$ $\left[4\cdot\sqrt{6}/3\right]$ $P \equiv (–2; 1; 0)$, α : $3x – y – 4 = 0$ $\left[11/\sqrt{10}\right]$
20. $P \equiv (1; 1; –1)$, α : $x + z = 0$ [Il punto giace sul piano]
21. $P \equiv (0; 2; 1)$, α : $x – y + z – 2 = 0$ $\left[\sqrt{3}\right]$ $P \equiv (–1; 0; 2)$, α : $2y – 3 = 0$ [3/2]

Scrivere l'equazione del piano passante per il punto *P* e parallelo al piano α indicato

22. $P \equiv (1; 3; –1)$, α : $x – y + z = 0$ [$x – y + z – 3 = 0$] $P \equiv (1; 1; –1)$, α : $x + z = 0$ [$x + z = 0$]
23. $P \equiv (0; 2; 3)$, α : $x – y – 2 = 0$ [$x – y + 2 = 0$] $P \equiv (–1; 0; 2)$, α : $2y – 3z = 0$ [$2y – 3z + 6 = 0$]
24. $P \equiv (–2; 4; –1)$, α : $3x – y – 4z = 0$ [$3x – y – 4z + 6 = 0$]

Determinare per quali valori del parametro reale *k*, le distanze dei punti indicati dai piani accanto segnati hanno il valore *d* riportato

25. $P \equiv (k, 0; 1)$, α : $x – 2y + z – 3 = 0$, $d = 2$ $\left[k=2\pm 2\cdot\sqrt{6}\right]$

26. $P \equiv (-1; 2; 0)$, $\alpha : x - ky + z = 0$, $d = 1$ $\left[k = \left(-2 \pm \sqrt{7}\right)/3\right]$

27. $P \equiv (k + 1; 3; -2)$, $\alpha : 2x - y + z = 0$, $d = 3$ $\left[k = \left(3 \pm 3\cdot\sqrt{6}\right)/2\right]$

28. $P \equiv (k - 1; k + 1; 1)$, $\alpha : x - y + z = 0$, $d = 1$ [Nessun valore reale di k]

29. $P \equiv (2 - k, -2; 1 - k)$, $\alpha : x - z + 3 = 0$, $d = 2\cdot\sqrt{2}$ [Ogni valore reale di k]

30. $P \equiv (k - 1; k + 2; 2)$, $\alpha : x - ky + kz = 0$, $d = 1$ [$k = 0 \vee k = 2$]

Lavoriamo insieme

Dato il piano di equazione α: $2x - y - z = 0$ e la retta $r:\begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ 2x + 3y - 2 = 0 \end{cases}$, vogliamo stabilirne le reciproche posizioni. Basta risolvere il sistema formato dalle tre equazioni. $\begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ 2x + 3y - 2 = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$.

Risolviamo con il metodo di Cramer. Calcoliamo il determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 2 - 6 = -11 \neq 0$$

Il sistema ha una sola soluzione, quindi la retta incontra il piano nel punto le cui coordinate sono le soluzioni del sistema (compito lasciato per esercizio), cioè in (1; 0; 2).

Determinare le reciproche posizioni del piano e della retta di seguito indicati

Livello 2

31. $r:\begin{cases} x - y - z + 1 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}, \alpha: 2x + y - z - 1 = 0$ [Incidenti in $P \equiv (1; ½; 3/2)$]

32. $r:\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}, \alpha: 3x - y - 1 = 0$ [Paralleli]

33. $r:\begin{cases} x - 2y - 3z = 0 \\ 3x - y + z - 1 = 0 \end{cases}, \alpha: 4x - 3y - 2z - 1 = 0$ [La retta giace sul piano]

34. $r:\begin{cases} y - z + 1 = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}, \alpha: x + 3y - 2 = 0$ [Incidenti in $P \equiv (-5/2; 3/2; 5/2)$]

35. $r:\begin{cases} x - y - z + 1 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}, \alpha: 2x + y - z - 1 = 0$ [Paralleli]

Livello 3

36. Studiare, al variare del parametro reale k, le reciproche posizioni della retta $r:\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ e del fascio di piani $kx - y + (k + 1)z - 1 = 0$. [Se $k \neq \pm$ ½ incidenti; altrimenti paralleli]

37. Enunciare una condizione necessaria per il parallelismo di due piani, che riguardi il segno dei coefficienti delle incognite. [I segni devono essere tutti uguali o tutti opposti]

38. Quante diverse rette nello spazio tridimensionale passano per quattro punti distinti le cui coordinate sono numeri interi ciascuno non superiore a 4? [76]

Quelli che vogliono sapere di più ….
Le quadriche canoniche

Il problema
Quali sono le corrispondenti delle coniche nello spazio?

Ci limitiamo a presentare qualche risultato che è una semplice generalizzazione di quanto visto per le coniche.

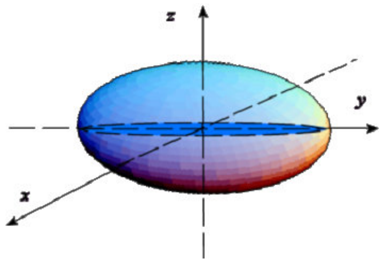
Definizione 3
La totalità dei punti dello spazio che verificano una generica equazione di secondo grado in tre variabili, si chiama **quadrica**. Se la detta equazione ha infinite soluzioni reali, anche la quadrica sarà detta **reale**, se l'equazione non ha soluzioni reali la quadrica la diciamo **immaginaria**.

Definizione 4
Una quadrica reale o immaginaria, la cui equazione può scriversi come prodotto di due equazioni di primo grado a coefficienti reali o complessi, si chiama **quadrica spezzata**, altrimenti la diremo **irriducibile**.

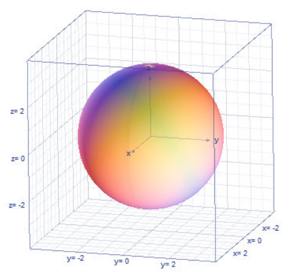
Visto il significato che ha un'equazione di primo grado nella geometria cartesiana dello spazio, è immediato il seguente teorema.

Teorema 11
Una quadrica spezzata si spezza in due piani distinti o coincidenti.

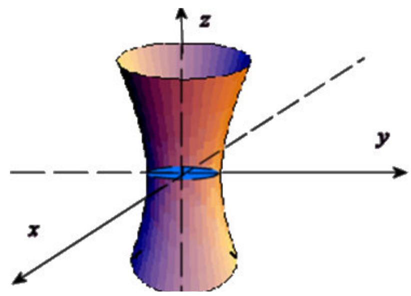
Adesso vediamo di presentare le quadriche canoniche, che in qualche modo sono semplici generalizzazioni delle coniche canoniche.



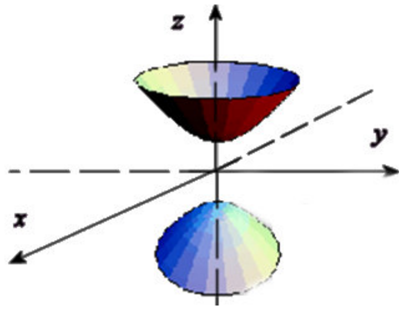
Ellissoide reale di semiassi *a*, *b*, *c*: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$



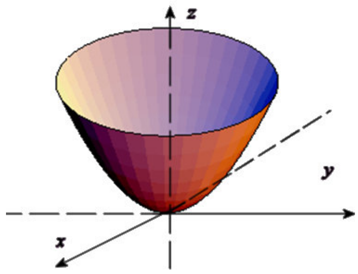
Naturalmente se i semiassi hanno uguali misure otteniamo una sfera.
Quindi l'equazione della sfera di centro l'origine e raggio r è $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.
Quella di centro generico e raggio r è $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + (z - z_C)^2 = r^2$.



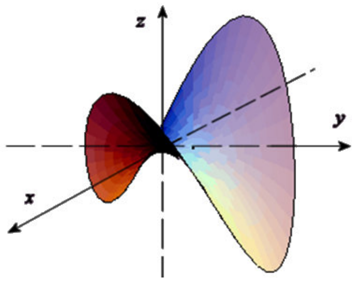
Iperboloide a una falda: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$



Iperboloide a due falde: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

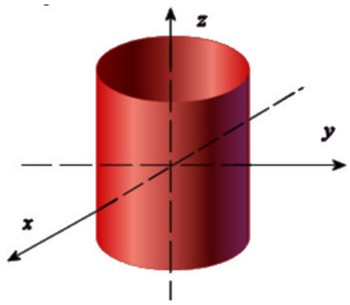


Paraboloide ellittico: $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$



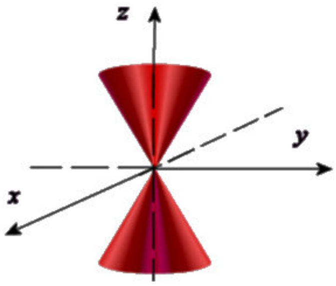
Paraboloide iperbolico: $x=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$

Anche il cilindro e il cono sono particolari quadriche, dette **degeneri**.



Cilindro a sezione circolare: $x^2 + y^2 = r^2$.

In effetti per ottenere un cilindro basta assegnare l'equazione di una circonferenza o di una conica qualsiasi in un piano, per esempio il piano xy, dato che nell'equazione non è presente la variabile z, al variare di tale coordinata otteniamo infinite coniche uguali, tutte *una sull'altra*, che generano così un cilindro infinito.



Cono reale: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali.

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.

AHSME = Annual High School Mathematics Examination

AL = Alabama State Wide Mathematics Contest

AMC = American Mathematical Contest

RICE = Rice University Mathematics Tournament.

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente quesito assegnato all'Alabama State Wide Mathematics Contest del 1999.
A ≡ (1; 4; –3), B ≡ (7; 2; –1), C ≡ (8; 3; –3) e D ≡ (2; 5; –5) sono i vertici di un quadrilatero in uno spazio 3D. che tipo di quadrilatero è?
Intanto troviamo le misure dei lati.

$$\overline{AB} = \sqrt{(1-7)^2 + (4-2)^2 + (-3+1)^2} = \sqrt{36+4+4} = \sqrt{44} = 2\cdot\sqrt{11}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(8-7)^2 + (3-2)^2 + (-3+1)^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

$$\overline{CD} = \sqrt{(2-8)^2 + (5-3)^2 + (-5+3)^2} = \sqrt{36+4+4} = \sqrt{44} = 2\cdot\sqrt{11}$$

$$\overline{DA} = \sqrt{(1-2)^2 + (4-5)^2 + (-3+5)^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{5}$$

Abbiamo quindi un parallelogramma non rombo. Calcoliamo le misure delle diagonali.

$$\overline{AC} = \sqrt{(1-8)^2 + (4-3)^2 + (-3+3)^2} = \sqrt{49+1+0} = \sqrt{50} = 5\cdot\sqrt{2}$$

$$\overline{BD} = \sqrt{(2-7)^2 + (5-2)^2 + (-5+1)^2} = \sqrt{25+9+16} = \sqrt{50} = 5\cdot\sqrt{2}$$

poiché sono isometriche, ABCD è un rettangolo.

1. (AMC 2000) Il punto P ≡ (1; 2; 3) è riflesso rispetto al piano xy, quindi il simmetrico Q è ruotato di 180° attorno all'asse x, ottenendo R, e infine R è traslato di 5 unità nella direzione e verso del semiasse positivo delle y per produrre S. quali sono le coordinate di S? [(1; 3; 3)]
2. (Rice 2008) Quanto vale l'area del triangolo di vertici (x; 0; 0), (0; y; 0), and (0; 0; z)?
$\left[\frac{1}{2}\cdot\sqrt{x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2}\right]$

Questions in English

3. (AHSME 1996) Consider two solid spherical balls, one centered at (0, 0, 21/2) with radius 6, and the other centered at (0, 0, 1) with radius 9/2 . How many points (x, y, z) with only integer coordinates (lattice points) are there in the intersection of the balls? A) 7 B) 9 C) 11 D) 13 E) 15 [D)]

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_2_1.htm

7. La misurazione degli angoli

7.1 Risoluzione dei triangoli

Prerequisiti

- Concetto di angolo
- Concetto di misura
- Unità di misura sessagesimale degli angoli
- Similitudine di triangoli
- Sistema di riferimento cartesiano ortogonale
- Concetto di funzione e funzione inversa

Obiettivi

- Comprendere il concetto di risoluzione di un triangolo
- Comprendere il concetto di funzione trigonometrica
- Sapere calcolare con l'uso di una calcolatrice scientifica le funzioni trigonometriche e le rispettive funzioni inverse
- Risolvere semplici problemi trigonometrici

Contenuti

- Definizione delle funzioni trigonometriche elementari per angoli acuti
- Risoluzione dei triangoli rettangoli
- Risoluzione dei triangoli qualsiasi e teorema dei seni
- Risoluzione dei triangoli qualsiasi e teorema del coseno
- Applicazioni

Parole Chiave

Cosecante – Coseno – Cotangente – Risoluzione di un triangolo – Secante – Seno – Tangente

Richiamiamo le conoscenze

Misurazione degli angoli

Il modo più diffuso per misurare gli angoli è dovuto ai Babilonesi che lo stabilirono parecchi secoli prima della nascita di Cristo. Essi proposero di suddividere l'angolo giro in 360 parti uguali, ciascuna delle quali fu detta grado; a sua volta il grado venne suddiviso in 60 parti uguali, chiamati primi e questi a loro volta in 60 parti uguali detti secondi. Per quel che riguarda i sottomultipli è la stessa suddivisione usata per la misurazione del tempo, in ore, minuti e secondi.

Notazione A

Per indicare i gradi sessagesimali si usa il simbolo °, per indicare i primi si usa il simbolo ′, per indicare i secondi il simbolo ″.

Notazione B

Per indicare la misura di un angolo, per esempio di $A\hat{B}C$, scriveremo $\angle A\hat{B}C$.

In questo sistema, detto sessagesimale proprio per il suo collegamento con il numero 60, l'angolo giro misura 360 gradi e viene indicato con 360°, l'angolo piatto 180°, l'angolo retto 90°.

Esempio A

Dati gli angoli le cui misure in gradi sessagesimali sono 25°32′47″ e 45°48′52″, come determinare la misura dell'angolo ottenuto dalla loro somma? Come possiamo sommare i valori?

Ci rendiamo conto che non è possibile sommare fra loro gradi e primi o primi e secondi o gradi e secondi e dobbiamo quindi sommare fra loro soltanto le grandezze dello stesso genere (omogenee).

$$\begin{array}{r} 15°\ 32'\ 47''\ + \\ \underline{45°\ 48'\ 52''\ =} \\ 70°\ 80'\ 99'' \end{array}$$

Notiamo che il risultato potrebbe essere scritto meglio. Dire 99″ è lo stesso che dire 1′39″ (infatti 1′ = 60″); potremmo così scrivere la precedente somma come 70°81′39″.

Allo stesso modo, dato che 81′ = 1°21′ possiamo scrivere il risultato finale come 71°21′39″.

Esempio B

Dati gli angoli le cui misure sono 123°22′16″ e 87°42′31″ come determinare la loro differenza?

Anche stavolta comprendiamo che devono sottrarsi solo grandezze fra di loro omogenee. Vi è però un altro problema: come sottrarre 31″ da 16″? Possiamo pensare di usare una tecnica simile a quella del "prestito della decina" che si usa nella sottrazione fra i numeri interi, solo che qui il fattore di moltiplicazione è 60. Così scriveremo il primo angolo nel seguente modo: 123°21′76″ e dato che avremo lo stesso problema con la sottrazione fra i primi lo scriveremo meglio come 122°81′76″, quindi:

$$\begin{array}{r} 122°\ 81'\ 76''\ - \\ \underline{87°\ 42'\ 31''\ =} \\ 35°\ 39'\ 45'' \end{array}$$

Similitudine dei triangoli

Nel linguaggio quotidiano il vocabolo *simile* vuol dire che *assomiglia*, così sono simili due fratelli, due penne dello stesso modello, due panini e così via. Nelle matematiche invece simile vuol dire qualcosa di più, ossia una copia ingrandita o rimpicciolita. Più precisamente abbiamo

Definizione A

Diciamo che due poligoni sono **simili** fra loro secondo il fattore $k \neq 0$, se verificano le seguenti proprietà:

- hanno lo stesso numero di lati;
- esiste una corrispondenza biunivoca fra i loro angoli interni, in modo che due angoli corrispondenti siano

fra loro isometrici;
- esiste una corrispondenza biunivoca fra i lati che formano le coppie di angoli corrispondenti isometrici, in modo che il rapporto delle misure dei lati corrispondenti sia sempre uguale a k.

Definizione B

Dati due poligoni simili ciascuna coppia di angoli e ciascuna coppia di lati che si corrispondono in una similitudine, si dicono rispettivamente angoli e lati **omologhi** o **corrispondenti** fra loro.

Definizione C

Dati due poligoni simili, il numero k che misura il valore del comune rapporto fra le misure di segmenti corrispondenti, si chiama **rapporto di similitudine**.

Notazione C

Per indicare che due figure geometriche P e P' sono simili, scriveremo $P \sim P'$.

Nel caso particolare dei triangoli valgono tre criteri che ci assicurano la similitudine di due triangoli.

Teorema A (I criterio di similitudine dei triangoli)

Se due angoli di un triangolo sono isometrici ad altrettanti angoli di un altro triangolo, allora i due triangoli sono simili.

Teorema B (II criterio di similitudine dei triangoli)

Se due dei tre rapporti fra i lati di due triangoli sono uguali e gli angoli compresi da tali lati sono fra loro isometrici allora i due triangoli sono simili.

Teorema C (III criterio di similitudine dei triangoli)

Se in due triangoli può stabilirsi una corrispondenza biunivoca fra i rispettivi lati, in modo che tutti i rapporti delle misure di lati corrispondenti siano uguali, allora i due triangoli sono simili.

Definizione delle funzioni trigonometriche elementari per angoli acuti

Poiché stai studiando geometria e trigonometria, ti sottopongo un problema. Una nave lascia Boston con un carico di lana, ha una stazza di 200 tonnellate ed è diretta a Le Havre. L'albero maestro è rotto, il mozzo è sul ponte e ci sono 12 passeggeri a bordo, il vento soffia in direzione Est–Nord–Est, l'orologio segna le tre e un quarto del pomeriggio. È il mese di Maggio. Quanti anni ha il capitano?

Gustave Flaubert (1821–1880)

Il problema

In generale, nelle ipotesi valide per i criteri di isometria, a parte qualche caso particolare, non siamo in grado di determinare le misure di tutti i lati e di tutti gli angoli di un triangolo. Vogliamo perciò vedere se riusciamo a risolvere questa questione in altro modo, avvalendoci per esempio delle nozioni sulla similitudine.

Cominciamo con qualche definizione.

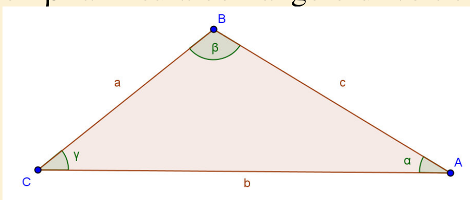
Definizione 1

Dato un triangolo diciamo sua **risoluzione** la determinazione delle misure di tutti i suoi lati e di tutti i suoi angoli.

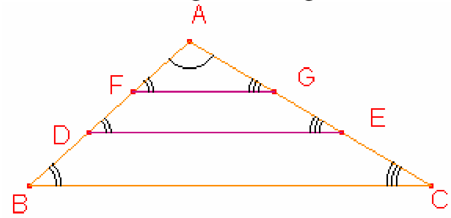
La disciplina matematica che si occupa della risoluzione dei triangoli viene chiamata **trigonometria**, che letteralmente significa ″misura dei triangoli″. Cominciamo a risolvere triangoli rettangoli.
Prima stabiliamo alcune convenzioni di scrittura, che ci aiuteranno a semplificare il linguaggio.

Notazione 1

In un triangolo *ABC*, indichiamo con *a* la misura di *BC*, con *b* la misura di *AC* e con *c* la misura di *AB*; con α la misura dell'angolo di vertice *A*, con β la misura dell'angolo di vertice *B* e con γ la misura dell'angolo di vertice *C*.



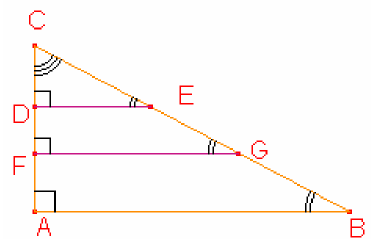
Ricordiamo che due triangoli simili hanno gli angoli a due a due isometrici e i lati corrispondenti nella stessa proporzione. Quindi, considerando in generale un triangolo *ABC*, deve esservi una relazione stretta fra le proporzioni dei lati e gli angoli. Consideriamo la seguente figura.



In essa vi sono tre triangoli: *ABC, ADE* e *AFG*, che sono evidentemente simili poiché i lati *BC*, *DE* e *FG* sono fra loro paralleli e pertanto gli angoli indicati con lo stesso segno sono isometrici perché corrispondenti rispetto a queste parallele tagliate rispettivamente dalla trasversali *AB* e *AC*.
Si ha allora la validità delle seguenti uguaglianze:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{FC}};\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{FG}};\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{AF}},\ \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{GC}} \text{ e}$$

Valgono naturalmente anche le uguaglianze ottenute da queste scambiando fra loro numeratore e denominatore. Ciascuna di queste proporzioni determina perciò un numero positivo, che deve essere legato agli angoli del triangolo. In particolare ciò vale per i triangoli rettangoli.



Quindi ciascuna di queste proporzioni è una *funzione* degli angoli acuti. Conveniamo di definire delle funzioni matematiche associate appunto ai lati di un triangolo rettangolo con i suoi angoli.

Definizione 2

Dato un triangolo rettangolo *ABC* di ipotenusa *BC*, chiamiamo **seno** di un suo angolo acuto il rapporto fra la misura del cateto opposto all'angolo e la misura dell'ipotenusa.

Notazione 2

Il seno di un angolo *x* si indica con *sin*(*x*). Si ha: $sin(\beta) = b/a$; $sin(\gamma) = c/a$.

Sottolineiamo che il seno è una funzione, non una costante, dato che il suo valore dipende dall'ampiezza dell'angolo *x* a cui è riferito.

Esempio 1

È un gravissimo errore la seguente semplificazione: $\frac{sin(\cancel{x})}{\cancel{x}} = sin$. Infatti la scritta *sin*, priva di un argomento, ossia della misura di un angolo, non ha alcun significato, inoltre la *x* al denominatore è per così dire "libera", mentre quella al numeratore è vincolata, è parte integrante del seno, la scritta *sin*(*x*) è un tutt'uno, **non il risultato del prodotto del monomio *sin* per il monomio *x*.**

Definizione 3

Dato un triangolo rettangolo *ABC* di ipotenusa *BC*, chiamiamo **coseno** di un suo angolo acuto il rapporto fra la misura del cateto adiacente all'angolo e la misura dell'ipotenusa.

Notazione 3

Il coseno di un angolo *x* si indica con *cos*(*x*). Si ha: $cos(\beta) = c/a$; $cos(\gamma) = b/a$.

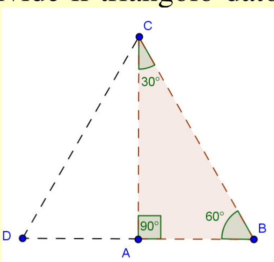
Anche il coseno è una funzione. Notiamo immediatamente che $sin(\beta) = cos(\gamma)$ e $sin(\gamma) = cos(\beta)$.
In effetti il motivo per cui usiamo la parola coseno sta proprio nel fatto che se β e γ sono due angoli complementari (e gli angoli acuti di un triangolo rettangolo lo sono certamente), allora il seno di ciascuno dei due angoli è sempre uguale al coseno dell'altro.
Inoltre sia il seno che il coseno di un angolo acuto sono numeri positivi e minori di 1, essendo rapporto fra cateto e ipotenusa di uno stesso triangolo rettangolo.

L'angolo storico

Seno. I primi a considerare il seno di un angolo, furono gli astronomi indiani; in particolare Aryabhatta nel V secolo d.C., costruì una tavola del seno. In seguito si interessarono di tale questione prima i matematici arabi. La parola è derivata dal latino *sinus*. Fu usata per primo da Roberto di Chester in una traduzione di un'opera araba, effettuata nel 1145. In effetti la scelta del nome fu dovuta a un errore di traduzione, dato che gli arabi indicavano questo vocabolo con *jiba*, poiché però in arabo le vocali si leggono ma non si scrivono, Roberto scambiò la parola con *jaib*, che vuol dire baia o insenatura. Ecco che perciò usò il vocabolo latino *sinus*, che significa appunto baia. La stessa parola fu usata in seguito anche da Regiomontano (1436 – 1476). Il simbolo *sin* è invece usato per primo da Thomas Fincke nel suo libro *Geometria rotundi* del 1583. Fincke lo usò seguito da un punto, invece Edmund Gunter nel 1624 lo scrisse privo del punto. Altri a usare lo stesso simbolo furono William Oughtred e Hérigone.
Coseno. È una abbreviazione della parola *complementi sinus*, il termine fu coniato in latino, *cosinus*, da Edmund Gunter in un'opera del 1620. Il simbolo *cos* si trova invece in un'opera del 1674 di Sir Jonas Moore, in una del 1696 di Samuel Jeake e successivamente, nel XIX secolo, in Eulero.

Esempio 2

Consideriamo un triangolo rettangolo i cui angoli acuti misurano 30° e 60°.
È facile vedere che tale triangolo può considerarsi come metà di un triangolo equilatero: infatti se tracciamo un'altezza di un triangolo equilatero, questa divide il triangolo dato in due triangoli rettangoli isometrici, i cui angoli acuti misurano appunto 30° e 60°.



Questo ci consente di affermare che il cateto adiacente all'angolo di 60°, nella figura precedente denotato con *AB*, misura quanto metà dell'ipotenusa, mentre l'altro cateto, denotato con *AC*, misura

$$\sqrt{\overline{BC}^2 - \left(\frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{4}}\cdot\overline{BC} = \sqrt{\frac{3}{4}}\cdot\overline{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\overline{BC}.$$

Quindi per le definizioni precedenti possiamo scrivere:

$$sin(60°)=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\overline{BC}}{\overline{BC}}=\frac{\sqrt{3}}{2}=cos(30°);sin(30°)=\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\overline{BC}}{\overline{BC}}=\frac{1}{2}=cos(60°)$$

Possiamo interpretare trigonometricamente il teorema di Pitagora.

Teorema 1

Si ha: $sin^2(x) + cos^2(x) = 1$, $0° < x < 90°$.

Dimostrazione. Il teorema di Pitagora applicato a un triangolo rettangolo ABC di ipotenusa BC è espresso dall'identità: $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$. Dividiamo tutto per $\overline{BC}^2$ ottenendo:

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}^2}+\frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}^2}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{BC}^2}\Rightarrow\left(\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}\right)^2+\left(\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}\right)^2=1.$$

Adesso basta sostituire a ciascuno dei due rapporti le loro espressioni mediante le funzioni trigonometriche, per ottenere la tesi.

Esempio 3

Utilizzando il risultato del Teorema 1, vogliamo risolvere il seguente problema. Sappiamo che per un certo angolo acuto x, si ha: $sin(x) = 0,34$; vogliamo sapere quanto vale $cos(x)$.

Possiamo scrivere: $0,34^2 + cos^2(x) = 1 \Rightarrow cos^2(x) = 0,8844 \Rightarrow cos(x)=\sqrt{0,8844}\approx 0,94$

Osserviamo che, per quanto detto, abbiamo una sola soluzione, dato che la soluzione negativa non può essere accettata, essendo il coseno di un angolo acuto un numero positivo. Inoltre il valore ottenuto è approssimato, dato che il radicando non è un quadrato perfetto. E questo non è per niente una particolarità, anzi tutt'altro.

Passiamo alle altre definizioni.

Definizione 4

Dato un triangolo rettangolo *ABC* di ipotenusa *BC*, chiamiamo **tangente** di un suo angolo acuto il rapporto fra la misura del cateto opposto all'angolo e la misura dell'altro cateto.

Notazione 4

La tangente di un angolo x si indica con $tan(x)$. Si ha: $tan(\beta) = b/c$; $tan(\gamma) = c/b$.

Visto quel che abbiamo detto a proposito delle relazioni fra seno e coseno, risulta naturale considerare una funzione complementare della funzione tangente.

Definizione 5

Dato un triangolo rettangolo *ABC* di ipotenusa *BC*, chiamiamo **cotangente** di un suo angolo acuto il rapporto fra la misura del cateto adiacente all'angolo e la misura dell'altro cateto.

Notazione 5

La cotangente di un angolo x si indica con $cot(x)$. Si ha: $cot(\beta) = c/b$; $cot(\gamma) = b/c$.

Dalle precedenti definizioni si deduce facilmente il seguente risultato.

Teorema 2

Si ha: $tan(x) = 1/cot(x)$, $0° < x < 90°$.

Per completare il discorso, consideriamo le funzioni inverse di seno e coseno, anche se sono funzioni trigonometriche poco usate.

Definizione 6

Dato un triangolo rettangolo *ABC* di ipotenusa *BC*, chiamiamo **cosecante** di un suo angolo acuto il rapporto fra la misura dell'ipotenusa e la misura del cateto opposto all'angolo.

Notazione 6

La cosecante di un angolo x si indica con $csc(x)$. Si ha: $csc(\beta) = a/b$; $csc(\gamma) = a/c$.

Definizione 7

Dato un triangolo rettangolo *ABC* di ipotenusa *BC*, chiamiamo **secante** di un suo angolo acuto il rapporto fra la misura dell'ipotenusa e la misura del cateto adiacente all'angolo.

Notazione 7

La secante di un angolo x si indica con $sec(x)$. Si ha: $sec(\beta) = a/c$; $sec(\gamma) = a/b$.

Proprio per come abbiamo definito le precedenti funzioni, si ha la validità del seguente risultato.

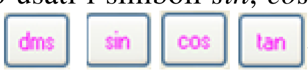
Teorema 3

Si ha: $csc(x) = 1/sec(x)$, $0° < x < 90°$.

Ovviamente secante e cosecante di un angolo acuto sono sempre numeri positivi maggiori di 1.

L'angolo storico

Tangente. La parola fu coniata da Thomas Finck in un'opera del 1583, *Geometria rotundi libri* XIII, e fu subito contestata da François Viete, perché il nome poteva provocare confusione con quello di retta tangente. Ciononostante tale vocabolo è rimasto fino ai nostri giorni. In effetti la funzione viene considerata per la prima volta dall'arabo Alhabas, vissuto nell'ottavo secolo d.C:, che la usa per calcolare la lunghezza dell'ombra di un bastone e proprio per questo fatto, prima di Finck la tangente era nota come *umbra recta*. Lo stesso Fincke propose anche il simbolo *tan* seguito da un punto, invece Edmund Gunter nel 1624 lo scrisse privo del punto. Altri a usare lo stesso simbolo furono William Oughtred e Hérigone.
Cotangente. È un abbreviazione di *complementi tangens*. Il termine fu coniato in latino, *cotangens*, da Edmund Gunter nella stessa opera del 1620 nella quale aveva introdotto il termine di coseno. Il simbolo *cot* si trova invece nello stesso lavoro del 1674 di Sir Jonas Moore, nel quale questi introdusse il simbolo per il coseno. Il suo primo uso è dovuto sempre all'arabo Alhabas, nello stesso problema del calcolo dell'ombra prodotta da un bastone. Prima di Gunter essa era nota come *umbra versa*.
Secante. Il nome proviene da un altro problema proposto e risolto da Alhabas: determinare la linea fittizia che congiunge l'estremità di un bastone con l'estremità della sua ombra. Questo nome è stato usato quindi poiché la detta linea taglia, seca, l'aria. Anche questo termine è dovuto a Thomas Finck, nella stessa opera del 1583.
Cosecante. Deriva dal vocabolo *complementi secans*. Non è certo chi introdusse il termine, qualcuno pensa sia stato Rheticus nel 1596, altri pensano sia merito di Edmund Gunter qualche anno più tardi. Il primo simbolo usato fu csc, in un testo del 1881.

Prima di proseguire osserviamo che non vi è accordo universale per i simboli delle funzioni trigonometriche. Così spesso in Italia piuttosto che *sin* si scrive *sen*; nel caso della tangente i simboli usati sono anche più vari: *tan*, *tang*, *tg*. Analogo discorso per la cotangente: *cotan*, *cotg*, *cot* e per secante e cosecante. In tutte le calcolatrici vengono usati i simboli *sin*, *cos* e *tan* (come mostrato nella figura della calcolatrice del sistema operativo Windows 

), perciò preferiamo usare questi, che hanno anche la caratteristica di essere sigle tutte formate da tre lettere.

Vale anche un altro importante risultato.

Teorema 4

Si ha: $tan(x) = sin(x)/cos(x)$, $0° < x < 90°$.

Dimostrazione. Per definizione abbiamo detto che $tan(\beta) = b/c$. Ma possiamo anche scrivere:

$$tan(\beta) = b/c = b/a \cdot a/c = sin(\beta) \cdot 1/cos(\beta) = sin(\beta)/cos(\beta)$$

Lasciamo per esercizio la dimostrazione del seguente risultato.

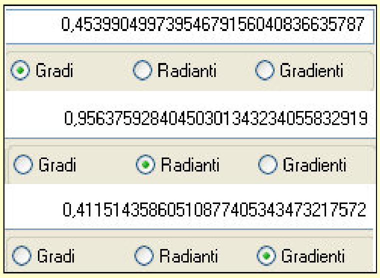
Teorema 5

Si ha: $cot(x) = cos(x) / sin(x)$, $0° < x < 90°$.

Dopo avere definito le funzioni trigonometriche dobbiamo anche stabilire come possono calcolarsi. Nei tempi antichi diversi studiosi hanno costruito delle tavole trigonometriche, in cui si trovavano i valori di seno, coseno e tangente di angoli acuti con precisioni prefissate. I metodi di costruzione sono stati diversi, che sono stati migliorati con il passare del tempo. Finché non si è arrivati alla costruzione delle calcolatrici scientifiche, che hanno lo stesso scopo delle tavole, ma sono certamente di uso più facile e più rapido.
L'uso delle calcolatrici è diverso a seconda dei vari modelli e marche. Per il calcolo del seno e del coseno di un dato angolo il metodo usato dalle calcolatrici più recenti è quello di digitare nello stesso ordine di scrittura. Per esempio se volessimo calcolare *sin*(57°), digiteremmo intanto il tasto con la scritta **sin** quindi il valore **57**. Si deve però fare attenzione che l'unità di misura sia quella corretta, dato che le calcolatrici possono calcolare in 3 diverse unità di misura: gradi, radianti e gradienti. Anche in questo caso dipende dalla calcolatrice usata, come variare l'unità di misura, così come vedere l'unità di misura effettiva. In genere i gradi sessagesimali sono scritti sul display della calcolatrice con una piccola **D** o con la scritta **DEG**.
Inoltre sulle calcolatrici, come sulle tavole, sono presenti solo i tasti relativi alle funzioni *sin, cos* e *tan*. Non sono presenti i tasti per secante, cosecante e cotangente, ciò perché questi si possono ottenere mediante coseno, seno e tangente rispettivamente.

Esempio 4

- Per calcolare il valore del seno di 27°, dobbiamo intanto controllare se sul display appare la scritta **DEG**, ossia se il calcolo dei gradi viene effettuato nel sistema sessagesimale e poi si procede come stabilito dalla calcolatrice in uso. In figura vediamo cosa accade nelle tre diverse unità di misura, usando la calcolatrice Windows.



- Si voglia calcolare il coseno di 32°23′45″. Ci si deve informare, leggendo sul manuale della calcolatrice utilizzata, come si fa a introdurre il precedente valore. In ogni caso un metodo universale è quello di portare tutti i valori in gradi, ossia di inserire il numero come 32 + 23/60 + 45/3600, dato che 60 primi e 3600 secondi formano un grado.

- Si voglia calcolare la cotangente di 47°12′36″. Introdotto il valore dell'angolo, nei modi suggeriti dal manuale della calcolatrice o come visto in precedenza, si calcola la sua tangente, ottenendo 1.080279909. A questo punto si digita il tasto corrispondente al simbolo $1/x$ e si ottiene 0.925686011 che è perciò il valore approssimato cercato.

Un altro importante problema da risolvere è quello cosiddetto inverso, cioè determinare il valore dell'angolo di cui conosciamo una sua funzione trigonometrica.

Esempio 5

Vogliamo sapere quale angolo x ha seno uguale a 0,12. Nella nostra calcolatrice osserviamo che in piccolo sopra i tasti *sin*, *cos* e *tan*, scritti in un dato colore, vi sono sin^{-1}, cos^{-1}, tan^{-1}. Il colore in cui sono scritti è lo stesso di un tasto particolare, il cui nome è 2nd oppure INV o anche Shift o un altro nome. Ciò significa che se vogliamo usare tali tasti dobbiamo prima premere questo tasto. In questo caso quindi premeremo il detto tasto, poi **sin** e infine 0.12, ottenendo 6.89210257 (ovviamente se siamo in **DEG**). Il risultato è espresso solo in gradi, se volessimo scriverlo in gradi, primi e secondi, anche in questo caso c'è un opportuno tasto (di solito indicato con DMS), che ci permette di dire che l'angolo è circa 6°53′32″.

L'angolo storico

Le funzioni trigonometriche inverse. Il primo a utilizzare dei simboli per tali funzioni fu Daniel Bernoulli, che nel 1729 scrisse A S. per indicare l'arcoseno, cioè l'inversa della funzione seno. In seguito, Eulero nel 1736 usò **A t** per l'arcotangente e, nel 1737, **A sin** per l'arcoseno. Condorcet nel 1769 scriveva **arc(sin. =** ***x*****)**. Mentre Scherffer nel 1772 usava **arc. tang**. La notazione che abbiamo usato noi e che si trova spesso sulle calcolatrici, quella cioè con l'esponente – 1, come $\boldsymbol{sin^{-1}}$, fu introdotta da William Herschel nel 1813.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Consideriamo il classico triangolo rettangolo i cui lati sono lunghi 3, 4 e 5 unità. Quanto valgono le funzioni trigonometriche degli angoli acuti di questo triangolo?

Basta applicare le definizioni, avremo, indicando l'ipotenusa con a, con b e c i cateti di 3 e 4 rispettivamente: $sin(\beta) = cos(\gamma) = b/a = 3/5 = 0,6$; $cos(\beta) = sin(\gamma) = c/a = 4/5 = 0,8$;

$tan(\beta) = cot(\gamma) = b/c = 3/4 = 0,75$; $cot(\beta) = tan(\gamma) = c/b = 4/3 \approx 1,3$;

$sec(\beta) = csc(\gamma) = a/c = 5/4 = 1,25$; $csc(\beta) = sec(\gamma) = a/b = 5/3 \approx 1,7$

Determinare le funzioni trigonometriche degli angoli acuti dei triangoli rettangoli di cui forniamo le misure dei cateti (i risultati nell'ordine sono: seno, coseno, tangente, cotangente, secante e cosecante tutti dell'angolo β)

Livello 1

1. $b = 5$, $c = 12$ [5/13; 12/13; 5/12; 12/5; 13/12; 13/5] $b = 2$, $c = 3$ $\left[\frac{2}{\sqrt{13}};\frac{3}{\sqrt{13}};\frac{2}{3};\frac{3}{2};\frac{\sqrt{13}}{3};\frac{\sqrt{13}}{2}\right]$

2. $b = 2,3$, $c = 4,7$ [≈ 0,4; ≈ 0,9; ≈ 0,5; ≈ 2; ≈ 1,1; ≈ 2,3] $b = \sqrt{2}$, $c = \sqrt{3}$ $\left[\sqrt{\frac{2}{5}};\sqrt{\frac{3}{5}};\sqrt{\frac{2}{3}};\sqrt{\frac{3}{2}};\sqrt{\frac{5}{3}};\sqrt{\frac{3}{2}}\right]$

3. $b = ½$, $c = ¾$ $\left[\frac{2}{\sqrt{13}};\frac{3}{\sqrt{13}};\frac{2}{3};\frac{3}{2};\frac{\sqrt{13}}{3};\frac{\sqrt{13}}{2}\right]$ $b = 1$, $c = 2$ $\left[\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{1}{2};2;\sqrt{5};\frac{2}{\sqrt{5}}\right]$

Lavoriamo insieme

Quanto misurano gli angoli interni del triangolo rettangolo i cui lati sono lunghi 3, 4 e 5 unità? Basta usare una qualsiasi delle sei funzioni trigonometriche e usare una calcolatrice scientifica.

$$\beta = sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) = tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = cot^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = sec^{-1}\left(\frac{5}{4}\right) = csc^{-1}\left(\frac{5}{3}\right) \approx 36°52'12"$$

$$\gamma = sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) = cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = cot^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = sec^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) = csc^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) \approx 53°7'48"$$

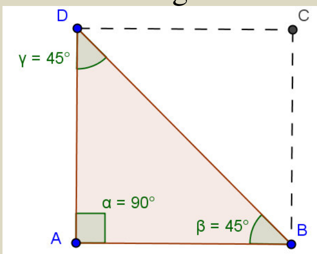
Determinare valori approssimati al secondo decimale degli angoli acuti dei triangoli rettangoli di cui forniamo le misure dei cateti.

Livello 1

4. $b = 5$, $c = 8$ [$\beta \approx 32°19''$; $\gamma \approx 57°59'41''$] $b = 4$, $c = 7$ [$\beta \approx 29°44'42''$; $\gamma \approx 60°15'18''$]
5. $b = 1{,}32$, $c = 2{,}54$ [$\beta \approx 27°27'37''$; $\gamma \approx 62°32'23''$] $b = 1$, $c = 2$ [$\beta \approx 26°33'54''$; $\gamma \approx 63°26'6''$]
6. $b = \sqrt{5}, c = \sqrt{3}$ [$\beta \approx 39°13'53''$; $\gamma \approx 50°46'7''$] $b = 3/5$, $c = 6/7$ [$\beta \approx 34°59'31''$; $\gamma \approx 55°29''$]

Lavoriamo insieme

Per certi angoli risulta particolarmente semplice determinare i valori delle relative funzioni trigonometriche.



Lo abbiamo già visto per gli angoli di 30° e 60°, vale anche per quelli di 45°.
Infatti un triangolo rettangolo i cui angoli sono di 45° è anche isoscele, quindi è metà di un quadrato, ma allora facilmente si ha: $sin(45°) = cos(45°) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\cancel{\overline{AC}}}{\cancel{\overline{AC}} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Utilizzando poi le relazioni fra le diverse funzioni abbiamo anche:

$$tan(45°) = cot(45°) = \frac{sin(45°)}{cos(45°)} = \frac{cos(45°)}{sin(45°)} = 1;$$

$$sec(45°) = csc(45°) = \frac{1}{cos(45°)} = \frac{1}{sin(45°)} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

Semplificare le seguenti espressioni.

Livello 1

7. $tan(30°)$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ $cot(30°)$ $\left[\sqrt{3}\right]$ $sec(30°)$ $\left[\frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}\right]$ $csc(30°)$ [2] $tan(60°)$ $\left[\sqrt{3}\right]$ $cot(60°)$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

8. $\frac{sin(30°)+1}{2-cos(45°)} + tan(45°) - cot(60°)$ $\left[\frac{78-14\cdot\sqrt{3}+9\cdot\sqrt{2}}{42}\right]$

9. $\frac{1+cot(30°)}{sec(45°)} + \frac{1-tan(30°)}{csc(60°)}$ $\left[\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{2}-1}{2}\right]$

10. $cos(60°)\cdot\frac{1-sin(45°)}{1+cos(45°)} - csc(30°)\cdot\frac{1+tan(30°)}{1-cot(30°)}$ $\left[\frac{21-6\cdot\sqrt{2}+8\cdot\sqrt{3}}{6}\right]$

11. $\frac{tan(45°)}{1+sec(30°)} + cot(60°) - csc(45°)\cdot sin(30°) - \frac{1}{2+cos(60°)}$ $\left[\frac{-102+70\cdot\sqrt{3}-15\cdot\sqrt{2}}{30}\right]$

12. $\frac{sec(30°)+1}{3+csc(45°)} + tan(30°) - 2\cdot cos(60°)\cdot sin(45°) + \frac{4}{1-cot(60°)}$ $\left[\frac{270+110\cdot\sqrt{3}-27\cdot\sqrt{2}-4\cdot\sqrt{6}}{42}\right]$

13. $\frac{cos(30°)-1}{1+csc(45°)} + cot(45°) - tan(30°)\cdot sin(60°) + \frac{4}{1-sec(30°)}$ $\left[\frac{-21-17\cdot\sqrt{3}-2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right]$

14. $[1 - sin(60°) \cdot cos(30°)]^2$ [1/16] $\frac{tan(30°)+cot(60°)}{\left[sin(30°)+cos(60°)\right]^2}$ $\left[\frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}\right]$

15. $\dfrac{3\cdot cos(45°)}{1+sin(30°)}+cot(60°)-csc(45°)\cdot sec(30°)+\dfrac{1}{2-tan(45°)}$ $\left[\dfrac{\sqrt{3}\cdot\left(1-2\cdot\sqrt{2}\right)}{3}+1+\sqrt{2}\right]$

16. $\dfrac{csc(30°)-2}{sin(45°)}+3-tan(30°)+cos(30°)\cdot cot(45°)+\dfrac{2}{3-sec(60°)}$ $\left[\dfrac{30+\sqrt{3}}{6}\right]$

17. $\dfrac{tan^2(30°)}{1+sec^2(45°)}-csc(45°)\cdot sin(30°)-\dfrac{1}{2+cos(60°)}$ $\left[-\dfrac{45\cdot\sqrt{2}+26}{90}\right]$

18. $\dfrac{cos(30°)-1}{1+cot(45°)}+csc(30°)-tan(30°)\cdot sin(60°)+\dfrac{4}{1-cot(30°)}$ $\left[-\dfrac{7\cdot\sqrt{3}+4}{4}\right]$

19. $[sin(30°)+1]^2-[2-cos(45°)]\cdot[2+tan(45°)]$ $\left[\dfrac{6\cdot\sqrt{2}-15}{4}\right]$

20. $\dfrac{sin^3\left(60°\right)-cos^3\left(60°\right)}{sin\left(30°\right)+cos\left(30°\right)}$ $\left[\dfrac{5-2\cdot\sqrt{3}}{4}\right]$ $\dfrac{tan^4\left(60°\right)-cot^4\left(30°\right)}{sec^2\left(60°\right)+csc^2\left(30°\right)}$ [0]

Negli esercizi seguenti, gli argomenti delle funzioni sono tutti angoli acuti, tali che le espressioni abbiano significato

Livello 2

21. $sin(90°-\alpha)+cos(\alpha)+tan(\alpha)\cdot cot(90°-\alpha)$ $\left[\dfrac{2\cdot cos^3\left(\alpha\right)+sin^2\left(\alpha\right)}{cos^2\left(\alpha\right)}\right]$

22. $[sin(\alpha)+cos(\alpha)]^2$ $[1+2\cdot sin(\alpha)\cdot cos(\alpha)]$ $sin^2(\alpha)-cos^2(90°-\alpha)$ [0]

23. $sin(\beta)\cdot sec(\beta)+cos(\alpha)\cdot csc(90°-\alpha)$ $[1+tan(\beta)]$ $\dfrac{sin^2\left(\alpha\right)-cos^2\left(\alpha\right)}{sin\left(90°-\alpha\right)-cos\left(90°-\alpha\right)}$ $[-sin(\alpha)-cos(\alpha)]$

24. $\dfrac{sin^3\left(\alpha\right)+tan^3\left(\beta\right)}{sin^2\left(\alpha\right)-cos\left(90°-\alpha\right)\cdot cot\left(90°-\beta\right)+tan^2\left(\beta\right)}$ $[sin(\alpha)+tan(\beta)]$

25. $\dfrac{sec^6\left(\gamma\right)-cot^3\left(\delta\right)}{sec^4\left(\gamma\right)+sec^2\left(\gamma\right)\cdot cot\left(\delta\right)+tan^2\left(90°-\delta\right)}$ $[sec^2(\gamma)-cot(\delta)]$

26. $\dfrac{\left[sin\left(x\right)-cos\left(y\right)\right]^4}{sin^3\left(x\right)-3\cdot sin^2\left(x\right)\cdot cos\left(y\right)+3\cdot sin\left(x\right)\cdot cos^2\left(y\right)-cos^3\left(y\right)}$ $[sin(x)-cos(y)]$

27. $\dfrac{tan^6\left(x\right)-cot^6\left(x\right)}{\left[tan^2\left(x\right)-cot^2\left(x\right)\right]\cdot\left[tan^4\left(x\right)+1+cot^4\left(x\right)\right]}$ [1]

Livello 3

28. Tenuto conto che un triangolo rettangolo i cui angoli acuti misurano 18° e 72°, può considerarsi metà di un triangolo in cui il cateto adiacente all'angolo di 72° è lato del decagono regolare inscritto nella circonferenza il cui raggio è l'ipotenusa e che tale lato è sezione aurea del raggio, cioè è lunga $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot r$, determinare le funzioni trigonometriche di 18° e 72°.

$$\left[\begin{array}{l} sin\left(18°\right)=cos\left(72°\right)=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4};cos\left(18°\right)=sin\left(72°\right)=\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}; \\ tan\left(18°\right)=cot\left(72°\right)=\sqrt{\dfrac{5-2\cdot\sqrt{5}}{5}};tan\left(72°\right)=cot\left(18°\right)=\sqrt{5+2\cdot\sqrt{5}} \\ sec\left(18°\right)=csc\left(72°\right)=\sqrt{\dfrac{10-2\cdot\sqrt{5}}{5}};csc\left(18°\right)=sec\left(72°\right)=1+\sqrt{5} \end{array}\right]$$

29. Si calcoli, senza l'aiuto della calcolatrice, il valore di $sin^2(20°) + sin^2(70°)$. [1]
30. Tenuto conto del precedente esercizio se $sin^2(x) + sin^2(y) = 1$, con x e y angoli acuti, in che relazione sono x e y? [Sono complementari]
31. Si calcoli, senza l'aiuto della calcolatrice, il valore di $cos^2(35°) + cos^2(55°)$. [1]
32. Tenuto conto del precedente esercizio se $cos^2(x) + cos^2(y) = 1$, con x e y angoli acuti, in che relazione sono x e y? [Sono complementari]
33. Esprimere $\frac{sin(32°)}{sin(58°)}$ mediante la funzione tangente. [$tan(32°)$]
34. Tenuto conto del precedente esercizio se $\frac{sin(x)}{sin(y)} = tan(x)$, con x e y angoli acuti, in che relazione sono x e y? [Sono complementari]
35. Esprimere $\frac{cos(48°)}{cos(42°)}$ mediante la funzione cotangente. [$cot(48°)$]
36. Tenuto conto del precedente esercizio se $\frac{cos(x)}{cos(y)} = cot(x)$, con x e y angoli acuti, in che relazione sono x e y? [Sono complementari]
37. Sapendo che $[cos(10°) + cos(80°)]^2 = 1 + sin(20°)$, determinare una relazione fra i coseni dei tre angoli. [$cos(10°) \cdot cos(80°) = ½ \cdot cos(20°)$]
38. Tenuto conto del precedente esercizio semplificare $[sin(10°) + sin(80°)]^2$. [$1 + sin(20°$]
39. Determinare una relazione fra secante e cosecante dello stesso angolo acuto.

$$\left[sec(x) = \frac{csc(x)}{\sqrt{csc^2(x)-1}}; csc(x) = \frac{sec(x)}{\sqrt{sec^2(x)-1}}\right]$$

Tenendo conto del Teorema di Pitagora espresso in forma trigonometrica, determinare una relazione fra

40. $cos^2(x)$ e $tan^2(x)$ $\left[\frac{1}{cos^2(x)} = 1 + tan^2(x)\right]$ $sin^2(x)$ e $cot^2(x)$ $\left[\frac{1}{sin^2(x)} = 1 + cot^2(x)\right]$

Lavoriamo insieme

Di un angolo acuto conosciamo il seno, pari a 0,71, vogliamo determinare un valore approssimato delle altre 5 funzioni trigonometriche dello stesso angolo.
Possiamo usare il Teorema 1, per determinare il coseno dell'angolo.

$$cos(x) = \sqrt{1 - sin^2(x)} = \sqrt{1 - 0,71^2} \approx 0,704$$

Per secante e cosecante basta applicare invece il Teorema 3.

$$sec(x) = \frac{1}{cos(x)} = \frac{1}{0,71} \approx 1,408; csc(x) = \frac{1}{sin(x)} \approx \frac{1}{0,704} \approx 1,420$$

Infine per tangente e cotangente il Teorema 4.

$$tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)} \approx \frac{0,704}{0,71} \approx 0,992; cot(x) = \frac{cos(x)}{sin(x)} \approx \frac{0,71}{0,704} \approx 1,001$$

Potevamo anche usare la calcolatrice, determinando il valore dell'angolo: $x = cos^{-1}(0,71) \approx 44°45'54''$. Quindi, sempre con la calcolatrice calcoleremo seno e tangente e poi determineremo le altre tre funzioni come inverse di queste: $sin(44°45'54'') \approx 0,704$; $tan(44°45'54'') \approx 0,992$. Ovviamente i risultati possono differire, anche se di poco. Concludiamo osservando che, essendo l'angolo molto vicino a 45°, i valori delle funzioni complementari sono fra loro molto vicini.

Determinare i valori delle altre 5 funzioni trigonometriche, mediante la data funzione. Determinare poi, usando la calcolatrice, un valore approssimato dell'angolo acuto dato.

***Livello* 1**

41. $sin(x) = 7/20$ $\left[cos(x)=\frac{3\cdot\sqrt{39}}{20};tan(x)=\frac{7\cdot\sqrt{39}}{117};cot(x)=\frac{3\cdot\sqrt{39}}{7};sec(x)=\frac{20\cdot\sqrt{39}}{117};csc(x)=\frac{20}{7}\right]$

42. $cos(y) = 27/50$ $\left[sin(y)=\frac{\sqrt{1771}}{50};tan(y)=\frac{\sqrt{1771}}{27};cot(y)=\frac{27}{\sqrt{1771}};sec(y)=\frac{50}{27};csc(y)=\frac{50}{\sqrt{1771}}\right]$

43. $csc(z) = 31/20$ $\left[sin(z)=\frac{20}{31};cos(z)=\frac{\sqrt{561}}{31};tan(z)=\frac{20\cdot\sqrt{561}}{561};cot(z)=\frac{\sqrt{561}}{20};sec(z)=\frac{31\cdot\sqrt{561}}{561}\right]$

44. $sin(x) = 3/4$ $\left[cos(x)=\frac{7}{4};tan(x)=\frac{3\cdot\sqrt{7}}{7};cot(x)=\frac{\sqrt{7}}{3};sec(x)=\frac{4\cdot\sqrt{7}}{7};csc(x)=\frac{4}{3}\right]$

45. $cos(y) = 21/25$ $\left[sin(y)=\frac{2\cdot\sqrt{46}}{25};tan(y)=\frac{2\cdot\sqrt{46}}{21};cot(y)=\frac{21}{2\sqrt{46}};sec(y)=\frac{25}{21};csc(y)=\frac{25}{2\sqrt{46}}\right]$

46. $sec(z) = 107/50$ $\left[sin(z)=\frac{\sqrt{8949}}{107};cos(z)=\frac{50}{107};tan(z)=\frac{\sqrt{8949}}{50};cot(z)=\frac{50}{\sqrt{8949}};csc(z)=\frac{107}{\sqrt{8949}}\right]$

47. $sin(x) = 99/100$ $\left[cos(x)=\frac{\sqrt{199}}{100};tan(x)=\frac{99\cdot\sqrt{199}}{199};cot(x)=\frac{\sqrt{199}}{99};sec(x)=\frac{100}{\sqrt{199}};csc(x)=\frac{100}{99}\right]$

48. $cos(y) = 1/100$ $\left[sin(y)=\frac{3\cdot\sqrt{1111}}{100};tan(y)=3\cdot\sqrt{1111};cot(y)=\frac{\sqrt{1111}}{3333};sec(y)=100;csc(y)=\frac{100}{3\cdot\sqrt{1111}}\right]$

49. $csc(z) = 7/4$ $\left[sin(z)=\frac{4}{7};cos(z)=\frac{\sqrt{33}}{7};tan(z)=\frac{4\cdot\sqrt{33}}{33};cot(z)=\frac{\sqrt{33}}{4};sec(z)=\frac{7\cdot\sqrt{33}}{33}\right]$

50. $sin(x) = 1{,}5$ [$\varnothing$] $cos(y) = 0{,}33$ [$sin(y) \approx 0{,}94$; $tan(y) \approx 2{,}86$; $cot(y) \approx 0{,}35$; $sec(y) \approx 3{,}03$; $csc(y) \approx 1{,}06$]

51. $sec(z) = 3{,}18$ [$sin(z) \approx 0{,}95$; $cos(z) \approx 0{,}31$; $tan(z) \approx 3{,}02$; $cot(z) \approx 0{,}33$; $csc(z) \approx 1{,}05$] $csc(z) = 0{,}31$ [$\varnothing$]

52. $sin(x) = 0{,}12$ [$cos(x) \approx 0{,}99$; $tan(x) \approx 0{,}12$; $cot(x) \approx 8{,}27$; $sec(x) \approx 1$; $csc(x) \approx 8{,}33$] $cos(y) = 1{,}23$ [$\varnothing$]

Tenendo conto degli esercizi precedenti, e supposto *x* un angolo acuto, determinare

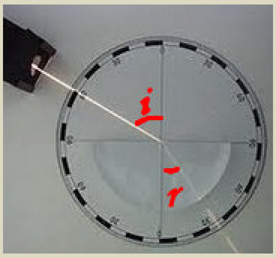
Livello 2

53. $cos(x)$, se $tan(x) = 3{,}14$ [$\approx 0{,}96$] $tan(x)$, se $cos(x) = 0{,}31$ [$\approx 3{,}07$]

54. $cot(x)$, se $sin(x) = 0{,}19$ [$\approx 5{,}17$] $sin(x)$, se $cot(x) = 1{,}23$ [$\approx 0{,}63$]

Lavoriamo insieme

Un raggio di luce che passa da un mezzo a un altro non opaco né riflettente (ovvero che permette il passaggio del raggio), muta la sua velocità poiché trova un diverso ostacolo e pertanto devia la direzione. E ciò accade secondo la cosiddetta legge di Snell–Descartes: $\frac{sin(\hat{i})}{sin(\hat{r})}=\frac{n_2}{n_1}$, in cui $\hat{i}$ è l'angolo detto di incidenza, che il raggio di partenza forma con la perpendicolare alla linea di separazione dei due mezzi, $\hat{r}$ è l'angolo detto di rifrazione, che il raggio deviato forma con la stessa perpendicolare. n_1 e n_2 invece sono i cosiddetti indici di rifrazione nei due mezzi, ossia il rapporto fra la velocità *c* della luce nel vuoto e la velocità della luce nel mezzo. Essendo *c* il massimo valore possibile gli indici di rifrazione sono sempre non inferiori a 1.



Vogliamo trovare l'angolo $\hat{r}$, sapendo che $\hat{i} = 30°$, $n_1 = 1$, $n_2 = 1{,}4$.

Abbiamo: $\frac{sin(\hat{i})}{sin(\hat{r})}=\frac{n_2}{n_1}\Rightarrow sin(\hat{r})=\frac{n_1}{n_2}\cdot sin(\hat{i})\Rightarrow \hat{r}=sin^{-1}\left(\frac{n_1}{n_2}\cdot sin(\hat{i})\right);sin^{-1}\left(\frac{1}{1,4}\cdot sin(30°)\right)\approx 20°55'29''$

Livello 3

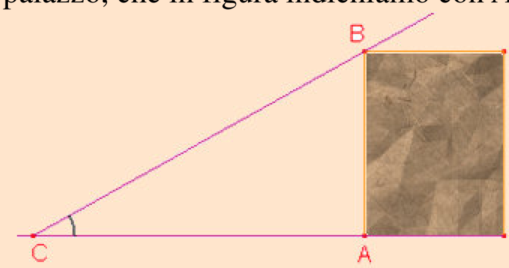
Un raggio passa un mezzo di indice a a uno di indice b. L'angolo di incidenza è ampio α, quello di rifrazione è ampio β. Risolvi i seguenti quesiti.

55. $a = 1$; $b = 1,23$; $\alpha = 45°$; $\beta = ?$ [≈ 35°5'29''] $a = 1,32$; $b = 1,12$; $\alpha = 60°$, $\beta = ?$ [Impossibile]
56. $a = 1,32$; $b = 1,12$; $\alpha = 30°$, $\beta = ?$ [≈ 36°6'23''] $a = 1,37$; $b = 1,05$; $\alpha = ?$, $\beta = 45°$ [≈ 32°48'58'']
57. $a = 1,26$; $b = 1,39$; $\alpha = ?$, $\beta = 30°$ [≈ 33°28′34′′] $a = 1$; $b = ?$; $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$ [≈ 1,22]
58. $a = 1$; $b = ?$; $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$ [Impossibile]
59. Passando da un mezzo di indice n_1 a uno di indice $n_2 > n_1$, in che relazione sono gli angoli di incidenza e di rifrazione? [$i > r$]
60. Passando da un mezzo di indice n_1 a uno di indice $n_2 < n_1$, in che relazione sono gli angoli di incidenza e di rifrazione? [$i < r$]
61. Se un raggio arriva perpendicolarmente a una superficie, quanto vale l'angolo di rifrazione? [Non vi è rifrazione, il raggio viene riflesso]
62. Quando il raggio passa da un mezzo più rifrangente n_1, a uno meno rifrangente n_2, esiste un angolo, detto limite, al di là del quale non vi è rifrazione ma vi è riflessione totale, ossia il raggio non passa ma si riflette nel primo mezzo. Quanto misura in generale tale angolo? $\left[sin^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)\right]$
63. Calcolare l'angolo limite per un raggio di luce che passa dal diamante (indice 2,419) all'acqua (indice 1,33). [≈ 33°21'15'']

Risoluzione dei triangoli rettangoli

Il problema

Vogliamo stabilire l'altezza di un palazzo, che in figura indichiamo con AB.



Per risolvere il problema precedente misuriamo la distanza dall'ingresso, A, a un punto prefissato C, allineato con la base del palazzo, quindi, mediante un opportuno strumento misuriamo l'angolo indicato $A\hat{C}B$. Infatti dato che ABC è un triangolo rettangolo, possiamo risolverlo, in particolare per trovare la misura del suo cateto AB, usando i concetti introdotti nel paragrafo precedente. Dobbiamo considerare le relazioni che ci sono fra AB e i dati noti, cioè AC e $A\hat{C}B$. Abbiamo perciò: $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = tan\left(A\hat{C}B\right) \Rightarrow \overline{AB} = \overline{AC} \cdot tan\left(A\hat{C}B\right)$.

Pertanto, grazie alle definizioni delle funzioni trigonometriche, possiamo risolvere i triangoli rettangoli di cui sono note le misure di due suoi lati, o di un suo lato e di un suo angolo acuto.

Esempio 6

- Si voglia risolvere il triangolo rettangolo i cui cateti misurano 3 e 4 unità.
  Grazie al Teorema di Pitagora determiniamo la misura, uguale a 5 unità, dell'ipotenusa. Per quel che riguarda le misure degli angoli, abbiamo: $sin(\beta) = 3/5 = 0,6 \Rightarrow \beta \approx 36°52′12″$, il valore dell'angolo è ottenuto mediante la calcolatrice. Data la complementarità degli angoli acuti di un triangolo rettangolo, abbiamo: $\gamma \approx 53°07′48″$.
- Si voglia risolvere il triangolo rettangolo in cui un cateto misura 7 unità e l'ipotenusa 9 unità.

Sempre con il Teorema di Pitagora troviamo la misura dell'altro cateto:

$$\sqrt{9^2-7^2}=\sqrt{81-49}=\sqrt{32}=4\cdot\sqrt{2}\,.$$

Passiamo agli angoli: $tan(\beta)=\dfrac{7}{4\cdot\sqrt{2}}\Rightarrow\beta\approx 51°3'27'',\gamma=90°-\beta\approx 38°56'33''$.

- Si voglia risolvere il triangolo rettangolo in cui un cateto misura 6 unità e l'angolo acuto opposto 31°. Chiaramente l'altro angolo acuto è 59°.

  Il rapporto tra il cateto dato e l'ipotenusa è sin(31°), quindi l'ipotenusa è $\dfrac{6}{sin(31°)}\approx 11,65$. Troviamo l'altro cateto sempre usando le relazioni trigonometriche: $\dfrac{6}{x}=tan(31°)\Rightarrow x=\dfrac{6}{tan(31°)}\approx 9,99$.

  Abbiamo preferito effettuare il calcolo in questo modo perché usando il teorema di Pitagora avremmo usato un valore approssimato, quindi avremmo approssimato due volte, invece che una volta sola come con la formula precedente.

L'angolo storico

La trigonometria ha origini molto remote. Già nella matematica babilonese si trovano dei risultati che legano fra loro i rapporti di lati di triangoli fra loro simili. L'interesse verso questi concetti aumentò per risolvere questioni legate ai calcoli astronomici, quali la misurazione del diametro terrestre o le distanze della Terra dal Sole e dalla Luna. Da un punto di vista storico i primi risultati che possono essere considerati trigonometria per così dire cosciente, si trovano in Aristarco, vissuto nel II secolo a.C. e in Eratostene (quello del famoso crivello), che fu il primo a fornire un valore, abbastanza buono per i suoi tempi, della misura della circonferenza terrestre. Generalmente è Ipparco di Nicea (circa 180 – 125 a.C.) a essere considerato il padre della trigonometria, poiché a lui è dovuta la prima tavola trigonometrica, la quale non trattava direttamente le nostre attuali funzioni trigonometriche, ma valori di corde che sottendevano dati angoli al centro di una circonferenza. In seguito Menelao costruì ancora una tavola che calcolava il valore di tali corde. Dobbiamo ricordare anche Claudio Tolomeo, autore di una *Sintassi matematica,* che era una sintesi delle conoscenze astronomiche della sua epoca (il II secolo d.C.) e poi dell'*Almagesto* (che significa il più grande). Proprio quest'opera ebbe notevole importanza per l'evoluzione della trigonometria. Dobbiamo attendere però fino al VII secolo, con l'indiano Brahmagupta per avere una tavola dei seni come la intendiamo adesso. In seguito furono gli Arabi a diffondere e sviluppare la trigonometria. Abbiamo già visto che la parola seno deriva appunto, anche se per un errore, da una parola araba, che era a sua volta derivata da una parola indiana. Nelle precedenti note storiche abbiamo anche visto le difficoltà che si sono avute nei secoli affinché si affermassero i termini e i simboli per le funzioni trigonometriche, e abbiamo anzi sottolineato il fatto che a tutt'oggi non vi è accordo comune per quel che riguarda i simboli. Lo stesso termine trigonometria apparve solamente nel 1595 in un libro del matematico Pitiscus, intitolato proprio *Trigonometria*.

Vediamo un esempio di risoluzione di un problema trigonometrico.

Esempio 7

Risolvere un triangolo rettangolo del quale conosciamo la somma dei suoi cateti, che vale 17, e la misura dell'angolo acuto maggiore, che vale circa 67° 22′48″.

Possiamo impostare il seguente sistema: $\begin{cases} b+c=17 \\ \dfrac{b}{c}=tan(67°22'48'') \end{cases}$, in cui abbiamo indicato con *b* la misura del cateto maggiore. Il sistema diviene allora: $\begin{cases} b+c=17 \\ b\approx 2,4\cdot c \end{cases}$, le cui soluzioni sono $b = 12$ e $c = 5$.

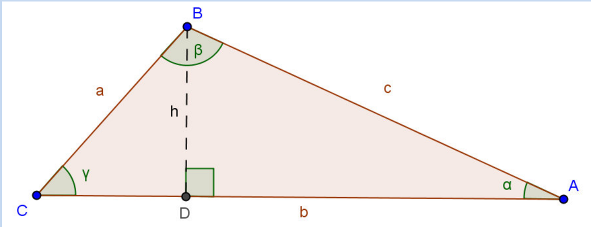
Usando il teorema di Pitagora troviamo a=13, mentre l'altro angolo acuto è circa 22°37′22″.

Possiamo determinare anche una formula per il calcolo dell'area di un triangolo qualsiasi, note che siano le misure di due lati e dell'angolo compreso fra i detti lati. Vale infatti il seguente

Teorema 6

La misura dell'area di un triangolo qualsiasi si ottiene mediante il semiprodotto delle misure di due lati per il seno dell'angolo da essi compreso.

Dimostrazione

Tracciamo l'altezza relativa a uno dei lati 

Calcoliamo l'area del triangolo: $S_{ABC} = ½ \cdot b \cdot h$. Abbiamo anche: $h = c \cdot sin(\alpha)$. Sostituiamo il risultato nel passo precedente: $S_{ABC} = ½ \cdot b \cdot c \cdot sin(\alpha)$. Dato che la scelta del lato e della relativa altezza è del tutto arbitraria, questa è la tesi.

Esempio 8

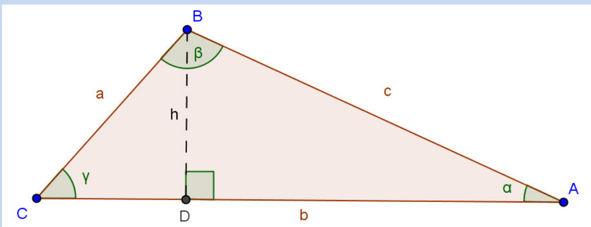
- Vogliamo trovare l'area di un triangolo in cui due lati sono lunghi 4 e 7 e l'angolo da essi compreso è 67°. Applicando la formula stabilita dal teorema precedente avremo: $S = ½ \cdot 4 \cdot 7\ sin(67°) \approx 12{,}89$.
- Di un triangolo sappiamo che due lati sono lunghi 3,21 e 6,14, mentre l'area è 8,24. Vogliamo sapere quanto misura l'angolo compreso dai lati noti. Basta applicare la formula inversa di quella data. $8{,}24 = \frac{1}{2} \cdot 3{,}21 \cdot 6{,}14 \cdot sin(x) \Rightarrow sin(x) = \frac{2 \cdot 8{,}24}{3{,}21 \cdot 6{,}14} \approx 0{,}836 \Rightarrow x \approx 56°44'9''$.

Possiamo trovare anche una relazione per il calcolo di un lato di un triangolo qualsiasi.

Teorema 7 (delle proiezioni)

La misura di un lato di un triangolo qualsiasi è data dalla somma dei prodotti dei rimanenti lati per il coseno degli angoli a essi adiacenti.

Dimostrazione

Tracciamo l'altezza relativa a uno dei lati 

abbiamo:

$$b = \overline{CD} + \overline{DA} = a \cdot cos(\gamma) + c \cdot cos(\alpha).$$

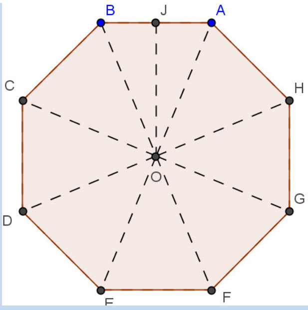
Possiamo anche fare di più, calcolando l'area di un poligono regolare.

Teorema 8

L'area di un poligono regolare di n lati è $n \cdot \frac{\ell^2}{4} \cdot cot\left(\frac{180°}{n}\right)$, dove ℓ è la misura del lato. O anche $\frac{n}{2} \cdot R^2 \cdot sin\left(\frac{360°}{n}\right)$, in cui r è il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo.

Dimostrazione

Consideriamo il caso particolare di un ottagono, ma la dimostrazione generale si tratta allo stesso modo. Consideriamo la circonferenza circoscritta al poligono.



Come si vede abbiamo diviso l'ottagono in 8 triangoli isosceli isometrici. Troviamo l'area di uno di questi triangoli, per esempio *AOB*. Avremo:

$$S = \overline{OJ} \cdot \overline{JB} = \overline{JB} \cdot cot\left(\frac{360°}{16}\right) \cdot \overline{JB} = \overline{JB}^2 \cdot cot(22°30') = \frac{\ell^2}{4} \cdot cot(22°30')$$

perciò l'area dell'ottagono è $2\ell^2 \cdot cot(22°30')$.

Se ripetiamo il procedimento per un poligono di *n* lati, l'angolo di riferimento misurerà 360°/(2*n*), l'area di un triangolo sarà $\frac{\ell^2}{4} \cdot cot\left(\frac{180°}{n}\right)$ e perciò l'area del poligono sarà *n* volte questa, cioè $n \cdot \frac{\ell^2}{4} \cdot cot\left(\frac{180°}{n}\right)$.

Allo stesso modo si dimostra la seconda relazione.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Di un triangolo rettangolo conosciamo la misura della sua ipotenusa, 13, e quella di un angolo acuto, 31°. Vogliamo risolvere il triangolo.

L'altro angolo acuto misura ovviamente 90° – 31° = 59°. Indicando con *a* l'ipotenusa e con β l'angolo dato, abbiamo: $b = a \cdot sin(\beta) = 13 \cdot sin(31°) \approx 6{,}7$; $c = 13 \cdot cos(31°) \approx 11{,}1$. Possiamo verificare la validità del Teorema di Pitagora: $\sqrt{6{,}7^2 + 11{,}1^2} \approx 13$.

Ovviamente, essendo i dati approssimati non otteniamo esattamente la misura dell'ipotenusa.

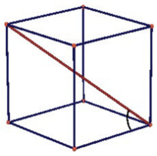
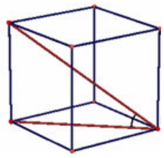
Risolvere i triangoli rettangoli di ipotenusa *a*, noti i seguenti enti

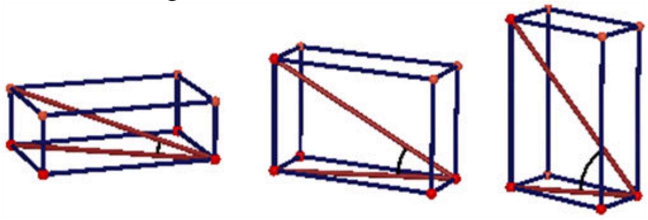
***Livello* 1**

1. $a = 7$, $\beta = 51°$ [$\gamma = 39°$; $b \approx 5{,}44$; $c \approx 4{,}41$] $a = 9$, $\gamma = 78°$ [$\beta = 12°$; $b \approx 1{,}87$; $c \approx 8{,}80$]
2. $a = 1{,}23$, $\beta = 13°21'45''$ [$\gamma = 76°38'15''$; $b \approx 0{,}28$; $c \approx 1{,}20$]
3. $b = 2{,}7$, $\beta = 48°24'3''$ [$\gamma = 41°35'57''$; $c \approx 2{,}40$; $a \approx 2{,}02$]
4. $b = 3{,}15$, $\gamma = 10°28'41''$ [$\gamma = 79°31'19''$; $c \approx 0{,}58$; $a \approx 3{,}20$]
5. $a = 4$, $b = 2$ [$\beta = 30°$; $\gamma = 60°$; $c \approx 346$] $a = 1{,}37$, $c = 0{,}48$ [$\beta \approx 69°29'25''$; $\gamma \approx 20°30'35''$; $b \approx 128$]
6. $b = 2{,}47$, $c = 1{,}89$ [$\beta \approx 52°34'39''$; $\gamma \approx 37°25'21''$; $a \approx 311$]
7. $b = 5{,}12$, $c = 2{,}17$ [$\beta \approx 67°01'53''$; $\gamma \approx 22°58'07''$; $b \approx 5{,}56$]
8. $c = 3{,}12$; $\gamma = 24°13'58''$ [$\beta = 65°46'2''$; $b \approx 6{,}93$; $a \approx 7{,}60$]

9. Sia *ABC* un triangolo inscritto in una semicirconferenza di diametro *AB* lungo una unità. Se $\angle A\hat{B}C = 37°$, quanto misurano i rimanenti lati? (Suggerimento. Si ricordi che un triangolo inscritto in una semicirconferenza è …) [≈ 0,60; ≈ 0,80]
10. Sia *ABC* un triangolo inscritto in una semicirconferenza di diametro *AB*. Se $\angle A\hat{B}C = 54°$, e *AC* è lungo 2, quanto misurano i rimanenti lati? [≈ 2,47; ≈ 1,45]
11. Sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti lunghi 3 e 4, si costruisca un altro triangolo rettangolo con un cateto lungo 3 e l'altro cateto coincidente con l'ipotenusa del primo. Determinare la misura dei suoi angoli acuti. [≈ 59°02′10″; ≈ 30°57′50″]

12. Sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele, si costruisca un altro triangolo rettangolo con un cateto lungo quanto i cateti e l'altro coincidente con l'ipotenusa del primo. Determinare la misura dei suoi angoli acuti. [≈ 54°44′08″; ≈ 35°15′52″]

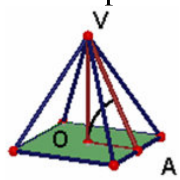
13. Calcolare la misura degli angoli dei cubi in figura.  [≈ 54°44'9"]  [≈ 35°15′52″]

14. Trovare la misura dell'angolo che una diagonale di un parallelepipedo rettangolo di dimensioni 1, 2 e 3 forma con la diagonale di una faccia, come mostrato in figura. Considerare i vari casi mostrati in figura.  [≈ 15°30′05″; ≈ 32°18′42″; ≈ 53°18′03″]

15. In un parallelepipedo rettangolo di dimensioni 3, 4 e 5, determinare la misura dell'angolo che la diagonale della faccia di lati 3 e 4, forma con la diagonale del parallelepipedo. [45°]

16. In un parallelepipedo rettangolo di dimensioni 1, 2 e $\sqrt{15}$, determinare la misura dell'angolo che la diagonale della faccia di lati 1 e 2, forma con la diagonale del parallelepipedo. [60°]

17. In un parallelepipedo rettangolo di dimensioni 3, 3 e $\sqrt{6}$, determinare la misura dell'angolo che la diagonale della faccia di lati 3 e 3, forma con la diagonale del parallelepipedo. [30°]

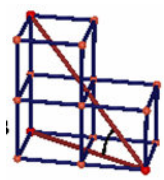
18. In figura vi è una piramide regolare a base quadrata. 

In essa l'altezza cade perpendicolarmente nel centro del quadrato. Determinare la misura dell'angolo segnato sapendo che lo spigolo di base e l'altezza sono isometriche e A è punto medio del lato cui appartiene. [≈ 63°26′06″]

19. Risolvere il precedente problema con l'altezza doppia dello spigolo di base. [≈ 75°57′50″]

20. Con riferimento al precedente problema, se l'angolo è di 45°, in che relazioni sono l'altezza e lo spigolo di base? [spigolo di base doppio dell'altezza]

21. Risolvere il problema precedente con gli angoli di 30° o di 60°. $\left[h = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot b; h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot b\right]$

22. In figura vi sono 3 cubi isometrici.  Determinare la misura dell'angolo segnato. [≈ 41°48′37″]

23. Risolvere il precedente esercizio considerando 3 cubetti sovrapposti su 2. [≈ 53°18′03″]

24. Risolvere il precedente esercizio considerando 3 cubetti sovrapposti su 3. [≈ 43°29′29″]

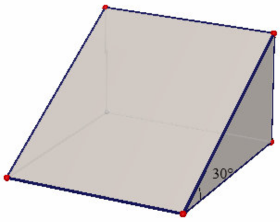
25. Quanti cubetti massimo dobbiamo sovrapporre in verticale, con 2 in orizzontale, affinché l'angolo formato risulti minore di 30°? [1]

Livello 2

26. Riferendoci ai quesiti precedenti. Sia in orizzontale che in verticale mettiamo lo stesso numero di cubetti. Quanti ne dobbiamo mettere affinché l'angolo formato risulti minore di 45°? [L'angolo è sempre minore di 45°]

27. In un parallelepipedo rettangolo di dimensioni *x*, 5 e 13, l'angolo che la diagonale della faccia di lati *x* e 5 forma con la diagonale del parallelepipedo è di 45°. Trovare *x*. [12]

28. In un parallelepipedo rettangolo di dimensioni *x*, 3 e 4, l'angolo che la diagonale della faccia di lati *x* e 3 forma con la diagonale del parallelepipedo è di 30°. Trovare *x*. $\left[\sqrt{39}\right]$

29. In un parallelepipedo rettangolo di dimensioni x, 8 e 10, l'angolo che la diagonale della faccia di lati x e 8 forma con la diagonale del parallelepipedo è di 60°. Trovare x. [Impossibile]
30. Determinare la misura dell'angolo che l'apotema di un tetraedro regolare forma con il raggio della circonferenza inscritta nella base del tetraedro. [≈ 70°31′44″]
31. Un tetraedro trirettangolo $ABCD$, ha la faccia ABC che è un triangolo isoscele. Sapendo che AD e CD misurano 3 cm mentre BD misura 4 cm, determinare la misura degli angoli isometrici della faccia ABC. [≈ 31°56′53″]
32. L'ingresso di un box per auto è sollevato rispetto al suolo stradale di 25 cm, così per permettere l'ingresso e l'uscita dell'automobile si costruiscono dei blocchi in legno come in figura 

, in cui l'angolo indicato è di 30°, quanto è profondo il blocco? [≈ 43,3 cm] Se il blocco è largo 40 cm, quanti cm^3 di legno sono necessari per costruire due blocchi? [≈ 43300]

Livello 3

33. Determinare una formula per il calcolo della superficie di un prisma retto con basi due rombi, in funzione del lato ℓ della base, di uno degli angoli interni della stessa base, α, e dell'altezza h del prisma. [$2\ell^2 sin(\alpha) + 8\ \ell h$]

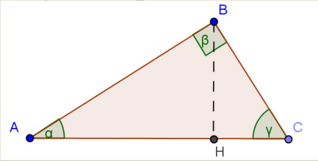
Determinare quanto richiesto di un triangolo rettangolo con i dati seguenti (S indica l'area, $2p$ il perimetro)

34. $a= 8$; $\beta = 38°$; S = ? $2p$ = ? [$2p \approx 19{,}23$; $S \approx 15{,}52$] $c = 3$; $\gamma = 19°$; S = ? $2p$ = ? [$2p \approx 20{,}93$; $S \approx 13{,}07$]
35. $c = 9$; $\beta = 55°$; S = ? $2p$ =? [$2p \approx 37{,}54$; $S \approx 57{,}84$] $a = 7$; $b = 4$; S = ? $2p$ = ? [$2p \approx 19{,}06$; $S \approx 16{,}12$]
36. $2p = 10$; $\beta = 27°$; b = ? c = ? [$b \approx 1{,}94$; $c \approx 3{,}80$] $2p = 10$; $\beta = 43°$; a = ? [≈ 4,14]
37. $S = 15$; $\beta = 51°$; a = ? [≈ 7,83] $S = 21$; $\beta = 48°$; b = ? c = ? [$c \approx 6{,}83$; $b \approx 6{,}15$]
38. $2p = 12$; $\beta = 50°$; S = ? [≈ 6,11] $S = 8$, $\beta = 43°$; $2p$ = ? [≈ 13,67]
39. $S = 57{,}31$; $\beta = 56°$; a = ? b = ? c = ? [$a \approx 13{,}04$; $b \approx 8{,}79$; $c \approx 5{,}72$]

40. Di un triangolo rettangolo conosciamo le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa, 3 e 5. Determinare le misure degli angoli acuti. [≈ 37°45′40″; ≈ 52°14′20″]
41. Determinare la misura del perimetro di un triangolo isoscele di lato obliquo che misura 4,61 e con uno degli angoli alla base di 41°. [≈ 16,18]
42. Determinare la misura del lato obliquo di un triangolo isoscele di perimetro 15,32 e con uno degli angoli alla base di 58°. [≈ 5,01]
43. Determinare la misura dell'area di un triangolo isoscele di lato obliquo lungo 7,21 e con uno degli angoli alla base di 63°. [≈ 21,03]
44. Determinare le misure delle diagonali di un rombo di lato 7,36 e uno degli angoli di 48°30′26″. [≈ 6,05; ≈ 13,42]
45. Determinare la misura del lato di un rombo in cui una diagonale è lunga 4,56 e uno degli angoli è di 25°10′47″. [≈ 10,46 oppure ≈ 2,34]
46. Determinare la misura dell'area di un trapezio rettangolo in cui la base minore e il lato obliquo sono rispettivamente lunghi 4,12 e 3,77 e con l'angolo acuto di 37°. [≈ 12,76]
47. L'area di un trapezio rettangolo è 12,54, il lato obliquo è lungo 2,07 e l'angolo acuto misura 17°. Calcolare la misura del perimetro. [≈ 45,58]
48. Determinare la misura dell'area di un trapezio isoscele in cui la base minore e il lato obliquo sono rispettivamente lunghi 2,87 e 4,13 e l'angolo acuto di 54°. [≈ 17,70]
49. L'area di un trapezio isoscele è 41,56, la base minore misura 3,12 e l'angolo acuto misura 41°. Determinare la misura del lato obliquo. [≈ 5,53]
50. Calcolare uno degli angoli acuti formati dalle diagonali di un trapezio isoscele di basi lunghe 3 e 5 ed altezza lunga 2. [≈ 53°07′48″]

Lavoriamo insieme

Vogliamo provare il I teorema di Euclide usando la trigonometria. Consideriamo la figura seguente.



Lavorando sul triangolo rettangolo AHB abbiamo: $\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = cos(\alpha)$, lavorando sul triangolo rettangolo ABC abbiamo anche $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = cos(\alpha)$. Quindi possiamo scrivere: $\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Rightarrow \overline{AB}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{AC}$, che è proprio il risultato che volevamo provare.

Livello 3

Determinare quanto richiesto in funzione dei dati forniti, riferiti a un triangolo rettangolo

51. a, β; $2p$ = ? S = ? $[2p = a \cdot (1 + sin(\beta) + cos(\beta)); S = ½\ a^2 \cdot sin(\beta) \cdot cos(\beta)]$

52. b, β; $2p$ = ? S = ? $\left[2p = b \cdot \left(\frac{1+sin(\beta)+cos(\beta)}{sin(\beta)}\right); S = \frac{1}{2} \cdot b^2 \cdot cot(\beta)\right]$

53. b, γ; $2p$ = ? S = ? $[2p = ½\, b^2 \cdot cot(\beta); S = ½\, b^2 \cdot tan(\gamma)]$

54. $2p$, β; S = ? $\left[S = \frac{p^2 \cdot sin(\beta) \cdot cos(\beta)}{1+sin(\beta)+cos(\beta)+sin(\beta)\cdot cos(\beta)}\right]$

55. S, β; a = ? b = ? c = ? $\left[a = \sqrt{2S \cdot (cot(\beta)+tan(\beta))}, b = \sqrt{2 \cdot S \cdot tan(\beta)}, c = \sqrt{2 \cdot S \cdot cot(\beta)}\right]$

Determinare quanto richiesto in funzione dei dati forniti

56. Triangolo isoscele di lato obliquo L e angolo al vertice α; $2p$ = ? S = ? $[2p = 2L\,(1 + cos(\alpha)); S = L^2\, sin(\alpha) \cdot cos(\alpha)]$

Trapezio isoscele di lati obliqui L, base minore b_m, base maggiore b_M, angoli alla base α

57. L, b_m, α; S = ? $\left[\frac{b_m \cdot L \cdot sin(\alpha) \cdot [1+2\cdot L\cdot cos(\alpha)]}{2}\right]$

58. S, h, α; b_m = ? b_M = ? $\left[b_m = \frac{2S - h \cdot cot(a)}{2 \cdot h}; b_M = \frac{2S + h \cdot cot(\alpha)}{2 \cdot h}\right]$

59. b_m, L, α; S = ? $[S = (b_m + Lcos(\alpha)) \cdot L \cdot sin(\alpha)]$

Trapezio rettangolo di lato obliquo L, base minore b_m, base maggiore b_M, angolo acuto alla base α

60. b_m, ℓ, α; S = ? $\left[\frac{2 \cdot b_m + \ell \cdot cos(\alpha)}{2} \cdot \ell \cdot sin(\alpha)\right]$

61. ℓ, S, α; h = ?, b_m = ? b_M = ? $\left[h = \ell \cdot sin(\alpha); b_m = \frac{2S - \ell^2 \cdot sin(\alpha)\cdot cos(\alpha)}{2 \cdot \ell \cdot sin(\alpha)}; b_M = \frac{2S + \ell^2 \cdot sin(\alpha) \cdot cos(\alpha)}{2 \cdot \ell \cdot sin(\alpha)}\right]$

62. b_m, b_M, α; h = ? ℓ = ? S = ? $\left[h = (b_M - b_m) \cdot tan(\alpha); \ell = \frac{b_M - b_m}{cos(\alpha)}; S = \frac{(b_M^2 - b_m^2)}{2} \cdot tan(\alpha)\right]$

63. Trovare la misura dell'angolo che una diagonale di un parallelepipedo rettangolo di dimensioni a, b e c forma con la diagonale di una faccia. Considerare i vari casi.
$\left[tan^{-1}\left(\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}}\right); tan^{-1}\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+c^2}}\right); tan^{-1}\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right]$

64. Con riferimento al problema precedente, in che relazione devono essere i lati affinché uno degli angoli sia di 45°? E in questo caso quanto misurano gli altri angoli?

$$\left[a=\sqrt{b^2+c^2};tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2+c^2}}\right);tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}\right)\right]$$

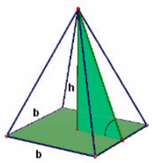
65. Usando la trigonometria, provare il II teorema di Euclide, ossia trovare la misura dell'altezza relativa all'ipotenusa note le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa, a_b, a_c. [$h^2 = a_b \cdot a_c$]

66. Determinare le misure delle diagonali di un rombo mediante il lato e uno degli angoli, α. [$2\ell sin(\alpha/2)$; $2\ell cos(\alpha/2)$]

67. In un parallelepipedo rettangolo di dimensioni x, y e z, l'angolo che la diagonale della faccia di lati x e y forma con la diagonale del parallelepipedo è di 30°. Trovare in che relazione sono x, y e z. [$x^2 + y^2 = 3z^2$]

68. In un parallelepipedo rettangolo di dimensioni x, y e z, l'angolo che la diagonale della faccia di lati x e y forma con la diagonale del parallelepipedo è di 60°. Trovare in che relazione sono x, y e z. [$3x^2 + 3y^2 = z^2$]

69. In un parallelepipedo rettangolo di dimensioni x, 3 e 4, l'angolo che la diagonale della faccia di lati x e 3 forma con la diagonale del parallelepipedo è di α°. Studiare per quali valori di α, il problema ha soluzione. [$0° < \alpha < 53°7'48''$]

70. Determinare l'angolo in figura, 

noti h e b. $\left[tan^{-1}\left(\frac{2h}{b}\right)\right]$

71. Una piramide a base quadrata ha gli spigoli laterali isometrici. Se lo spigolo di base misura 1 cm e l'angolo al vertice di ciascuna faccia laterale è 80°, determinare la misura del volume.

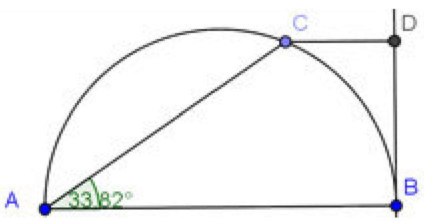
$$\left[\frac{\sqrt{cos(80°)}}{6\cdot sin(40°)}\approx 0{,}11cm^3\right]$$

72. Due pali alti 10 m e 15 m distano 20 m. Uniamo con dei cavi le cime dei pali alle basi dei pali opposti, vogliamo sapere a che altezza dal suolo si incontrano i cavi. Uno dei dati è inutile, quale? [6 m; la distanza fra i pali]

73. Con riferimento al problema precedente, quanto misura l'angolo minore che formano i cavi incontrandosi? In questo caso il precedente dato inutile, è ancora tale? [≈ 63°26′6″; no]

74. Risolvere i quesiti svolti nei due esercizi precedenti per altezze generiche, a e b, e distanza generica, c.

$$\left[\frac{a\cdot b}{a+b};tan^{-1}\left(\frac{b}{c}\right)+tan^{-1}\left(\frac{a}{c}\right)\right]$$

75. In figura 

BD è tangente al diametro AB e CD è perpendicolare a DB, $\overline{AB}=3{,}86\,cm, \angle C\hat{A}B = 33{,}82°$. Determinare la misura di CD. [≈ 1,20 cm]

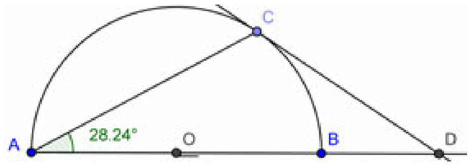
76. Risolvere il problema precedente con dati generici, $\overline{AB}=2r, \angle C\hat{A}B=\alpha$. [$2r\cdot sin^2(\alpha)$]

77. Con riferimento al problema 73, determinare la misura di DB. [≈ 1,79]

78. Risolvere il problema precedente con dati generici, $\overline{AB}=2r, \angle C\hat{A}B=\alpha$. [$2r\cdot sin(\alpha)\cdot cos(\alpha)$]

79. Sia un cerchio di centro O. Si scelga al suo interno un punto A, quindi sulla circonferenza un punto B. Si determini il valore dell'angolo $O\hat{A}B$ affinché risulti massimo l'angolo $O\hat{B}A$. [90°]

80. Calcolare uno degli angoli acuti formati dalle diagonali di un trapezio isoscele in cui l'altezza misura quanto la base minore e quanto metà della base maggiore. [≈ 67°22′48″]



81. In figura CD è tangente alla semicirconferenza, $\overline{AB}=5{,}14\,cm, \angle C\hat{A}B = 28{,}24°$,determinare la misura di AD. [≈ 7,22 cm]

82. Risolvere il problema precedente con dati generici: $\overline{AB}=2r, \angle C\hat{A}B = \alpha$. [$r \cdot (1 + 1/cos(2\alpha))$]

Lavoriamo insieme

Di un triangolo rettangolo conosciamo la differenza fra l'ipotenusa e un cateto, 10, e l'angolo acuto adiacente al cateto, 51°, vogliamo risolvere il triangolo.
Indicando con b la misura del cateto dato e con a quella dell'ipotenusa, possiamo impostare il seguente sistema: $\begin{cases} a-b=10 \\ \dfrac{b}{a}=cos(51°) \end{cases}$. Risolviamolo con un metodo a piacere:

$$\begin{cases} a-a\cdot cos(51°)=10 \\ b=a\cdot cos(51°) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\cdot\left[1-cos(51°)\right]=10 \\ b=a\cdot cos(51°) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{10}{\left[1-cos(51°)\right]}\approx 26{,}98 \\ b=a\cdot cos(51°) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\approx 26{,}98 \\ b\approx 26{,}98\cdot cos(51°)\approx 16{,}98 \end{cases}$$

Determiniamo un valore approssimato dell'altro cateto: $c\approx\sqrt{26{,}98^2-16{,}98^2}\approx 20{,}97$. Ovviamente l'altro angolo acuto misura 39°.

Livello 2

Determinare quanto richiesto in un triangolo rettangolo, con i dati forniti

83. $b + c = 10$; $\beta = 40°$; $2p = ?$ $S = ?$ [$2p \approx 17;10$; $S \approx 12{,}40$] $b + c = 19$; $2p = 15$; $S = ?$ [∅]
84. $b - c = 6$; $\gamma = 24°$; $2p = ?$ $S = ?$ [$2p \approx 27{,}47$; $S \approx 26{,}04$] $sec(\beta) = 2$; $S = 3$; $2p = ?$ [≈ 8,81]
85. $a + b = 12$; $\beta = 62°$; $2p = ?$ $S = ?$ [$2p \approx 14{,}99$; $S \approx 8{,}42$] $b + c = 11$; $S = 18$; $\beta = ?$ $\gamma = ?$ [∅]
86. $tan(\beta) = 2$; $S = 12$; $2p = ?$ [$2p \approx 18{,}14$] $cos(\beta) = 0;4$; $S = 19$; $2p = ?$ [≈ 23,58]
87. $b + c = 23$; $S = 19$; $\beta = ?$ $\gamma = ?$ [$\beta \approx 85°10'15''$; $\gamma \approx 4°49'45''$] $cot(\beta) = 4$; $S = 21$; $2p = ?$ [≈ 23,78]
88. $b - c = 4$; $S = 28$; $\beta = ?$ $\gamma = ?$ [≈ 59°28′39″; 30°31′21″] $tan(\beta) = 3$; $b + c = 8$; $2p = ?$ $\left[8+2\cdot\sqrt{10}\right]$
89. $a - b = 8$; $\beta = 22°$; $2p = ?$ $S = ?$ [≈ $2p$ 29,44; $S \approx 28{,}42$] $csc(\beta) = 7$; $b + c = 8$; $S = ?$ [≈ 3,53]
90. $sin(\beta) = 0{,}7$; $a + b = 16$; $2p = ?$ $S = ?$ [$2p \approx 22{,}72$; $S \approx 22{,}14$]
91. $a - b = 5$; $\gamma = 59°$; $2p = ?$ $S = ?$ [$2p \approx 23{,}46$; $S \approx 24{,}46$]
92. $sin(\beta) = 0{,}3$; $a + b = 6$; $2p = ?$ $S = ?$ [$2p \approx 3{,}37$; $S \approx 9{,}93$]
93. $sec(\beta) = 3{,}2$; $b-c = 1{,}4$; $2p = ?$ $S = ?$ [$2p \approx 0{,}72$; $S \approx 4{,}97$]
94. $cos(\beta) = 0{,}3$; $a-b = 3$; $2p = ?$ $S = ?$ [$2p \approx 607{,}00$; $S \approx 146{,}80$]

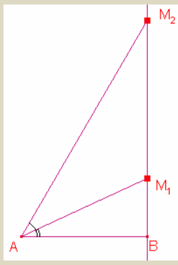
Livello 3

95. Le diagonali di un trapezio rettangolo sono fra loro perpendicolari e misurano rispettivamente 4 cm e 5 cm. Quanto misura l'area del trapezio? [10]
96. Con riferimento al problema precedente, se la somma delle basi è $\sqrt{41}$ cm, quanto misurano le basi? Quanto l'altezza? Quanto gli angoli interni?
[$b_1 = 16/\sqrt{41}$ cm, $b_2 = 25/\sqrt{41}$ cm; $h = 20/\sqrt{41}$ cm; ≈ 65°46′20″, ≈ 114°13′40″]
97. L'esercizio precedente ha soluzione qualsiasi valore scegliamo per la somma delle basi?
[No, solo se è $\sqrt{41}$ cm]
98. Le diagonali di un trapezio rettangolo sono fra loro perpendicolari. Quanto misura l'area del trapezio?
[$\frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2$]
99. Determinare in che relazione sono le basi e le diagonali di un trapezio rettangolo in cui le diagonali sono fra loro perpendicolari. [$b_2^2 - b_1^2 = |d_1^2 - d_2^2|$]

100. In un trapezio isoscele le diagonali sono perpendicolari ai lati obliqui. Determinare la misura dell'area in funzione della base maggiore, b, e dell'angolo, α, che la detta diagonale forma con la base maggiore. $[b^2 \cdot sin(\alpha) \cdot cos^3(\alpha)]$
101. Determinare la misura del perimetro del trapezio isoscele precedente. $[2b \cdot (sin(\alpha) + cos^2(\alpha)]$
102. Determinare una formula per il calcolo della superficie del cubo troncato in funzione della misura dello spigolo ℓ. Suggerimento. Si usi la trigonometria per calcolare l'area delle facce ottagonali. $\left[\left(12+12\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\ell^2\right]$
103. Determinare una formula per il calcolo della superficie dell'icosidodecaedro in funzione della misura dello spigolo ℓ. Suggerimento. Si usi la trigonometria per calcolare l'area delle facce pentagonali. $\left[\left(5\cdot\sqrt{3}+3\cdot\sqrt{25+10\cdot\sqrt{5}}\right)\cdot\ell^2\right]$
104. Si vuole determinare la distanza di un punto P che si trova in una posizione inaccessibile. Per fare ciò si fissano due punti A e B, che distano fra loro 7,76 metri e poi si misurano gli angoli che la retta per AB forma con le congiungenti al punto P. I valori sono 54°46′48″ e 34°9′. Determinare la distanza fra P e AB. [≈ 3,56 m]
105. Determinare una formula per il problema precedente, indicando con d la distanza AB e con α e β i due angoli. $\left[d\cdot\frac{tan(\alpha)\cdot tan(\beta)}{tan(\alpha)+tan(\beta)}\right]$
106. Con riferimento al problema precedente, se α = 60°47′24″ e β = 47°56′24″ e la distanza da P è 5,60 m, quanto distano A e B? [≈ 8,18 m]

Lavoriamo insieme

Una mongolfiera sale cambiando l'angolo di visuale da una postazione sul terreno da 25 gradi alle 10:00 fino a 60 gradi alle 10:02. La postazione dista 300 metri dalla verticale della mongolfiera. Se la mongolfiera si innalza con velocità costante, quanto vale questa velocità in metri al secondo?



Schematizziamo il problema (tratto da www.analyzemath.com) nel modo seguente

Abbiamo $\overline{AB} = 300\,m, M_1\hat{A}B = 25°, M_2\hat{A}C = 60°$. Indichiamo $\overline{M_1B} = x, \overline{M_1M_2} = y$. Usando la trigonometria possiamo scrivere: $tan(25°)=\frac{x}{300}; tan(60°)=\frac{x+y}{300}$.

Risolviamo: $x = 300 \cdot tan(25°) \approx 139{,}89$, $y \approx 300 \cdot tan(60°) - 139{,}89 \approx 379{,}72$.

Allora se per salire circa 379,72m servono 2 minuti, vuol dire che la velocità è circa $\frac{379{,}72}{120} m/s \approx 3{,}16\, m/s$

Livello 2

107. Una strada di montagna ha una pendenza del 13%, cioè il rapporto tra la distanza verticale fra il punto più alto e il punto più basso della strada e la distanza orizzontale degli stessi punti, è 0,13. Se i detti punti distano verticalmente 1245 m, quanto distano orizzontalmente? Quanto misura l'angolo che forma l'orizzontale con la linea immaginaria che unisce i punti di partenza e arrivo della strada? [≈ 9576,92m; ≈ 7°24′25″]
108. Per calcolare l'altezza di una collina (supposta come una parete a strapiombo), si utilizza uno strumento che è in grado di determinare l'angolo che la linea retta che congiunge idealmente lo strumento forma con la cima della collina. Sapendo che lo strumento è alto m 1,50 e si trova a 121,34 m dalle pendici della collina e che il detto angolo misura 31°22′47″, determinare un valore approssimato dell'altezza. [≈ 200,45]

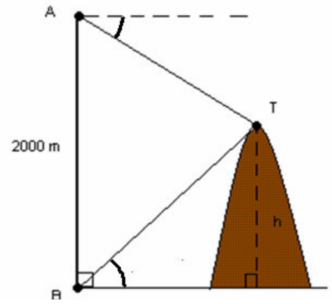
109. Con riferimento al precedente esercizio, se la collina fosse stata alta *m* 311,52, quanto sarebbe stato l'angolo di visuale? [≈ 21°22′30″]

110. Con riferimento al precedente esercizio, se non sappiamo a che distanza dalla collina è lo strumento, ma sappiamo che l'angolo di visuale è circa 31°41′12″ con lo strumento a 1,5 *m*, mentre a 2 *m* dal suolo l'angolo aumenta di 2′40″, vogliamo sapere quanto è alta la collina e quanto dista lo strumento da essa. [≈ 289,97 *m*; ≈ 178,07 *m*]

Livello 3

Per i seguenti quesiti vale il testo: Un aereo vola a una quota h, con velocità uniforme v, l'angolo che l'ipotetica linea che congiunge la punta dell'aereo con un punto fissato sul suolo davanti l'aereo è α e t minuti dopo tale angolo è divenuto β.

111. h = ?, v = 900 *Km*/*h*, α = 13°17′27″, β = 47°21′14″, t = 1 *min* [≈ 4529 *m*]
112. h = 4927 *m*, v = ?, α = 14°18′33″, β = 46°31′27″, t = 1 *min* [≈ 879 *km*/*h*]
113. h = 5214 *m*, v = 865 *Km*/*h*, α = 15°18′32″, β = ?, t = 1 *min* [≈ 48°23′22″]
114. h = 3842 *m*, v = 825 *Km*/*h*, α = ?, β = 40°22′30″, t = 3 *min* [≈ 4°47′54″]
115. h = 4000 *m*, v = 800 *Km*/*h*, α = 4°53′7″, β = 44°11′23″ , t = ? [≈ 3,2 *min*]
116. Determinare la relazione generale per il problema precedente. [$v = h \cdot [cot(\alpha) - cot(\beta)]/t$]

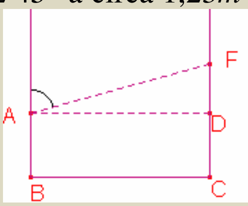
117. In figura 

è schematizzata una collina, la cui cima T è vista dal punto A, che si trova a un'altezza di 2000 *m*, se l'angolo segnato in alto è di 15° e quello in basso di 10°, determinare l'altezza h della collina. (tratto da www.analyzemath.com) [≈ 793,8 *m*]

Per determinare l'altezza di una torre inaccessibile, si misurano gli angoli che la congiungente la cima della torre forma con due punti del terreno, dalla stessa parte rispetto la torre, che distano fra loro x metri. Siano α e β. Quindi si misura l'angolo che le due congiungenti formano tra loro, γ, determinare quanto richiesto.

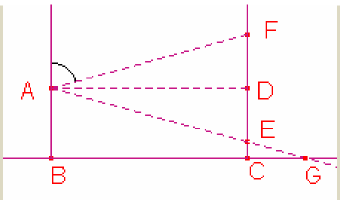
118. x = 2,53 *m*, α = 32°40′12″, β = 29°49′48″, γ = 2°50′24″, h = ? [≈ 13,71 *m*]
119. x = ?, α = 39°45′, β = 27°18′36″, γ = 12°26′24″, h = 11,86 *m* [≈ 8,71 *m*]
120. x = 9,88 *m*, α = 50°15′, β = 32°6′36″, γ = ?, h = 12,97 *m*. [≈ 18°8′18″]
121. x = 4,73 *m*, α = ?, β = 42°7′32″, γ = 10°6′2″, h = 15,84 *m*. [≈ 61°6′52″]
122. Per il problema precedente trovare una relazione fra l'altezza h della torre e angoli che misurano rispettivamente α, β, γ e punti che distano fra loro x metri. $\left[h = \dfrac{x \cdot sin(\alpha) \cdot sin(\beta)}{sin(\gamma)}\right]$

Lavoriamo insieme

Da una fessura posta a 2,18 *m* dal suolo, passa un raggio di sole che va a formare con la parete opposta un angolo di 75°12′45″ a circa 1,23*m* dal suolo. Vogliamo sapere quanto distano le due pareti. Schematizziamo come in figura. 

Vogliamo determinare la misura di AD, o di BC che è lo stesso. Abbiamo allora: $\overline{AD} = \overline{FD} \cdot cot(90° - 75°12'45'') = (2,18 - 1,23)\,m \cdot tan(75°12'45'') \approx 3,60\,m$.

Adesso supponiamo che nel punto A vi sia uno specchio. Dove andrà a finire il raggio riflesso?

Consideriamo il disegno seguente 

Come si vede il raggio si riflette in modo che *AE* sia simmetrico di *AF* rispetto ad *AD*, quindi, *FD* ed *FE* sono isometrici. Dato che *FD* è lungo 0,95*m*, allora *FE* è lungo 1,90*m* pertanto il raggio riflesso va a finire sulla stessa parete della fessura a (2,18 – 1,90)*m* = 28*cm* dal suolo.

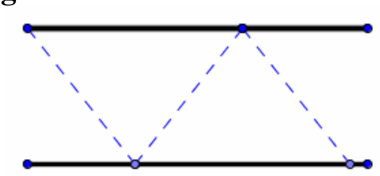
Livello 3

Per i seguenti quesiti vale il testo: Da una fessura posta a *d* dal suolo, passa un raggio di sole che va a formare con la parete opposta che si trova a *l* da essa, un angolo di α a circa *h* dal suolo.

123. $d = 2{,}47m$; $\alpha = 68°15'31''$; $h = 1{,}49m$; $l = ?$ [≈ 2,46*m*]
124. $d = 4{,}12m$; $h = 1{,}49m$; $l = 5{,}12m$; $\alpha = ?$ [≈ 62°48′42″]
125. $\alpha = 63°25'28''$; $h = 1{,}52m$; $l = 3{,}85m$; $d = ?$ [≈ 3,45*m*]
126. $\alpha = 68°17'42''$; $d = 2{,}19m$; $l = 4{,}12m$; $h = ?$ [≈ 0,55*m*]

127. Da una fessura posta a 3,18 *m* dal suolo, passa un raggio di sole che va a finire su uno specchio appeso alla parete opposta, a circa 1,73 *m* dal suolo, formando un angolo di 69°32′51″. Il raggio viene riflesso da uno specchio. Vogliamo sapere se il raggio finisce sul pavimento, e in questo caso a che distanza dalla parete opposta, o sulla stessa parete della fessura, e in questo caso a che altezza dal suolo. Ci sono dati inutili? [Sulla parete a circa 20 *cm* dal pavimento; la misura dell'angolo]
128. Alessio nota che da un buco della tenda della finestra della sua cameretta entra un raggio di sole che colpisce la parete opposta a 1,35 *m* dal suolo. Più tardi nota che il raggio colpisce la parete a 1,15 *m* dal suolo. Se sappiamo che le due pareti opposte distano 3,75*m* e il buco è a 1,98 *m* dal suolo, vogliamo sapere di quanto varia l'angolo che il raggio di sole forma con la parete opposta. [≈ 2°56′37″]
129. Con riferimento al problema precedente, se il raggio di luce colpisce uno specchio posto a 1,48 *m* dal suolo, con un'inclinazione di 62°13′42″, a quale distanza dalla parete opposta si rifletterà sul pavimento? [≈ 2,81 *m*]

Per i seguenti quesiti vale il testo: Due specchi uguali, larghi *l*, sono posti uno di fronte all'altro a una distanza *d*. Da un'estremità di uno degli specchi facciamo partire un raggio laser che va a formare con lo specchio opposto un angolo di ampiezza α. Il raggio viene ovviamente riflesso sull'altro specchio e



così via, per un totale di *n* volte.

130. $l = 6{,}14\ m$; $d = 1{,}11\ m$; $\alpha = 23°41'5''$; $n = ?$ [2]
131. $l = 6{,}14\ m$; $d = 1{,}11\ m$; $n = 5$; $\alpha = ?$ [$42°6'39'' < \alpha < 47°19'34''$]
132. $l = 6{,}14\ m$; $\alpha = 23°41'5''$; $n = 5$; $d = ?$ [$0{,}45\ m < d < 0{,}54\ m$]
133. $n = 5$; $d = 1{,}11\ m$; $\alpha = 23°41'5''$; $l = ?$ [$12{,}65\ m < l < 15{,}18\ m$]
134. $\alpha = 23°41'5''$; $3 \le n \le 7$; $= d/l = ?$ [$0{,}05 < d/l < 0{,}22$]

Lavoriamo insieme

Verificare se la seguente risulta un'identità per un triangolo rettangolo in cui con *a* indichiamo la misura dell'ipotenusa: $a \cdot sin(\beta) \cdot tan(\beta) + c \cdot cos(\gamma) = \dfrac{b}{sin(\gamma) \cdot cos(\gamma)}$.

Dire che una certa espressione è un'identità significa che essa è valida per tutti i valori che possano assegnarsi alle incognite, purché per tali valori si ottengano espressioni che non siano prive di significato. Per effettuare la verifica in questo caso, basta semplicemente sostituire alle funzioni trigonometriche le rispettive definizioni. Abbiamo così $\cancel{a} \cdot \dfrac{b}{\cancel{a}} \cdot \dfrac{b}{c} + c \cdot \dfrac{\cancel{c}}{\cancel{b}} \cdot \dfrac{\cancel{b}}{\cancel{c}} = \dfrac{b}{sin(\gamma) \cdot cos(\gamma)}$. Da cui otteniamo:

$$\frac{b^2}{c}+c=\frac{b}{sin(\gamma)\cdot cos(\gamma)}\Rightarrow\frac{b^2+c^2}{c}=\frac{\cancel{b}}{\frac{c}{a}\cdot\frac{\cancel{b}}{a}}\Rightarrow\frac{a^2}{c}=\frac{a^2}{c}$$

Prima di notare che abbiamo effettivamente verificato che l'identità è corretta, diciamo che nel penultimo passaggio abbiamo applicato il teorema di Pitagora, ossia: $b^2 + c^2 = a^2$.

Verificare se le seguenti uguaglianze risultano identità per un triangolo rettangolo in cui *a* è la misura dell'ipotenusa

Livello 1

135. $tan(\beta) \cdot tan(\gamma) = 1$ [Si] $sin^2(\beta) + sin^2(\gamma) = 1$ [Si] $sec(\beta) \cdot csc(\gamma) = 1$ [No]

136. $tan(\gamma)=\sqrt{csc(\beta)-1}$ [No] $\frac{b^2}{c^2}=\frac{cot(\gamma)}{cot(\beta)}$ [Si]

Livello 2

137. $sec(\beta)\cdot tan(\gamma)+csc(\beta)\cdot cos(\gamma)=\frac{b}{sin(\gamma)\cdot cos(\gamma)}$ [No]

138. $a\cdot cos(\gamma)\cdot cot(\gamma)+a\cdot tan(\gamma)\cdot sin(\beta)=\frac{b}{sin(\gamma)\cdot cos(\gamma)}$ [Si]

139. $a \cdot sin(\beta) \cdot tan(\beta) + a \cdot cot(\beta) \cdot cos(\gamma) = a/c$ [Sì]

140. $a \cdot cos(\gamma) \cdot csc(\beta) – b \cdot tan(\beta) \cdot sec(\gamma) = a \cdot (1 – b/c)$ [Sì]

141. $c\cdot csc(\beta)\cdot cos(\gamma)+b\cdot tan(\beta)\cdot sin(\gamma)=\frac{b^2+ac}{a}$ [Sì]

142. $a \cdot sec(\beta) \cdot tan(\gamma) + b \cdot cos(\gamma) \cdot csc(\beta) = a \cdot csc(\gamma) \cdot tan(\beta) + b \cdot sin(\beta) \cdot sec(\gamma)$ [No]

143. $a \cdot sin(\beta) \cdot tan(\beta) – a \cdot cot(\beta) \cdot cos(\gamma) = c \cdot [tan(\beta) + 1] \cdot [cot(\gamma) – sin^2(\beta) – cos^2(\beta)]$ [Si]

144. $\frac{bc\cdot tan(\beta)-ac\cdot sin(\gamma)}{ab\cdot sin(\beta)+bc\cdot tan(\gamma)}=\left[sin(\beta)-sin(\gamma)\right]\cdot\left[cos(\beta)+cos(\gamma)\right]$ [Si]

145. $\frac{tan(\beta)\cdot cot(\beta)-\frac{b^2}{a^2}}{cot(\gamma)\cdot tan(\gamma)-\frac{b}{a}\cdot cos(\gamma)}=\frac{cos^2(\beta)}{sin^2(\gamma)}$ [Si] $\frac{cos(\beta)\cdot csc(\gamma)-sin^2(\beta)}{sec(\beta)\cdot sin(\gamma)-cos^2(\gamma)}=1$ [Si]

146. $\frac{1+sin^2(\beta)}{1-\frac{b}{a}\cdot cos(\gamma)}=\frac{a^2+b^2}{c^2}$ [Sì] $\frac{tan(\beta)\cdot cot(\gamma)-b}{sin(\beta)\cdot cos(\gamma)+b}=csc^2(\gamma)\frac{b-c^2}{a^2+b}$ [Sì]

147. $\frac{tan(\beta)\cdot cot(\beta)-sin^2(\beta)}{cot(\beta)\cdot tan(\beta)-cos^2(\gamma)}=\frac{cos^2(\beta)}{sin^2(\gamma)}$ [Sì] $\frac{sin(\beta)\cdot sec(\gamma)-sin^2(\beta)}{cos(\beta)\cdot csc(\gamma)+cos^2(\gamma)}=\frac{c^2}{2b^2+c^2}$ [Sì]

148. $\frac{sin(\beta)\cdot cos(\gamma)-sin^2(\gamma)}{cos(\beta)\cdot sin(\gamma)-cos^2(\gamma)}=1-tan(\beta)\cdot cot(\beta)$ [No]

Lavoriamo insieme

Di un triangolo qualsiasi conosciamo la misura dell'area, 12, di un lato, 3 e di uno degli angoli adiacenti a tale lato, 34°, vogliamo determinare la misura dell'altro lato adiacente al dato angolo.
Indicando con *x* la misura incognita, per il Teorema 6 possiamo scrivere: 12 = ½ · 3 · *x* · *sin*(34°), quindi avremo: $x=\frac{\cancel{12}^4\cdot 2}{\cancel{3}^1\cdot sin(34°)}=\frac{8}{sin(34°)}\approx 14,3$.

Determinare gli elementi incogniti dei seguenti triangoli qualsiasi di cui sono dati alcuni enti (con *S* si indica la misura dell'area, con 2*p* quella del perimetro):

Livello 1

149. $a = 5,7$; $b = 8,12$; $sin(\gamma) = 0,63$; $S = ?$ [≈ 14,57] $a = 3$; $b = 4$; $\gamma = 70°$; $S = ?$ [≈ 5,64]

150. $S = 7{,}25$; $b = 3{,}14$; $\gamma = 40°31'12''$; $a = ?$ [≈ 7,11]
151. $a = 1{,}75$; $\beta = 47°$; $\gamma = 75°$; $S = 4{,}78$; $2p = ?$ [≈ 14,88]

Livello 2

152. $a + b = 11$; $\gamma = 50°$; $S = 6{,}31$; $a = ?$ $b = ?$ [≈ 1,79, ≈ 9,21]
153. $a - b = 5{,}87$; $\gamma = 25°12'10''$; $S = 7{,}14$; $a = ?$ $b = ?$ [≈ 9,43, ≈ 3,56]
154. $c = 8{,}13$; $2p = 14{,}78$; $\gamma = 13°21'14''$; $S = 5{,}47$; $a = ?$ $b = ?$ [Impossibile]

155. Determinare l'area di un rombo di lato 3,12 e con uno degli angoli di 32°11′47″. [≈ 5,19]
156. L'area di un rombo è 7,12, il lato è lungo 3,73, determinare le misure degli angoli interni. [≈ 30°46′51″, ≈ 149°13′9″]
157. Determinare il perimetro di un rombo di area 5,48 e uno degli angoli di 51°24′11″. [≈ 10,59]
158. Determinare l'area di un ottagono regolare di lato lungo 2,72. [≈ 142,89]
159. Determinare l'area di un poligono regolare di 7 lati, ciascuno di 5,18. [≈ 390,03]
160. L'area di un poligono regolare di 13 lati è 41,3. quanto misura il perimetro? [≈ 11,50]
161. Determinare l'area di un esagono regolare in cui il raggio della circonferenza circoscritta è lungo 4,13. [≈ 44,31]
162. Determinare il raggio della circonferenza circoscritta a un ottagono regolare di area 15,48. [≈ 2,34]
163. Di un triangolo conosciamo l'area, 23, e le misure di due lati, 12 e 7. Determinare la misura dell'angolo compreso tra i lati dati. [≈ 55°13′41″]

Livello 3

164. Con riferimento al problema precedente, rimanendo fissate le misure dell'area e del lato maggiore, quali valori può assumere il lato minore ℓ affinché il problema abbia soluzione? $[23/6 \le \ell \le 12]$
165. Con riferimento al problema 167, lasciando inalterato il valore dell'area, quali valori può assumere la misura del lato affinché il problema abbia soluzioni? $\left[\ell \ge \sqrt{7{,}13}\right]$
166. Determinare il perimetro di un rombo mediante l'area, S, e uno degli angoli interni, α. $\left[4 \cdot \sqrt{\dfrac{S}{sin(\alpha)}}\right]$
167. Se un rombo ha area S, quali valori può assumere la misura del suo lato? $\left[\ell \ge \sqrt{S}\right]$
168. Determinare l'area di un rombo in funzione della misura del lato e di uno degli angoli acuti interni. $[\ell^2 sin(\alpha)]$
169. Usando il risultato dell'esercizio precedente e calcolando l'area del rombo come somma delle aree dei 4 triangoli in cui esso è diviso dalle diagonali, trovare una relazione fra il seno di un angolo acuto e seno e coseno dell'angolo metà. Questa è la formula di duplicazione. $[sin(\alpha) = 2 \cdot sin(\alpha/2) \cdot cos(\alpha/2)]$
170. Provare la validità della formula precedente per $\alpha = 60°$.
171. Utilizzando la formula precedente, e tenuto conto che $cos(\alpha) = sin(90° - \alpha)$, determinare una formula di duplicazione per il coseno. $\left[cos(\alpha) = 2 \cdot sin\left(45° - \dfrac{\alpha}{2}\right) \cdot cos\left(45° - \dfrac{\alpha}{2}\right)\right]$
172. Utilizzando la formula di duplicazione del seno (Es. 161), e tenuto conto che $cos^2(\alpha) = 1 - sin^2(\alpha)$, determinare una formula di duplicazione per il coseno. $[cos(\alpha) = cos^2(\alpha/2) - sin^2(\alpha/2)]$
173. Provare la validità della formula precedente per $\alpha = 60°$.
174. Utilizzando la formula di duplicazione del seno determinare il rapporto fra le misure dei lati di un poligono regolare di n lati e di uno di $2n$ lati inscritti nella stessa circonferenza. $[2 \cdot cos(90°/n)]$
175. Determinare la misura del raggio della circonferenza circoscritta in un poligono regolare di n lati, ciascuno di misura ℓ. $[½\, \ell \cdot csc(180°/n)]$
176. Determinare la misura del raggio della circonferenza inscritta in un poligono regolare di n lati, ciascuno di misura ℓ. $[½\, \ell \cdot cot(180°/n)]$
177. Determinare la misura del lato di un poligono regolare di n lati in funzione del raggio della circonferenza circoscritta. $[2R \cdot sin(180°/n)]$
178. Determinare la misura del lato di un poligono regolare di $2n$ lati in funzione del raggio della circonferenza circoscritta. $[2R \cdot sin(90°/n)]$
179. L'area di un rombo è 7,12, il lato è lungo 1,73, determinare le misure degli angoli interni. [∅]

180. Determinare il rapporto fra le misure dei lati di un triangolo equilatero e di un esagono regolare inscritti nella stessa circonferenza. $\left[\sqrt{3}\right]$
181. Determinare il rapporto fra le misure dei lati di un quadrato e di un ottagono regolare inscritti nella stessa circonferenza. [≈ 1,85]
182. Utilizzando la formula di duplicazione del seno determinare il rapporto fra le aree di un poligono regolare di n lati e di uno di $2n$ lati inscritti nella stessa circonferenza. [$cos(180°/n)$]
183. Determinare il rapporto fra le misure delle aree di un esagono regolare e di un triangolo equilatero inscritti nella stessa circonferenza. [½]
184. Determinare il rapporto fra le misure delle aree di un ottagono regolare e di un quadrato inscritti nella stessa circonferenza. $\left[\sqrt{2}/2\right]$
185. Determinare il lato, il perimetro e l'area di un triangolo equilatero in funzione del raggio R della circonferenza a esso circoscritta. $\left[\ell = r\cdot\sqrt{3}, 2p = 3r\cdot\sqrt{3}, S = \frac{3r^2\cdot\sqrt{3}}{4}\right]$
186. Determinare il lato, il perimetro e l'area di un quadrato in funzione del raggio R della circonferenza a esso circoscritta. $\left[\ell = r\cdot\sqrt{2}, 2p = 4r\cdot\sqrt{2}, S = 2r^2\right]$
187. Determinare il rapporto fra le misure del raggio della circonferenza inscritta e quello della circonferenza circoscritta a un triangolo rettangolo con un angolo acuto di 30°. $\left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right]$
188. Determinare il rapporto fra le misure del raggio della circonferenza inscritta e quello della circonferenza circoscritta a un triangolo rettangolo con un angolo acuto di 45°. $\left[\sqrt{2}-1\right]$
189. Determinare il rapporto fra le misure del raggio della circonferenza inscritta e quello della circonferenza circoscritta a un triangolo isoscele in cui l'angolo al vertice è di 60°. $\left[\sqrt{3}-3/2\right]$
190. Ricavare il seno di un angolo interno di un triangolo di cui conosciamo la misura dell'area, S, e la media geometrica $g = \sqrt{a\cdot b}$ dei lati concorrenti nell'angolo da determinare. [$2S/g^2$]

Risoluzione dei triangoli qualsiasi e teorema dei seni

Il problema

Come facciamo a calcolare l'area di un triangolo di cui conosciamo le misure di due suoi lati, 12 e 13, e l'angolo da essi compreso, 100°? Non possiamo usare certamente la formula stabilita dal Teorema 6, poiché non sappiamo che significato dare alla scrittura $sin(100°)$.

In questo paragrafo ci occuperemo di estendere le funzioni trigonometriche anche ad angoli retti ed ottusi, per potere risolvere triangoli qualsiasi.
Per fare ciò ovviamente vogliamo generalizzare le definizioni precedenti in modo che esse continuino a valere anche per gli angoli acuti, comprendendo in ciò anche i risultati ottenuti. Ciò vuol dire che, poiché l'area di un triangolo è ovviamente misurata sempre da un numero positivo, il seno di un angolo retto od ottuso deve essere ancora un numero positivo.
Tenuto conto di ciò vediamo quanto vale il seno di un angolo retto.
L'area di un triangolo rettangolo si può trovare anche calcolando il semiprodotto delle misure di due cateti, possiamo perciò scrivere la seguente identità, in cui con b e c indichiamo le misure dei cateti: $\frac{b\cdot c}{2} = \frac{b\cdot c}{2}\cdot sin(90°)$. A sinistra abbiamo il calcolo mediante la tradizionale formula *semiprodotto dei cateti* e a destra l'applicazione del Teorema 6. Dato che abbiamo a che fare con un'uguaglianza, non ci rimane che porre la seguente definizione.

Definizione 8

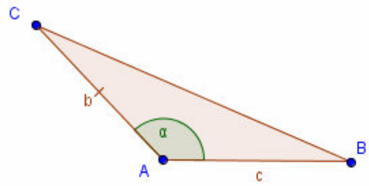
Si ha $sin(90°) = cos(0°) = 1$.

Può sembrare inutile definire il coseno di un angolo nullo, dato che gli angoli di un qualsiasi triangolo o poligono non sono mai nulli, ma intanto essa viene fuori dalla relazione che abbiamo visto esserci fra seno e coseno di angoli fra loro complementari. Inoltre possiamo considerare il caso estremo in cui il triangolo *degenera* divenendo un segmento e quindi facendo in modo che uno dei suoi tre angoli misuri appunto 0°.
Ora, tenuto conto della definizione precedente e del teorema di Pitagora in forma trigonometrica (Teorema 1), dobbiamo porre anche la seguente definizione.

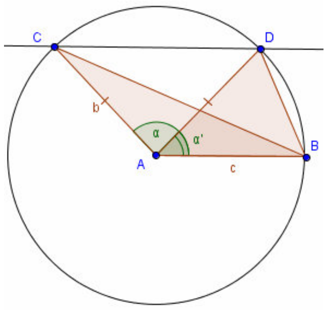
Definizione 9

Si ha $cos(90°) = sin(0°) = 0$.

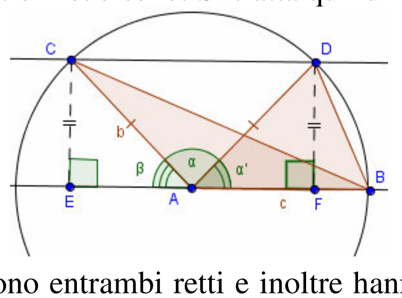
Come immediata conseguenza della precedente definizione vi è il fatto che non hanno alcun significato le scritte $tan(90°)$, $sec(90°)$, $cot(0°)$ e $csc(0°)$, dato che si ottengono dividendo per $cos(90°) = 0$, le prime due, o per $sin(0°) = 0$, le altre due.
Per estendere la funzione seno ad angoli ottusi consideriamo appunto un triangolo del genere e calcoliamone



l'area con la formula del Teorema 6, applicandola proprio all'angolo ottuso.
Tale area misura perciò ½ $bc\ sin(\alpha)$. Ora costruiamo un triangolo acutangolo con la stessa area, e con due



lati isometrici ai lati b e c. I due triangoli hanno AB in comune, AC e AD isometrici perché raggi di una stessa circonferenza. Infine, hanno anche la stessa area perché CD è parallelo ad AB e perciò le altezze relative alla base comune sono isometriche. Quindi l'area precedente può anche calcolarsi in quest'altro modo: ½ $bc\ sin(\alpha')$. Ciò vuol dire che $sin(\alpha) = sin(\alpha')$, il che è un importantissimo risultato, dato che α' è un angolo acuto e perciò sappiamo come calcolare il suo seno. Si tratta quindi di capire in che



relazione sono i due angoli. Consideriamo la seguente figura.
I due triangoli CEA e DFA sono fra loro isometrici perché sono entrambi retti e inoltre hanno le ipotenuse isometriche, così come i cateti CE e DF. Ma allora si ha $\alpha' = \beta$, d'altro canto $\beta = 180° - \alpha$, quindi α e α' sono fra loro supplementari. Quindi possiamo porre quest'altra definizione.

Definizione 10

Si ha $sin(x) = sin(180° - x)$, per ogni x: $90° \le x \le 180°$.

Possiamo allora dire che $sin(180°) = 0$ e pertanto che non hanno significato le scritte $cot(180°)$ e $csc(180°)$, ma anche:

Teorema 9

Si ha: $csc(x) = csc(180° - x)$, per ogni x: $90° \le x < 180°$.

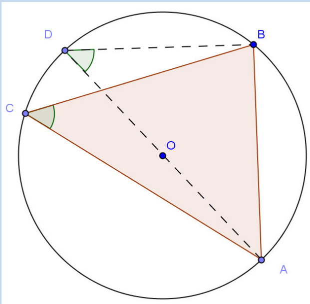
Adesso abbiamo perciò tutto il necessario per cercare di risolvere triangoli anche non rettangoli. Dobbiamo però stabilire quanti enti geometrici dobbiamo conoscere per potere risolvere un triangolo. La risposta ce la forniscono i 3 criteri di isometria dei triangoli, che qui ricordiamo.

(1° criterio di isometria dei triangoli o LAL) Due triangoli che hanno ordinatamente isometrici due lati e l'angolo da essi compreso, sono fra loro isometrici.
(2° criterio di isometria dei triangoli o ALA) Due triangoli che hanno ordinatamente isometrici due angoli e il lato a essi adiacente, sono fra loro isometrici.
(3° criterio di isometria dei triangoli o LLL) Due triangoli che hanno ordinatamente isometrici i tre lati, sono fra loro isometrici.

Quindi possiamo risolvere solo triangoli di cui conosciamo 2 lati e l'angolo compreso, due angoli e un lato oppure i tre lati. In particolare il criterio ALA in effetti vale anche se gli angoli noti non sono adiacenti al lato, perché conoscendo due angoli di un triangolo conosciamo anche il terzo, perché è supplementare della somma degli altri due. Inoltre il criterio LLL è ovviamente soggetto alla validità della disuguaglianza triangolare, ossia ciascuno dei lati deve essere minore della somma degli altri.
Per trovare delle proprietà che usano la trigonometria per risolvere i triangoli nelle ipotesi dei tre criteri di isometria, dobbiamo cercare di riferirci alle proprietà sui triangoli rettangoli che già conosciamo.
Ci proponiamo di dimostrare il seguente risultato.

Teorema 10 (della corda)

In un triangolo un lato è isometrico al prodotto del diametro della circonferenza circoscritta al triangolo per il seno dell'angolo opposto al detto lato: $a = 2R \cdot sin(\alpha)$; $b = 2R \cdot sin(\beta)$; $c = 2R \cdot sin(\gamma)$.
Dimostrazione.
Consideriamo la circonferenza circoscritta al triangolo, che sappiamo sempre esistere, dato che gli assi dei lati si incontrano nel circocentro della circonferenza. Tracciamo il diametro AD e costruiamo il triangolo



ABD.
Si ha $\angle A\hat{C}B = \angle A\hat{D}B$, perché sono angoli alla circonferenza che insistono sulla stessa corda AB. Quindi $\overline{AB} = \overline{AD} \cdot sin\left(A\hat{D}B\right)$, perché il triangolo ABD è iscritto in una semicirconferenza, pertanto è retto di ipotenusa AD. Ma allora $\overline{AB} = \overline{AD} \cdot sin\left(A\hat{C}B\right)$, che è la tesi.

Una immediata conseguenza di questo teorema è il seguente

Corollario 1

Il raggio R del cerchio circoscritto a un triangolo è

- la metà del rapporto fra la misura di un lato e quella del seno dell'angolo a esso opposto:
$$R = \frac{a}{2 \cdot sin(\alpha)} = \frac{b}{2 \cdot sin(\beta)} = \frac{c}{2 \cdot sin(\gamma)}$$
- la quarta parte del rapporto fra il prodotto delle misure dei tre lati e quella dell'area: $R = \frac{1}{4} \cdot \frac{a \cdot b \cdot c}{A}$.

Dimostrazione
La prima parte del corollario è immediata, perché si ottiene come formula inversa di quella stabilita nel Teo-

rema 10, quindi proveremo solo la seconda parte.
Consideriamo un generico triangolo e calcoliamone l'area: $A = ½ \cdot a \cdot b \cdot sin(\gamma)$. Ricaviamo $sin(\gamma)$ dal Teorema 10, ottenendo $sin(\gamma) = \frac{c}{2 \cdot R}$, sostituiamo nella precedente espressione: $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \frac{c}{2 \cdot R} = \frac{1}{4} \cdot \frac{a \cdot b \cdot c}{R}$.
Infine ricaviamo la misura di $R = \frac{1}{4} \cdot \frac{a \cdot b \cdot c}{A}$.

Possiamo trovare anche una relazione che lega le misure dei lati di un triangolo al raggio della circonferenza inscritta.

Corollario 2
Il raggio r del cerchio inscritto in un triangolo è il rapporto fra il prodotto delle misure di due lati per il seno dell'angolo fra essi compreso e il perimetro: $r = \frac{a \cdot b \cdot sin(\gamma)}{a+b+c} = \frac{a \cdot c \cdot sin(\beta)}{a+b+c} = \frac{b \cdot c \cdot sin(\alpha)}{a+b+c}$

Dimostrazione
Dobbiamo tenere conto della relazione nota dalla geometria elementare che $r = A/p$, in cui p indica il semiperimetro. In questa espressione sostituiamo la relazione per l'area: $r = \frac{\frac{1}{\cancel{2}} \cdot a \cdot b \cdot sin(\gamma)}{\frac{a+b+c}{\cancel{2}}} = \frac{a \cdot b \cdot sin(\gamma)}{a+b+c}$.

Un'altra immediata e importantissima conseguenza del Teorema della corda è la seguente.

Corollario 3 (Teorema dei seni)
In un triangolo il rapporto fra la misura di un lato e quella del seno dell'angolo a esso opposto è costante, essendo uguale al diametro della circonferenza circoscritta al triangolo.

Simbolicamente possiamo indicare il Teorema dei seni in questo modo: $\frac{a}{sin(\alpha)} = \frac{b}{sin(\beta)} = \frac{c}{sin(\gamma)}$.

La precedente espressione rappresenta 3 diverse uguaglianze, che in matematica si chiamano proporzioni: $\frac{a}{sin(\alpha)} = \frac{b}{sin(\beta)}; \frac{a}{sin(\alpha)} = \frac{c}{sin(\gamma)}; \frac{b}{sin(\beta)} = \frac{c}{sin(\gamma)}$. Ciò significa che mediante due di queste proporzioni possiamo risolvere dei triangoli, in particolare dalla prima proporzione, possiamo trovare un lato conoscendone un altro e i seni degli angoli opposti ai due lati: $a = \frac{b \cdot sin(\alpha)}{sin(\beta)}$; oppure un angolo conoscendo il lato opposto, un altro lato e il suo angolo opposto: $\alpha = sin^{-1}\left(\frac{a \cdot sin(\beta)}{b}\right)$.

Per quanto riguarda la prima uguaglianza non ci sono problemi, anche perché concorda perfettamente con il criterio ALA. Vediamo un esempio.

Esempio 9
Vogliamo risolvere un triangolo di cui conosciamo le misure di un lato, 12, e di due angoli, 43° e 51°, il primo dei quali opposto al lato noto. Mediante il teorema dei seni possiamo perciò scrivere:

$$\frac{x}{sin(51°)} = \frac{12}{sin(43°)} \Rightarrow x = \frac{12 \cdot sin(51°)}{sin(43°)} \approx 13,67$$

Osserviamo che, ovviamente, x è più lungo del lato noto perché opposto a un angolo maggiore di quello opposto al detto lato. A questo punto possiamo determinare la misura del terzo lato, dato che facilmente troviamo quella del terzo angolo, 180° – (43° + 51°) = 86°.

$$\frac{x}{sin(86°)} = \frac{12}{sin(43°)} \Rightarrow x = \frac{12 \cdot sin(86°)}{sin(43°)} \approx 17,55$$

Osserviamo che questo è ovviamente il lato più lungo. Avremmo potuto calcolare questo lato anche con quest'altra proporzione: $\frac{x}{sin(86°)} = \frac{13,67}{sin(51°)}$. Solo che il dato 13,67 è approssimato, pertanto l'approssimazione su x sarebbe stata maggiore che nel caso precedente in cui abbiamo usato valori esatti.
Questo fatto è molto importante. Il valore 17,55 è stato calcolato effettuando le operazioni su una calcolatrice scientifica in una sola volta, ossia utilizzando tutte le cifre della calcolatrice. Vediamo cosa avremmo ottenuto invece approssimando ciascun risultato parziale a due cifre decimali, per difetto se la cifra è minore di 5 per eccesso altrimenti. $\frac{x}{sin(86°)} = \frac{12}{sin(43°)} \Rightarrow x = \frac{12 \cdot sin(86°)}{sin(43°)} \approx \frac{12 \cdot 1}{0,68} \approx 17,65$. Come si vede il risultato differisce dal precedente, più preciso, già a partire dalla prima cifra decimale. Pertanto è consigliabile fare in modo di approssimare solo alla fine dei calcoli, usando, quando possibile, tutte le cifre che propone la calcolatrice.

Consideriamo adesso la seconda espressione ottenuta dal teorema dei seni: $\alpha = sin^{-1}\left(\frac{a \cdot sin(\beta)}{b}\right)$. Nonostante non ci sia un criterio ALL, abbiamo trovato ugualmente una formula per risolvere il triangolo in queste ipotesi. Dobbiamo però chiederci se questa è una formula sempre valida come la precedente. E la risposta è ovviamente no. Infatti nessuno dice che sia sempre $\frac{a \cdot sin(\beta)}{b} \le 1$. In questo caso ovviamente non ci sarebbe l'angolo, quindi il triangolo.

Esempio 10

- Vogliamo risolvere un triangolo di cui conosciamo le misure di due lati, 15 e 18 e dell'angolo opposto al lato minore, 95°. Applichiamo la formula precedente: $sin^{-1}\left(\frac{18 \cdot sin(95°)}{15}\right) \approx sin^{-1}(1,19)$

  Ovviamente l'angolo non c'è, essendo l'argomento maggiore di 1. In effetti potevamo subito osservare, senza alcun bisogno della trigonometria, che il triangolo non poteva esistere. Infatti essendo 18 > 15, l'angolo cercato doveva essere maggiore di 95° ed evidentemente un triangolo con due angoli ottusi non esiste.
- Il triangolo può non esistere anche senza bisogno di avere ipotesi ovviamente assurde come le precedenti. Sia infatti un triangolo con a = 15, b = 18, α = 57°. Abbiamo: $sin^{-1}\left(\frac{18 \cdot sin(57°)}{15}\right) \approx sin^{-1}(1,01)$.

In effetti possono esserci dei casi però in cui di triangoli ne esistono più di uno.

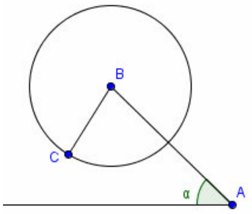
Esempio 11

Vogliamo risolvere un triangolo di cui conosciamo le misure di due lati, 10 e 12 e dell'angolo opposto al lato minore, 42°. Applichiamo la formula precedente: $sin^{-1}\left(\frac{12 \cdot sin(42°)}{10}\right) \approx sin^{-1}(0,80) \approx 53°24'48''$.

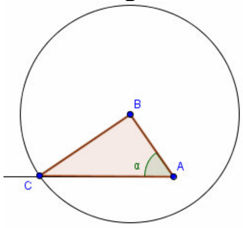
Quindi in questo caso il triangolo esiste. Il terzo angolo misura circa 84°35'12″. Il terzo lato invece è circa $\frac{10 \cdot sin(84°35'12'')}{sin(42°)} \approx 14,88$. In effetti però abbiamo visto che angoli supplementari hanno lo stesso seno, pertanto si ha anche: $sin^{-1}(0,80) \approx 180° - 53°24'48'' = 126°35'12''$.
E poiché 126°35'12″ + 42° = 168°35'12″, esiste anche questo triangolo, il cui terzo angolo misura 11°24'48″

e perciò il terzo lato misura $\frac{10 \cdot sin(11°24'48'')}{sin(42°)} \approx 2,96$.

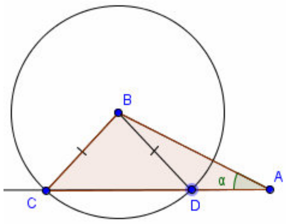
Cerchiamo di capire cosa sta succedendo. Vediamo come possiamo costruire geometricamente un triangolo di cui conosciamo le misure di due lati e dell'angolo opposto a uno di essi.
Cominciamo a costruire l'angolo dato di vertice *A* e il segmento dato *AB*. Ora però non sappiamo come costruire l'altro lato, *BC*, dato che non sappiamo la sua inclinazione, pertanto costruiamo la circonferenza di centro *B* e raggio *BC*. Quale dei punti di questa circonferenza è quello giusto? Ovviamente dipende se possiamo tracciare da *C* un segmento *BC* che formi con *AB* l'angolo dato. E quindi ecco cosa può succedere.



La circonferenza non incontra l'altro lato dell'angolo di vertice *A*, quindi il triangolo non esiste.



Oppure
La circonferenza incontra la semiretta di vertice *A* in un solo punto, quindi il triangolo esiste ed è unico.



O infine
La circonferenza incontra la semiretta in due punti, pertanto vi sono due distinti triangoli *ABC* e *ABD* che hanno il lato *AB* e l'angolo di vertice *A* in comune, e un altro lato di uguale misura, $\overline{BC} = \overline{BD}$, ma il terzo lato e gli altri due angoli di diversa misura.

Trasferendo il ragionamento precedente da un punto di vista trigonometrico abbiamo il seguente risultato.

Teorema 11

Dato un triangolo di cui sono note le misure di due lati, *a* e *b*, e dell'angolo opposto a uno di essi, β, possiamo dire che

- Se $\frac{a \cdot sin(\beta)}{b} > 1$ il triangolo non esiste;
- Se $\frac{a \cdot sin(\beta)}{b} \leq 1$ e $\alpha = sin^{-1}\left(\frac{a \cdot sin(\beta)}{b}\right) \leq \beta$ esiste un solo triangolo;
- Se $\frac{a \cdot sin(\beta)}{b} \leq 1$ e $\alpha = sin^{-1}\left(\frac{a \cdot sin(\beta)}{b}\right) > \beta$ esistono due distinti triangoli.

Tenuto conto del precedente risultato possiamo enunciare un particolare criterio ALL.

Teorema 12 (Criterio ALL)

Esiste un solo triangolo note le misure di due lati, $a < b$, e dell'angolo β opposto al maggiore di essi.

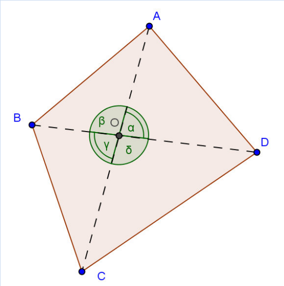
Avendo dato significato al seno di angoli ottusi possiamo considerare proprietà dei quadrilateri.

Teorema 13

L'area di un quadrilatero convesso si ottiene dal semiprodotto delle sue diagonali per il seno di uno degli angoli che esse formano. In formula $S = ½ \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot sin(\theta)$.

Dimostrazione

Consideriamo un qualsiasi quadrilatero convesso e tracciamone le diagonali e gli angoli da esse formati.



Calcoliamo l'area del quadrilatero come somma delle aree dei 4 triangoli formati dalle diagonali.

$$\frac{\overline{AO}\cdot\overline{BO}\cdot sin\left(A\hat{O}B\right)}{2}+\frac{\overline{BO}\cdot\overline{CO}\cdot sin\left(B\hat{O}C\right)}{2}+\frac{\overline{CO}\cdot\overline{DO}\cdot sin\left(C\hat{O}D\right)}{2}+\frac{\overline{DO}\cdot\overline{AO}\cdot sin\left(D\hat{O}A\right)}{2}$$

Semplifichiamo l'espressione precedente

$$\frac{\overline{AO}\cdot\overline{BO}\cdot sin\left(A\hat{O}B\right)}{2}+\frac{\overline{BO}\cdot\overline{CO}\cdot sin\left(A\hat{O}B\right)}{2}+\frac{\overline{CO}\cdot\overline{DO}\cdot sin\left(A\hat{O}B\right)}{2}+\frac{\overline{DO}\cdot\overline{AO}\cdot sin\left(A\hat{O}B\right)}{2}$$

Perché gli angoli sono a due a due isometrici (quelli opposti al vertice) e a due a due supplementari, pertanto hanno lo stesso seno. Semplifichiamo ulteriormente

$$\frac{\overline{AO}\cdot\left(\overline{BO}+\overline{DO}\right)\cdot sin\left(A\hat{O}B\right)}{2}+\frac{\overline{CO}\cdot\left(\overline{DO}+\overline{BO}\right)\cdot sin\left(A\hat{O}B\right)}{2}=$$

$$=\frac{\overline{AO}\cdot\overline{BD}\cdot sin\left(A\hat{O}B\right)}{2}+\frac{\overline{CO}\cdot\overline{BD}\cdot sin\left(A\hat{O}B\right)}{2}=$$

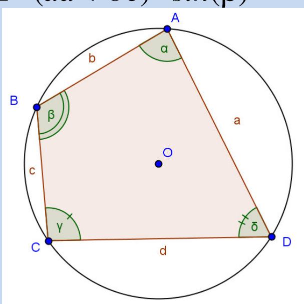
$$=\frac{\overline{BD}\cdot\left(\overline{AO}+\overline{CO}\right)\cdot sin\left(A\hat{O}B\right)}{2}=\frac{\overline{BD}\cdot\overline{AC}\cdot sin\left(A\hat{O}B\right)}{2}$$

Abbiamo messo a fattor comune e sostituito le somme con i relativi risultati.

Per particolari quadrilateri vi è un risultato legato alle misure dei lati.

Teorema 14

In un quadrilatero ciclico (cioè inscrivibile in una circonferenza), l'area è la semisomma del prodotto di coppie di lati consecutivi per il seno di uno degli angoli interni compreso fra le coppie. Con riferimento alla seguente figura: $½ \cdot (ab + cd) \cdot sin(\alpha) = ½ \cdot (ad + bc) \cdot sin(\beta)$



Dimostrazione

Tracciamo la diagonale BD, dividendo il quadrilatero in due triangoli, la somma delle cui aree è equivalente all'area di ABCD. Si ha allora: $½ \cdot ab \cdot sin(\alpha) + ½ \cdot cd \cdot sin(\gamma)$. Ma nei quadrilateri ciclici gli angoli opposti sono supplementari, pertanto si ha: $½ \cdot ab \cdot sin(\alpha) + ½ \cdot cd \cdot sin(180° - \alpha) = ½ \cdot (ab + cd) \cdot sin(\alpha)$. Che è quanto volevamo dimostrare.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Di un triangolo di lati lunghi 5, 6 e 7, vogliamo trovare la misura del raggio circoscritto al triangolo.

Sfruttando la seconda tesi del Corollario 1, avremo: $R = \frac{1}{4} \cdot \frac{a \cdot b \cdot c}{A}$. Purtroppo però non conosciamo la misura dell'area. Esiste però un teorema, dovuto ad Erone, che permette di determinare l'area di un triangolo conoscendo le misure dei lati: $A = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$, in cui, p indica la misura del semiperimetro.

Nel nostro caso sarà: $p = \frac{5+6+7}{2} = 9$. Quindi: $A = \sqrt{9 \cdot (9-5) \cdot (9-6) \cdot (9-7)} = \sqrt{216} \approx 14,7$. Infine avremo: $R \approx \frac{1}{4} \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{14,7} \approx 3,6$.

Determinare gli elementi incogniti dei seguenti triangoli qualsiasi di cui sono dati alcuni enti (con *S* si indica la misura dell'area, con *p* quella del semiperimetro, con R quella del raggio circoscritto):

Livello 1

1. $a = 1,23$; $b = 3,41$; $c = 4,12$; $R = ?$ [$\approx 2,32$] $a = 3$; $b = 5$; $c = 7$; $R = ?$ $\left[7/\sqrt{3}\right]$
2. $a = 1,45$; $\alpha = ?$; $R = 3,56$ [$\approx 11°45'2''$] $a = 1$; $b = 2$; $c = 3$; $R = ?$ [$\varnothing$]
3. $a = ?$; $b = 3,67$; $c = 4,89$; $R = 1,31$; $S = 5,12$ [$\approx 1,49$] $a = 2$; $\alpha = 51°$; $R = ?$ [$\approx 1,29$]
4. $b = 3,54$; $\beta = 47°31'47''$, $R = ?$ [$\approx 2,40$] $a = ?$; $\alpha = 38°$; $R = 3,12$ [$\approx 3,84$]
5. $a = ?$; $b = 4,51$; $c = 3,74$; $R = 4,16$; $S = 7,64$ [$\approx 7,54$] $a = 3,67$; $\alpha = ?$, $R = 1,56$ [$\varnothing$]

Livello 2

6. $a + b = 5$; $c = 3$; $S = 2,6$; $R = ?$ [$\approx 1,64$] $a - b = 2$; $c = 4$; $S = 3,75$; $R = ?$ [$\approx 2,05$]
7. $a = 4$; $b + c = 11,48$; $R = 7,21$; $S = 11,03$ $b = ?$, $c = ?$ [$\varnothing$]
8. $a = 4$; $b + c = 11,48$; $R = 1,21$; $S = 11,03$ $b = ?$, $c = ?$ [$\approx 1,31$; $\approx 10,17$]
9. $a = 6$; $b - c = 4,37$; $R = 2,94$; $S = 6,18$ $b = ?$, $c = ?$ [$\approx 6,29$; $\approx 1,92$]

Lavoriamo insieme

Risolvere un triangolo di lati lunghi 5 e 6 e di angolo opposto al maggiore di essi di 74°. Applichiamo il Teorema dei seni: $\frac{5}{sin(x)} = \frac{6}{sin(74°)} \Rightarrow sin(x) = \frac{5 \cdot sin(74°)}{6} \approx 0,8 \Rightarrow \begin{cases} x \approx 53°13'50'' \\ x \approx 180° - 53°13'50'' = 126°46'10'' \end{cases}$

Abbiamo ottenuto due soluzioni, la minore è certamente accettabile e dà luogo a un triangolo il cui terzo angolo misura: 180° – 74° – 53°13′50″ = 52°46′10″ e il cui terzo lato misura:

$$\frac{x}{sin(52°46'10'')} \approx \frac{6}{sin(74°)} \Rightarrow x \approx \frac{6 \cdot sin(52°46'10'')}{sin(4°)} \approx 4,97$$

Il triangolo è ovviamente *quasi* isoscele.

L'altra soluzione non è invece accettabile perché 74° + 126°46′10″ > 180°.

Risolvere i triangoli di cui sono forniti alcuni dei loro enti.

Livello 1

10. $a = 41$; $b = 37$; $\alpha = 77°$ [$\beta \approx 61°33'33''$; $\gamma \approx 41°26'27''$; $c \approx 27,85$]
11. Con riferimento al precedente esercizio, che succede se l'angolo noto è β? [$\varnothing$]
12. $\alpha = 31°$; $\beta = 69°$; $c = 12$ [$\gamma = 80°$; $a \approx 6,28$; $b \approx 11,38$]
13. Con riferimento al precedente esercizio, che succede se il lato noto è a? E se è b? [($\gamma = 80°$; $b \approx 21,75$; $c \approx 22,95$); ($\gamma = 80°$; $a \approx 6,62$; $c \approx 12,66$)]
14. $a = 15$; $b = 32$; $\beta = 101°$ [$\alpha \approx 27°23'46''$; $\gamma \approx 51°36'14''$; $c \approx 11,98$]
15. Con riferimento al precedente esercizio, che succede se l'angolo noto è α? [$\varnothing$]
16. $\alpha = 70°$; $\beta = 52°$; $c = 10$ [$\gamma = 58°$; $a \approx 11,08$; $b \approx 9,29$]
17. Con riferimento al precedente esercizio, che succede se il lato noto è a? E se è b?

[($\gamma = 58°$; $b \approx 8{,}39$; $c \approx 9{,}02$); ($\gamma = 58°$; $a \approx 11{,}92$; $c \approx 10{,}76$)]

18. $a = 21$; $b = 3{,}47$; $\beta = 32°41'13''$ [$\varnothing$]
19. Con riferimento al precedente esercizio, che succede se l'angolo noto è α? [$\beta \approx 5°7'11''$; $\gamma \approx 142°11'36''$; $c \approx 23{,}84$]
20. $\alpha = 13°41'15''$; $\beta = 115°41'$; $c = 7$ [$\gamma = 50°37'45''$; $a \approx 2{,}14$; $b \approx 8{,}16$]
21. Con riferimento al precedente esercizio, che succede se il lato noto è a? E se è b? [($\gamma = 50°37'45''$; $b \approx 26{,}66$; $c \approx 22{,}87$); ($\gamma = 50°37'45''$; $a \approx 1{,}84$; $c \approx 6{,}00$)]
22. $a = 1{,}5$; $b = 2$; $\alpha = 32°$ [($\beta \approx 44°57'36''$; $\gamma \approx 103°02'24''$; $c \approx 2{,}76$); ($\beta \approx 135°02'24''$; $\gamma \approx 12°57'36''$; $c \approx 0{,}63$)]
23. Con riferimento al precedente esercizio, che succede se l'angolo noto è β? [($\alpha \approx 28°43'13''$; $\gamma \approx 118°35'34''$; $c \approx 3{,}54$)]

Livello 2

24. $a + b = 14$; $\alpha = 35°$; $\beta = 41°$ [$\gamma = 104°$; $a \approx 6{,}53$; $b \approx 7{,}47$; $c \approx 11{,}05$]
25. $a - b = 4$; $\alpha = 51°$; $\beta = 73°$ [$\varnothing$]
26. $a - b = 4$; $\alpha = 73°$; $\beta = 51°$ [$\gamma = 56°$; $a \approx 21{,}35$; $b \approx 17{,}35$; $c \approx 18{,}51$]
27. $a + b = 6{,}19$; $\alpha = 23°51'31''$; $\gamma = 24°19'1''$ [$\beta = 131°49'28''$; $a \approx 2{,}18$; $b \approx 4{,}01$; $c \approx 2{,}21$]
28. $c = 3{,}12$; $p = 6{,}2$; $\alpha = 41°13'7''$; $\beta = 71°4'51''$ [$\gamma = 67°42'2''$; $a \approx 3{,}81$; $b \approx 5{,}47$]

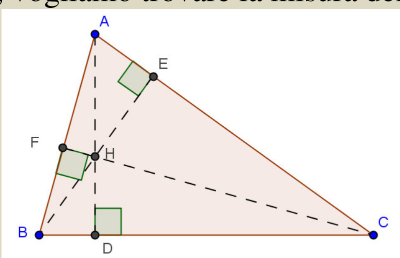
Livello 3

29. $\alpha = 25°$; $\beta = 55°$; $S = 18{,}31$ [$\gamma = 100°$; $a \approx 4{,}38$; $b \approx 8{,}49$; $c \approx 10{,}21$]
30. $a \cdot b = 5{,}21$; $\alpha = 5°4'31''$; $\beta = 71°13'8''$ [$\gamma = 103°42'21''$; $a \approx 0{,}70$; $b \approx 7{,}47$; $c \approx 7{,}66$]
31. $a = 2b$; $\alpha = 38°14'1''$; $\beta = 53°3'48''$ [$\varnothing$]
32. Nel problema precedente non può essere $a = 2b$, quanto fa invece b/a? [$\approx 1{,}29$]
33. $2p = 12{,}56$; $\alpha = 44°$; $\beta = 66°$ [$\gamma = 70°$; $a \approx 3{,}42$; $b \approx 4{,}50$; $c \approx 4{,}63$]
34. $a = b$, $2p = 6{,}19$; $\alpha = 37°48'14''$ [$\beta = \alpha$, $\gamma \approx 104°23'32''$; $a = b \approx 1{,}73$; $c \approx 2{,}73$]

35. Dato il triangolo con $a = 35$; $\beta = 60°$ qual è il minimo valore che può assumere b affinché il triangolo esista? $\left[35 \cdot \sqrt{3}/2\right]$
36. Con riferimento al problema precedente, per quali valori di b il problema ha una sola soluzione? [$b \geq 35$]

Lavoriamo insieme

Consideriamo un triangolo acutangolo, vogliamo trovare la misura delle sue altezze.



Ricaviamo AH dal triangolo rettangolo AEH: $\overline{AH} = \dfrac{\overline{AE}}{sin\left(A\hat{H}E\right)}$. In questa espressione sostituiamo ad AE la sua espressione ottenuta dal triangolo rettangolo ABE: $\overline{AH} = \dfrac{\overline{AB} \cdot cos(\alpha)}{sin\left(A\hat{H}E\right)}$ (1). Poiché: $A\hat{H}E = D\hat{H}B = 180° - D\hat{H}E$. e poiché il quadrilatero $DCEH$ ha due angoli retti, quindi ha i rimanenti angoli supplementari, cioè $\angle A\hat{C}B = \gamma = 180° - D\hat{H}E = A\hat{H}E$. Possiamo allora sostituire nella (1): $\overline{AH} = \dfrac{c \cdot cos(\alpha)}{sin(\gamma)}$.

Ma per il teorema della corda si ha $c = 2R \cdot sin(\gamma)$, quindi: $\dfrac{c \cdot cos(\alpha)}{sin(\gamma)} = \dfrac{2R \cdot \cancel{sin(\gamma)} \cdot cos(\alpha)}{\cancel{sin(\gamma)}} = 2R \cdot cos(\alpha)$.

Ragionando in modo simile avremo ovviamente anche: $\overline{BH} = 2R \cdot cos(\beta); \overline{CH} = 2R \cdot cos(\gamma)$. Passiamo adesso a *DH*, lavorando sul triangolo rettangolo *BDH*:

$$\overline{DH} = \overline{BH} \cdot cos\left(D\hat{H}B\right) = \overline{BH} \cdot cos\left(A\hat{H}E\right) = \overline{BH} \cdot cos(\gamma) = 2R \cdot cos(\beta) \cdot cos(\gamma).$$

Infine avremo: $\overline{AD} = 2R \cdot cos(\alpha) + 2R \cdot cos(\beta) \cdot cos(\gamma) = 2R \cdot \left[cos(\alpha) + cos(\beta) \cdot cos(\gamma)\right]$.

Analogamente: $\overline{BE} = 2R \cdot \left[cos(\beta) + cos(\alpha) \cdot cos(\gamma)\right]; \overline{CF} = 2R \cdot \left[cos(\gamma) + cos(\beta) \cdot cos(\alpha)\right]$

Per stabilire se un triangolo è acutangolo, basta considerare il maggiore dei suoi lati e verificare che il suo quadrato è minore della somma dei quadrati degli altri due lati, se è maggiore è ottusangolo, se è uguale è rettangolo. Tenuto conto di ciò verificare quali dei seguenti triangoli, di cui diamo le misure dei lati, sono acutangoli.

Livello 2

37. $a = 3$; $b = 5$; $c = 7$ [Ottusangolo] $a = 3{,}12$; $b = 4{,}13$; $c = 5{,}14$ [Acutangolo]
38. $a = 1$; $b = 2$; $c = 3$ [Triangolo inesistente] $a = 5{,}12$; $b = 4{,}15$; $c = 5{,}18$ [Acutangolo]
39. $a = 8{,}23$; $b = 7{,}56$; $c = 9{,}48$ [Acutangolo]

Dopo avere verificato che i seguenti triangoli sono acutangoli, determinare le misure richieste

40. $a = 7$; $b = 4$; $\alpha = 70°$; $h_a = ?$ $h_b = ?$ $h_c = ?$ [≈ 3,91; ≈ 3,76; ≈ 6,83]
41. $a = 4{,}12$; $b = 5{,}13$; $\alpha = 40°13'25''$; $h_a = ?$ $h_b = ?$ $h_c = ?$ [≈ 3,31; ≈ 3,84; ≈ 5,12]
42. $a = 4{,}75$; $\alpha = 48°$; $\beta = 57°$; $h_a = ?$ $h_b = ?$ $h_c = ?$ [≈ 3,98; ≈ 4,59; ≈ 5,18]
43. $c = 5{,}87$; $\alpha = 41°11'56''$; $\beta = 49°25'6''$; $h_a = ?$ $h_b = ?$ $h_c = ?$ [≈ 2,94; ≈ 3,87; ≈ 4,46]
44. $h_a = 6{,}12$; $\alpha = 44°$; $\beta = 61°$; $a = ?$ [≈ 5,03]
45. Provare che $sin(180° - \alpha) = sin(\alpha)$, con α angolo acuto, calcolando l'area di un rombo mediante le misure di un lato e di uno degli angoli interni, in due modi, prima con l'angolo acuto e poi con quello ottuso.

Livello 3

46. Trovare una relazione che lega un'altezza di un triangolo con il lato a essa riferito. $\left[h_a = \dfrac{a \cdot sin(\beta) \cdot sin(\gamma)}{sin(\alpha)}\right]$
47. Di un triangolo conosciamo le misure di *a*, *c* e α. Vogliamo sapere le reciproche relazioni fra *a* e *c* affinché esistano 0, 1 o 2 triangoli con le date misure. [0 soluzioni se $a > c/sin(\gamma)$; 1 soluzione se $a \le c$; 2 soluzioni se $a > c$]
48. In che relazione sono il seno dell'angolo al vertice, α, di un triangolo isoscele, e il seno di uno degli angoli alla base, β? [$sin(\alpha) = sin(2\beta)$]
49. Tenuto conto del precedente esercizio e della formula di duplicazione del seno trovata nelle attività del paragrafo precedente [$sin(2\alpha) = 2 \cdot sin(\alpha) \cdot cos(\alpha)$], sapendo che il seno di uno degli angoli alla base di un triangolo isoscele è 3/4, determinare il seno dell'angolo al vertice. $\left[3\sqrt{7}/8\right]$
50. Dato il triangolo rettangolo e isoscele *CDE*, sul cateto *DE* si scelga un punto *B* in modo che sia $\angle B\hat{C}D = 30°$, quindi si costruisca il triangolo equilatero *ABC* il cui lato misura 10. Determinare la misura di *EF*. [≈ 3,28]
51. Determinare perimetro e area del triangolo di cui sono note la differenza di due lati, 5, e le misure degli angoli a essi opposti, 19°38′ e 59°32'. [≈ 20,73; ≈ 12,85]
52. Nel triangolo isoscele *ABC*, *BT* è la bisettrice dell'angolo *B* che incontra il lato *AC* nel punto *T*. Se $\angle B\hat{T}A = 95°13'12''$ e *BT* misura 4. Determinare la misura del perimetro. [≈ 13,43]
53. Nel triangolo *ACD* si ha $\angle C\hat{A}D = 21{,}85°, \overline{CD} = 2{,}34\,cm$ e l'angolo esterno rispetto al vertice *C* di 52,18°. Determinare il perimetro di *ACD* [≈ 10,48]
54. In un cerchio di raggio 1,96 *cm*, si traccia una corda *AB* lunga 2,68 *cm*. Quindi sia il punto *C* appartenente al maggiore dei due archi *AB*, in modo che $C\hat{A}B$ = 77°19′12″. Determinare il perimetro del triangolo *ABC*. [≈ 9,88 *cm*]
55. Di un triangolo *ABC* si sa che i lati *AB* e *AC* e l'area stanno fra loro come i numeri 1, 2, 3, sapendo che il lato *BC* misura 12, determinare area e perimetro. [($2p \approx 24{,}85$; $S \approx 12{,}85$) ∨ ($2p \approx 45{,}63$; $S \approx 33{,}63$)]

56. Il triangolo isoscele ABC ha i lati obliqui che misurano $\sqrt{3}$ e la base che misura più di 3. quanto misura al minimo l'angolo al vertice? [Più di 120°]
57. Un triangolo acutangolo, di perimetro 12*cm* è inscritto in una circonferenza di raggio 6 *cm*, determinare la somma dei seni degli angoli del triangolo. [1]
58. Risolvere il precedente quesito, per un generico perimetro $2p$ e un generico raggio r. [p/r]
59. Tenuto conto del precedente risultato possiamo affermare che un triangolo di perimetro 12 *cm* non può essere inscritto in una circonferenza di raggio 2 *cm*. Perché? [Non può essere $p/r = 3$]
60. Determinare il rapporto fra i raggi delle circonferenze inscritta e circoscritta a uno stesso triangolo rettangolo in funzione dei lati. $\left[\frac{r}{R} = \frac{2 \cdot b \cdot c}{a \cdot (a+b+c)}\right]$
61. Determinare il rapporto fra i raggi delle circonferenze inscritta e circoscritta al triangolo rettangolo di lati 3, 4, 5. [2/5]
62. Determinare il rapporto fra i raggi delle circonferenze inscritta e circoscritta a uno stesso triangolo rettangolo isoscele in funzione dei lati. $\left[\frac{r}{R} = \frac{2 \cdot b^2}{a \cdot (a+2b)} = \frac{a}{a+2b}\right]$

Lavoriamo insieme

Un quadrilatero ha diagonali che misurano 3 e 4 e formano un angolo di 30°, vogliamo determinare l'area. Utilizzando il risultato del Teorema 13, abbiamo ½ · 3 · 4 · $sin(30°)$ = 6 · ½ = 3.

Indichiamo con, le diagonali di un quadrilatero convesso, con α uno degli angoli formato da essi e con *S* l'area del quadrilatero. Determinare quanto richiesto

***Livello* 1**

63. $d_1 = 3$; $d_2 = 5$; $\alpha = 60°$; $S = ?$ $\left[\frac{15}{4} \cdot \sqrt{3}\right]$ $d_1 = 13{,}54$; $d_2 = 8{,}41$; $\alpha = ?$; $S = 15{,}34$ [≈ 15°37′49″]
64. $d_1 = 1{,}45$; $d_2 = 2{,}18$; $\alpha = 41°52'16''$; $S = ?$ [≈ 1,05] $d_1 = 5{,}18$; $d_2 = ?$; $\alpha = 71°13'28''$; $S = 7{,}12$ [≈ 2,90]
65. $d_1 = ?$; $d_2 = 7{,}32$; $\alpha = 43°27'57''$; $S = 12{,}31$ [≈ 4,89] $d_1 = 4{,}12$; $d_2 = 5{,}13$; $\alpha = 52°$; $S = ?$ [≈ 833]
66. $d_1 = 5{,}18$; $d_2 = 5{,}12$; $\alpha = ?$; $S = 8{,}27$ [≈ 38°34′58″]

***Livello* 2**

67. $d_1 = ?$; $d_2 = 2 \cdot d_1$; $\alpha = 30°$; $S = 4{,}35$ [≈ 2,95; ≈ 5,90] $d_1 = ?$; $d_2 = 4{,}38 - d_1$; $\alpha = 51°13'$; $S = 8{,}13$ [∅]
68. $d_1 = ?$; $d_2 = d_1 + 2{,}13$; $\alpha = 49°12'33''$; $S = 7{,}38$ [≈ 3,48; ≈ 5,61]
69. $d_1 = ?$; $d_2 = d_1^2$; $\alpha = 13°17'43''$; $S = 18{,}91$ [≈ 5,48; ≈ 30,02]
70. $d_1 = ?$; $d_2 = 3{,}14 + = 2 \cdot d_1$; $\alpha = 53°18'27''$; $S = 11{,}03$ [≈ 3,01; ≈ 9,15]
71. Applicare il teorema 13 a un generico quadrato di lato ℓ, verificandone la validità.
72. Applicare il teorema 13 a un quadrilatero con diagonali d_1, d_2 perpendicolari. [½ $\cdot d_1 \cdot d_2$]

***Livello* 3**

73. Dato che il teorema 13 può applicarsi anche a un generico rettangolo di lati a e b, determinare la misura degli angoli che formano le diagonali in funzione dei lati. $\left[sin^{-1}\left(\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)\right]$
74. Tenuto conto del precedente esercizio verificare che se il rettangolo diviene un quadrato gli angoli delle diagonali sono retti.
75. Calcolare uno degli angoli acuti formati dalle diagonali di un rettangolo di lati lunghi 3 e 4. [≈ 73°44′23″]
76. Un rettangolo ha un lato lungo 3,12 e uno degli angoli che formano le diagonali di 52°31′12″, quanto misura l'atro lato? [2 soluzioni: ≈ 1,54; ≈ 6,32]
77. Usando il teorema 13 determinare la misura degli angoli che formano le diagonali di un generico trapezio rettangolo di basi a e b ($b > a$) ed altezza h, in funzione dei lati. $\left[sin^{-1}\left(\frac{(a+b)\cdot h}{\sqrt{(b^2+h^2)\cdot(a^2+h^2)}}\right)\right]$

78. Calcolare uno degli angoli acuti formati dalle diagonali di un trapezio rettangolo di basi lunghe 3 e 4 ed altezza lunga 2. [≈ 60°15′18″]

79. Calcolare uno degli angoli formati dalle diagonali di un trapezio rettangolo in cui l’altezza misura quanto la base minore e quanto metà della base maggiore. [≈ 71°33′54″]

80. Usando il teorema 13 determinare la misura degli angoli che formano le diagonali di un trapezio isoscele di basi a e b ($b > a$) ed altezza h, in funzione dei lati. $\left[sin^{-1}\left(\frac{4\cdot(a+b)\cdot h}{(a+b)^2+4h^2}\right)\right]$

81. Di un parallelogramma sono noti una sua diagonale, 19,38, l’angolo opposto alla detta diagonale, 134°45′, e l’angolo formato dalla diagonale con uno dei lati, 15°2′24″. Determinare le misure dei lati del parallelogramma. [≈ 7,08; ≈ 13,03]

82. Un trapezio è inscritto in una semicirconferenza, con la base maggiore coincidente con il diametro. Dopo avere provato che il trapezio è isoscele, determinarne la misura dell’area mediante il raggio r della circonferenza e l’angolo al centro α che insiste sul lato AC. [$\frac{1}{2} r^2 \cdot (2\, sin(\alpha) + sin(2\alpha))$]

83. Determinare la misura del perimetro del trapezio precedente. [$2r \cdot (1 + 2\, sin(\alpha/2) + cos(\alpha))$]

Con riferimento al precedente problema determinare quanto richiesto

84. $r = 1\ m$, $\alpha = 60°$, $S = ?$, $2p = ?$ $\left[5\ m^2; \frac{3\cdot\sqrt{3}}{4} m\right]$ $r = 1\ m$, $\alpha = 30°$, $S = ?$, $2p = ?$ $\left[\approx 4{,}77\ m^2; \frac{2+\sqrt{3}}{4} m\right]$

85. $r = 1\ m$, $\alpha = 45°$, $S = ?$, $2p = ?$ $\left[\approx 4{,}94\ m^2; \frac{1+\sqrt{2}}{2} m\right]$

86. $\alpha = 70°$, $S = 5\ m^2$, $r = ?$ [≈ 1,99 m] $\alpha = 70°$, $2p = 5\ m$, $r = ?$ [≈ 1,00 m]

87. Determinare la misura dell’area di un trapezio isoscele inscritto in una semicirconferenza, mediante le misure del raggio r e dell’angolo alla base maggiore α. [$\frac{1}{2} r^2 \cdot (2\, sin(2\alpha) – sin(4\alpha))$]

88. Determinare il perimetro del trapezio del problema precedente. [$4r \cdot (sin^2(\alpha) + cos(\alpha))$]

Con riferimento al precedente problema determinare quanto richiesto

89. $r = 2\ m$, $\alpha = 45°$, $S = ?$, $2p = ?$ $\left[4\ m^2; 4\cdot\left(2+\sqrt{2}\right) m\right]$ $\alpha = 51°$, $S = 2\ m^2$, $r = ?$ [≈ 1,30 m]

90. $r = 3\ m$, $\alpha = 30°$, $S = ?$, $2p = ?$ $\left[\frac{9}{4}\cdot\sqrt{3}; \frac{3\cdot\left(3+2\cdot\sqrt{3}\right)}{2}\right]$ $\alpha = 37°$, $2p = 4{,}37\ m$, $r = ?$ [≈ 0,94 m]

Lavoriamo insieme

Consideriamo un quadrilatero ciclico di lati lunghi, nell’ordine, 4,31; 4,64; 5,99 e 3,29 e con l’angolo interno compreso tra i primi due lati di 94°42′. Vogliamo determinare la misura della sua area.
Utilizziamo il risultato del Teorema 15, scrivendo: $\frac{1}{2} \cdot (4{,}31 \cdot 4{,}64 + 5{,}99 \cdot 3{,}29) \cdot sin(94°42') \approx 19{,}79$.
Cosa sarebbe cambiato se l’angolo fosse stato compreso tra due degli altri lati consecutivi?

$$\frac{1}{2} \cdot (5{,}99 \cdot 4{,}64 + 4{,}31 \cdot 3{,}29) \cdot sin(94°42') \approx 20{,}91.$$

Gli altri due casi forniscono uguali risultati perché invertiamo solamente l’ordine degli addendi.

I dati seguenti si riferiscono a un quadrilatero ciclico, determinare quanto richiesto

Livello 1

91. $a = 2{,}44$; $b = 5{,}09$; $c = 6{,}61$; $d = 2{,}16$; $\alpha = 107°54'$; $S = ?$ [≈ 12,70]
92. $a = 2{,}76$; $b = 2{,}76$; $c = 6{,}22$; $d = 5{,}75$; $\delta = 94°54'$; $S = ?$ [≈ 16,46]
93. $a = 4{,}78$; $b = 2{,}48$; $c = 3{,}38$; $d = 4{,}11$; $\beta = 113°18'$; $S = ?$ [≈ 12,87]
94. $a = 3{,}15$; $b = 2{,}68$; $c = 4{,}68$; $d = 4{,}30$; $\gamma = 65°53'28''$; $S = ?$ [≈ 13,04]
95. $a = 5{,}71$; $b = ?$; $c = 6{,}43$; $d = 1{,}38$; $\alpha = 71°54'14''$; $S = 14{,}32$ [≈ 3,72]
96. $a = 4{,}37$; $b = 5{,}06$; $c = ?$; $d = 6{,}26$; $\beta = 58°32'29''$; $S = 17{,}28$ [≈ 2,60]
97. $a = 3{,}09$; $b = 5{,}31$; $c = 5{,}99$; $d = ?$; $\gamma = 61°30'$; $S = 18{,}96$ [≈ 4,46]

98. $a = 3,57$; $b = 2,41$; $c = 6,61$; $d = 3,77$; $\alpha = ?$; $S = 13,57$ [≈ 54°3′19″]

99. $a = 2,11$; $b = 6,15$; $c = 4,60$; $d = 4,98$; $\beta = ?$; $S = 17,91$ [≈ 67°24′20″]

Livello 2

100. $a = b = ?$; $c = 3,15$; $d = 3,26$; $\alpha = 73°24'11''$; $S = 13,77$ [≈ 4,30]

101. $a = b = c = ?$; $d = 5,28$; $\alpha = 66°42'$; $S = 11,14$ [≈ 2,95]

102. $a = b = ?$; $c = d = ?$; $c - a = 1,5$; $\alpha = 113°18'37''$; $S = 13,20$ [≈ 2,97; ≈ 4,47]

103. $a = ?$; $b = a + 1,2$; $c = 3,11$; $d = 4,01$; $\alpha = 74°12'53''$; $S = 15,12$ [≈ 3,79]

104. $a = 3,15$; $b = c - 1,14$; $c = ?$: $d = c + 2,13$; $\alpha = 58°17'44''$; $S = 18,13$ [≈ 4,65]

105. $a = 2b$; $c + d = a + 5,91$; $d - a = 1,58$; $\alpha = 132°30'$; $S = 7,48$ [≈ 2,43; ≈ 1,21; ≈ 4,33; ≈ 4,01]

106. Applicare il teorema 14 a un generico quadrato di lato ℓ, verificandone la validità.

107. Applicare il teorema 14 a un generico rettangolo di lati a e b, verificandone la validità.

108. Un aquilone è un quadrilatero le cui diagonali sono fra loro perpendicolari e i lati consecutivi sono a due a due isometrici. Se l'aquilone è ciclico, determinare la misura dell'area di questo quadrilatero in funzione dei lati a e b. [$\frac{1}{2}(a^2 + b^2) \cdot sin(\alpha)$]

109. Determinare le misure degli angoli acuti di un aquilone ciclico di lati lunghi 2,28 e 5,83 e di area 13,28. [≈ 42°40′11″]

Livello 3

110. Applicare il teorema 14 a un generico trapezio isoscele di basi a e b ed altezza h, verificandone la validità.

111. Possiamo dire che l'aquilone è sempre ciclico? In caso di risposta negativa determinare la misura della sua area in funzione dei lati. [No; $\frac{1}{2} \cdot (a^2 \cdot sin(\alpha) + b^2 \cdot sin(\beta))$]

112. Cosa deve succedere affinché un aquilone sia ciclico? [Deve avere due angoli opposti retti]

113. Un aquilone ciclico ha il lato maggiore doppio del minore, quanto misura l'angolo acuto? [≈ 53°7′48″]

114. Con riferimento al problema precedente, quanto misura l'area dell'aquilone, in termini della misura a del lato minore e di uno degli angoli non retti, α? [$5/2\ a^2 \cdot sin(\alpha)$]

115. Una piramide a base quadrata ha gli spigoli laterali isometrici. Determinare la misura del volume sapendo che lo spigolo di base misura 1 e l'angolo al vertice di ciascuna faccia laterale è 80°.

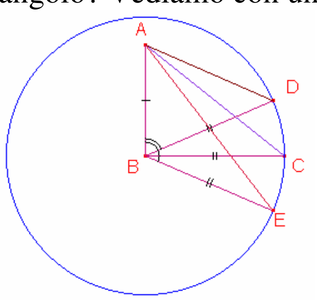
$$\left[\frac{\sqrt{cos(80°)}}{6 \cdot sin(40°)} \approx 0.11\right]$$

Risoluzione dei triangoli qualsiasi e teorema del coseno

Il problema

Come possiamo risolvere un triangolo nelle ipotesi dei criteri LAL e LLL?

Con il teorema dei seni abbiamo visto che possiamo risolvere solo i triangoli che verificano il criterio ALA, dobbiamo perciò cercare qualche altra proprietà che ci permetta di risolvere i triangoli anche in questi casi. Consideriamo una poco nota generalizzazione del Teorema di Pitagora, dovuta ad Euclide.
Noi sappiamo che in un triangolo rettangolo il quadrato dell'ipotenusa è somma dei quadrati degli altri cateti, ma cosa accade se il triangolo non è rettangolo? Vediamo con una costruzione geometrica.



Abbiamo costruito tre triangoli con due lati di uguale misura (AB e BC = BD = BE), in modo che l'angolo da essi compreso sia rispettivamente acuto $\left(A\hat{B}D\right)$, retto $\left(A\hat{B}C\right)$ e ottuso $\left(A\hat{B}E\right)$. Ovviamente abbiamo anche la validità delle seguenti disuguaglianze: $\overline{AE} > \overline{AC} > \overline{AD}$. Poiché $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$, possiamo dire perciò che $\overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 < \overline{AD}^2, \overline{AB}^2 + \overline{BE}^2 > \overline{AE}^2$.

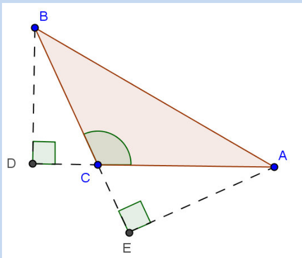
Quindi la somma dei quadrati di due lati di un triangolo acutangolo è maggiore del quadrato del terzo lato, mentre nel triangolo ottusangolo (rispetto all'angolo ottuso) è minore. Euclide dimostrò anche quanto valgono l'eccedenza e la deficienza.

Teorema 15

Dato il triangolo ottusangolo *ABC* di lato maggiore *AB*, dette *D* ed *E* rispettivamente le proiezioni del punto *A* sulla retta per *BC* e del punto *B* sulla retta per *AC*, si ha la validità della seguente uguaglianza:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{DC} = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CE}$$

Dimostrazione

Consideriamo il triangolo rettangolo *ABD* in figura 

e ricaviamo la misura di $\overline{AB}^2$:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \left(\overline{AC} + \overline{DC}\right)^2 = \overline{AC}^2 + 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{DC} + \overline{DC}^2 + \overline{BD}^2$$

Consideriamo il triangolo rettangolo BDC e ricaviamo: $\overline{DC}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2$. Sostituiamo:

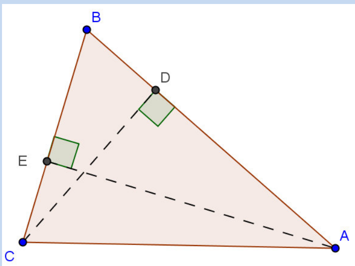
$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{DC} + \overline{BC}^2 - \cancel{\overline{BD}^2} + \cancel{\overline{BD}^2} = \overline{AC}^2 + 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{DC} + \overline{BC}^2$$

Abbiamo ottenuto la tesi.

Vale anche il seguente risultato.

Teorema 16

Dato un triangolo acutangolo *ABC*, dette *D* ed *E* rispettivamente le proiezioni del punto *C* su *AB* e del punto *A* su *BC*, si ha la validità dell'uguaglianza: $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BD} = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{BE}$



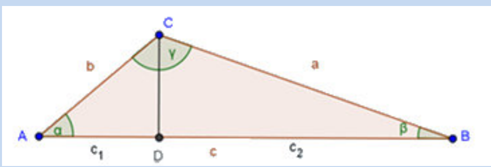
La dimostrazione è lasciata per esercizio ed è simile a quella del Teorema 15.

I due teoremi precedenti possono racchiudersi in un unico risultato espresso in forma trigonometrica.

Teorema 17 (delle proiezioni)

In un triangolo un lato è somma dei prodotti degli altri due lati per il coseno dell'angolo che essi formano con il detto lato: $c = a \cdot cos(\beta) + b \cdot cos(\alpha)$

Dimostrazione

Con riferimento alla figura 

si ha: $c = c_1 + c_2 = a \cdot cos(\beta) + b \cdot cos(\alpha)$.

Possiamo ulteriormente raffinare il precedente risultato.

Teorema 18 (di Carnot o del coseno)

In un triangolo il quadrato di un lato è la somma dei quadrati degli altri due lati, diminuita del doppio prodotto degli stessi lati per il coseno dell'angolo che essi formano:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cdot cos(\alpha);\ b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac \cdot cos(\beta);\ c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cdot cos(\gamma)$$

Dimostrazione

Esprimiamo i tre lati mediante il teorema delle proiezioni:

$$a = b \cdot cos(\gamma) + c \cdot cos(\beta);\ b = a \cdot cos(\gamma) + c \cdot cos(\alpha);\ c = a \cdot cos(\beta) + b \cdot cos(\alpha).$$

Osserviamo che ci sono molti termini simili, che perciò opportunamente manipolati possono semplificarsi. Per fare ciò moltiplichiamo ciascuna delle tre espressioni per la misura del lato che essa esprime:

$$a^2 = ab \cdot cos(\gamma) + ac \cdot cos(\beta);\ b^2 = ab \cdot cos(\gamma) + bc \cdot cos(\alpha);\ c^2 = ac \cdot cos(\beta) + bc \cdot cos(\alpha)$$

Se adesso sommiamo due delle tre uguaglianze e vi sottraiamo quella rimanente otteniamo quanto cercato: $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cdot cos(\gamma)$; $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cdot cos(\alpha)$; $a^2 + c^2 - b^2 = 2ac \cdot cos(\beta)$ da cui facilmente si ha la tesi.

I protagonisti

Lazare Nicolas Marguérite Carnot nacque il 13 Maggio 1753 a Nolay in Francia. Laureato alla Scuola di Ingegneria di Mézières, si occupò soprattutto delle discipline relative alla propria laurea. Insieme con un altro grande geometra dell'epoca, G. Monge, fondò *l'École centrale des travaux publiques* che in seguito divenne l'*École polytechnique*. Fu il padre di Sadi Carnot, che ottenne importantissimi risultati teorici in Termodinamica. Delle sue opere geometriche si ricorda *De la corrélation des figures de géométrie*, del 1801, in cui, fra le altre cose, è esposto anche il teorema del coseno. Del 1803 è *La Géométrie de position*, uno dei primi veri testi di geometria analitica come la intendiamo oggi. Morì il 2 Agosto 1823 a Magdeburgo.

Il precedente risultato ci permette di conoscere alcuni valori ancora ignoti del coseno.
Infatti esso vale per qualsiasi triangolo, quindi anche per quelli rettangoli, ma allora deve aversi:

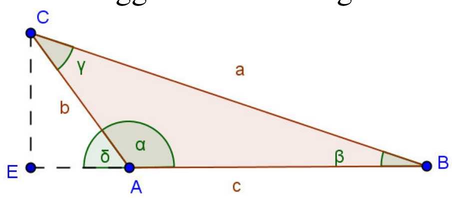
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cdot cos(90°)$$

d'altro canto si ha anche $a^2 = b^2 + c^2$. Ciò significa che vale il seguente risultato.

Teorema 19

Si ha $cos(90°) = sin(0°) = tan(0°) = cot(90°) = 0$.

Applichiamo il teorema precedente al lato maggiore di un triangolo ottusangolo, ottenendo:



$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cdot cos(\alpha)$, d'altro canto usando il teorema 15 abbiamo anche

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot c \cdot \overline{EA} = b^2 + c^2 + 2 \cdot c \cdot b \cdot cos\left(\delta\right) = b^2 + c^2 + 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\left(180° - \alpha\right)$$

Deve perciò aversi $cos(180° - \alpha) = -\,cos(\alpha)$. Quindi poniamo la seguente definizione.

Definizione 11

Si ha $cos(x) = -\,cos(180° - x)$, per ogni x: $90° \le x \le 180°$.

La precedente definizione ci dice quindi che il coseno di angoli ottusi è un numero negativo, e soprattutto ci permette di enunciare i due teoremi di Euclide in un'unica maniera utilizzando la trigonometria.
La Definizione 11 ha anche altre immediate conseguenze, esposte nel seguente risultato:

Teorema 20

Si ha: $tan(x) = -\,tan(180° - x)$; $cot(x) = -\,cot(180° - x)$; $sec(x) = -\,sec(180° - x)$, $\forall x$: $90° \le x \le 180°$

Ossia anche tangente, cotangente e secante di angoli ottusi sono numeri negativi.

Con il teorema di Carnot possiamo risolvere i triangoli nelle ipotesi dei criteri LAL e LLL.

Esempio 12

- Vogliamo risolvere un triangolo in cui due lati sono lunghi 10 e 15 unità e l'angolo da essi compreso è di 68°. Applicando il teorema di Carnot determiniamo il terzo lato: $\sqrt{10^2+15^2-2\cdot 10\cdot 15\cdot cos(68°)}\approx 14,58$. Per determinare adesso le misure degli angoli non possiamo usare indifferentemente il teorema dei seni oppure lo stesso teorema di Carnot, perché usando il teorema dei seni ricadiamo nel caso "dubbio" e così non possiamo essere sicuri che la soluzione ottenuta sia quella corretta. Usando il teorema di Carnot avremo: $cos^{-1}\left(\frac{15^2+14,58^2-10^2}{2\cdot 15\cdot 14,58}\right)\approx 72°31'21";cos^{-1}\left(\frac{10^2+14,58^2-15^2}{2\cdot 10\cdot 14,58}\right)\approx 39°29'10"$. La somma degli angoli è 180°31″, che è accettabile, tenuto conto delle approssimazioni. Usando il teorema dei seni invece avremo: $\frac{10}{sin(x)}\approx\frac{14,58}{sin(68°)}\approx\frac{15}{sin(y)}\Rightarrow x\approx sin^{-1}\left(\frac{10\cdot sin(68°)}{14,58}\right)\approx 39°29'3", y\approx sin^{-1}\left(\frac{15\cdot sin(68°)}{14,58}\right)\approx 72°30'57"$
  Il problema non è che i risultati non coincidono perfettamente con i precedenti, ma se determiniamo prima *y*, dovremmo avere anche un'altra soluzione: 180° – 72°30′57″ = 7°29′3″, che ovviamente non può essere accettabile. È perciò preferibile determinare i rimanenti dati usando sempre il teorema di Carnot. Ciò può accadere spesso usando il teorema dei seni, poiché il seno di un angolo coincide con il suo supplementare, mentre i coseni di tali angoli sono invece opposti.
- Vogliamo risolvere un triangolo i cui lati sono lunghi 7, 5 e 4 unità.
  Applichiamo il teorema di Carnot per trovare gli angoli. $\alpha=cos^{-1}\left(\frac{7^2+5^2-4^2}{2\cdot 7\cdot 5}\right)=cos^{-1}\left(\frac{29}{35}\right)\approx 34°2'52"$,
  $\beta=cos^{-1}\left(\frac{7^2-5^2+4^2}{2\cdot 7\cdot 4}\right)=cos^{-1}\left(\frac{5}{7}\right)\approx 44°24'55"$, $\gamma=cos^{-1}\left(\frac{-7^2+5^2+4^2}{2\cdot 4\cdot 5}\right)=cos^{-1}\left(-\frac{1}{5}\right)\approx 101°32'13"$
  Ovviamente: 34°2′52″ + 44°24′55″+101°32′13″ = 180°, anche se talvolta il risultato può essere lievemente diverso, nell'ordine di qualche secondo.
- Vogliamo risolvere un triangolo i cui sono lunghi 7, 5 e 13 unità. Non è difficile capire che un tale triangolo non esiste perché 13 > 7 + 5. Se non ci accorgiamo di tale fatto e applichiamo ugualmente il teorema di Carnot cosa troviamo? $\alpha=cos^{-1}\left(\frac{7^2+5^2-13^2}{2\cdot 7\cdot 5}\right)=cos^{-1}\left(-\frac{19}{14}\right)=?$ Analoghi risultati impossili troviamo per i rimanenti angoli. Cioè, ovviamente, non otteniamo alcun risultato.

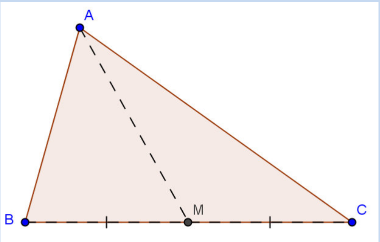
Con l'ausilio del teorema di Carnot possiamo trovare la misura delle mediane di un triangolo mediante i lati.

Teorema 21

In un triangolo il quadrato costruito su una mediana è la quarta parte della differenza fra la somma del doppi dei quadrati dei lati cui non si riferisce e il quadrato del lato cui si riferisce:

$$m_a^2=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4};m_b^2=\frac{2a^2+2c^2-b^2}{4};m_c^2=\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}$$

Dimostrazione



Consideriamo un qualsiasi triangolo e tracciamo una sua mediana.

Ragionando sul triangolo *ABM*, si ha: $m_a^2 = c^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot c \cdot \frac{a}{2} \cdot cos(\beta)$ (1).

Ragionando sul triangolo *ABC*, si ha: $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot cos(\beta) \Rightarrow 2 \cdot a \cdot c \cdot cos(\beta) = a^2 + c^2 - b^2$. Sostituendo nella (1) si ha: $m_a^2 = c^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} = \frac{4c^2 + a^2 - 2a^2 - 2c^2 + 2b^2}{4} = \frac{2c^2 - a^2 + 2b^2}{4}$, che è la tesi cercata.

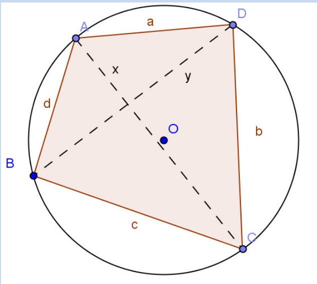
Si ha anche un'interessante risultato sui quadrilateri ciclici.

Teorema 22

In un quadrilatero ciclico *ABCD* di lati *a*, *b*, *c* e *d*, e diagonali *x* e *y* si ha:

$$x^2 = \frac{(a \cdot c + b \cdot d) \cdot (a \cdot d + b \cdot c)}{a \cdot b + c \cdot d}; y^2 = \frac{(a \cdot c + b \cdot d) \cdot (a \cdot b + c \cdot d)}{a \cdot d + b \cdot c}$$

Dimostrazione

Ci riferiamo alla figura seguente. 

Dal teorema di Carnot applicato al triangolo *ACD* abbiamo: $x^2 = a^2 + b^2 - 2\, ab \cdot cos(\delta)$ (1), mentre applicandolo al triangolo *ABC* avremo:

$$x^2 = c^2 + d^2 - 2\, cd \cdot cos(\beta) = c^2 + d^2 - 2\, cd \cdot cos(\delta) \text{ (2).}$$

L'ultimo passaggio è motivato dal fatto che gli angoli sono fra loro supplementari. Moltiplichiamo la (1) per *cd* e la (2) per *ab*, quindi sommiamo termine a termine:

$$(ab + cd) \cdot x^2 = cd \cdot (a^2 + b^2) + ab \cdot (c^2 + d^2) = a^2cd + b^2cd + abc^2 + abd^2 =$$
$$ac \cdot (ad + bc) + bd \cdot (ad + bc) = (ad + bc) \cdot (ac + bd)$$

Ricavando x^2 otteniamo quanto richiesto. In modo analogo si prova la seconda relazione.

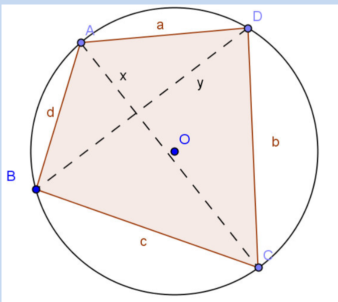
Più in generale possiamo anche provare un risultato che è una generalizzazione del teorema di Erone per i triangoli.

Teorema 23 (di Brahmagupta)

In un quadrilatero ciclico *ABCD* di lati *a*, *b*, *c* e *d*, indicato con *p* il semiperimetro, l'area è data da:

$$\sqrt{(p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c) \cdot (p-d)}$$

Dimostrazione

Ci riferiamo alla figura seguente 

. Per il Teorema di Carnot applicato ai triangolo *ACD* e *ABC*, si ha: $x^2 = a^2 + b^2 - 2\, ab \cdot cos(\delta) = c^2 + d^2 + 2\, cd \cdot cos(\delta)$, quindi

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2 \cdot (ab + cd) \cdot cos(\delta) \qquad (1)$$

Il teorema 14 ci dice che l'area è $S = ½ \cdot (ab + cd) \cdot sin(\delta)$. Innalzando al quadrato abbiamo:

$$S^2 = ¼ \cdot (ab + cd)^2 \cdot sin^2(\delta) \Rightarrow 4S^2 = (ab + cd)^2 \cdot [1 - cos^2(\delta)] \qquad (2)$$

Adesso innalziamo al quadrato anche la (1): $(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4 \cdot (ab + cd)^2 \cdot cos^2(\delta)$ (3)

Ora moltiplichiamo per 4 la (2) e sommiamo termine a termine con la (3):

$$16S^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4 \cdot (ab + cd)^2 \cdot cos^2(\delta) + 4 \cdot (ab + cd)^2 \cdot [\,1 - cos^2(\delta)] \Rightarrow$$
$$16S^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4 \cdot (ab + cd)^2 \Rightarrow 16S^2 = 4 \cdot (ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 \Rightarrow$$
$$16S^2 = (2ab + 2cd + a^2 + b^2 - c^2 - d^2) \cdot (2ab + 2cd - a^2 - b^2 + c^2 + d^2)^2 \Rightarrow$$
$$16S^2 = [(a + b)^2 - (c - d)^2] \cdot [(c + d)^2 - (a - b)^2] \Rightarrow$$
$$16S^2 = (a + b + c - d) \cdot (a + b - c + d) \cdot (a - b + c + d) \cdot (-a + b + c + d) \Rightarrow$$
$$S^2 = (a + b + c - d)/2 \cdot (a + b - c + d)/2 \cdot (a - b + c + d)/2 \cdot (-a + b + c + d)/2$$

Non è difficile verificare che $(a + b + c - d)/2 = (a + b + c + d - 2d)/2 = (a + b + c + d)/2 - d = p - d$, e analogamente le altre. Quindi sostituendo nell'ultima espressione otteniamo la tesi.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Possiamo calcolare facilmente funzioni goniometriche di angoli ottusi, mediante la definizione 11 e il successivo teorema 20.

Così si ha:

$$cos(120°) = -cos(60°) = -\frac{1}{2}; tan(120°) = -tan(60°) = -\sqrt{3};$$
$$cot(120°) = -cot(60°) = -\frac{\sqrt{3}}{3}; sec(120) = -sec(60°) = -2$$

Semplificare le seguenti espressioni.

Livello **1**

1. $sin(120°) - cos(150°) + sec(135°) + tan(150°) - cot(120°)$ $\left[\sqrt{3} - \sqrt{2}\right]$
2. $sin(120°) \cdot cos(135°) + cot(150°) \cdot tan(135°)$ $\left[\frac{4 \cdot \sqrt{3} - \sqrt{6}}{4}\right]$
3. $[sin(120°) - cos(150°)] \cdot [sin(120°) + cos(30°)]$ [3]
4. $[tan(135°) - sec(150°)] \cdot [tan^2(45°) + tan(135°) \cdot sec(30°) + sec^2(150°)]$ $\left[\frac{20 \cdot \sqrt{3} - 33}{9}\right]$
5. $sin(120°) - sin(60°) + cos(150°) - cos(30°)$ $\left[-\sqrt{3}\right]$
6. $cos(120°) \cdot \frac{1 - sin(135°)}{1 + cos(135°)} \cdot tan(135°) - csc(150°)$ [–3/2]
7. $\frac{tan(45°) + cot(135°)}{sec(135°)} - \frac{sin(150°)}{1 - cos(60°)}$ [–1]
8. $\frac{sec(135°)}{csc(45°)} - tan(30°) \cdot cot(150°) + cos(60°) \cdot sec(120°)$ [–1]
9. $cot(45°) \cdot tan(150°) \cdot csc(120°) \cdot cos(30°)\ \ sec(150°)$ $\left[\sqrt{3}/3\right]$
10. $[1 - sin(120°) + cos(150°)]^3$ $\left[10 - 6 \cdot \sqrt{3}\right]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere un triangolo di cui sono note le misure dei lati, 10, 12 e 14.
Applichiamo il teorema di Carnot.

$$cos^{-1}\left(\frac{10^2 + 12^2 - 14^2}{2 \cdot 10 \cdot 12}\right) \approx 78°27'47''; cos^{-1}\left(\frac{10^2 - 12^2 + 14^2}{2 \cdot 10 \cdot 14}\right) \approx 57°7'18''; cos^{-1}\left(\frac{-10^2 + 12^2 + 14^2}{2 \cdot 12 \cdot 14}\right) \approx 44°24'55''$$

Risolvere i seguenti triangoli di cui sono forniti alcuni dei loro enti

Livello 1

11. $a = 14$; $b = 10$; $\gamma = 30°$ $\left[c = 2 \cdot \sqrt{74 - 35 \cdot \sqrt{3}}; \alpha \approx 106°52'55''; \beta \approx 43°7'5''\right]$
12. $a = 5$; $b = 12$; $c = 13$ [$\alpha \approx 22°37'12''$; $\beta \approx 67°22'48''$; $\gamma = 90°$]
13. $a = 7$; $b = 4$; $\gamma = 45°$ $\left[c = \sqrt{65 - 28 \cdot \sqrt{2}}; \alpha \approx 34°8'18''; \beta \approx 100°51'42''\right]$
14. $a = 6$; $b = 6$; $c = 5$ [$\alpha = \beta \approx 65°22'32''$; $\gamma \approx 49°14'55''$]
15. $a = 3 \cdot \sqrt{2}$; $b = 3$; $\gamma = 105°$ [$c \approx 5,80$; $\alpha = 45°$, $\beta = 30°$]
16. $a = 12$; $b = 13$; $\gamma = 54°$ [$\alpha \approx 58°30'40''$; $\beta \approx 67°29'20''$; $c \approx 11,38$]
17. $\alpha = 43°$; $b = 1,13$; $c = 2,45$ [$\beta \approx 25°23'32''$; $\gamma \approx 111°36'28''$; $c \approx 1,80$]
18. $a = 4,13$; $c = 3,25$; $\beta = 94°$ [$\alpha \approx 49°20'42''$; $\gamma \approx 36°39'18''$; $c \approx 5,43$]
19. $a = 7,31$; $b = 4,71$; $c = 10,32$ [$\alpha \approx 39°16'46''$; $\beta \approx 24°04'29''$; $\gamma \approx 116°38'46''$]
20. $a = 2,41$; $b = 5,67$; $c = 3,12$ [$\varnothing$] $a = 1$; $c = \left(\sqrt{3} + 1\right)/2$; $\beta = 60°$ [$b = \sqrt{6}/2$; $\alpha = 45°$, $\gamma = 75°$]
21. $a = 4,16$; $S = 5,91$; $\beta = 47°25'07''$ [$b \approx 3,24$; $c \approx 3,86$; $\alpha \approx 71°10'42''$; $\gamma \approx 61°24'11''$]

Livello 2

22. $b + c = 7$; $\alpha = 30°$; $a = 4,12$
[$b \approx 1,59$; $c \approx 5,42$; $\beta \approx 11°5'15''$; $\gamma \approx 138°54'44''$ Possiamo anche scambiare b con c]
23. $a - b = 3,12$; $\gamma = 41°25'$; $c = 3,42$ [$a \approx 4,08$; $b \approx 0,96$; $\alpha \approx 127°52'7''$; $\beta \approx 10°42'53''$]
24. $a = b$; $\gamma = 17°32'40''$; $c = 5,82$ [$a = b \approx 19,08$; $\alpha = \beta \approx 81°13'40''$]
25. $a + b = 5,18$; $2p = 7,19$; $\gamma = 103°7'23''$ [$\varnothing$]
26. $c = 2b$; $2p = 16,32$; $\gamma = 74°18'31''$ [$a \approx 6,57$; $b \approx 3,25$; $c \approx 6,50$; $\alpha \approx 76°55'$; $\beta \approx 28°46'28''$]
27. $a + b = 8,37$; $S = 9,12$; $\gamma = 53°18'19''$ [$\varnothing$]
28. $2p = 16,85$; $S = 11,87$; $\gamma = 59°$ [$a \approx 4,06$; $b \approx 6,82$; $c \approx 5,87$; $\alpha \approx 36°23'05''$; $\beta \approx 84°36'55''$]
29. $a + b = 5,12$; $b - c = 2,24$; $\alpha = 48°34'55''$ [$a \approx 2,42$; $b \approx 2,70$; $c \approx 0,46$; $\beta \approx 123°13'44''$; $\gamma \approx 8°11'21''$]

Lavoriamo insieme

Risolvere un triangolo di cui sono note le misure di due lati, 12 e 15, e di un angolo, 48°. Considerare i vari casi in cui l'angolo è opposto a uno dei lati noti o compreso tra essi.

Se l'angolo è compreso dobbiamo usare il teorema di Carnot, ottenendo la misura del terzo lato:

$$\sqrt{12^2 + 15^2 - 2 \cdot 12 \cdot 15 \cdot \cos(48°)} \approx 11,32$$

troviamo i rimanenti angoli usando ancora il teorema di Carnot:

$$x \approx \cos^{-1}\left(\frac{15^2 + 11,32^2 - 12^2}{2 \cdot 15 \cdot 11,32}\right) \approx 51°59'11''; y \approx \cos^{-1}\left(\frac{12^2 + 11,32^2 - 15^2}{2 \cdot 12 \cdot 11,32}\right) \approx 80°27''$$

Invece se pensiamo che l'angolo di 48° non sia compreso fra i lati noti, ma opposto a uno dei due, dobbiamo risolvere il problema con il teorema dei seni.

$$\frac{12}{\sin(48°)} = \frac{15}{\sin(x)} \Rightarrow x \approx \sin^{-1}\left(\frac{15 \cdot \sin(48°)}{12}\right) \approx 68°16'8'' \Rightarrow y \approx 63°43'52'' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{12}{\sin(48°)} \approx \frac{x}{\sin(63°43'52'')} \Rightarrow x \approx \frac{12 \cdot \sin(63°43'52'')}{\sin(48°)} \approx 14,48$$

Poiché il valore di x è maggiore di 48°, siamo nel caso con due soluzioni:

$$\frac{12}{\sin(48°)} = \frac{15}{\sin(x_2)} \Rightarrow x_2 \approx 180° - 116°16'18'' \Rightarrow y_2 \approx 15°43'52'' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{12}{\sin(48°)} \approx \frac{x_2}{\sin(15°43'52'')} \Rightarrow x \approx \frac{12 \cdot \sin(15°43'52'')}{\sin(48°)} \approx 4,38$$

Infine, l'ultimo caso:

$$\frac{12}{sin(x)}=\frac{15}{sin(48°)} \Rightarrow x \approx sin^{-1}\left(\frac{12 \cdot sin(48°)}{15}\right) \approx 36°28'41" \Rightarrow y \approx 95°31'19" \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{15}{sin(48°)} \approx \frac{x}{sin(95°31'19")} \Rightarrow x \approx \frac{15 \cdot sin(95°31'19")}{sin(48°)} \approx 20,09$$

Stavolta la soluzione è unica perché il primo angolo trovato è minore di quello dato, 48°.

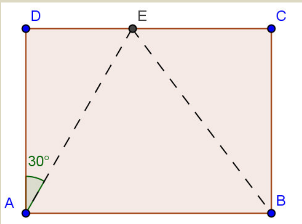
Risolvere un triangolo di cui sono note le misure di due lati e di un angolo. Considerare i vari casi in cui l'angolo è opposto a uno dei lati noti o compreso tra essi

Livello 3

30. $a = 4$; $b = 2$; $x = 30°$ [($c \approx 5{,}61$; $\alpha = 30°$; $\beta \approx 14°28'39''$; $\gamma \approx 135°31'21''$); ($c = 2\cdot\sqrt{3}$; $\alpha = 90°$; $\beta = 30°$; $\gamma = 60°$); ($c = 2\cdot\sqrt{5-2\cdot\sqrt{3}}$; $\alpha \approx 126°12'22''$; $\beta \approx 23°47'38''$; $\gamma = 30°$)]
31. $a = 5$; $b = 5$; $x = 45°$ [($c = 5\cdot\sqrt{2}$; $\alpha = \beta = 45°$; $\gamma = 90°$); ($c = 5\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}$; $\alpha = \beta = 67°30'$; $\gamma = 45°$)]
32. $a = 3$; $b = 3$; $x = 60°$ [$c = 3$; $\alpha = \beta = \gamma = 60°$]
33. $a = 2{,}17$; $b = 3{,}17$; $x = 120°$ [($\varnothing$); ($c \approx 1{,}47$; $\alpha \approx 36°21'29''$; $\beta = 120°$; $\gamma \approx 23°38'31''$); ($c \approx 4{,}65$; $\alpha \approx 23°49'45''$; $\beta \approx 36°10'15''$; $\gamma = 120°$)]
34. $a = 1{,}23$; $b = 2{,}34$; $x = 150°$ [($\varnothing$); ($c \approx 1{,}19$; $\alpha \approx 15°14'15''$; $\beta = 150°$; $\gamma \approx 14°45'45''$); ($c \approx 3{,}46$; $\alpha \approx 10°14'15''$; $\beta \approx 19°45'45''$; $\gamma = 150°$)]
35. $a = 5{,}43$; $b = 5{,}43$; $x = 45°$ [($c \approx 4{,}16$; $\alpha = \beta \approx 67°30'$; $\gamma = 45°$); ($c \approx 7{,}68$; $\alpha = \beta = 45°$; $\gamma = 90°$)]
36. $a = 3{,}15$; $b = 4{,}17$; $x = 44°$ [($c \approx 4{,}24$; $\alpha = 44°$; $\beta \approx 66°52'1''$; $\gamma \approx 69°7'59''$) $\vee$ ($c \approx 1{,}76$; $\alpha = 44°$; $\beta \approx 113°7'59''$; $\gamma \approx 22°52'1''$); ($c \approx 5{,}82$; $\gamma \approx 104°20'57''$; $\beta = 44°$; $\alpha \approx 31°39'3''$); ($c \approx 2{,}90$; $\alpha \approx 48°58'16''$; $\beta \approx 87°1'44''$; $\gamma = 44°$)]
37. $a = 5{,}12$; $b = 5{,}12$; $x = 33°15'7''$ [($c \approx 8{,}56$; $\alpha = \beta = 33°15'7''$; $\gamma \approx 113°29'46''$); ($c \approx 2{,}93$; $\alpha = \beta \approx 73°22'27''$; $\gamma = 33°15'7''$)]
38. $a = 2{,}18$; $b = 4{,}36$; $x = 100°10'$ [($\varnothing$); ($c \approx 3{,}41$; $\alpha \approx 29°28'55''$; $\beta = 100°10'$; $\gamma \approx 50°21'5''$); ($c \approx 5{,}21$; $\alpha \approx 24°20'3''$; $\beta \approx 55°29'57''$; $\gamma = 100°10'$)]
39. $a = 8{,}11$; $b = 12{,}14$; $x = 25°3'4''$ [($c \approx 17{,}27$; $\alpha = 25°3'4''$; $\beta \approx 39°20'1''$; $\gamma \approx 115°36'55''$) $\vee$ ($c \approx 4{,}73$; $\alpha = 25°3'4''$; $\beta \approx 140°39'59''$; $\gamma \approx 14°16'57''$); ($c \approx 18{,}99$; $\alpha \approx 16°25'53''$; $\beta = 25°3'4''$; $\gamma \approx 138°31'3''$); ($c \approx 5{,}90$; $\alpha \approx 35°37'14''$; $\beta \approx 119°19'42''$; $\gamma = 25°3'4''$)]

Lavoriamo insieme

Dato un rettangolo di lati lunghi 3 e 4, si consideri il triangolo che ha un lato coincidente con uno dei lati del rettangolo e il vertice opposto sul lato opposto dello stesso rettangolo. Determinare la misura del perimetro del triangolo *AEB* in figura, sapendo che l'angolo segnato misura 30°.

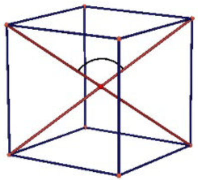


Facilmente possiamo ricavare la misura di *AE*: $\overline{AE} = \frac{\overline{AD}}{cos(30°)} = \frac{3}{\sqrt{3}/2} = 2\cdot\sqrt{3}$. Per determinare *EB* usiamo invece il teorema di Carnot:

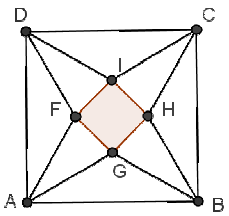
$$\overline{EB} = \sqrt{\overline{AE}^2 + \overline{AB}^2 - 2\cdot\overline{AE}\cdot\overline{AB}\cdot cos(60°)} = \sqrt{12+16-2\cdot\cancel{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 4\cdot\frac{1}{\cancel{2}}} = \sqrt{28-8\cdot\sqrt{3}} = 2\cdot\sqrt{7-2\cdot\sqrt{3}}$$

Pertanto il perimetro richiesto è $4+2\cdot\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{7-2\cdot\sqrt{3}} \approx 11{,}22$.

Livello 2



40. Calcolare la misura dell'angolo del cubo in figura. [≈ 70°31'44"∨≈ 109°28'16"]
41. Consideriamo i triangoli di lati 8, 12, 18 e 12, 18, 27. Dopo avere determinato le misure degli angoli, spiegare come è possibile che i due triangoli nonostante abbiano due lati e tre angoli di uguale misura, sono diversi. [Perché ad angolo uguale non è opposto lato uguale]
42. Con riferimento al problema risolto nel box lavoriamo insieme, determinare il perimetro di *ABE* se l'angolo è di 40°. [≈ 11,26]
43. Con riferimento al problema precedente, se *AD* è lungo 5, l'angolo è di 27° e il perimetro di *ADE* è 15,37, quanto misura *AB*? [2 soluzioni: ≈ 1,78; ≈ 4,98]
44. Di un triangolo *ABC* si sa che l' area misura 19 cm^2, che l'angolo di vertice *A* misura 51° ed il lato *BC* misura 13 *cm*, determinare la misura dei rimanenti lati. [≈ 3,3; ≈ 14,82]
45. Determinare il perimetro del triangolo di cui sono note la somma di due lati, 11, l'area, 8, e la misura dell'angolo compreso dai due lati, 41°53′. [≈ 17,11]
46. Di un triangolo *ABC* si sa che l'area è 15 cm^2, che l'angolo di vertice *B* misura 70° ed il lato *AC* misura 12 *cm*, determinare le misure degli angoli interni. [≈ 97°17'44"; 70°; ≈ 12°42'13"]
47. Determinare il perimetro del triangolo di cui sono note la differenza di due lati, 8, l'area, 21, e la misura dell'angolo compreso dai due lati, 48°27′. [≈ 27,07]
48. Di un triangolo si sa che l'area misura 17,45 cm^2, e due lati misurano 13,12 *cm* e 8,47cm. Determinare le misure degli angoli interni. [≈ 18°18′14″; ≈ 27°38′41″; ≈ 134°3′5″]
49. Provare, usando il teorema di Carnot, che il segmento che unisce i punti medi di due lati di un triangolo, *b* e *c*, misura quanto metà del terzo lato. $\left[\frac{1}{2}\cdot\sqrt{b^2+c^2-2bc\cdot cos(\alpha)}\right]$
50. In un triangolo *PQR* i lati *PQ* e *PR*, la mediana *PM* misurano, in *cm*, rispettivamente 4,31; 5,17 e 2,75. Determinare la misura di *QR*. [≈ 7,77]
51. Su una semicirconferenza di centro O e diametro *AB* lungo 4,76, considerare il punto *M* in modo che sia $M\hat{A}B$ = 56°29′. Tracciato il raggio *OP* parallelo ad *AM*, determinare la misura di *MP*. [≈ 2,23]
52. Su ciascuno dei lati di un triangolo equilatero *ABC* si sceglie un punto in modo che si abbia $\overline{CD}=0,7;\overline{EB}=0,62;\overline{FB}=0,86$ Determinare la misura del perimetro di *ABC* sapendo che quello del triangolo *DEF* è 2,76 *cm*. [≈ 5,60 *cm*]



53. In figura *ABCD* è un quadrato di lato 1, i segmenti, a coppie, trisecano gli angoli retti. Dopo avere dimostrato che *FGHI* è un quadrato, determinarne il perimetro. $\left[\frac{6\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{6}}{3}\right]$
54. Con riferimento al precedente problema, determinare la misura del lato del quadrato maggiore se il lato del quadrato minore è 1. $\left[\frac{\sqrt{6}+3\cdot\sqrt{2}}{2}\right]$

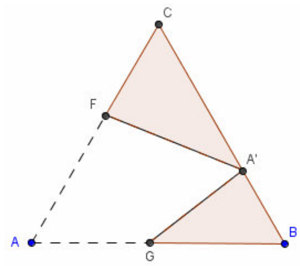
Livello 3

55. Risolvere il problema precedente per dati generici: *AB* = 2*r* e $M\hat{A}B$ = α. $\left[r\cdot\sqrt{2\cdot[1-cos(\alpha)]}\right]$
56. In un triangolo *ABC* tre numeri che differiscono fra loro di una unità forniscono le misure dei lati, un angolo misura 54°13′27″, determinare il perimetro in tutti i casi possibili. [≈ 12,98; ≈ 50,18]
57. Di un triangolo *ABC* si sa che i lati stanno fra loro come i numeri 13, 15 e 16. Se l'area è 102 cm^2, determinare il perimetro. [≈ 46,53 *cm*]

58. Un triangolo *ABC* è tale che la sua area è uguale a $\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2$. Sapendo che l'angolo *C* è acuto, calcolare la sua misura. [≈ 75°57′50″]

59. Determinare l'area di un triangolo in cui un lato misura 10 e due angoli 43° e 71°. Considerare le diverse possibilità, a seconda della posizione del lato rispetto agli angoli dati. [≈ 32,95; ≈ 35,29; ≈ 63,33]

60. Di un triangolo *ABC* si sa che tre numeri che differiscono fra loro di una unità misurano rispettivamente i lati *AB* e *AC* e l'area, sapendo che il lato *BC* misura 25, determinare area e perimetro. [≈ 14,05; ≈ 50,10]

61. Il triangolo equilatero *ABC* in figura, 

è stato piegato in modo che il suo vertice *A* appartenga al lato *BC*. Se $\overline{BA'} = 1, \overline{A'C} = 2$, quanto è lungo *FG*? $\left[7 \cdot \sqrt{21}/20\right]$

62. Determinare una relazione fra il lato *c*, la mediana a esso relativa, *m*, e gli altri lati *a* e *b*. $\left[\sqrt{2 \cdot \left(a^2 + b^2 - 2m^2\right)}\right]$

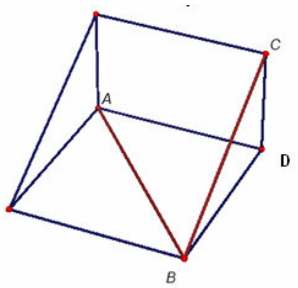
63. Determinare la misura della mediana *AD* del triangolo *ABC*, in cui si ha $\overline{BC} = 9,74; \angle C\hat{B}A = 43,54°; \angle A\hat{C}B = 29,68°$ [≈ 3,68]

64. Esternamente ai lati del triangolo rettangolo *ABC*, di ipotenusa *BC* e di cateti lunghi 3 e 4, si costruiscano i triangoli equilateri *ACD*, *ABF* e *BEC*. Dopo aver mostrato che i segmenti *AE*, *BD* e *CF* sono isometrici, calcolarne la misura. $\left[\sqrt{25 + 12 \cdot \sqrt{3}}\right]$

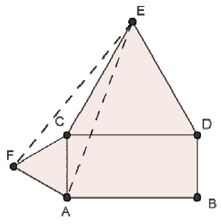
65. Risolvere il problema precedente con cateti lunghi *a* e *b*. $\left[3 \cdot \sqrt{a^2 + ab \cdot \sqrt{3} + b^2}\right]$

66. Tre cerchi di raggi lunghi 1,15; 1,45 e 1,74 sono tangenti a due a due. Determinare le misure degli angoli formati dalle congiungenti i centri. [≈ 70°49′30″; ≈ 58°50′11″; ≈ 50°20′19″]

67. Di un triangolo *ABC* si sa che i lati *AB* e *AC* sono uno quadruplo dell'altro e l'area è il quadrato del lato minore. Sapendo che il lato *BC* misura $\left(17 - 4 \cdot \sqrt{3}\right) cm$, determinare la misura dell'area. [1 cm^2]

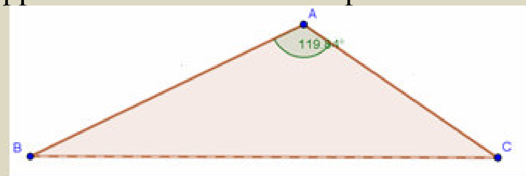
68. Nel poliedro in figura, 

la base è un rettangolo di lati *BD* lungo 5,7 *cm* e *AD* 5,4 *cm*; *CD* è lungo 3,3 *cm* ed è perpendicolare alla base, determinare la misura di $A\hat{B}C$. [≈ 51°4′42″]

69. Su due lati consecutivi di un rettangolo, lunghi 1,78 e 3,74, ed esternamente ad essi, costruiamo un triangolo equilatero, come mostrato in figura, 

determinare area e perimetro del triangolo *AEF*. [≈ 12,49; ≈ 4,70]

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere il problema di trovare la distanza tra due punti inaccessibili, per esempio due punti su due opposte sponde di un fiume.
In questo caso supponiamo che vi sia un punto da cui sono accessibili entrambi i punti, in figura lo indichiamo con A. 

Abbiamo misurato le distanze AB = 5, 57 ed AC = 4,32, nonché l'angolo A = 119,84°. Adesso applichiamo il teorema di Carnot per ricavare BC.

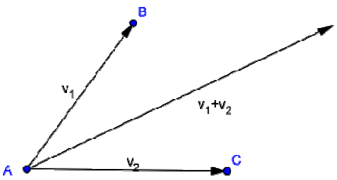
$$\overline{BC} = \sqrt{5,57^2 + 4,32^2 - 2 \cdot 5,57 \cdot 4,32 \cdot cos(119,84°)} \approx 8,58.$$

Livello 2

70. La torre di controllo di un aeroporto determina le distanze di due aerei in atterraggio, 7 *Km* e 11 *Km*. Se l'angolo che le congiungenti la torre con gli aerei è di 23°15′12″, quanto distano gli aerei fra di loro? [≈ 5,34 *Km*]
71. Una nave lascia il porto alle 4:00 viaggiando a una velocità costante di 25 *Km*/*h*, dopo 75 minuti varia la rotta di un angolo di 35°17′15″. Quanto dista dal porto alle 7:00? [≈ 25,67 *Km*]
72. Un villeggiante cammina in linea retta per 1320 *m*, quindi svolta di un certo angolo α e cammina sempre in linea retta per altri 1750 *m*. Sapendo che in questo modo dista 2470 *m* dal punto di partenza vogliamo sapere il valore approssimato di α. [≈ 106°17′28″]
73. Due amici partono dallo stesso punto, viaggiando in linea retta. Il primo con un angolo di 53° verso Nord viaggia alla velocità di 60 *Km*/*h*, il secondo con un angolo di 38° verso Sud alla velocità di 72 *Km*/*h*. Quanto disteranno due ore dopo la loro partenza? [≈ 187,02 *Km*]

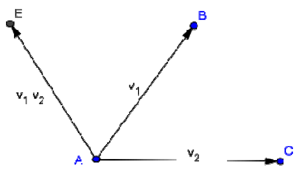
Livello 3

74. Dati due vettori v_1, v_2, che formano un angolo α, determinare l'intensità del vettore risultante $v_1 + v_2$.



$\left[\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2 \cdot v_1 \cdot v_2 \cdot cos(\alpha)}\right]$

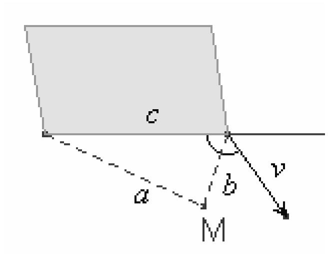
75. Dati due vettori $v_1 > v_2$, che formano un angolo α, determinare l'intensità del vettore risultante $v_1 - v_2$.



$\left[\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2 \cdot v_1 \cdot v_2 \cdot cos(\alpha)}\right]$

76. Nel quadrilatero *BCDE* le diagonali *BD* e *CE* si incontrano in *F*, se le misure di *FB*, *FE*, *DF*, *CF* e *BE* in *cm* sono rispettivamente 3,27; 2,2; 3,33; 4,93 e 2,15**;** determinare la misura di *DE*. Uno dei dati non è necessario, quale? [≈ 5,2 *cm*; *CF*]
77. Determinare quanto deve misurare il lato del decagono regolare in funzione dello spigolo ℓ di un dodecaedro regolare, in modo che dividendo lo spigolo in 3 parti uguali si ottenga un poliedro semiregolare. Si ha: $cos(108°) = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$. $\left[\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{10}\right) \cdot \ell\right]$

78. In figura un raggio di sole si muove lungo la direzione *v* alla velocità di 2 *cm* al minuto. In quanto tempo il sole raggiungerà la posizione M in cui è ferma una mosca, sapendo che $a = 57$ *cm*, $b = 25$ *cm*,



$c = 60$ *cm* e l'angolo misura 125°? [≈ 14,43 minuti]

79. Un uomo cammina per 547 metri in linea retta, quindi varia la direzione ruotando di 73°41′12″ e cammina per altri 321 metri, infine percorre altri 812 metri rimettendosi in una direzione parallela a quella iniziale. Quanto distano in linea d'aria i punti iniziale e finale del cammino? [≈ 470 *m*]

80. Risolvere il problema precedente per dati generici, *a*, *b* e *c* rispettivamente e l'angolo α. $\left[\sqrt{(c-a)^2+b^2+2b\cdot(c-a)\cdot cos(\alpha)}\right]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo verificare se $\frac{a}{b\cdot c}+\frac{cos(\alpha)}{a}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2\cdot a\cdot b\cdot c}$ (1) è un'identità in un generico triangolo.

Lavoriamo sul primo membro: $\frac{a}{b\cdot c}+\frac{cos(\alpha)}{a}=\frac{a^2+b\cdot c\cdot cos(\alpha)}{a\cdot b\cdot c}=\frac{2a^2+2\cdot b\cdot c\cdot cos(\alpha)}{2\cdot a\cdot b\cdot c}$

Adesso sostituiamo al numeratore del secondo addendo della (1) l'espressione ottenuta con il Teorema di Carnot: $\frac{2a^2+b^2+c^2-a^2}{2\cdot a\cdot b\cdot c}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2\cdot a\cdot b\cdot c}$. Quindi in effetti abbiamo un'identità.

Verificare se le seguenti sono identità in un triangolo qualsiasi

***Livello* 1**

81. $sin(\gamma) = sin(\alpha + \beta)$ [Sì] $cos(\gamma) = cos(\alpha + \beta)$ [No]

82. $a^2 = (b - c)^2 + 2bc \cdot [1 - cos(\alpha)]$ [Sì] $ac=\frac{b^2\cdot sin(\alpha)\cdot sin(\gamma)}{sin^2(\beta)}$ [Sì]

83. $sin^2(\beta) - sin^2(\alpha) + sin^2(\gamma) = 2 \cdot sin(\beta)\cdot sin(\gamma) \cdot cos(\alpha)$ [Sì]

84. Con riferimento all'esercizio svolto nel box Lavoriamo insieme, come diventa l'identità se il triangolo è rettangolo di ipotenusa *b*? $\left[\frac{a}{b\cdot c}+\frac{cos(\alpha)}{a}=\frac{b}{a\cdot c}\right]$

85. $sin(\alpha) = sin(\beta) \cdot cos(\gamma) + sin(\gamma) \cdot cos(\beta)$ (Usare il teorema delle proiezioni) [Sì]

86. $cos(\alpha) = sin(\beta) \cdot sin(\gamma) - cos(\beta) \cdot cos(\gamma)$ [Sì]

***Livello* 2**

87. $[1 - cos(\alpha)] \cdot [1 + cos(\alpha) + 2sin(\beta) \cdot sin(\gamma)] = [sin(\beta) - sin(\gamma)]^2$ [Sì]

88. $b+c=a\cdot\frac{cos(\beta)+cos(\gamma)}{1-cos(\alpha)}$ [Sì] $b \cdot [sin(\alpha) - sin(\beta) \cdot cos(\gamma)] = c \cdot sin(\beta) \cdot cos(\beta)$ [Sì]

89. $a + b + c = (a + c) \cdot cos(\beta) + (b + c) \cdot cos(\alpha) + (a + b) \cdot cos(\gamma)$ [Sì]

90. $a + b - c = (c - b) \cdot cos(\alpha) + (c - a) \cdot cos(\beta) + (a - b) \cdot cos(\gamma)$ [No]

91. $a \cdot [sin(\beta) - sin(\gamma)] + b \cdot [sin(\gamma) - sin(\alpha)] + c \cdot [sin(\alpha) - sin(\beta)] = 0$ [Sì]

Lavoriamo insieme

Vogliamo trovare la misura delle mediane del triangolo di lati lunghi 5, 6 e 7. Basta usare il risultato stabilito dal Teorema 21: $\sqrt{\frac{2\cdot 6^2+2\cdot 7^2-5^2}{4}}=\frac{\sqrt{145}}{2};\sqrt{\frac{2\cdot 5^2+2\cdot 7^2-6^2}{4}}=2\cdot\sqrt{7};\sqrt{\frac{2\cdot 5^2+2\cdot 6^2-7^2}{4}}=\frac{\sqrt{73}}{2}$

Possiamo usare lo stesso risultato per provare che la mediana relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo misura quanto metà dell'ipotenusa. Infatti abbiamo, usando il teorema di Pitagora:

$$m_a = \sqrt{\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}} = \sqrt{\frac{2a^2-a^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}$$

Livello 2

92. Determinare le mediane di un triangolo equilatero di lato ℓ usando il Teorema 21. $\left[\ell\cdot\sqrt{3}/2\right]$

93. Determinare le misure delle mediane di un triangolo isoscele in cui la base è metà del lato obliquo lungo ℓ. $\left[\ell\cdot\sqrt{15}/4;\ell\cdot\sqrt{6}/4;\ell\cdot\sqrt{6}/4\right]$

94. Determinare le misure delle mediane di un triangolo i cui lati differiscono di una unità, in funzione del lato medio lato ℓ. $\left[\sqrt{3\cdot\ell^2-6\ell+1}/2;\sqrt{3\cdot\ell^2+6\ell+1}/2;\sqrt{3\cdot\ell^2+4}/2\right]$

95. Determinare le misure delle mediane di un triangolo i cui lati stanno fra loro nel rapporto 1:2:4. [Impossibile un triangolo del genere non esiste]

96. Determinare le misure delle mediane di un triangolo i cui lati stanno fra loro nel rapporto 2: 3: 4 in funzione del rapporto di proporzionalità ℓ. $\left[\ell\cdot\sqrt{10}/2;\ell\cdot\sqrt{46}/2;\ell\cdot\sqrt{31}/2\right]$

97. Determinare la misura del diametro della circonferenza circoscritta a un triangolo di lati a, b, c. $\left[\dfrac{4abc}{\sqrt{4bc-\left(b^2+c^2-a^2\right)}}\right]$

Lavoriamo insieme

Di un triangolo conosciamo la misura di due mediane, 5,25 e 6,61 e del lato che non si riferisce a nessuna delle mediane note, 7,54. Vogliamo trovare le misure dei lati incogniti.

Impostiamo il seguente sistema: $\begin{cases}\dfrac{2\cdot7,54^2+2\cdot b^2-c^2}{4}=5,25^2\\ \dfrac{2\cdot7,54^2+2\cdot c^2-b^2}{4}=6,61^2\end{cases}$.

Per semplificare i calcoli poniamo $b^2 = x$, $c^2 = y$, ottenendo il sistema lineare seguente:

$$\begin{cases}113,703+2x-y=4\cdot27,5625\\ 113,703+2y-x=4\cdot46,6921\end{cases}$$

che andiamo a risolvere: $\begin{cases}y=2x+3,453\\ 3x=54,158\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y\approx39,56\\ x\approx18,05\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c\approx\sqrt{39,56}\approx6,05\\ b\approx\sqrt{18,05}\approx4,25\end{cases}$.

Indichiamo con m_a, m_b, m_c, le mediane relative ai lati a, b, c. Determinare i valori incogniti

Livello 3

98. $a = 4,82$; $b = 6,62$; $m_c = 4,13$; $c = ?$ [≈ 8,12] $a = 3,56$; $c = 6,48$; $m_b = 2,70$; $b = ?$ [≈ 8,95]
99. $a = 3,72$; $b = 3,77$; $m_b = 3,67$; $c = ?$ [≈ 4,50] $b = 5,55$; $c = 5,04$; $m_b = 2,98$; $a = ?$ [≈ 2,79]
100. $a = 4,63$; $m_c = 5,77$; $m_b = 2,41$; $b = ?$, $c = ?$ [$b \approx 7,32$; $c \approx 4,12$]
101. $c = 6,04$; $m_a = 3,99$; $m_b = 5,64$; $a = ?$, $b = ?$ [$a \approx 5,75$; $b \approx 3,45$]
102. $a = 6,07$; $m_a = 3,37$; $m_b = 5,33$; $b = ?$, $c = ?$ [$b \approx 3,76$; $c \approx 5,20$]
103. $b = 5,11$; $m_a = 2,93$; $m_b = 3,58$; $a = ?$, $c = ?$ [$a \approx 5,64$; $c \approx 2,63$]
104. $m_a = 3,38$; $m_b = 5,58$; $m_c = 6,28$; $a = ?$; $b = ?$; $c = ?$ [$a \approx 7,59$; $b \approx 5,60$; $c \approx 4,51$]
105. $m_a = 4,17$; $m_b = 5,88$; $m_c = 7,78$; $a = ?$; $b = ?$; $c = ?$ [$a \approx 8,76$; $b \approx 7,34$; $c \approx 4,39$]

Indichiamo con h_a, h_b, h_c le altezze relative ai lati a, b, c. Determinare i valori incogniti

106. $a = 10,19$; $m_a = 3,93$; $h_a = 3,72$; $b = ?$, $c = ?$ [$b \approx 5,33$; $c \approx 7,37$]
107. $2p = 24,16$; $b = 5,24$; $m_c = 4,63$; $a = ?$ $c = ?$ [$a \approx 8,41$; $c \approx 10,51$]

108. $2p = 17,31$; $b = 6,13$; $m_b = 4,72$; $a = ?$ $c = ?$ [$a \approx 4,94$; $c \approx 6,24$; i valori sono scambiabili]
109. $2p = 20,11$; $c = 4,51$; $m_b = 5,16$; $a = ?$ $b = ?$ [$a \approx 7,91$; $b \approx 7,69$]
110. $2p = 23,16$; $m_c = 8,66$; $m_b = 5,48$; $a = ?$, $b = ?$, $c = ?$ [$a \approx 8,77$; $b \approx 9,28$; $c \approx 5,11$]
111. $b = 8,54$; $m_a = 4,86$; $h_a = 4,39$; $a = ?$, $c = ?$ [$a \approx 10,48$; $c \approx 5,41$]
112. $a = 13,05$; $h_a = 4,63$; $\alpha = 88°27'$; $b = ?$, $c = ?$ [$b \approx 4,95$; $c \approx 12,21$; i risultati sono scambiabili]
113. $a = 5,20$; $m_a = 5,37$; $\alpha = 45°21'36''$; $b = ?$, $c = ?$ [$b \approx 7,23$; $c \approx 4,34$]

Lavoriamo insieme

Vogliamo verificare le formule del Teorema di Brahmagupta per un quadrato, che è certamente un quadrilatero ciclico. Si ha così che le diagonali dovrebbero misurare, in termini del lato:

$$x^2 = \frac{(\ell\cdot\ell+\ell\cdot\ell)\cdot(\ell\cdot\ell+\ell\cdot\ell)}{\ell\cdot\ell+\ell\cdot\ell} = \frac{4\cdot\ell^4}{2\cdot\ell^2} = 2\cdot\ell^2 \Rightarrow x = \ell\cdot\sqrt{2}$$

Analogo risultato si ha per l'altra diagonale.

Risolvere i seguenti problemi usando le formule stabilite dal Teorema di Brahmagupta

Livello 2

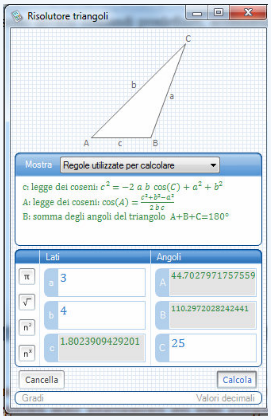
114. Mostrare che il teorema di Brahmagupta non funziona per un rombo non quadrato.
115. Trovare la misura delle diagonali di un rettangolo in funzione dei lati, a e b. $\left[\sqrt{a^2+b^2}\right]$
116. Determinare l'area di un rettangolo.
117. Determinare l'area di un trapezio isoscele
118. Trovare la misura delle diagonali di un trapezio isoscele in funzione delle misure delle basi, a e b, e del lato obliquo c. $\left[\sqrt{a\cdot b+c^2}\right]$
119. Determinare l'area del quadrilatero dell'esercizio precedente, in funzione dei lati. $\left[\frac{(a+b)\cdot\sqrt{-a^2+2ab-b^2+4c^2}}{4}\right]$
120. Trovare la misura delle diagonali del quadrilatero ciclico di lati lunghi 1,21; 5,18; 3,79; 3,97. [≈ 4,68; ≈ 5,37]
121. Determinare l'area del quadrilatero dell'esercizio precedente. [≈ 10,65]

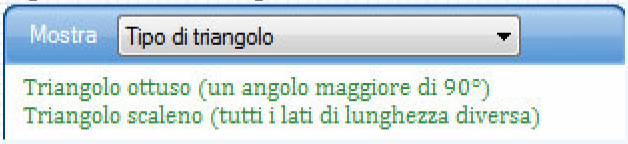
Livello 3

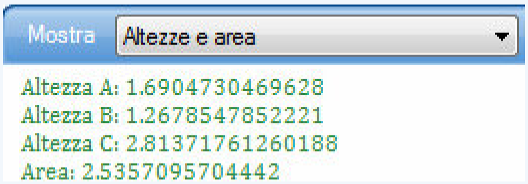
122. Trovare la misura del perimetro del quadrilatero ciclico in cui tre lati adiacenti sono lunghi 4,01; 3,97; 3,29 e la diagonale che parte dall'estremo comune ai primi due lati è di 4,95. [≈ 13,87]
123. Con il teorema di Brahmagupta, trovare l'area del quadrilatero dell'esercizio precedente. [≈ 11,71]
124. Verificare che il teorema di Brahmagupta non si può applicare ai rombi non quadrati. [L'area dovrebbe essere pari al quadrato del lato]
125. Verificare che il teorema di Brahmagupta non si può applicare ai trapezi rettangoli. Considerare il trapezio di basi lunghe 2,20 e 3,98, e lato obliquo lungo 2,44. [Valore corretto dell'area ≈ 5,16; con la formula di Brahmagupta: ≈ 5,68]
126. Di un parallelogramma conosciamo le misure dei lati, 7,19 e 5,23 e di una delle diagonali, 11,53. Trovare le misure dell'altra diagonale e degli angoli interni. [≈ 135°46′21″; ≈ 44°13′39″; ≈ 5,02]
127. Trovare una formula generale per risolvere il problema precedente in termini dei lati a e b e della diagonale c. $\left[cos^{-1}\left(\frac{b^2+a^2-c^2}{2\cdot a\cdot b}\right); \sqrt{a^2+b^2+2\cdot a\cdot b\cdot cos(\alpha)}\right]$
128. Determinare le misure dei lati di un parallelogramma le cui diagonali misurano 8,39 e 15,83 e in cui uno degli angoli che esse formano è di 116°58′12″. [≈ 10,51; ≈ 7,08]
129. Trovare una formula generale per risolvere il problema precedente in termini delle diagonali a e b e dell'angolo α. $\left[\frac{\sqrt{a^2+b^2\pm 2\cdot a\cdot b\cdot cos(\alpha)}}{2}\right]$

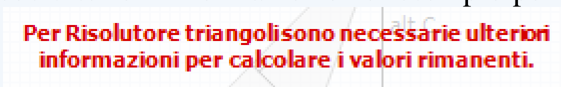
L’angolo di Microsoft Mathematics

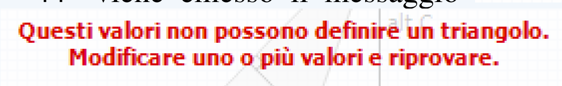
Vi sono diversi comandi predefiniti, accessibili cliccando su 

, si apre la seguente finestra 

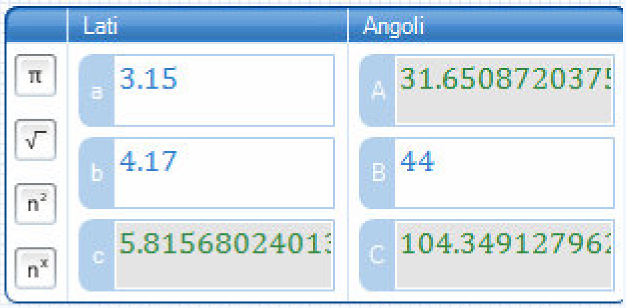
Noi abbiamo immesso i dati in blu, tutto ciò che è scritto in verde è opera del software, dopo che abbiamo premuto il tasto Calcola. Invece che le regole Possiamo mostrare il tipo di triangolo 

o le misure di altezze e area 

Ovviamente applica sia il teorema di Carnot che quello dei seni, ma se vi è più di una soluzione richiede ulteriori informazioni. Per esempio per i dati a = 3,15; b = 4,17 e α = 44° viene emesso il messaggio 

Ponendo α = 84° appare 

. Invece nella figura seguente abbiamo il caso unica soluzione



Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente quesito assegnato al Liceo scientifico dell’a.s. 1979/80.
Sui lati opposti AB e CD del rettangolo $ABCD$ ed esternamente ad esso si costruiscano due triangoli isosceli APB e CQD aventi gli angoli alla base di ampiezza α. Sapendo che il perimetro dell'esagono $APBCQD$ è $2p$, si determini l'area dell'esagono in funzione di α e della lunghezza del lato $\overline{AB} = 2x$.

Consideriamo la figura

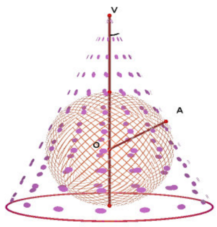
Ovviamente i triangoli sono isometrici. L'altezza relativa ad *AB* misura $x \cdot tan(\alpha)$, quindi l'area di ciascuno dei triangoli misura $\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot x \cdot tan(\alpha) = x^2 \cdot tan(\alpha)$.

I lati obliqui invece misurano $\frac{x}{cos(\alpha)}$. Pertanto il perimetro dell'esagono soddisfa l'uguaglianza, indicando con y la misura dei lati AD e BC: $\frac{4x}{cos(\alpha)} + 2y = 2p$, quindi i detti lati misurano: $y = p - \frac{2x}{cos(\alpha)}$. Perciò l'area del rettangolo misura: $2x \cdot \left(p - \frac{2x}{cos(\alpha)}\right)$. Infine l'area dell'esagono misura: $2x^2 \cdot tan(\alpha) + 2x \cdot \left(p - \frac{2x}{cos(\alpha)}\right) = 2x \cdot \frac{x \cdot sin(\alpha) + p \cdot cos(\alpha) - 2x}{cos(\alpha)}$.

1. (Liceo scientifico suppletiva 1970/71) Dato un cono circolare retto inscritto in una sfera di raggio r, esprimere la sua superficie totale in funzione della semiapertura x del cono. Suggerimento: si determini la sezione ottenuta con un piano per il vertice e perpendicolare alla base del cono.
$[4\pi r^2 \cdot [-sin^4(2x) - sin^3(2x) + sin^2(x) + sin(x)]]$

2. (Liceo scientifico 1971/72) Esprimere il volume di un cono circoscritto a una sfera di raggio r, in funzione dell'angolo di apertura del cono, $2x$. Suggerimento: si determini la sezione ottenuta con un piano per il vertice e perpendicolare alla base del cono. $\left[\frac{\pi}{3} r^3 \cdot \frac{[1+sin(x)]^2}{sin(x) \cdot [1-sin(x)]^2}\right]$

3. (Liceo scientifico 1971/72) Data una circonferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, si prendano su di essa, da parte opposta di AB due punti C e D tali che $\angle A\hat{B}C = 60°, \angle B\hat{A}D = \alpha$. Determinare $\frac{\overline{AD}^2 - \overline{CD}^2}{\overline{BC}^2}$.
$[4\, cos^2(\alpha) - 4\, sin^2(150° - \alpha)]$

4. (Liceo scientifico 1971/72) Determinare il volume di un cono circoscritto a una sfera di raggio r in funzione di r e dell'angolo in figura.  $\left[\pi \cdot r^3 \cdot \frac{[sin(\alpha)+1]^3}{3 \cdot sin(\alpha) \cdot cos^2(\alpha)}\right]$

5. (Liceo scientifico 1974/75) Si conduca internamente a un angolo retto $A\hat{O}B$ una semiretta OC che forma con OA un angolo $A\hat{O}C = x$; presi rispettivamente su OA e OB due punti M e N tali che $\overline{OM} = 1, \overline{ON} = \sqrt{3}$, siano M' e N' le rispettive proiezioni di M e N su OC. Detto P il punto medio di $M'N'$ si esprima in funzione di x l'area del triangolo NOP. $\left[\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot cos(x) \cdot \left[cos(x) + \sqrt{3} sin(x)\right]\right]$

6. (Liceo scientifico suppletiva 1974/75) Assegnato un riferimento cartesiano xOy, si consideri la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$. Detto AB l'arco di essa contenuto nel I quadrante, sia P un punto su tale arco, Q il punto di intersezione della retta tangente alla circonferenza per P con l'asse delle ascisse e S quello di

intersezione della retta *OP* con la retta di equazione *y* = 2. Esprimere in funzione dell'angolo $Q\hat{O}P = x$, l'area del triangolo *QPS*. $\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2-sin(x)}{cos(x)}\right]$

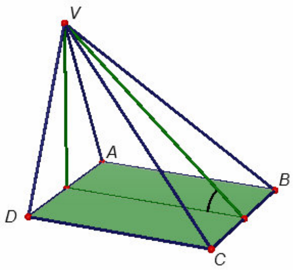
7. (Liceo scientifico suppletiva 1974/75) In una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, si conduca una corda *AC* tale che $C\hat{A}B = 2x$. Detto *D* il punto medio dell'arco *BC*, esprimere in funzione di *x* l'area del quadrilatero *ABCD*. $[2r^2 \cdot sin(x) \cdot cos(x) \cdot [1 + cos(2x)]]$
8. (Liceo scientifico suppletiva 1976/77) Dato l'angolo $a\hat{O}b = \gamma$, si fissino alla semiretta *Ob* i punti *P* e *Q* tali che $\overline{OP} = 1, \overline{OQ} = 2$; preso sulla semiretta *Oa* un punto *A*, si esprima il rapporto $y = \frac{\overline{AP}^2 - \overline{AQ}^2}{\overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2}$ mediante la misura di *OA* = *x*. $\left[y = \frac{-3+2x\cdot cos(\gamma)}{5+2x^2-6x\cdot cos(\gamma)}\right]$
9. (Liceo scientifico 1976/77) I tre punti *A*, *B C*, non allineati, sono vertici di un triangolo *ABC* i cui lati *BC* e *CA* sono lunghi rispettivamente *a*, *b*. Detto $A\hat{C}B = \gamma$, esprimere mediante esso la somma dei quadrati delle altezze del triangolo relative ai lati *BC* e *CA*, diminuita del quadrato del lato *AB*. $[cos(\gamma) \cdot (2ab - (a^2 + b^2) \cdot cos(\gamma))]$
10. (Liceo scientifico 1978/79) Data una circonferenza di raggio *r* e l'angolo al centro $A\hat{O}B$,si costruisca sulla corda *AB*, da parte opposta ripeto al centro *O*, il triangolo isoscele *ABC* avente per base *AB* e per altezza $\overline{CH} = 2k \cdot \overline{AB}$. Esprimere l'area del quadrilatero *OACB* in funzione del valore della misura dell'angolo $A\hat{O}B = 2x$. $[r^2 \cdot sin^2(x) \cdot (4k \cdot sin(x) + cos(x))]$
11. (Liceo scientifico 1980/81) In un sistema di assi cartesiani ortogonali si scrivano le equazioni delle due circonferenze passanti per l'origine *O* e aventi centri rispettivamente in $C' \equiv (2; 0)$ e $C'' \equiv (-½; 0)$. Condotte per il punto *O* due rette mutuamente ortogonali, delle quali la prima incontra le due circonferenze, oltre che nel punto *O*, nei punti *A* e *B* rispettivamente e la seconda nei punti *C* e *D*, esprimere l'area del quadrilatero *ACBD* mediante $\angle A\hat{O}C' = \alpha$. $[25/4\ sin(2\alpha), 0 < \alpha < \pi/2]$
12. (Liceo scientifico suppletiva 1980/81) In una circonferenza di raggio *r* si consideri la corda *AB* che dista *r*/2 dal centro. Si prenda sul maggiore degli archi $\widehat{AB}$ il punto *C*, e si prolunghi *AC* di un segmento *CD* tale che sia $\overline{CD} = \overline{AC}$. Si esprima l'area del triangolo *CDB* mediante $\angle B\hat{A}C = x, 0 < x < \frac{\pi}{2}$.
$\left[\frac{r^2}{2}\cdot sin(x)\cdot\left[3\cdot cos(x)+\sqrt{3}\cdot sin(x)\right]\right]$
13. (Liceo scientifico 1983/84) Si consideri una circonferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ e si conduca per il punto *A*, perpendicolarmente al piano della stessa circonferenza, il segmento $\overline{AP} = a$. Se *MN* è una corda della circonferenza, perpendicolare ad *AB*, si esprima il volume della piramide *PAMN* mediante $\angle M\hat{A}N = 2x$. $[4r^2\ sin(x)\ cos^3(x), 0 < x < \pi/2]$
14. (Liceo scientifico suppletiva 1983/84) Dato il triangolo rettangolo isoscele *ABC* con $\angle\hat{A} = 90°,\ \overline{AB} = a$, si conduca per *C* una retta non secante il triangolo. Esprimere la somma delle perpendicolari *AM* e *BN* condotte su di essa mediante $\angle A\hat{C}M = x$. $[a \cdot (2sin(x) + cos(x)), 0 \le x \le 135°]$
15. (Liceo scientifico 1984/85) In una circonferenza di centro *O* e raggio unitario si conduca la corda *AB* e si costruisca il triangolo equilatero *ABC* da parte opposta di *O* rispetto ad *AB*. Esprimere l'area del quadrilatero *ABCO* mediante $\angle A\hat{O}B = x$. $\left[\sqrt{3}\cdot sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\cdot sin(x)\right]$
16. (Liceo scientifico suppletiva 1991/92) In una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ inscrivere il triangolo *ABD* retto in *D*. Tracciare la bisettrice dell'angolo $D\hat{A}B$: tale bisettrice intersechi il segmento

BD in *E*. Indicato con *x* l'angolo $B\hat{A}E$, determinare il rapporto *y* tra la lunghezza del segmento *BE* e la lunghezza del segmento *BD*: $y = \frac{\overline{BE}}{\overline{BD}}$. $\left[y = \frac{1}{2 \ cos^2(x)} \right]$

17. (Liceo scientifico 1991/92) Data una circonferenza γ di raggio unitario e centro *O*, tracciare una semiretta s uscente da *O* ed intersecante γ in un punto *Q*. Indicato con *P* un generico punto di s esterno alla circonferenza γ, tracciare da esso le due tangenti alla circonferenza: siano *A* e *B* i punti di tangenza. Indicata con *x* la lunghezza del segmento *PQ*, trovare $\frac{\overline{AQ}+\overline{QB}}{\overline{AB}}$. $\left[\sqrt{\frac{2\cdot(x+1)}{x+2}} \right]$

18. (Liceo scientifico 1997/98) Un cateto di un triangolo rettangolo è lungo 2*a*, dove *a* è una lunghezza nota, e l'angolo acuto adiacente ad esso ha coseno uguale a 4/5. Condotta per il vertice dell'angolo retto una retta t che non attraversa il triangolo e indicata con *x* la misura dell'angolo che questa retta forma col cateto maggiore, esprimere in funzione di *x* il volume *V*(*x*) del solido generato dal triangolo quando compie una rotazione completa intorno alla retta *t*. $\left[V(x) = \frac{\pi \cdot a^3}{2} \cdot \left[4 \cdot sin(x) + 3 \cdot cos(x) \right] \right]$

19. (Liceo scientifico 1999/2000) Il rettangolo *ABCD* è tale che la retta che congiunge i punti medi dei suoi lati più lunghi, *AB* e *CD*, lo divide in due rettangoli simili a quello dato. Tali lati hanno lunghezza assegnata *a*. a) Determinare la lunghezza dei lati minori del rettangolo. $\left[\overline{AD} = \overline{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a \right]$ b) Sulla retta condotta perpendicolarmente al piano del rettangolo nel punto medio del lato *AD* prendere un punto *V* in modo che il piano dei punti *V*, *B*, *C* formi col piano del rettangolo dato un angolo di coseno $\frac{2}{\sqrt{13}}$.



Calcolare il volume della piramide di vertice *V* e base *ABCD*. $\left[\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot a^3 \right]$

c) Condotto il piano α parallelo al piano della faccia *VAD* della piramide, ad una distanza *x* da questo, in modo però che α sechi la piramide stessa, esprimere in funzione di *x* l'area del poligono sezione. $\left[\frac{3\cdot\sqrt{2}}{8} \cdot \left(a^2 - x^2 \right) \right]$ d) Calcolare infine i volumi delle due parti in cui il piano α divide la piramide nel caso in cui $x = \frac{a}{2}$. $\left[\frac{11\cdot\sqrt{2}}{64} \cdot a^3; \frac{5\cdot\sqrt{2}}{64} \cdot a^3 \right]$

20. (Liceo scientifico 2001/02) Si considerino le lunghezze seguenti: $a + 2x$, $a - x$, $2a - x$, (1) dove *a* è una lunghezza nota non nulla ed *x* è una lunghezza incognita. a) Determinare per quali valori di *x* le lunghezze (1) si possono considerare quelle dei lati di un triangolo non degenere. [$a > 0$, $0 < x < a/2$] b) Verificato che per $x = a/4$ le (1) rappresentano le lunghezze dei lati di un triangolo, descriverne la costruzione geometrica con riga e compasso e stabilire se si tratta di un triangolo rettangolo, acutangolo o ottusangolo. [Ottusangolo] c) Indicato con *ABC* il triangolo di cui al precedente punto, in modo che *BC* sia il lato maggiore, si conduca per A la retta perpendicolare al piano del triangolo e si prenda su di essa un punto *D* tale che *AD* sia lungo a: calcolare un valore approssimato a meno di un grado (sessagesimale) dell'ampiezza dell'angolo formato dai due piani *DBC* e *ABC*. [≈ 57°]

21. (Liceo scientifico 2002/03) Un triangolo ha due lati e l'angolo da essi compreso che misurano rispettivamente *a, b* e δ. Quale è il valore di δ che massimizza l'area del triangolo? [90°]

22. (Liceo scientifico 2002/03) Dal punto *A*, al quale è possibile accedere, è visibile il punto *B*, al quale però non si può accedere in alcun modo, così da impedire una misura diretta della distanza *AB*. Dal punto A si può però accedere al punto *P*, dal quale, oltre ad *A*, è visibile *B* in modo che, pur rimanendo

impossibile misurare direttamente la distanza *PB*, è tuttavia possibile misurare la distanza *AP*. Disponendo degli strumenti di misura necessari e sapendo che *P* non è allineato con *A* e *B*, spiegare come si può utilizzare il teorema dei seni per calcolare la distanza *AB*. $\left[\overline{AB} = \dfrac{\overline{AP} \cdot sin\left(B\hat{A}P\right)}{sin\left(B\hat{A}P + A\hat{P}B\right)}\right]$

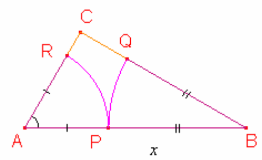
23. (Liceo scientifico 2003/04) Si dimostri che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio e si utilizzi il risultato per calcolare *sen*18°, *sen*36°. (*La sezione aurea di un segmento è tale che essa sia media proporzionale fra l'intero segmento e la parte rimanente*) $\left[\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}; \dfrac{10-2\cdot\sqrt{5}}{4}\right]$

24. (Liceo scientifico 2004/05) *ABC* è un triangolo rettangolo di ipotenusa *BC* = 2*a*. Determinate il volume del cono K ottenuto dalla rotazione di *ABC* attorno ad *AC*, in funzione di $A\hat{B}C = x$. Quindi trovare la misura approssimata in gradi sessagesimali, dell'angolo del settore circolare che risulta dallo sviluppo piano della superficie laterale del cono *K*. $[V = 8/3a^3\pi \cdot sin(x) \cdot cos^2(x); \approx 293°56'20'']$

25. (Liceo scientifico 2004/05) Si considerino i triangoli la cui base è *AB* = 1 e il cui vertice *C* varia in modo che l'angolo $C\hat{A}B$ si mantenga doppio dell'angolo $A\hat{B}C$. Si provi che se $\angle A\hat{B}C = 36°$ allora è $\overline{AC} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

26. (Liceo scientifico 2004/05) Si calcoli, senza l'aiuto della calcolatrice, il valore di: $sin^2(35°) + sin^2(55°)$, ove le misure degli angoli sono in gradi sessagesimali. [1]

27. (Liceo scientifico 2006/07) Le misure dei lati di un triangolo sono 40, 60 e 80 cm. Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze degli angoli del triangolo, approssimandole in gradi e primi sessagesimali. [≈ 104°29′, 46°34′, 28°57′]

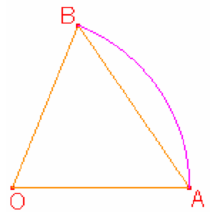
28. (Liceo scientifico 2007/08) Il triangolo rettangolo *ABC* ha l'ipotenusa *AB* = *a* e l'angolo $C\hat{A}B = 60°$. Si descriva, internamente al triangolo, con centro in *B* e raggio *x*, l'arco di circonferenza di estremi *P* e *Q* rispettivamente su *AB* e su *BC*. Sia poi *R* l'intersezione con il cateto *CA* dell'arco di circonferenza di centro *A* e raggio *AP*. Si specifichino le limitazioni da imporre ad *x* affinché la costruzione sia realizzabile. 

$\left[\dfrac{1}{2}a \le x \le \dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right]$ a) Si esprima in funzione di *x* l'area *S* del quadrilatero mistilineo *PQCR* e si trovi quale sia il valore minimo e quale il valore massimo di *S*(*x*). (*Si trova l'equazione di una parabola, quindi minimo e massimo sono …*) $\left[\min = \dfrac{\pi\cdot\left(8\cdot\sqrt{3}-17\right)+6\cdot\sqrt{3}}{48}\cdot a^2; Max = \dfrac{9\cdot\sqrt{3}-4\pi}{72}\cdot a^2\right]$ b) Tra i rettangoli con un lato su *AB* e i vertici sul lato opposto su ciascuno dei due cateti si determini quello di area massima. $\left[S_{Max} = \dfrac{3\cdot\left(8a-\sqrt{3}\right)}{256}\right]$

29. (Liceo scientifico 2007/08) Secondo il codice della strada il segnale di "salita ripida" (fig. a lato) 

preavverte di un tratto di strada con pendenza tale da costituire pericolo. La pendenza vi è espressa in percentuale e nell'esempio è 10%. Se si sta realizzando una strada rettilinea che, con un percorso di 1,2 *Km*, supera un dislivello di 85 *m*, qual è la sua inclinazione (in gradi sessagesimali)? Quale la percentuale da riportare sul segnale? [≈ 4°3′43″; 7%]

30. (Liceo scientifico PNI 2007/08) Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche, si considerino i triangoli *ABC* con *A* ≡ (1; 0), *B* ≡ (3; 0) e *C* variabile sulla retta *y* = 2*x*. Si provi che i punti (1; 2) e (3/5; 6/5) corrispondono alle due sole posizioni di *C* per cui è $\angle A\hat{C}B = 45°$.

31. (Liceo scientifico PNI 2007/08) I lati di un parallelepipedo rettangolo misurano 8, 9 e 12 *cm*. Si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'ampiezza dell'angolo che la diagonale mandata da un vertice fa con ciascuno dei tre spigoli concorrenti al vertice. [≈ 61°55′39″; ≈ 58°2′3″; ≈ 45°5′57″]
32. (Liceo scientifico 2008/09) È assegnato il settore circolare *AOB* di raggio *r* e ampiezza *x* (*r* e *x* sono 

misurati, rispettivamente, in *metri* e *radianti*). Si provi che l'area *S* compresa fra l'arco e la corda *AB* è espressa, in funzione di *x*, da $S(x)=\frac{1}{2}r^2\left(x-sin(x)\right)$, con $x \in [0; 2\pi]$.
33. (Liceo scientifico 2011/2012) E' dato un tetraedro regolare di spigolo *l* e altezza *h*. Si determini l'ampiezza dell'angolo α formato da *l* e da *h*. [≈ 35°15′52″]
34. (Liceo scientifico 2012/2013) Un triangolo ha area 3 e due lati che misurano 2 e 3. Qual è la misura del terzo lato? Si giustifichi la risposta. $\left[\sqrt{13}\right]$

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi.

1. Provare che il prodotto delle misure delle due parti in cui l'ortocentro divide ciascuna altezza di un triangolo acutangolo è costante. Determinarla in funzione degli angoli interni e del raggio *R* della circonferenza circoscritta. $[4R^2 \cdot cos(\alpha) \cdot cos(\beta) \cdot cos(\gamma)]$
2. Calcolare le misure delle altezze di un triangolo ottusangolo ABC di angolo ottuso α.
$\left[\overline{AD}=2R\cdot\left[cos(\beta)\cdot cos(\gamma)-cos(\alpha)\right];\overline{BE}=2R\cdot\left[cos(\beta)-cos(\alpha)\cdot cos(\gamma)\right];\overline{CF}=2R\cdot\left[cos(\gamma)-cos(\beta)\cdot cos(\alpha)\right]\right]$
3. Tenuto conto dell'esercizio precedente, provare che il prodotto delle misure delle due parti in cui l'ortocentro divide ciascuna altezza di un triangolo acutangolo è costante.
[Il prodotto costante è $-4R^2 \cdot cos(\alpha) \cdot cos(\beta) \cdot cos(\gamma)$]
4. Provare che se in un triangolo si ha: $b \cdot cos(\beta) = c \cdot cos(\gamma)$, allora il triangolo è isoscele di base *a* o rettangolo di ipotenusa *a*.
5. Provare che in un qualsiasi triangolo, l'area è data da $\frac{a^2\cdot sin(\beta)\cdot sin(\gamma)}{2\cdot sin(\alpha)}$.
6. Usando il teorema dei seni dimostrare il cosiddetto Teorema della Bisettrice: *In un triangolo la bisettrice di un angolo interno divide il lato a essa opposto in parti proporzionali ai rimanenti lati.*
7. Trovare una relazione fra le misure del raggio della circonferenza inscritta e quello della circonferenza circoscritta a uno stesso triangolo. $\left[r=2\cdot R\cdot\frac{sin(\alpha)\cdot sin(\beta)\cdot sin(\gamma)}{sin(\alpha)+sin(\beta)+sin(\gamma)}\right]$
8. Determinare il rapporto fra le misure del raggio della circonferenza inscritta e quello della circonferenza circoscritta a un triangolo rettangolo. $\left[\frac{2\cdot sin(\beta)\cdot cos(\beta)}{1+sin(\beta)+cos(\beta)}=\frac{2\cdot sin(\gamma)\cdot cos(\gamma)}{1+sin(\gamma)+cos(\gamma)}\right]$
9. Per determinare la distanza fra due punti *P* e *Q* separati da un crepaccio, si scelgono due altri punti, *A* e *B*, dalla parte del punto accessibile *Q* e se ne misura la distanza, sia 3,89. Quindi si misurano gli angoli $P\hat{A}B=73°30'; A\hat{B}P=47°51'36''; A\hat{B}Q=22°9'36''$. Quanto misura *PQ*? [≈ 5,26]
10. Risolvere il precedente problema con dati generici: $\overline{AB}=c, P\hat{A}B=\alpha; A\hat{B}P=\beta; A\hat{B}Q=\gamma$.
$\left[c\cdot\left(\frac{sin(\beta)}{sin(\alpha+\beta)}+\frac{sin(\gamma)}{sin(\alpha-\gamma)}\right)\right]$

11. Determinare la misura dell'area di un triangolo isoscele in funzione della misura del raggio r della circonferenza in esso inscritta e di uno degli angoli alla base, α. $\left[r^2 \cdot \frac{\left[1+cos(\alpha)\right]^2}{sin(\alpha) \cdot cos(\alpha)}\right]$

12. Determinare la misura del perimetro di un triangolo isoscele in funzione della misura del raggio r della circonferenza in esso inscritta e di uno degli angoli alla base, α. $\left[2r \cdot \frac{\left[1+cos(\alpha)\right]^2}{sin(\alpha) \cdot cos(\alpha)}\right]$

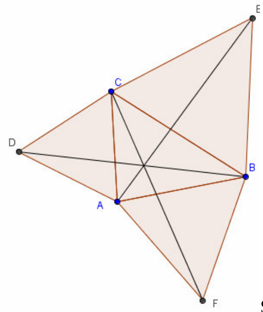
13. Tenuto conto degli esercizi precedenti, determinare una relazione fra area, perimetro e raggio della circonferenza inscritta. $[S = p \cdot r]$

14. Determinare le misure dell'area e del perimetro di un triangolo isoscele in cui il raggio della circonferenza in esso inscritta misura 2 e l'angolo al vertice misura 120°. $\left[S = 2p = \frac{4 \cdot \left(12 + 7 \cdot \sqrt{3}\right)}{3}\right]$

15. Il fatto che, nell'esercizio precedente, area e perimetro abbiano lo stesso valore numerico dipende dalla misura dell'angolo, o da altro? [Dal fatto che $r = 2$]

16. Determinare la misura del raggio della circonferenza inscritta in un triangolo isoscele di area 2,15 e angolo alla base di 37°12′45″. [≈ 0,57]

17. Determinare la misura del raggio della circonferenza inscritta in un triangolo isoscele di perimetro 5,67 e angolo alla base di 42°43′44″. [≈ 0,47]

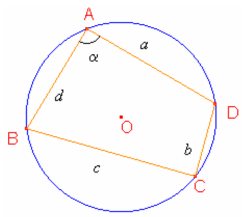
18. All'esterno dei lati di un generico triangolo, 

si costruiscano tre triangoli equilateri, come in figura. Dopo aver mostrato che i segmenti AE, BD e CF sono isometrici, calcolarne la misura.

$$\left[\sqrt{a^2+b^2-2 \cdot a \cdot b \cdot cos(\gamma+60°)} + \sqrt{a^2+c^2-2 \cdot a \cdot c \cdot cos(\beta+60°)} + \sqrt{b^2+c^2-2 \cdot b \cdot c \cdot cos(\alpha+60°)}\right]$$

19. Semplificare la precedente soluzione, trovando una relazione fra lati e angoli dei triangoli.

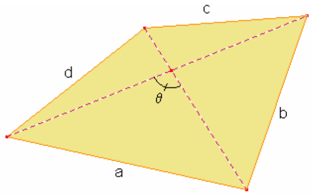
$$\left[\begin{array}{l} 3 \cdot \sqrt{a^2+b^2-2 \cdot a \cdot b \cdot cos(\gamma+60°)} = 3 \cdot \sqrt{a^2+c^2-2 \cdot a \cdot c \cdot cos(\beta+60°)} = \\ = 3 \cdot \sqrt{b^2+c^2-2 \cdot b \cdot c \cdot cos(\alpha+60°)} \end{array}\right]$$

20. Provare che in un quadrilatero ciclico, 

, cioè inscrivibile in una circonferenza, l'area si calcola con la formula: $\frac{a^2-b^2-c^2+d^2}{4} \cdot tan(\alpha)$.

21. La formula precedente non ha senso per certi quadrilateri ciclici. Quali? [I rettangoli]

22. Dopo avere trovato l'area del quadrilatero ciclico di lati lunghi 4,95; 7,15; 6,14 e 5,63; determinare la misura degli angoli interni. [≈ 34,95; ≈ 103°8′12″; ≈ 87°26′55″; ≈ 92°33′5″; ≈ 76°51′48″]

23. Provare che in un qualsiasi quadrilatero, con riferimento alla figura, 

l'area si calcola: $\dfrac{\left|b^2+d^2-a^2-c^2\right|}{4}\cdot tan(\theta)$.

24. In effetti la formula precedente non ha senso per certi quadrilateri. Quali? [Quelli con le diagonali perpendicolari]

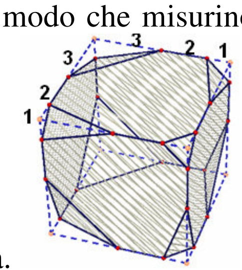
25. Determinare l'area del quadrilatero di lati lunghi 7; 7,20; 6,57 e 8,16 e in cui di uno degli angoli formati dalle diagonali misura 80°52′48″. [≈ 40,90]

26. Con riferimento al precedente esercizio, verificare che cambiando l'ordine in cui si susseguono i lati cambia anche il risultato. [Si ottengono ≈ 13,88 e ≈ 32,06]

27. Determinare le misure degli angoli interni del quadrilatero i cui lati sono, nell'ordine, 7,82; 7,02; 5,40; 12,50 e l'angolo formato dai primi due lati è di 121°. [≈ 82°9′13″; ≈ 104°38′18″; ≈ 52°12′29″]

28. Risolvere il problema precedente per raggi generici: r_1, r_2, r_3. $\left[cos^{-1}\left(\dfrac{(r_1+r_2)^2+(r_2+r_3)^2-(r_1+r_3)^2}{2\cdot(r_1+r_2)\cdot(r_2+r_3)}\right);\ldots\right]$

29. Da un vertice di un certo triangolo tracciamo l'altezza, la bisettrice dell'angolo e la mediana. Se così facendo abbiamo diviso l'angolo in quattro parti isometriche, determinare la misura dell'angolo. [90°]

30. Su ogni spigolo di un cubo scegliamo i punti che li dividono in 3 parti, in modo che misurino 1*cm*, 2*cm* e 3 *cm*, quindi uniamo tali punti ottenendo il poliedro convesso in figura. 

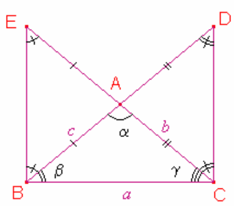
Quanto misura la sua area? $\left[\dfrac{9\cdot\sqrt{11}+3\cdot\sqrt{19}+10\cdot\sqrt{3}-24}{2}\right]$

Trovare gli errori nelle seguenti "dimostrazioni"

31. Poiché $sin(45°) = cos(45°)$, $tan(45°) = 1$, abbiamo

$$1+sin(45°)-cos(45°)=tan(45°)\Rightarrow 1+sin(45°)-cos(45°)=\frac{sin(45°)}{cos(45°)}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow cos(45°)+sin(45°)\cdot cos(45°)-cos^2(45°)=sin(45°)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow cos(45°)\cdot\left[\cancel{sin(45°)-cos(45°)}\right]=\cancel{sin(45°)-cos(45°)}\Rightarrow cos(45°)=1$$

32. $$cos^2(180°)=1-sin^2(180°)\Rightarrow\sqrt{cos^2(180°)}=\sqrt{1-sin^2(180°)}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow cos(180°)=\sqrt{1-sin^2(180°)}\Rightarrow -1=1$$

33. La seguente è una dimostrazione sbagliata del fatto che *Tutti i triangoli sono equiangoli*. Spiegare dove sta l'errore. 

Estendiamo *AC* e *AB* in modo che si abbia $\overline{AD}=\overline{AC};\overline{AE}=\overline{AB}$.

Abbiamo allora: $$B\hat{A}E = 180° - \gamma - \beta - E\hat{B}A \Rightarrow B\hat{A}E + E\hat{B}A = 180° - \gamma - \beta \Rightarrow$$ $$\Rightarrow 2 \cdot B\hat{A}E = \alpha \Rightarrow B\hat{A}E = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow C\hat{B}E = \beta + \frac{\alpha}{2}$$. Allo stesso modo avremo anche $C\hat{D}B = \frac{\alpha}{2}; B\hat{C}D = \gamma + \frac{\alpha}{2}$. Applichiamo il teorema dei seni al triangolo *BEC*: $\frac{b+c}{sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{a}{sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ e al triangolo *BCD*: $\frac{b+c}{sin\left(\gamma + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{a}{sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$. Quindi avremo:

$$\frac{b+c}{sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{b+c}{sin\left(\gamma + \frac{\alpha}{2}\right)} \Rightarrow sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right) = sin\left(\gamma + \frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow \beta = \gamma.$$

Se estendiamo i lati *AB* e *CB*, ripetendo quanto visto dimostreremo anche che α = γ, quindi il triangolo è equiangolo.

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.

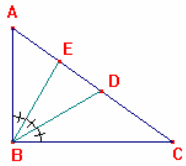
A = Giochi della rivista Abacus
AMC = American Mathematical Contest
HSMC = University High School Mathematics Contest
RICE = Rice University Mathematics Tournament
AHSME = Annual High School Mathematics Examination
B = Giochi della Bocconi
NC = State Matematical Finals of North Carolina
V = Vermont High School Prize

Lavoriamo insieme

Consideriamo un problema assegnato agli HSMC nel 2007.

I lati *a*, *b*, *c* di un triangolo soddisfano la catena di disuguaglianze; $0 \le a \le 1 \le b \le 2 \le c \le 3$. Trovare la massima area per triangoli del genere.

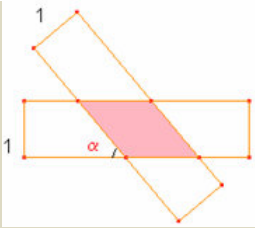
L'area di un triangolo si trova 1/2*ab* · sin (*x*), dove *x* è l'angolo compreso fra *a* e *b*. Il massimo si ha ovviamente quando è *x* = 90° e i lati hanno il loro massimo valore, cioè *a* = 1 e *b* = 2. Quindi l'area massima è 1.

1. (AHSME 1964) Dato il triangolo *ABC* i cui lati misurano 4, 5 e 6. Sul lato *AB*, che misura 5, costruiamo un altro triangolo *ABD* in modo che $\overline{AD} = 7,5$ e $\angle B\hat{A}D = \angle B\hat{C}A$. Determinare *BD*. [6,25]
2. (AHSME 1964) In un triangolo *PQR* i lati *PQ* e *PR* misurano 4 e 7, la mediana *PM* misura 3,5. Determinare la misura di *QR*. [9]
3. (AHSME 1967) Nel quadrilatero *ABCD* le diagonali *AC* e *BD* si incontrano nel punto *O*. Sapendo che $\overline{BO} = 4, \overline{OD} = 6, \overline{AO} = 8, \overline{OC} = 3, \overline{AB} = 6$ determinare la misura di *AD*. $\left[\sqrt{166}\right]$
4. (AHSME 1980) In figura il triangolo *ABC* è rettangolo, 

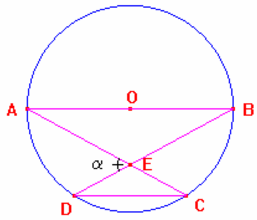
EB e *DB* trisecano l'angolo retto. Se $\overline{BE} = sin(x)$ e $\overline{BD} = cos(x)$, con 0 < *x* < π/2, determinare l'ipotenusa *AC*. $\left[\frac{3 \cdot \sqrt{5}}{5}\right]$
5. (AHSME 1981) I lati di un triangolo verificano l'uguaglianza: (*a* + *b* + *c*) · (*a* + *b* – *c*) = 3*ab*, determinare la misura di γ. [60°]
6. (AHSME 1982) I lati di un triangolo sono misurati da numeri interi consecutivi, l'angolo maggiore è doppio del minore, determinare la misura del coseno dell'angolo minore. [0,75]

Lavoriamo insieme

Consideriamo un problema assegnato agli HSMC nel 2004.

Due strisce rettangolari uguali, si sovrappongono come mostrato. 

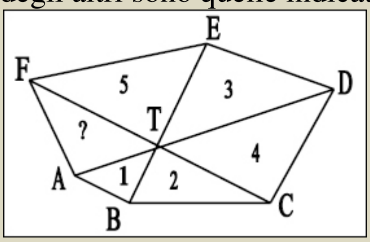
Esprimere l'area da essi racchiusa in funzione dell'angolo segnato. L'area cercata è quella di un parallelogramma ed è perciò il prodotto della misura di un lato per la relativa altezza. Scegliendo la base la cui altezza è 1, la base verifica la relazione: $1 = b \cdot sin(\alpha) \Rightarrow b = 1/sin(\alpha)$. Questo numero misura ovviamente anche l'area, essendo l'altezza unitaria.

7. (AHSME 1986) In figura *AB* è un diametro 

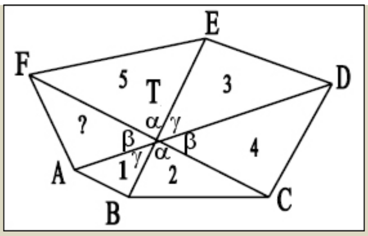
, *CD* è una corda a esso parallela, determinare il rapporto fra le aree dei triangoli *CED* e *AED*, in funzione della misura dell'angolo α. [$cos^2(\alpha)$]
8. (AHSME 1989) I lati del triangolo *ABC* misurano $\overline{AB} = 5, \overline{BC} = 7, \overline{AC} = 9$. Scegliamo un punto *D* su *AC* in modo tale che sia $\overline{BD} = 5$. Quanto vale il rapporto in cui viene diviso il segmento *AC* da *D*? [19/8]
9. (AHSME 1996) Un esagono inscritto in un cerchio ha tre lati consecutivi di uguale misura, 3, e gli altri tre consecutivi ognuno di misura 5. La corda del cerchio che divide l'esagono in due trapezi, uno con tre lati ognuno lungo 3 e l'altro con tre lati ognuno lungo 5, misura *m*/*n*, con *m* e *n* numeri naturali primi tra di loro. Determinare *m* + *n*. (Sugg. Usare il teorema di Carnot per determinare in due diversi modi il segmento che unisce due vertici dell'esagono separati da un terzo vertice). [409]
10. (AHSME 1998) Quanti triangoli di vertici in (−5; 0), (5; 0), e ($5cos(\theta)$; $5sin(\theta)$) hanno area 10 per qualche angolo θ? [4]
11. (AHSME 1998) Nel quadrilatero *ABCD*, si ha che l'angolo *A* è di 120°, gli angoli *B* e *D* sono retti, $\overline{AB} = 13, \overline{AD} = 46$. Trovare la misura di *AC*. [62]
12. (AHSME 1998) Nel triangolo *ABC*, l'angolo *C* è retto e *CB* > *CA*. Il punto *D* appartiene a *BC* in modo che sia $\angle C\hat{A}D = 2 \cdot \angle D\hat{A}B$. Se $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{2}{3}$, allora $\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}} = \frac{m}{n}$, con *m* e *n* numeri interi relativamente primi. Determinare *m* + *n*. [14]

Lavoriamo insieme

Vediamo un questo assegnato ai giochi Kangourou del 2001.
Le diagonali *AD*, *BE*, *CF* di un esagono convesso *ABCDEF* passano tutte per uno stesso punto *T*. Quanto vale l'area del triangolo *FAT*, se le aree degli altri sono quelle indicate in figura?



Indichiamo con dei simboli gli angoli formati dalle diagonali con vertici in *T*.



Calcoliamo le aree dei triangoli sfruttando la proprietà mediante il seno degli angoli indicati.

$$\overline{FT}\cdot\overline{ET}\cdot sin(\alpha)=10;\overline{DT}\cdot\overline{ET}\cdot sin(\gamma)=6;\overline{DT}\cdot\overline{CT}\cdot sin(\beta)=8;\overline{CT}\cdot\overline{BT}\cdot sin(\alpha)=4;\overline{BT}\cdot\overline{AT}\cdot sin(\gamma)=2$$

Possiamo anche scrivere:

$$\frac{1}{2}\overline{AT}\cdot\overline{FT}\cdot sin(\beta)=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\overline{BT}\cdot sin(\gamma)}\cdot\frac{10}{\overline{ET}\cdot sin(\alpha)}\cdot sin(\beta)=$$

$$=\frac{1}{\frac{4}{\overline{CT}\cdot\cancel{sin(\alpha)}}\cdot\cancel{sin(\gamma)}}\cdot\frac{\cancel{10}^{5}}{\frac{\cancel{6}^{3}}{\overline{DT}\cdot\cancel{sin(\gamma)}}\cdot\cancel{sin(\alpha)}}\cdot sin(\beta)=$$

$$=\frac{5\cdot\overline{CT}\cdot\overline{DT}\cdot sin(\beta)}{12}=\frac{5\cdot\cancel{8}^{2}}{\cancel{12}^{3}}=\frac{10}{3}$$

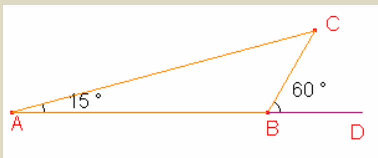
13. (AHSME 1999) Nel triangolo ABC si ha $3sin(\alpha) + 4cos(\beta) = 6$, $4sin(\beta) + 3cos(\alpha) = 1$. Determinare la misura di $\hat{C}$. [30°]
14. (AMC 2000) Un cerchio centrato nell'origine e di raggio unitario, contiene il punto A. Il segmento AB è tangente al cerchio in A e $A\hat{O}B=\theta$. Se il punto C appartiene ad OA e BC biseca $A\hat{B}O$, calcolare OC in funzione di θ. $\left[\frac{1}{1+sin(\theta)}\right]$
15. (A2002) Dividiamo un quadrilatero convesso in 4 triangoli, mediante le sua diagonali. Se le aree di tre di questi triangoli sono 1, 2, e 3 unità quadrate, quanto misura l'area del quarto triangolo? [6]
16. (RICE 2008) Nel triangolo AXE, T è il punto medio di EX, e P è il punto medio di ET. Se il triangolo APE è equilatero, determinare $cos\left(X\hat{A}E\right)$. $\left[-1/\sqrt{13}\right]$
17. (B2010) In un triangolo rettangolo il prodotto delle lunghezze dei tre lati è il doppio del prodotto delle tre altezze. Qual è la misura (in gradi) di uno dei due angoli acuti di questo triangolo rettangolo? [45°]

Questions in English

Working together

Consider a problem assigned at HSMC in 2004.

In the diagram below, the measure of $C\hat{A}B$ is 15° and the measure of $C\hat{B}D$ is 60°. If the length of BC is 1, then find the length of AB.



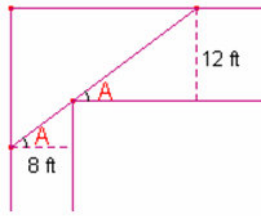
Using sinus' law: $\overline{AC}=\overline{AB}\cdot\frac{sin(120°)}{sin(45°)}=\overline{AB}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\overline{AB}$. Using the cosines' law:

$$\overline{AC}^2 = 1^2 + \overline{AB}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot cos(120°) \Rightarrow \frac{3}{2} \cdot \overline{AB}^2 = 1 + \overline{AB}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

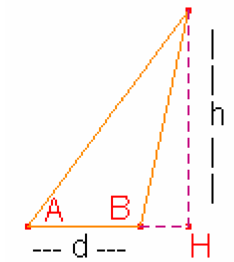
$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}^2 - \overline{AB} - 1 = 0 \Rightarrow \overline{AB}^2 - 2 \cdot \overline{AB} - 1 = 0 \Rightarrow \overline{AB} = 1 + \sqrt{1+2} = 1 + \sqrt{3}$$

The negative solution, $1-\sqrt{3}$, obviously isn't acceptable.

18. (AHSME 1980) If $b > 1$, $sin(x) > 0$, $cos(x) > 0$ and $log_b[sin(x)] = a$, then $log_b[cos(x)]$ equals
A) $2\ log_b(1 - b^{a/2})$ B) $\sqrt{1-a^2}$ C) b^{a^2} D) ½ $log_b(1 - b^{2a})$ E) none of these [D]
19. (AHSME 1995) Two rays with common endpoint O form a 30° angle. Point A lies on one ray, point B on the other ray, and $AB = 1$. The maximum possible length of OB is? [2]
20. (HSMC2001) A log[1] of length L is being floated down a canal with a right angle turn as pictured.

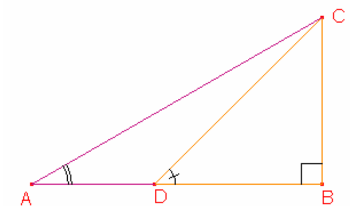


Express the length L of the log in terms of angle A and the widths of the canal (neglect width of log). The log is to touch the sides of the canal as shown. [$8sec(A) + 12csc(A)$]



21. (HSMC2001) Express h in terms of d and trig functions of angles A and B in figure.

$$\left[h = \frac{d}{cot(A) - cot(B)} = \frac{d \cdot tan(A)}{1 - cot(B) \cdot tan(A)} \right]$$

22. (V 2004) If $sin(x) + cos(x) = ½$, express $sin^4(x) + cos^4(x)$ as a rational number in lowest terms.[23/32]
23. (NC2004) In order to look at the peak of a certain mountain 30 km in the distance one needs to angle the telescope at 3° over the horizontal. If the elevation of the observer is at 633 meters above sea level, how high is the mountain? [≈ 2205 m]
24. (HSMC2004) In figure  we have $\angle A\hat{B}C = 90°, \angle C\hat{D}B = 45°, \angle C\hat{A}B = 30°$

and $AD = 2$. Then BC =? $\left[\frac{2}{\sqrt{3}-1}\right]$
25. (HSMC2005) A triangle with vertices A, B, C has $\hat{B} = 90°$ and $\hat{A} = 30°$. Let P, Q, R be on AB, BC, CA respectively so that PQR is equilateral, $BC = 4$ and Q is the midpoint of BC. Find PR. $\left[\sqrt{7}\right]$

Working together

Consider a problem assigned in HSMC in 2007.
In the triangle ABC, $\overline{BC} = 13, \overline{CA} = 14, \overline{AB} = 15$. If D is a point on CA such that BD is perpendicular to CA, what is BD?
Let α be the angle at A. By the law of cosines we have:

[1] tronco

$$\overline{BC}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2 - 2 \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB} \cdot cos(\alpha) \Rightarrow 13^2 = 14^2 + 15^2 - 2 \cdot 14 \cdot 15 \cdot cos(\alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 169 = 196 + 225 - 420 \cdot cos(\alpha) \Rightarrow cos(\alpha) = \frac{3}{5}$$

So $cos(\alpha) = \frac{\overline{DA}}{15} \Rightarrow \overline{DA} = \frac{3}{5} \cdot 15 = 9$. Then $\overline{BD} = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12$.

26. (V 2007) In triangle *ABC*, *AB* = 7, *BC* = 5 and *CA* = 6. Locate points P_1, P_2, P_3 and P_4 on *BC* so that this side is partitioned into five congruent segments, each of length 1. For *k* = 1, 2, 3 and 4, let $q_k = AP_k$. Find $q_1^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2$. [150]
27. (HSMC2007) Evaluate $cos\left[sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) + cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right]$. Hint: There is an angle whose sinus and cosines are equal, so … [0]
28. (HSMC2009) Given Δ[2]*ABC* with $cos(2\alpha - \beta) + sin(\alpha + \beta) = 2$ and *AB* = 4, what is *BC*? [2]
29. (V 2011) Each side of square *ABCD* has length 3. Let *M* and *N* be points on sides *BC* and *CD* respectively such that *BM* = *ND* = 1 and let $\angle M\hat{A}N = \theta$. Find $sin(\theta)$. [4/5]

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Ingegneria 2000) Il valore della somma $cos(40°) + cos(140°)$ è
   A) negativo ma diverso da –1 B) positivo C) 0 D) irrazionale E) –1
2. (Medicina 2001) Il valore della somma $sin(20°) + cos(20°)$ è A) negativo B) positivo C) 0 D) 1 E) –1
3. (Veterinaria 2002) Se $sin(\alpha) = 2/3$, $cos(\alpha) > 0$ allora:
   A) $45° \le \alpha \le 60°$ B) $0° \le \alpha \le 30°$ C) $60° \le \alpha < 90°$ D) $45° < \alpha < 60°$ E) $30° < \alpha < 45°$
4. (Architettura 2002) Per quale dei seguenti angoli vale la relazione $sin(x) < sin(2x)$?
   A) $x = 80°$ B) $x = 250°$ C) $x = 350°$ D) $x = 170°$ E) Nessuno di questi.
5. (Medicina 2003) Due angoli minori di un angolo piatto hanno lo stesso seno:
   A) se differiscono di π rad B) se differiscono di 90° C) se sono supplementari
   D) se sono complementari E) solo se sono lo stesso angolo
6. (Corso di laurea in Informatica, Udine 2009) Due angoli di un triangolo hanno ampiezza α e il terzo angolo ha ampiezza β. Si sa che $sin(\alpha) = 0,8$. Allora $sin(\beta)$ è uguale a: A) 0,48 B) 0,64 C) 0,72 D) 0,96

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_2_2.htm

isposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1	2	3	4	5	6
C	B	E	B	C	D

[2] This symbol means Triangle

7. La misurazione degli angoli

7.2 Goniometria

Prerequisiti

- Concetto di angolo
- Concetto di misura
- Unità di misura sessagesimale degli angoli
- Le funzioni goniometriche elementari
- Dominio e codominio di una funzione
- Teoremi fondamentali di goniometria
- Uso della calcolatrice scientifica

Obiettivi

- Comprendere il concetto funzione goniometrica
- Comprendere il concetto di funzione periodica
- Sapere rappresentare semplici funzioni goniometriche e sapere leggere i grafici di funzioni goniometriche
- Comprendere l'utilità di usare l'unità di misura in radianti

Contenuti

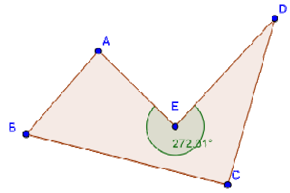
- Definizione delle funzioni trigonometriche elementari per angoli qualsiasi
- Unità di misura in radianti
- Rappresentazione grafica delle funzioni goniometriche elementari

Parole Chiave

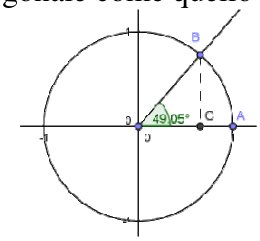
Codominio – Dominio – Periodo – Polare – Radiante

Definizione delle funzioni trigonometriche elementari per angoli qualsiasi

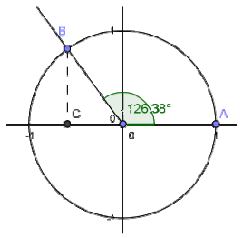
Abbiamo già definito le funzioni goniometriche elementari prima per angoli acuti, poi anche per angoli ottusi. Potremmo però avere a che fare anche con angoli maggiori di 180°, come mostrato in figura.



Dobbiamo quindi pensare a generalizzare le funzioni goniometriche ad angoli qualsiasi. un'idea potrebbe essere quella di fare in modo di riferirci sempre a triangoli rettangoli i cui angoli acuti hanno qualche relazione con l'angolo non acuto di cui vogliamo calcolare seno o coseno. Per fare ciò, tenuto conto che abbiamo già visto che le funzioni goniometriche possono anche essere numeri negativi (il coseno di angoli ottusi lo è), consideriamo un riferimento cartesiano ortogonale come quello in figura.



In questo considerando solo angoli acuti il seno dell'angolo indicato è dato dal rapporto fra *BC* e il raggio. E poiché quest'ultimo è scelto unitario, numericamente il seno coincide con la misura di *BC*, allo stesso modo il coseno coincide con la misura di *OC*.
Adesso consideriamo un angolo ottuso.



In questo caso il seno dell'angolo indicato continua a coincidere, numericamente, con la misura di *BC*, ciò non accade più per il coseno, poiché sappiamo che stavolta esso è un numero negativo. Non è difficile capire che il coseno in questo caso è l'opposto della misura di *OC*. Ma allora, dato che il raggio è unitario, piuttosto che parlare di misure di segmenti potremmo parlare di ordinata di *B*, per il seno, e di ascissa di C per il coseno. Questa appare una buona idea e può perciò rappresentare un modo per definire seno e coseno, per il momento questi due, di angoli qualsiasi.
Poniamo allora delle definizioni.

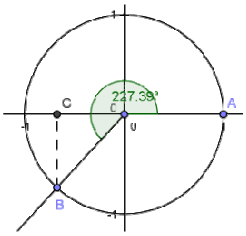
Definizione 1

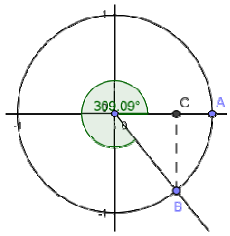
Diciamo **circonferenza goniometrica** la circonferenza di centro nell'origine e raggio unitario. In una circonferenza goniometrica conveniamo di rappresentare gli angoli con il vertice nell'origine degli assi e un lato coincidente con il semiasse positivo delle ascisse.

Definizione 2

Diciamo **seno** di un angolo rappresentato su una circonferenza goniometrica, l'ordinata del punto intersezione fra il lato variabile dell'angolo e la circonferenza goniometrica. L'ascissa del detto punto la chiameremo **coseno** dell'angolo.

Abbiamo allora le situazioni mostrare in figura, per seno e coseno di angoli maggiori di 180°.





Cioè il seno di angoli maggiori di 180° e minori di 360° è un numero negativo; il coseno è invece un numero negativo per angoli compresi tra 90° e 270° e positivo per angoli maggiori di 270° e minori di 360°. Il precedente punto di vista ci permette di generalizzare anche il concetto di angolo, nel senso che possiamo anche parlare di angoli negativi, basta misurare l'angolo in verso orario, invece che antiorario. Cioè, riferendoci all'ultima figura, l'angolo mostrato è di 309,09° ma anche di (309,09° – 360°) = –50,91°). Perciò abbiamo il seguente risultato.

Teorema 1

Dato un angolo positivo x abbiamo: $sin(x) = -\ sin(-x) = -\ sin(360° - x)$; $cos(x) = cos(-x) = cos(360° - x)$

Visto che ovviamente le relazioni fra secante e coseno, cosecante e seno, tangente e cotangente con seno e coseno, continuano a essere valide, seguono le seguenti uguaglianze.

Teorema 2

Dato un angolo positivo x abbiamo: $tan(x) = -\ tan(-x) = -\ tan(360° - x)$; $cot(x) = -cot(-x) = -cot(360° - x)$

$$sec(x) = sec(-x) = sec(360° - x);\ csc(x) = -csc(-x) = -csc(360° - x)$$

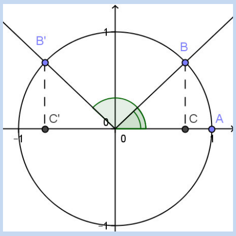
Con ragionamenti simili possiamo enunciare anche i seguenti altri teoremi.

Teorema 3

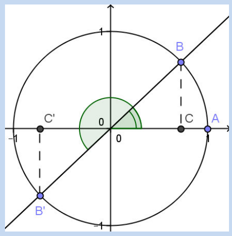
Per un qualsiasi angolo x si ha:

$$sin(x) = sin(180° - x) = -sin(180° + x);\ cos(x) = -cos(180° - x) = -cos(180° + x)$$
$$tan(x) = -\ tan(180° - x) = tan(180° + x);\ cot(x) = -cot(180° - x) = cot(180° + x)$$
$$sec(x) = -sec(180° - x) = -sec(180° + x);\ csc(x) = csc(180° - x) = -csc(180° + x)$$

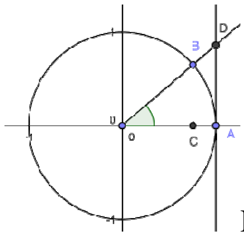
Dimostrazione

Consideriamo la figura seguente 

Facilmente si mostra che i triangoli BOC e $B'OC'$ sono isometrici, quindi come segmenti sono isometrici BC e $B'C'$, OC e OC'. Anche le ordinate sono uguali, cioè i seni di angoli supplementari sono uguali; mentre le ascisse sono opposte, perciò i coseni sono opposti. Seguono perciò le relazioni per le altre funzioni goniometriche. Lasciamo per esercizio le relazioni per gli angoli che differiscono di 180°, basta ragionare sulla seguente figura.



Abbiamo detto che continuano a valere le relazioni con seno e coseno delle altre 4 funzioni, vogliamo vedere come possiamo definire queste funzioni utilizzando il cerchio goniometrico.

Consideriamo la figura 

Facilmente si mostra che i triangoli BOC e AOD sono fra loro simili, possiamo perciò scrivere la seguente proporzione: $\frac{\overline{AD}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{OC}} \Rightarrow \overline{AD} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{sin(\alpha) \cdot 1}{cos(\alpha)} = tan(\alpha)$

Quindi possiamo definire la tangente di un angolo anche non acuto.

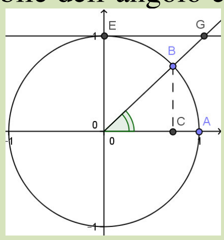
Definizione 3

Diremo **tangente** di un angolo l'ordinata del punto intersezione, se esiste, fra il lato variabile dell'angolo e la retta tangente alla circonferenza goniometrica nel suo punto di ascissa 1.

Ovviamente abbiamo detto "se esiste"; perché se l'angolo è di 90° oppure di 270° le due rette sono parallele e non hanno intersezione. Quindi, come già sapevamo, non ha senso la scritta $tan(90^\circ)$, e adesso sappiamo che non ha senso neanche $tan(270°)$.
In modo analogo si definisce la cotangente.

Definizione 4

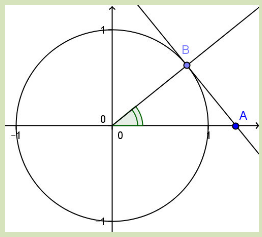
Diremo **cotangente** di un angolo l'ascissa del punto intersezione, se esiste, fra il lato variabile dell'angolo e la retta tangente alla circonferenza goniometrica nel suo punto di ordinata 1.



Perciò non diamo significato alle scritte *cot*(0°) e *cot*(180°). Per la secante e cosecante abbiamo.

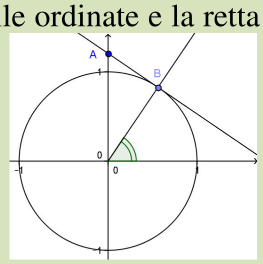
Definizione 5

Diremo **secante** di un angolo l'ascissa del punto intersezione, se esiste, fra l'asse delle ascisse e la retta tangente alla circonferenza goniometrica nel punto che individua l'angolo.



Definizione 6

Diremo **cosecante** di un angolo l'ordinata del punto intersezione, se esiste, fra l'asse delle ordinate e la retta tangente alla circonferenza goniometrica nel punto che individua l'angolo.



Perciò non hanno senso le scritte *sec*(90°), *sec*(270°), *csc*(0°) e *csc*(90°).

Esempio 1

Sapendo che $sin(30°) = ½$, tenendo conto dei risultati precedenti possiamo dire che si ha anche:

$sin(150°) = sin(180°–30°) = ½$; $sin(210°) = sin(180°+30°) = –½$; $sin(330°) = sin(360°–30°) = –½$

Ppoiché la cosecante è inversa del seno, abbiamo: $csc(30°) = 3 = csc(150°)$; $csc(210°) = csc(330°) = – 2$.

Possiamo trovare altre relazioni per angoli particolari.

Teorema 4

Si ha la validità delle seguenti uguaglianze, per $0 \le x \le 90°$:

$sin(x) = –cos(90° + x) = –cos(270° –x)$; $cos(x) = sin(90° + x) = –sin(270° – x)$;

$tan(x) = – cot(90° + x) = cot(270° – x), x \neq 90°$; $cot(x) = –tan(90° + x) = tan(270° – x), x \neq 0°$

$sec(x) = csc(90° + x) = –csc(270° – x) , x \neq 0°$; $csc(x) = –sec(90° + x) = –sec(270° – x), x \neq 90°$

Dimostrazione

Basta tenere conto del fatto che $180° – (90° – x) = 90° + x$ e $180° + (90° – x) = 270° – x$.

Esempio 2

Tenendo conto che $sin(30°) = ½$, tenendo conto dei risultati precedenti possiamo dire che si ha anche: $cos(120°) = cos(90°+30°) = –sin(30°) = –½$; $cos(240°) = cos(270°–30°) = –sin(30°) = –½$.

Adesso possiamo determinare delle formule che ci permettano di esprimere ognuna delle sei funzioni goniometriche mediante una sola di esse. Facilmente troviamo quelle mediante seno, coseno, secante o cosecante.

Teorema 5

Si ha la validità delle seguenti uguaglianze, per tutti gli angoli per cui ciascuna funzione goniometrica ha significato:

$$cos(\alpha) = \pm\sqrt{1-sin^2(\alpha)}; sec(\alpha) = \pm\frac{1}{\sqrt{1-sin^2(\alpha)}}; csc(\alpha) = \frac{1}{sin(\alpha)};$$

$$tan(\alpha) = \pm\frac{sin(\alpha)}{\sqrt{1-sin^2(\alpha)}}; cot(\alpha) = \pm\frac{\sqrt{1-sin^2(\alpha)}}{sin(\alpha)};$$

$$sin(\alpha) = \pm\sqrt{1-cos^2(\alpha)}; sec(\alpha) = \frac{1}{cos(\alpha)}; csc(\alpha) = \pm\frac{1}{\sqrt{1-cos^2(\alpha)}};$$

$$tan(\alpha) = \pm\frac{\sqrt{1-cos^2(\alpha)}}{cos(\alpha)}; cot(\alpha) = \pm\frac{cos(\alpha)}{\sqrt{1-cos^2(\alpha)}};$$

$$sin(\alpha) = \pm\frac{\sqrt{sec^2(\alpha)-1}}{sec(\alpha)}; cos(\alpha) = \frac{1}{sec(\alpha)}; csc(\alpha) = \pm\frac{sec(\alpha)}{\sqrt{sec^2(\alpha)-1}};$$

$$tan(\alpha) = \pm\sqrt{sec^2(\alpha)-1}; cot(\alpha) = \pm\frac{1}{\sqrt{sec^2(\alpha)-1}};$$

$$sin(\alpha) = \pm\frac{1}{csc(\alpha)}; cos(\alpha) = \frac{\sqrt{csc^2(\alpha)-1}}{csc(\alpha)}; sec(\alpha) = \pm\frac{csc(\alpha)}{\sqrt{csc^2(\alpha)-1}};$$

$$tan(\alpha) = \pm\frac{1}{\sqrt{csc^2(\alpha)-1}}; cot(\alpha) = \pm\sqrt{csc^2(\alpha)-1}$$

Nel precedente teorema la presenza del segno $\pm$, significa che il segno si sceglierà sulla base del valore dell'angolo α. Così per esempio se vogliamo determinare il $cos(70°)$ mediante il $sin(70°)$ sceglieremo, nella prima formula, il segno +; sceglieremo il segno – se invece volessimo calcolare $cos(135°)$ mediante il $sin(135°)$.

Un po' meno ovvie sono le relazioni usando solo tangente o cotangente.

Esempio 3

Ricaviamo un'espressione che permette di scrivere il coseno solo usando la tangente. Consideriamo la seguente uguaglianza $tan^2(\alpha) = \frac{sin^2(\alpha)}{cos^2(\alpha)}$. Esprimiamo il secondo membro solo in coseno.

$$tan^2(\alpha) = \frac{1 - cos^2(\alpha)}{cos^2(\alpha)} = \frac{1}{cos^2(\alpha)} - 1$$

Adesso possiamo risolvere nell'incognita coseno.

$$\frac{1}{cos^2(\alpha)} = 1 + tan^2(\alpha) \Rightarrow cos^2(\alpha) = \frac{1}{1 + tan^2(\alpha)} \Rightarrow cos(\alpha) = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + tan^2(\alpha)}}$$

Sulla falsariga dell'esempio precedente si dimostra il seguente risultato.

Teorema 6

Si ha la validità delle seguenti uguaglianze, per gli angoli per cui tutte le espressioni hanno senso:

$$cos(\alpha) = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + tan^2(\alpha)}}; sin(\alpha) = \pm\frac{tan(\alpha)}{\sqrt{1 + tan^2(\alpha)}}; cot(\alpha) = \frac{1}{tan(\alpha)};$$

$$sec(\alpha) = \pm\sqrt{1 + tan^2(\alpha)}; csc(\alpha) = \pm\frac{\sqrt{1 + tan^2(\alpha)}}{tan(\alpha)}.$$

$$cos(\alpha) = \pm\frac{cot(\alpha)}{\sqrt{1 + cot^2(\alpha)}}; sin(\alpha) = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + cot^2(\alpha)}}; tan(\alpha) = \frac{1}{cot(\alpha)};$$

$$sec(\alpha) = \pm\frac{\sqrt{1 + cot^2(\alpha)}}{cot(\alpha)}; csc(\alpha) = \pm\sqrt{1 + cot^2(\alpha)}$$

Esempio 4

Abbiamo $cos(60^\circ) = \frac{1}{2}, tan(60^\circ) = \sqrt{3}$, e infatti $\frac{1}{\sqrt{1 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+3}} = \frac{1}{2}$.

Concludiamo il paragrafo con una discussione che può sembrare strana.

Consideriamo un orologio non digitale, quando una delle lancette delle ore, minuti o secondi, ha concluso il giro noi continuiamo a misurare utilizzando il periodo di 60 secondi, 60 minuti o 24 ore, a seconda della lancetta considerata. Quindi anche se non ha senso parlare delle 28 ore, possiamo considerarle come le 4 ore successive alle prime 24. Analogamente quindi possiamo parlare delle 112 ore, considerandole come 4 × 24 + 16, cioè come le 16 di 4 giorni successivi. Possiamo perciò fare lo stesso anche con gli angoli e con le relative funzioni, in cui il periodo sarà ovviamente di 360°. Quindi abbiamo le seguenti definizioni.

Definizione 7

Si ha, per ogni $k \in \mathbb{Z}$ e ogni x per cui hanno significato tutte le espressioni:

$$sin(x + k \cdot 360°) = sin(x) \qquad cos(x + k \cdot 360°) = cos(x) \qquad tan(x + k \cdot 180°) = tan(x);$$
$$cot(x + k \cdot 180°) = cot(x) \qquad sec(x + k \cdot 360°) = sec(x) \qquad csc(x + k \cdot 360°) = csc(x)$$

Il motivo del fatto che il periodo per tangente e cotangente sia di 180° e non di 360°, dipende proprio da come sono state definite queste funzioni.

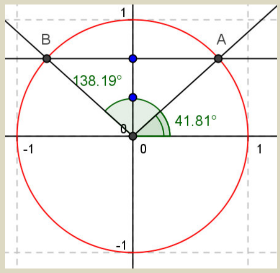
Esempio 5

Abbiamo *cos*(1590°) = *cos*(4 · 360° + 150°) = *cos*(150°) = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; *tan*(945°) = *tan*(2 · 360° + 225°) = *tan*(225°) = *tan*(180° + 45°) = *tan*(45°) = 1.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo tracciare l'angolo α per cui si ha: *sin*(*x*) = 2/3.
Basta semplicemente tracciare la circonferenza goniometrica, dividere in 3 parti uguali il suo raggio appartenente all'asse *y* e tracciare le parallele, da 2/3 all'asse *x*. I punti individuati sulla circonferenza permettono di trovare gli angoli richiesti, come illustrato meglio in figura.



Ovviamente valori più precisi delle misure degli angoli si ottengono con l'aiuto di un goniometro oppure di un apposito software.

Tracciare gli angoli compresi tra 0° e 360°, che verificano quanto richiesto

Livello 1

1.	*sin*(*x*) = ¼	*cos*(*x*) = ½	*tan*(*x*) = 2	*sin*(*x*) = –1/3	*cos*(*x*) = –¼	*tan*(*x*) = ½
2.	*cot*(*x*) = 2/3	*cos*(*x*) = –3/2	*tan*(*x*) = –2	*sin*(*x*) = –4/5	*cos*(*x*) = ¾	*tan*(*x*) = 3/5

Lavoriamo insieme

Semplificare *sin*(45°) – *cos*(30°) + *tan*(60°) – *cot*(90°).

Basta sostituire alle funzioni i loro valori numerici: $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}-0=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$

Calcolare il valore numerico delle seguenti espressioni:

Livello 1

3. *sin*(30°) – *cos*(45°) + *sin*(60°) – *cot*(30°) $\left[\frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}\right]$ $\frac{csc(30°)-cos(60°)}{sec(60°)+sin(30°)}$ [3/5]
4. *sin*(45°) – *cos*(45°) – *tan*(45°) + *cot*(45°) – *csc*(45°) + *sec*(45°) [0]
5. [*sin*(30°) – *cos*(30°)] · [*sin*(30°) + *cos*(30°)] [–½] $[tan(30°) + cot(30°)]^2$ [16/3]
6. [*tan*(30°) + *cos*(60°)] · [*sin*(30°) – *cot*(60°)] + *sec*(45°) $\left[\sqrt{2}-1/12\right]$
7. *cot*(90°) · [*sin*(17°) + *cos*(31°)] – *tan*(180°) · [*cot*(31°) + *sec*(79°)] [0]
8. [*sin*(0°) – *tan*(45°) + *cot*(30°)] · [*cos*(90°) + *csc*(60°) – *sec*(30°)] [0]
9. $\frac{\left(sin(270°)-tan(45°)\right)^3}{\left(cot(30°)+sec(60°)\right)^2}$ $\left[32\cdot\sqrt{3}-56\right]$ $\frac{sin(45°)-cos(30°)}{cos(0°)-tan(180°)}+\frac{cos(90°)+sin(270°)}{sec(60°)}$ $\left[\frac{\sqrt{2}-1-\sqrt{3}}{2}\right]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo semplificare la seguente espressione: $\frac{sin(225°)-cos(330°)}{sin(210°)}-tan(240°)+\frac{cot(210°)-sec(-30°)}{csc(330°)}$

Possiamo scrivere: $\frac{sin(180°+45°)-cos(360°-30°)}{sin(180°+30°)}-tan(180°+60°)+\frac{cot(180°+30°)-sec(-30°)}{csc(360°-30°)}$

Quindi, tenendo conto delle proprietà enunciate abbiamo:

$$\frac{-sin(45°)-cos(30°)}{-sin(30°)}+tan(60°)+\frac{-cot(30°)-sec(30°)}{-csc(30°)}=$$

$$=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}-\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}{-\frac{1}{\cancel{2}}}+\sqrt{3}+\frac{-\sqrt{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}}{-2}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{3}+\frac{3+2}{2\cdot\sqrt{3}}=\frac{4\cdot\sqrt{3}+12+2}{2\cdot\sqrt{3}}=\frac{4\cdot\sqrt{3}+14}{2\cdot\sqrt{3}}=\frac{2\cdot\sqrt{3}+7}{\sqrt{3}}$$

Calcolare il valore numerico delle seguenti espressioni:

Livello 1

10. $sin(225°) - cos(210°) + tan(330°)$ $\left[\frac{\sqrt{3}-3\cdot\sqrt{2}}{6}\right]$ $tan(60°)\cdot\frac{sin(315°)+sec(300°)}{cos(-60°)}$ $\left[4\cdot\sqrt{3}-\sqrt{6}\right]$
11. $cos(210°) - sin(210°) + tan(225°) \cdot cot(315°)$ $\left[-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right]$ $\frac{sin(315°)-cos(225°)}{csc(210°)+sec(240°)}$ [0]
12. $[csc(210°) - sec(-45°)] \cdot [csc(-30°) - sec(225°)]$ [2]
13. $\frac{sin^2(-60°)-cos^2(-45°)}{tan(210°)+cot(240°)}$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{8}\right]$ $[sin(210°) + cos(150°) - tan(-30°)]^2$ $\left[\frac{\sqrt{6}+2}{3}\right]$
14. $[cos(-45°) + tan(-225°)] \cdot [cos^2(315°) - cos(45°) \cdot tan(135°) +\cdot tan^2(-45°)]$ $\left[\frac{\sqrt{2}-4}{4}\right]$
15. $\frac{csc(-30°)+sec(-60°)}{tan(225°)}\cdot\frac{csc(-60°)+sec(-30°)}{tan(-45°)}$ [0] $\frac{tan(-225°)+cot(-210°)}{cos(-150°)+sin(-330°)}$ $\left[2\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)\right]$

Semplificare le seguenti espressioni:

Livello 2

16. $sin(180° + \alpha) + cos(180° - \alpha) + sin(-\alpha) + cos(360° - \alpha)$ $[-2sin(\alpha)]$
17. $cos(270° + \alpha) - sin(180° + \alpha) + sec(-\alpha) - csc(270° - \alpha)$ $\left[2\cdot\frac{1+sin(\alpha)\cdot cos(\alpha)}{cos(\alpha)}\right]$
18. $\frac{sin(-\beta)+cos(90°+\beta)}{csc(90°+\beta)+sec(-\beta)}$ $[-sin(\beta)\ cos(\beta)]$ $\frac{sin^2(\delta)-cos^2(\delta)}{sin(90°+\delta)+cos(90°-\delta)}$ $[sin(\delta) - cos(\delta))]$
19. $\frac{sin(\gamma)\cdot csc(180°+\gamma)}{cos(180°-\gamma)\cdot csc(90°-\gamma)}$ [1] $[tan(\alpha) - tan(90° + \alpha)] \cdot [cot(90° - \alpha) + cot(270° + \alpha)]$ [0]
20. $\frac{sin^2(\alpha+\beta)+cos^2(\alpha+\beta)}{tan(\alpha-\beta)\cdot cot(\alpha-\beta)}$ [1] $[sin(180° + \alpha) + cos(270° + \alpha)]^2$ [0]
21. $[cos(-\beta) - sin(360° - \alpha)] \cdot [cos^2(\beta) + cos(\beta) \cdot sin(180° + \beta) + cos^2(270° - \beta)]$
$[(sin(\beta) + cos(\beta)) \cdot (1 - sin(\beta)cos(\beta))]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo semplificare la seguente espressione: $\frac{sin(2565°)-cos(3990°)}{csc(2940°)}$.

Possiamo scrivere: $\frac{sin(7\cdot 360°+45°)-cos(11\cdot 360°+30°)}{csc(8\cdot 360+60°)}$. Quindi, tenendo conto della periodicità abbiamo: $\frac{sin(45°)-cos(30°)}{csc(60°)}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{2}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}-3}{4}$.

Calcolare il valore numerico delle seguenti espressioni:

Livello 1

22. $sin(1845°) – cos(2940°) + tan(5370°)$ $\left[\frac{3\cdot\sqrt{2}-3-2\cdot\sqrt{3}}{6}\right]$ $\frac{[sin(675°)-cos(120°)]^2}{cot(150°)}$ $\left[\frac{2\cdot\sqrt{6}-3\cdot\sqrt{3}}{12}\right]$

23. $tan(750°)\cdot\frac{cot(675°)-sec(120°)}{csc(150°)}$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{6}\right]$ $5\cdot\frac{sin(1485°)-cos(2190°)}{sin^2(2580°)-cos^2(1200°)}\cdot sin(3120°)$ $\left[\frac{15-5\cdot\sqrt{6}}{2}\right]$

24. $\frac{tan(1830°)-2sin(1560°)}{cos^2(1320°)-sec^2(2205°)}\cdot cot(1935°)$ $\left[-\frac{8\cdot\sqrt{3}}{21}\right]$ $sin(750°)\cdot\frac{cos(675°)-sin(120°)}{cot(1500°)}$ $\left[\frac{\sqrt{6}-3}{4}\right]$

25. $\frac{cos(1200°)-4\cdot sec(1845°)}{tan^2(3735°)-cot^2(2130°)}\cdot sec(960°)$ $\left[-\frac{8\cdot\sqrt{2}+1}{2}\right]$ $[sin(1680°) + cos(1395°)]^3$ $\left[\frac{11\cdot\sqrt{2}-9\cdot\sqrt{3}}{8}\right]$

26. $sec(7500°)\cdot\frac{sec(675°)-cos(120°)}{cot(150°)}$ $\left[-\frac{\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{6}}{3}\right]$ $\frac{3\cdot tan(3390°)-cot(2475°)}{sec^2(1170°)+7\cdot csc^2(600°)}\cdot cos(2310°)$ $\left[\frac{9-3\cdot\sqrt{3}}{64}\right]$

27. $\frac{sin(2370°)+4\cdot cot(1125°)}{sin^5(1170°)-5\cdot tan^8(1935°)}\cdot sec(960°)-csc(3270°)$ [– ¼]

28. $3\cdot sin(750°)+\frac{cos(675°)-tan(120°)}{4\cdot csc(150°)}$ $\left[\frac{2\cdot\sqrt{3}+\sqrt{2}+24}{16}\right]$

Semplificare le seguenti espressioni:

Livello 2

29. $sin(900° + \alpha) – cos(1800° – \alpha)$ $[– sin(\alpha) – cos(\alpha)]$ $\frac{sin^2(7200°+\delta)-cos^2(2880°-\delta)}{sin(2160°+\delta)+cos(1530°-\delta)}$ $\left[\frac{2\cdot sin^2\delta-1}{2\cdot sin\ \delta}\right]$

30. $cos(720° + \alpha) – sin(360° + \alpha) + sec(1080° – \alpha)$ $\left[\frac{1+sin(\alpha)\cdot cos(\alpha)+cos^2(\alpha)}{cos(\alpha)}\right]$

31. $\frac{sin(720°-\beta)}{csc(450°+\beta)+sec(810°-\beta)}$ $\left[-\frac{sin^2(\beta)\cdot cos(\beta)}{sin(\beta)+cos(\beta)}\right]$ $\frac{sin(360°+\gamma°)\cdot csc(1800°+\gamma)}{cos(450°-\gamma)\cdot csc(\gamma)}$ [1]

32. $[tan(720° + \alpha) – tan(630° + \alpha)] \cdot [cot(90° – \alpha) + cot(1890° + \alpha)]$ [0]

33. $[sin(1800° + \alpha) + cos(1890° – \alpha)]^2$ $[4sin^2(\alpha)]$

Livello 3

Semplificare

34. $sin(7°) – cos(83°) + sin(353°) + sin(173°)$ [0]

35. $sin(23°) + cos(51°) + sin(219°) + cos(119°)$ [0]

36. $cos(1°) + cos(2°) + cos(3°) +…+ cos(358°) + cos(359°)$ Sugg: $cos(x) = – cos(180° + x)$ [–1]

37. $cos(1°) + cos(2°) + cos(3°) +…+ cos(178°) + cos(179°)$ [0]

38. $sin(1°) + sin(2°) + \ \ + sin(30°) + sin(331°) + sin(332°) + ... + sin(360°)$ [½]

39. $tan(1°) + tan(2°) + … + tan(60°) + tan(121°) +…+ tan(178°) + tan(179°)$ $\left[\sqrt{3}\right]$

40. $cot(1°) + cot(2°) + … + cot(178°) + cot(179°)$ [0]

Lavoriamo insieme

Sapendo che *sin*(α) = 3/5, 180° < α < 270° vogliamo determinare il valore delle altre cinque funzioni goniometriche elementari dello stesso angolo.
La prima cosa da osservare è la coerenza dei dati. Infatti nel terzo quadrante il seno di un angolo è un numero negativo, pertanto non è possibile ciò che viene richiesto.
Riformuliamo il quesito, con *sin*(α) = –3/5, 180° < α < 270°. Possiamo trovare subito la cosecante: $csc(\alpha) = \frac{1}{sin(\alpha)} = -\frac{5}{3}$. Per determinare il coseno possiamo usare il teorema di Pitagora, tenendo conto che anche il coseno di un angolo del terzo quadrante è un numero negativo. Pertanto abbiamo: $cos(\alpha) = -\sqrt{1-sin^2(\alpha)} = -\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2} = -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$.

Troviamo immediatamente la secante: $sec(\alpha) = \frac{1}{cos(\alpha)} = -\frac{5}{4}$. Infine la tangente e la cotangente.

$$tan(\alpha) = \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}; cot(\alpha) = \frac{1}{tan(\alpha)} = \frac{4}{3}$$

A partire dal valore della data funzione goniometrica, determinare i valori delle altre cinque funzioni goniometriche elementari. Quindi verifica i risultati usando la calcolatrice scientifica, ossia calcolare l'angolo ed applicare le varie funzioni

***Livello* 1**

41. *sin*(α) = –3/8, 270° < α < 360°
$$\left[cos(\alpha) = \frac{\sqrt{55}}{8}, sec(\alpha) = \frac{8\cdot\sqrt{55}}{55}, csc(\alpha) = -\frac{8}{3}, tan(\alpha) = -\frac{3\cdot\sqrt{55}}{55}, cot(\alpha) = -\frac{\sqrt{55}}{3}\right]$$
42. *cos*(β) = –5/6, 90° < β < 180°
$$\left[sin(\beta) = \frac{\sqrt{11}}{6}, sec(\beta) = -\frac{6}{5}, csc(\beta) = \frac{6\cdot\sqrt{11}}{11}, tan(\beta) = -\frac{\sqrt{11}}{5}, cot(\beta) = -\frac{5\cdot\sqrt{11}}{11}\right]$$
43. *tan*(γ) = 3, 180° < γ < 270°
$$\left[sin(\gamma) = -\frac{3\cdot\sqrt{10}}{10}, cos(\gamma) = -\frac{\sqrt{10}}{10}, sec(\gamma) = -\sqrt{10}, csc(\gamma) = -\frac{\sqrt{10}}{3}, cot(\gamma) = \frac{1}{3}\right]$$
44. *cot*(δ) = – ¼, 270° < δ < 360°
$$\left[sin(\delta) = -\frac{4\cdot\sqrt{17}}{17}, cos(\delta) = \frac{\sqrt{17}}{17}, sec(\delta) = \sqrt{17}, csc(\delta) = -\frac{\sqrt{17}}{4}, tan(\delta) = -4\right]$$
45. *sec*(ε) = 2, 0° < ε < 90°
$$\left[sin(\varepsilon) = \frac{\sqrt{3}}{2}, cos(\varepsilon) = \frac{1}{2}, csc(\varepsilon) = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}, tan(\varepsilon) = \sqrt{3}, cot(\varepsilon) = \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$$
46. *csc*(ϕ) = –4, 180° < ϕ < 270°
$$\left[sin(\phi) = -\frac{1}{4}, cos(\phi) = -\frac{\sqrt{15}}{4}, sec(\phi) = -\frac{4\cdot\sqrt{15}}{15}, tan(\phi) = \frac{\sqrt{15}}{15}, cot(\phi) = \sqrt{15}\right]$$
47. *sin*(φ) = 0,12, 90° < φ < 180°
[*cos*(φ) ≈ –0,99; *sec*(φ) ≈ –1,01; *csc*(φ) ≈ 8,33; *tan*(φ) ≈ –0,12; *cot*(φ) ≈ –8,27]
48. *cos*(η) = 0,31, 270° < η < 360°
[*sin*(η) ≈ –0,95; *sec*(η) ≈ 3,23; *csc*(η) ≈ –1,05; *tan*(η) ≈ –3,07; *cot*(η) ≈ –0,33]
49. *tan*(κ) = –4,13, 270° < κ < 360°
[*sin*(κ) ≈ –0,97; *cos*(η) ≈ 0,24; *sec*(κ) ≈ 4,25; *csc*(κ) ≈ 1,03; *cot*(κ) ≈ –0,24]
50. *cot*(λ) = 2,13, 180° < λ < 270°

[$sin(\lambda) \approx -0,43$; $cos(\lambda) \approx -0,91$; $sec(\lambda) \approx -1,10$; $csc(\lambda) \approx -2,35$; $tan(\lambda) \approx -0,47$]

51. $sec(\mu) = -1,75$, $90° < \mu < 180°$

[$sin(\mu) \approx -0,82$; $cos(\mu) \approx -0,57$; $csc(\mu) \approx 1,22$; $tan(\mu) \approx -1,44$; $cot(\mu) \approx -0,70$]

52. $csc(\nu) = 2,31$, $90° < \nu < 180°$

[$sin(\nu) \approx 0,43$; $cos(\nu) \approx -0,90$; $sec(\nu) \approx 1,11$; $tan(\nu) \approx -0,48$; $cot(\nu) \approx -2,08$]

Livello 2

53. Dimostrare le identità del Teorema 5.
54. Dimostrare le identità del Teorema 6.

Lavoriamo insieme

Vogliamo verificare se la seguente è un'identità: $[cos(\alpha) + sin(\alpha)] \cdot [tan(\alpha) + cot(\alpha)] = csc(\alpha) + sec(\alpha)$
Intanto studiamone l'insieme di esistenza. La tangente è definita per $\alpha \neq 90° + k \cdot 180°$, la cotangente per $\alpha \neq k \cdot 180°$; quindi unendo le due condizioni possiamo dire che l'insieme di esistenza dell'uguaglianza è $\alpha \neq k \cdot 90°$. Adesso trasformiamo tangente e cotangente in seno e coseno:

$$\left[cos(\alpha)+sin(\alpha)\right]\cdot\left[\frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)}+\frac{cos(\alpha)}{sin(\alpha)}\right]=csc(\alpha)+sec(\alpha)$$

Moltiplichiamo $sin(\alpha)+\frac{cos^2(\alpha)}{sin(\alpha)}+\frac{sin^2(\alpha)}{cos(\alpha)}+cos(\alpha)=csc(\alpha)+sec(\alpha)$. Effettuiamo il minimo comune denominatore nel membro sinistro fra i primi due addendi e poi fra gli altri due.

$$\frac{sin^2(\alpha)+cos^2(\alpha)}{sin(\alpha)}+\frac{sin^2(\alpha)+cos^2(\alpha)}{cos(\alpha)}=csc(\alpha)+sec(\alpha)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{sin(\alpha)}+\frac{1}{cos(\alpha)}=csc(\alpha)+sec(\alpha)\Rightarrow$$

Dato che il primo e il secondo membro hanno espressioni equivalenti possiamo dire che effettivamente abbiamo a che fare con un'identità.

Verificare l'eventuale validità delle seguenti identità, stabilendone l'insieme di esistenza

Livello 1

55. $\frac{sin(\alpha)}{1+cos(\alpha)}=\frac{1-cos(\alpha)}{sin(\alpha)}$ [$\alpha \neq k\cdot180°$; Sì] $cot^2(\alpha) \cdot sin^2(\alpha) = 1 - sin^2(\alpha)$ [$\alpha \neq 90°+ k\cdot180°$; Sì]

56. $\frac{1-cos^2(\alpha)}{cos^2(\alpha)}=2\cdot\left[csc^2(\alpha)-1\right]$ [$\alpha \neq k\cdot90°$; No] $[sin(x) + cos(x)]^2 = 1 + 2sin(x)cos(x)$ [$\mathbb{R}$; Sì]

57. $tan^2(\alpha) + cot^2(\alpha) = 1 - 2sin^2(\alpha) \cdot cos^2(\alpha)$ [$\alpha \neq k\cdot90°$;No]

58. $\frac{1-2\cdot cos^2(x)}{sin(x)-cos(x)}\cdot\frac{tan(x)\cdot cos(x)}{sin(x)}=sin(x)+cos(x)$ [$x \neq 45°+ k \cdot 180°$; $x \neq 90°+ k \cdot 180°$; Sì]

59. $\frac{10\cdot cos^2(x)-5}{sin(x)+cos(x)}\cdot\frac{sec(x)\cdot sin(x)}{3\cdot tan(x)}=\frac{5}{3}\cdot cos(x)-\frac{5}{3}\cdot sin(x)$ [$x \neq k\cdot90°$; $x \neq 135°+ k \cdot 180°$; Sì]

60. $\frac{3-6\cdot cos^2(x)}{sin(x)-cos(x)}\cdot\frac{cot(x)\cdot sec(x)}{cos(x)}=3\cdot sin(x)+3\cdot cos(x)$ [$x \neq k \cdot 90°$; $x \neq 45°+ k \cdot 180°$; No]

61. $\frac{1}{csc^2(\alpha)}+\frac{1}{sec^2(\alpha)}=1$ [$\alpha \neq k\cdot90°$; Sì] $\frac{csc^2(\alpha)-1}{csc^2(\alpha)}\cdot\frac{1+cot^2(\alpha)}{cot^2(\alpha)}=1$ [$\alpha \neq k\cdot90°$; No]

Livello 2

62. $[2 - cos^2(\beta)] \cdot [2 + tan^2(\beta)] = [1 + 2tan^2(\beta)] \cdot [2 - sin^2(\beta)]$ [$\beta \neq 90°+ k\cdot180°$; No]

63. $tan^2(\gamma) + cot^2(\gamma) = csc^2(\gamma) \cdot sec^2(\gamma) - 2$ [$\gamma \neq k\cdot90°$; Sì] $\frac{1}{1+cot^2(\alpha)}+\frac{1}{1+tan^2(\alpha)}=1$ [$\alpha \neq k\cdot90°$; Sì]

64. $\dfrac{tan^2(\alpha)}{1+tan^2(\alpha)}=\dfrac{sec^2(\alpha)-1}{sec^2(\alpha)}$ [$\alpha \neq k\cdot 90°$; Sì] $tan(\alpha) \cdot [1 + cot^2(\alpha)] \cdot [1 - sin^2(\alpha)] = 1$ [$\alpha \neq k\cdot 90°$; Sì]

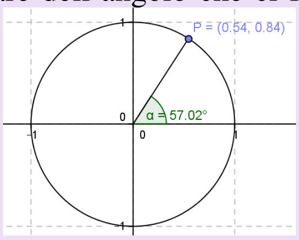
Livello 3

Determinare per quali angoli x, $0° \leq x \leq 360°$, si ha la validità delle seguenti uguaglianze:

65. $sin(x) = cos(x)$ [45°, 225°] $sin(x) = -cos(x)$ [135°, 315°]
66. $tan(x) = cot(x)$ [45°, 225°] $tan(x) = -cot(x)$ [135°, 315°]
67. $sin(x) = 2cos(x)$ [≈ 63°26′6″, ≈ 243°26′6″] $cos(x) = 2sin(x)$ [≈26°33′54″, ≈206°33′54″]
68. $tan(x) = 2cot(x)$ [≈ 54°44′8″, ≈ 125°15′52″, ≈ 206°33′54″, ≈ 305°15′52″]
69. $cot(x) = 2tan(x)$ [≈ 35°15′52″, ≈ 144°44′8″, ≈ 215°15′52″, ≈ 324°44′8″]

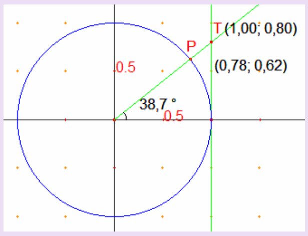
L'angolo di Geogebra e Cabri

In Geogebra Cabri possiamo rappresentare facilmente le funzioni goniometriche e il loro andamento, basta tracciare la circonferenza goniometrica, quindi scegliere un punto su di essa, tracciare l'angolo e considerare le coordinate del punto al variare dell'angolo che ci forniranno rispettivamente coseno e seno dell'angolo, come mostrato in figura.



Possiamo ovviamente anche vedere l'andamento delle altre funzioni goniometriche con apposite costruzioni.

Stessa procedura può essere effettuata anche con Cabri.

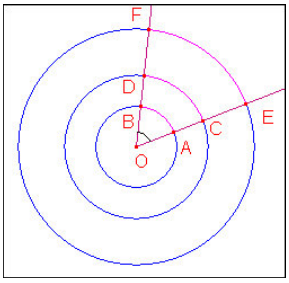


Unità di misura in radianti e rappresentazione grafica delle funzioni goniometriche elementari

Problema

Come possiamo rappresentare le funzioni goniometriche in un sistema di riferimento cartesiano?

Nel paragrafo precedente abbiamo generalizzato le funzioni goniometriche ad angoli qualsiasi, quindi possiamo scrivere in generale $sin(x)$ per un angolo x che rappresenta un qualsiasi numero reale, positivo, negativo o nullo. Questo ci suggerisce quindi di rappresentare tali funzioni.
Sorge però un problema, le ascisse e le ordinate non sono grandezze omogenee. Infatti se x è un angolo misurato in gradi sessagesimali, è la misura di un'area, mentre l'ordinata, cioè il seno è il rapporto fra due misure lineari.
Risulta quindi opportuno trovare una unità di misura per i gradi che risulti omogenea con le funzioni.
Per fare ciò possiamo tenere conto del fatto che, come si vede in figura, se consideriamo un angolo questo può essere pensato come un angolo al centro di infinite circonferenze. Quindi dato che uno stesso angolo è legato a infinite circonferenze vuol dire che ci deve essere una relazione fra gli angoli, i raggi e gli archi delle circonferenze.



Non è difficile capire che la ovvia relazione è che il rapporto tra la misura dell'arco e il raggio della relativa circonferenza è costante. Possiamo quindi porre la seguente definizione.

Definizione 8

Dato un angolo diciamo sua misura in **radianti** il rapporto tra l'arco che intercetta l'angolo considerato come angolo al centro di una data circonferenza e il raggio della stessa circonferenza.

Esempio 6

Visto quanto abbiamo detto, l'angolo giro in radianti sarà lungo quanto il rapporto dell'intera circonferenza con il suo raggio, cioè $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$. Ovviamente l'angolo piatto misurerà metà, cioè π, quello retto π/2 e così via.

In generale vale la seguente proporzione fra la misura di un angolo in gradi sessagesimali, α°, e la relativa misura in gradi radianti, ρ: 180° : π = α° : ρ.

Esempio 7

Vogliamo convertire in radianti la misura 42° 13′ 48″. Portiamo prima tutto in gradi:

$$\left(42+\frac{13}{60}+\frac{48}{3600}\right)^{\circ} = 42,23°$$

Quindi $42,23°:180° = x:\pi \Rightarrow x = \frac{42,23°\cdot\pi}{180°} \approx 0,74$. Ovviamente una analoga proporzione fa passare da radianti a gradi sessagesimali. Così per esempio $x°:180° = \frac{3\pi}{8}:\pi \Rightarrow x = \frac{180°\cdot\frac{3\pi}{8}}{\pi} = \frac{540°}{8} = 67,5° = 67°30'$.

La misurazione in radianti risolve il problema sollevato, poiché abbiamo a che fare con un numero puro, pertanto possiamo rappresentare graficamente le diverse funzioni goniometriche.
Prima però richiamiamo alcuni concetti relativi alle funzioni.

Definizione 9

Data una funzione $y = f(x)$, diciamo suo **dominio** o **insieme di esistenza**, la totalità dei valori di x per i quali esiste $f(x)$. Diciamo suo **codominio** la totalità dei valori y per i quali l'equazione $y = f(x)$ ammette almeno una soluzione nell'incognita x.

Definizione 10

Data una funzione $y = f(x)$, diciamo che essa è **periodica** di periodo il numero reale P diverso da zero, se si ha: $f(x + P) = f(x), \forall x \in dom(f)$.

Esempio 8

Data la funzione $y = \frac{1}{x-1}$, il suo dominio è dato da tutti i numeri reali escluso 1, poiché la scritta $\frac{1}{0}$ non ha

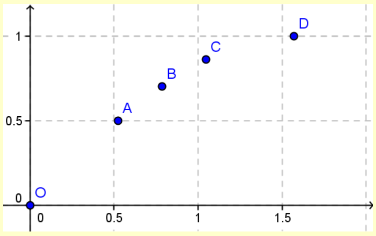
alcun significato. Invece il suo codominio è dato da tutti i numeri reali escluso lo zero, poiché l'equazione $y = \frac{1}{x-1}$ ha come soluzione $x - 1 = \frac{1}{y} \Rightarrow x = 1 + \frac{1}{y}$, che è un numero reale per tutti gli y tranne che per $y = 0$.
La funzione non è periodica per nessun numero reale P, perché l'equazione $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x+P-1} \Rightarrow x - 1 = x + P - 1 \Rightarrow 0 = P$ ha soluzione solo per $P = 0$.

Adesso possiamo passare alla rappresentazione grafica del seno.

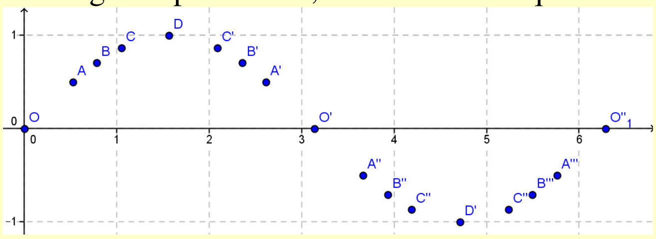
Esempio 9

Consideriamo alcuni valori noti del seno e rappresentiamoli in un sistema di riferimento.

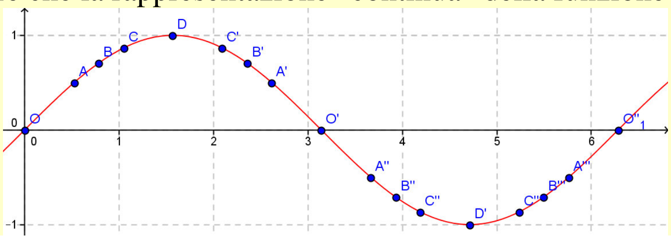
x	0	$30° = \pi/6$	$45° = \pi/4$	$60° = \pi/3$	$90° = \pi/2$
$sin(x)$	0	½	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



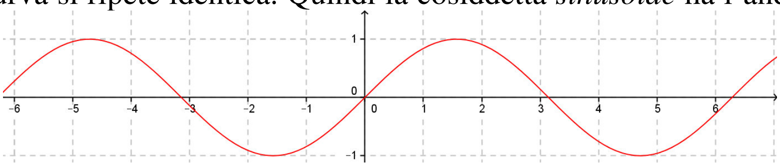
Tenuto conto che la funzione seno assume gli stessi anche per gi angoli supplementari e valori opposti per angoli che differiscono di 180° o angoli esplementari, abbiamo anche questa altra rappresentazione.



E quindi non è difficile capire che la rappresentazione "continua" della funzione seno è la seguente.

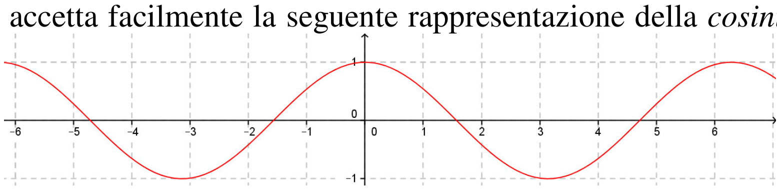


Se poi teniamo conto della periodicità e della definizione del seno per angoli qualsiasi, possiamo dire che ogni 2π, la precedente curva si ripete identica. Quindi la cosiddetta *sinusoide* ha l'andamento mostrato in fi-



gura.

Così possiamo dire che è una funzione periodica, di periodo proprio 2π; è anche una funzione limitata, dato che assume valori compresi nell'intervallo $[-1; 1]$.
Vista la stretta relazione fra seno e coseno, si accetta facilmente la seguente rappresentazione della *cosinu-*

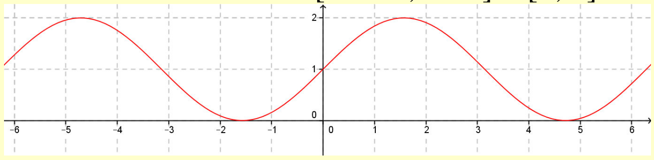


soide, come traslazione di $\pi/2$ della sinusoide.

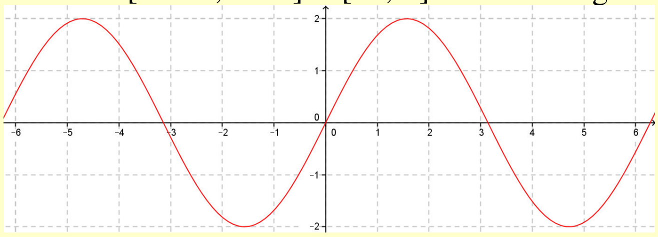
Esempio 10

- Vogliamo disegnare il grafico della funzione $y = 1 + sin(x)$, determinandone periodo e codominio. Non è difficile capire che il periodo della funzione non cambia, poiché ci stiamo limitando ad a aggiungere 1 a ogni ordinata, quindi in questo modo cambia solo il codominio che adesso è $[-1 + 1; 1 + 1] = [0; 2]$

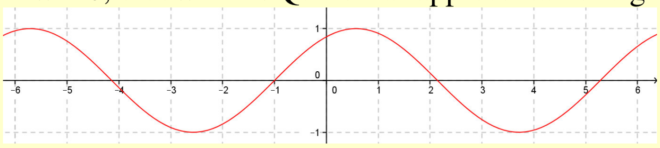
  Il grafico della funzione è perciò il seguente:



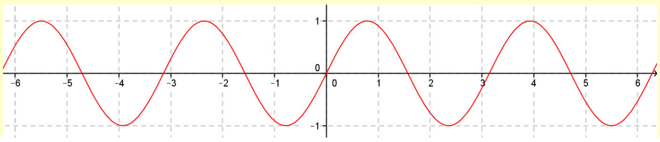
- Adesso vogliamo disegnare il grafico della funzione $y = 2sin(x)$, determinandone periodo e codominio. Ancora una volta il periodo non cambia, ma cambia il codominio, dato che stavolta ci limitiamo a moltiplicare per 2 ogni ordinata, quindi il codominio diventa $[-1 \cdot 2; 1 \cdot 2] = [-2; 2]$. Pertanto il grafico della funzione è il seguente:



- Ora vogliamo rappresentare la funzione $y = sin(1 + x)$. Ancora una volta il periodo non cambia e neanche il codominio, ci limitiamo solo a traslare orizzontalmente la funzione, dato che per esempio, per ottenere l'ordinata 0, deve essere $1 + x = 0$, cioè $x = -1$. Quindi la rappresentazione grafica è la seguente:



- Infine vogliamo rappresentare la funzione $y = sin(2x)$. Stavolta il periodo cambia, perché per esempio il massimo della funzione si avrà quando $2x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$, e il minimo quando $2x = \frac{3 \cdot \pi}{2} \Rightarrow x = \frac{3 \cdot \pi}{4}$. Perciò la funzione "conclude" il suo primo "giro" quando $2x = 2\pi \Rightarrow x = \pi$. Pertanto i periodo è metà di quello della funzione $sin(x)$, mentre non varia il codominio. La rappresentazione grafica è perciò:



Tenuto conto del precedente esempio possiamo enunciare il seguente risultato.

Teorema 7

Le funzioni $y = A + B \cdot sin(Cx + D)$, $y = A + B \cdot cos(Cx + D)$
- hanno periodo $2\pi/C$;
- hanno codominio $[A - |B|; A + |B|]$;
- incontrano l'asse delle ordinate nel punto $(0; A + B\ sin(D))$, rispettivamente $(0; A + B\ cos(D))$.

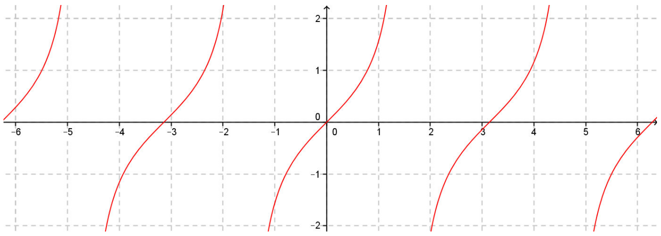
Dimostrazione

Lavoreremo sul seno, lasciando le dimostrazioni sul coseno per esercizio.
- Proviamo che la funzione è periodica del periodo detto. Abbiamo:

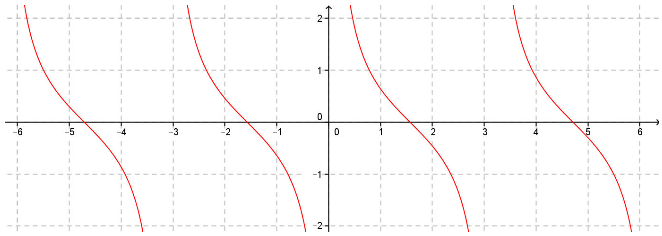
$$A + B \cdot sin(C \cdot (x + 2\pi/C) + D) = A + B \cdot sin(Cx + 2\pi + D)$$

Abbiamo visto che aggiungere 2π all'argomento del seno non fa cambiare il risultato, quindi possiamo scrivere: $A + B \cdot sin(Cx + 2\pi + D) = A + B \cdot sin(Cx + D)$, che è quanto volevamo provare.
- Il minimo di $sin(x)$ si ha per $x = 3\pi/2$ e vale -1. Quindi il minimo di $y = A + B \cdot sin(Cx + D)$ si ha quando $Cx + D = 3\pi/2 \Rightarrow x = 3\pi/(2C) - D/C$. In questo caso si ha: $y = A - B$. Allo stesso modo il massimo si ha quando $Cx + D = \pi/2 \Rightarrow x = \pi/(2C) - D/C$. e si ha: $y = A + B$. Non è detto che sia $A + B > A - B$, infatti per esempio se $A = -2$ e $B = +3$, $A + B = 1 > A - B = -5$; ma se $A = +2$ e $B = -3$, $A + B = -1 < A - B = 5$. Invece è sicuramente vero che si ha sempre $A + |B| > A - |B|$.
- La dimostrazione è banale, basta sostituire 0 a x.

Passiamo a rappresentare le altre funzioni goniometriche.
Per la tangentoide e la cotangentoide il periodo è π e il loro dominio non è dato da tutti i numeri reali, dato che sappiamo che non hanno senso le scritte $tan(\pi/2 + k\pi)$, $cot(k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. I grafici sono simili ai seguenti.



$tan(x)$



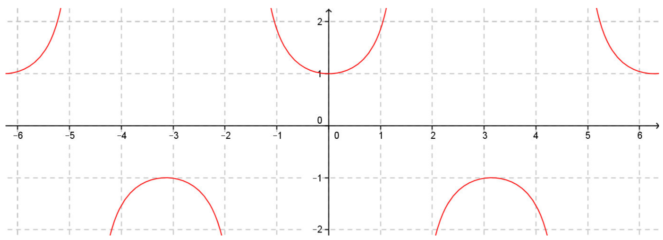
$cot(x)$

Vale il seguente risultato.

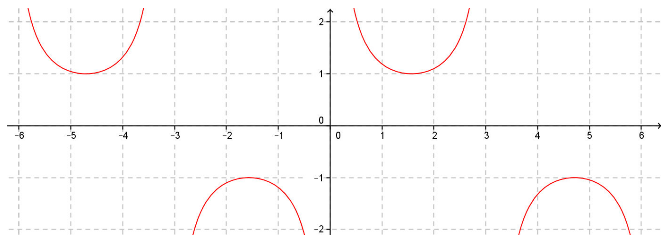
Teorema 8

Le funzioni funzioni $y = A + B \cdot tan(Cx + D)$, $y = A + B \cdot cot(Cx + D)$
- hanno periodo π/C;
- hanno $\mathbb{R}$ come codominio.

Anche secante e cosecante non sono sempre definite. I loro grafici sono i seguenti.



$sec(x)$



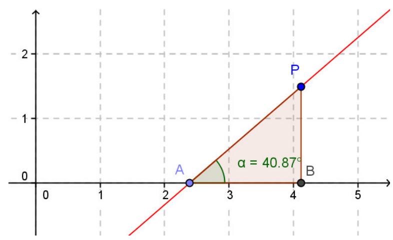
$csc(x)$

Anche in questo caso abbiamo un teorema.

Teorema 9

Le funzioni $y = A + B \cdot sec(Cx + D)$, $y = A + B \cdot csc(Cx + D)$
- hanno periodo $2\pi/C$;
- hanno codominio $(-\infty; A - |B|] \cup [A + |B|; +\infty)$.

Concludiamo con un'interpretazione trigonometrica del coefficiente angolare di una retta.

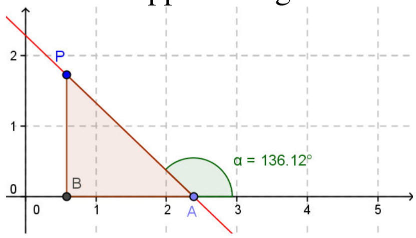


Sappiamo che il coefficiente angolare della retta in figura è dato dal rapporto fra l'ordinata del generico punto P e la sua stessa ascissa. Tale rapporto è però anche la tangente trigonometrica dell'angolo indicato. Pertanto possiamo dire:

Teorema 10

Il coefficiente angolare di una retta in una sistema di riferimento cartesiano ortogonale è la tangente trigonometrica dell'angolo che la stessa retta forma con il semiasse positivo delle ascisse.

Il precedente risultato è un'ulteriore giustificazione del fatto che la tangente di un angolo ottuso è negativa, dato che in questo caso la pendenza della retta è appunto negativa.



Così come giustificano il fatto che la tangente non è definita a 90°, essendo in questo caso la pendenza infinita.
Concludiamo il paragrafo studiando le funzioni goniometriche inverse.
Come facciamo a passare da $y = sin(x)$ a $y = sin^{-1}(x)$? Le funzioni sono fra loro inverse, come lo sono per esempio le funzioni $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, nel senso che se la funzione quadrato permette di determinare appunto il quadrato di un numero, la radice quadrata permette di effettuare l'operazione inversa, ossia trovare il numero il cui quadrato è un certo numero.
Cominciamo ad osservare che l'operazione inversa non è sempre possibile, dato che, per esempio non esiste, nei numeri reali, $\sqrt{-4}$. Dal punto di vista della geometria analitica determinare la funzione inversa di $y = f(x)$ equivale a determinare una funzione che trovi le ascisse a partire dalle ordinate. Questo lavoro è possibile solo se per ogni ordinata c'è al massimo una sola ascissa. Poniamo allora la seguente definizione.

Definizione 11

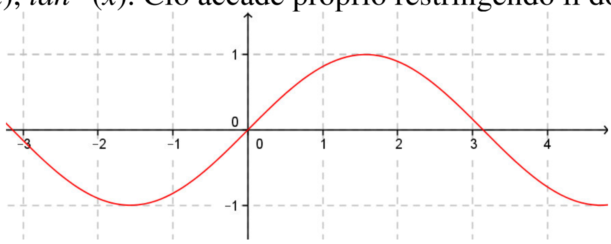
Una funzione $y = f(x)$ si dice **iniettiva** o **invertibile** se l'equazione nell'incognita x: $y = f(x)$ ammette al massimo una sola soluzione reale per ogni y del codominio di f. In simboli: $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$.

Quindi una funzione iniettiva ad ascisse diverse associa sempre ordinate diverse, quindi è invertibile, dato che a partire da una ordinata possiamo risalire univocamente all'ascissa.

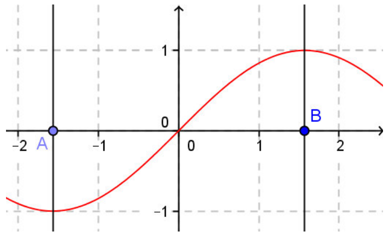
Esempio 11

- La funzione che associa a ogni macchina la propria targa è invertibile perché non esistono due macchine che hanno la stessa targa, quindi possiamo ricavare, a partire dalla targa la macchina e quindi anche i suoi proprietari.
- Non è iniettiva invece la funzione che a ogni macchina associa la propria marca, dato che ovviamente per ogni marca ci sono migliaia di auto.
- Non è iniettiva neanche la funzione $y = x^2$, perché si ha, per esempio $3^2 = (-3)^2 = 9$, quindi non possiamo risalire dall'ordinata 9 all'ascissa da cui essa proviene. Per poterla rendere iniettiva e quindi invertibile dobbiamo restringere il suo dominio ai soli numeri positivi. In questo modo dal 9 posso risalire al 3, cioè $\sqrt{9} = 3$.

L'esempio precedente ci ha fatto vedere quindi che possiamo rendere iniettive anche funzioni che in generale non lo sono. Ciò vale in generale per tutte le funzioni periodiche, che ovviamente non possono essere invertite proprio perché ci sono infinite ascisse, tutte differenti fra loro per un multiplo del periodo, che hanno la stessa ordinata. Quindi in particolare nessuna funzione goniometrica è invertibile, ciononostante le calcolatrici, hanno i tasti $sin^{-1}(x)$, $cos^{-1}(x)$, $tan^{-1}(x)$. Ciò accade proprio restringendo il dominio delle funzioni.



Vediamo il grafico.
Osserviamo che ci sono infiniti intervalli in cui la funzione seno è iniettiva, per esempio $[-\pi/2; \pi/2]$.

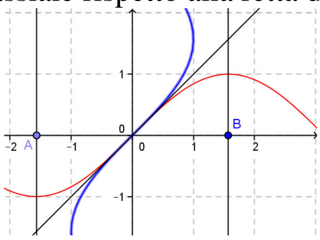


Quindi possiamo dire che la funzione $sin(x)$: $[-\pi/2; \pi/2] \rightarrow [-1; 1]$ è invertibile e la sua funzione inversa è $sin^{-1}(x) : [-1; 1] \rightarrow [-\pi/2; \pi/2]$. In effetti il risultato precedente è generale.

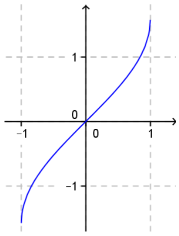
Teorema 11

Data una funzione invertibile $f : A \rightarrow B$, la sua inversa è $f^{-1} : B \rightarrow A$. Cioè dominio e codominio di una funzione e della propria inversa si scambiano.

Come possiamo costruire graficamente la precedente funzione? Dato che dobbiamo scambiare l'ascissa con l'ordinata basta effettuare una simmetria assiale rispetto alla retta di equazione $y = x$.

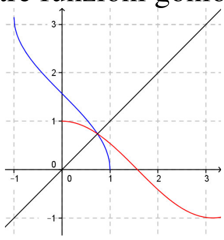


Però l'inversa scambia dominio e codominio, pertanto l'inversa è $sin^{-1}(x) : [-1; 1] \rightarrow [-\pi/2; \pi/2]$, quindi

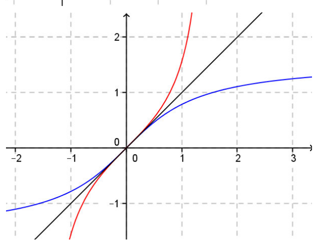


graficamente abbiamo la figura seguente:

In modo analogo determiniamo le inverse delle altre funzioni goniometriche, sempre indicate in blu:



$cos^{-1}(x) : [-1; 1] \rightarrow [0; \pi]$



$tan^{-1}(x) : (-\infty; +\infty) \rightarrow (-\pi/2; \pi/2)$

Verifiche

Lavoriamo insieme

A quanti gradi radianti equivalgono 105°? Vale la seguente proporzione: 180°:π = 105°:*x*. Quindi risolvendo rispetto a *x* abbiamo: $x = \frac{\pi \times 105°}{180°} = \frac{7}{12}\pi$

Convertire in radianti le seguenti misure in gradi sessagesimali

Livello 1

1. 40° [2π/9] 36° [π/5] 72° [2π/5] 45°30′ [91π/360] 90°45′ [121π/40] 120°20′ [361π/540]
2. 220°40′30″ [8827π/7200] 300°48″ [22501π/13500] 170°25′ [409π/432] 30°25′50″ [≈ 0,53]
3. –18°42′30″ [≈ –0,33] 23°48′10″ [≈ 0,42] 45°30′15″ [≈ 0,79] 56°12′32″ [≈ 0,98] –52°46′12″ [≈ –0,92]

Lavoriamo insieme

- A quanti gradi sessagesimali equivalgono 3π/5 radianti? Basta sostituire 180° a π: $\frac{3}{\cancel{5}} \cdot \cancel{180}^{36}° = 108°$.
- Invece 3π/7 radianti? Analogo procedimento solo che stavolta otteniamo un valore non intero, quindi dobbiamo portare in gradi, primi e secondi. 3/7 · 180° ≈ 77,14° = 77°8′24″.

Convertire in gradi sessagesimali le seguenti misure in radianti

Livello 1

4. π/8 [22°30′] 2π/3 [120°] 5π/4 [225°] 11π/5 [396°] 12π/7 [≈ 308°34′17″] 15π/13 [≈ 207°41′32″]
5. 31π/4 [1395°] 50π/11 [≈ 818°10′55″] 130π/3 [7800°] 3,5 [≈ 200°32′7″] 1,8 [≈ 103°7′57″]
6. 2 [≈ 114°35′30″] 12,15 [≈ 696°8′37″] 31,71 [≈ 1816°50′57″] –4,13 [≈ – 236°37′54″]

Livello 2

Stabilire quali delle seguenti scritte sono vere.

7. $sin(2) > sin(1)$ [Vero] $sin(4) > sin(2)$ [Falso] $cos(2) > cos(1)$ [Falso] $cos(4) > cos(2)$ [Falso]
8. $tan(2) > tan(1)$ [Falso] $tan(4) > tan(2)$ [Falso] $cot(2) > cot(1)$ [Falso] $cot(4) > cot(2)$ [Falso]
9. $sec(2) > sec(1)$ [Falso] $sec(4) > sec(2)$ [Vero] $csc(2) > csc(1)$ [Falso] $csc(4) > csc(2)$ [Falso]

Livello 3

10. $sin(2x) \ge sin(x),\ 0 \le x \le \pi/2$ [Falso] $sin(2x) \ge sin(x),\ 0 \le x \le \pi/4$ [Vero]
11. $sin(2x) \le sin(x),\ \pi/2 \le x \le \pi$ [Vero] $sin(2x) \ge sin(x),\ \pi \le x \le 3\pi/2$ [Vero]
12. $cos(2x) \ge cos(x),\ 0 \le x \le \pi/2$ [Vero] $cos(2x) \ge cos(x),\ \pi \le x \le 3\pi/2$ [Falso]
13. $tan(2x) \ge tan(x),\ 0 \le x < \pi/2$ [Vero] $tan(2x) \ge tan(x),\ \pi/2 < x \le \pi$ [Vero]

Lavoriamo insieme

Vogliamo semplificare la seguente espressione:

$$\left(sin\ (\pi) + cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \cdot \left(tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - cot\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \left(0 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \sqrt{3}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

Calcolare il valore numerico delle seguenti espressioni:

Livello 1

14. $sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - cos(\pi) + tan(0) - cot\left(\frac{\pi}{2}\right)$ [2] $sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + tan\left(\frac{\pi}{3}\right) - cot\left(\frac{\pi}{3}\right) - cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ $\left[\frac{7\cdot\sqrt{3}-3}{6}\right]$
15. $\left[sec\left(\frac{\pi}{4}\right) - cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \cdot \left[sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + csc\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$ $\left[\frac{8\cdot\sqrt{6}-3\cdot\sqrt{3}-3\cdot\sqrt{2}+12}{12}\right]$
16. $\frac{cos^2(\pi) - tan^2(\pi)}{1 + sin^2(\pi/4)}$ [2/3] $\frac{sec^2(\pi/4) + csc^2(\pi/4)}{sec^2(\pi/6) + csc^2(\pi/3)}$ [3/2]

17. $\left[cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]\cdot\left[tan\left(\frac{14}{17}\pi\right)+sec\left(\frac{31}{38}\pi\right)\right]$ [0]

18. $sin^2\left(\frac{3}{7}\pi\right)+cos^2\left(\frac{3}{7}\pi\right)-1$ [0] $\frac{sec(\pi/3)-csc(\pi/4)}{sin(\pi/4)+cos(\pi/3)}+\frac{sec(\pi/3)+csc(\pi/4)}{sin(\pi/4)-cos(\pi/3)}$ $\left[12\cdot\sqrt{2}\right]$

19. $\frac{\frac{sin(\pi/2)+tan^2(\pi/6)}{1-cot^2(\pi/3)}}{\frac{sec(\pi)-sin^2(\pi/4)}{1+tan^2(\pi/3)}}$ [–16/3] $\frac{sin^2(\pi/4)-cos^2(\pi/4)}{tan^2(\pi/6)+cot^2(\pi/6)}$ [0]

Lavoriamo insieme

Vogliamo semplificare la seguente espressione:

$$\frac{cos(2/3\pi)-sin(4/3\pi)}{tan(5/3\pi)+cot(11/6\pi)}=\frac{cos(\pi-\pi/3)-sin(\pi+\pi/3)}{tan(2\pi-\pi/3)+cot(2\pi-\pi/6)}=$$

$$=\frac{-cos(\pi/3)+sin(\pi/3)}{-tan(\pi/3)-cot(\pi/6)}=\frac{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\sqrt{3}-\sqrt{3}}=\frac{1-\sqrt{3}}{4\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-3}{12}$$

Semplificare le seguenti espressioni:

Livello 1

20. $sin\left(\frac{5}{3}\pi\right)-cos\left(\frac{7}{6}\pi\right)+tan(2\pi)-sec\left(\frac{5}{4}\pi\right)$ $\left[\sqrt{2}\right]$ $\frac{sec\left(\frac{5}{3}\pi\right)\cdot cos\left(\frac{7}{6}\pi\right)}{csc\left(\frac{5}{7}\pi\right)\cdot sin\left(\frac{12}{7}\pi\right)}$ $\left[\sqrt{3}\right]$

21. $tan\left(\frac{5}{6}\pi\right)-cot\left(\frac{3}{4}\pi\right)+csc\left(\frac{11}{6}\pi\right)$ $\left[-\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right]$ $\frac{sin(3/4\pi)+cos(7/4\pi)}{sec(5/4\pi)-csc(\pi/4)}$ [–½]

22. $cot\left(\frac{5}{3}\pi\right)\cdot\frac{sin^2(5/8\pi)+cos^2(5/8\pi)}{cot^2(7/6\pi)-tan^2(7/6\pi)}$ $\left[-\frac{\sqrt{3}}{8}\right]$ $\left[sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)-cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)\cdot sec\left(\frac{4}{3}\pi\right)\right]^2$ [4]

23. $\left[\frac{sin(4/3\pi)+cos(5/3\pi)}{sin(2/3\pi)-cos(4/3\pi)}\right]^2$ $\left[7-4\cdot\sqrt{3}\right]$ $\frac{\frac{sec(3/4\pi)+csc(2/3\pi)}{sin(5/4\pi)-cos(4/3\pi)}}{1+tan^2(11/6\pi)}$ $\left[\frac{6-2\cdot\sqrt{6}-2\cdot\sqrt{3}+3\cdot\sqrt{2}}{2}\right]$

24. $\left[sin\left(\frac{7}{6}\pi\right)-cos\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right]\cdot\left[sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)+cos\left(\frac{7}{6}\pi\right)\right]$ $\left[\frac{\sqrt{3}-2}{2}\right]$

25.

26. $\frac{\left[sin(3/4\pi)-sin(4/3\pi)\right]^2}{cos(11/6\pi)+tan(5/4\pi)}$ $\left[\frac{4\cdot\sqrt{6}-5\cdot\sqrt{3}-6\cdot\sqrt{2}+10}{2}\right]$

Livello 2

27. $sin(\pi+\alpha)-tan(2\pi-\alpha)\cdot cot(\alpha)$ $[1-sin(\alpha)]$ $\frac{sin(\pi+\alpha)-sin(-\alpha)}{cos(\pi-\beta)+cos(2\pi-\beta)}$ [Priva di significato]

28. $cos(\pi+\beta)\cdot sec(\pi-\beta)+sin(2\pi-\beta)\cdot csc(-\beta)$ [2]

29.

30. $\frac{sin(\pi/2-\gamma)+cos(\pi/2+\gamma)}{tan(3/2\pi+\gamma)-cot(\pi/2-\gamma)}$ $[sin(\gamma)\cdot cos(\gamma)\cdot(sin(\gamma)-cos(\gamma))]$

31. $\dfrac{sin(\pi/2-\alpha)\cdot sin(\pi/2+\alpha)}{cos(\pi-\alpha)\cdot cos(\pi+\alpha)}$ [1] $[sin(180° + \alpha) + cos(270° + \alpha)]^2$ [0]

32. $\left[sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)+sin\left(\dfrac{3}{2}\pi+\alpha\right)-1\right]^2$ [1] $\dfrac{sec(\pi-\alpha)+csc(\pi+\alpha)}{sec(\pi/2-\alpha)-csc(\pi/2+\alpha)}$ $\left[\dfrac{sin(\alpha)+cos(\alpha)}{sin(\alpha)-cos(\alpha)}\right]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo semplificare la seguente espressione: $sin\left(\dfrac{13}{2}\pi\right)\cdot cos\left(\dfrac{15}{4}\pi\right)-tan\left(\dfrac{19}{3}\pi\right)\cdot cot\left(\dfrac{17}{6}\pi\right)$

Si ha:

$$sin\left(\frac{12+1}{2}\pi\right)\cdot cos\left(\frac{16-1}{4}\pi\right)-tan\left(\frac{18+1}{3}\pi\right)\cdot cot\left(\frac{18-1}{6}\pi\right)=$$

$$=sin\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)\cdot cos\left(4\pi-\frac{\pi}{4}\right)-tan\left(6\pi+\frac{\pi}{3}\right)\cdot cot\left(3\pi-\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$=sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)-tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot cot\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left[-cot\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]=$$

$$=1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{3}\cdot\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+3$$

Livello 2

33. $sin\left(3\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)+cos\left(4\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)-sec\left(11\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)$ $\left[\sqrt{2}\right]$ $cos\left(\dfrac{5}{2}\pi\right)\cdot sin\left(\dfrac{21}{4}\pi\right)\cdot tan\left(\dfrac{20}{3}\pi\right)$ [0]

34. $\dfrac{cos(17/3\pi)+sin(23/3\pi)}{sec(25/6\pi)-csc(23/6\pi)}$ $\left[\dfrac{3-2\cdot\sqrt{3}}{4}\right]$ $\dfrac{sin^2(5/2\pi)+cos^2(9\pi)}{sin(19/4\pi)-cos^2(17/4\pi)}$ $\left[4\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$

35. $tan\left(\dfrac{55}{4}\pi\right)-\dfrac{cot(29/4\pi)+1}{sec^2(35/6\pi)-1}$ [–7] $\dfrac{sin(5\pi)-cos(42\pi)+tan(31\pi)}{cot(29/2\pi)-sec(67\pi)+csc(73/2\pi)}$ [– ½]

36. $\left[sin\left(\dfrac{23}{6}\pi\right)+cos\left(-\dfrac{11}{3}\pi\right)\right]\cdot\left[sin\left(-\dfrac{33}{6}\pi\right)-cos\left(\dfrac{24}{3}\pi\right)\right]$ [0]

37. $\left[sin^2\left(\dfrac{15}{4}\pi\right)+cos^2\left(\dfrac{25}{6}\pi\right)-1\right]\cdot\left[tan^2\left(\dfrac{14}{3}\pi\right)+cot^2\left(\dfrac{16}{3}\pi\right)+1\right]$ [13/2]

38. $\left[\dfrac{sin(11/3\pi)+cos(11/2\pi)}{tan(11/4\pi)-1}\right]^2$ $\left[\dfrac{3}{16}\right]$ $1+\dfrac{sin(45/2\pi)}{cos(38/3\pi)}-\dfrac{tan(67/6\pi)}{cot(101/4\pi)}$ $\left[-\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}\right]$

39. $\dfrac{cot(55/3\pi)+sec(21/4\pi)}{tan(15\pi)-1}+\dfrac{cot(53/3\pi)-sec(20/4\pi)}{tan(16\pi)+1}$ $\left[\dfrac{3+6\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{3}}{6}\right]$

40. $sin\left(\dfrac{11\pi}{2}-\theta\right)+cos\left(\dfrac{23\pi}{2}+\theta\right)-tan(17\pi-\theta)$ $[tan(\alpha) – cos(\alpha) + sin(\alpha)]$

41. $tan(15\pi+\delta)\cdot cot\left(\dfrac{37}{2}\pi+\delta\right)-sec(15\pi+\delta)\cdot cos\left(\dfrac{21}{2}\pi-\delta\right)$ $[tan(\delta) – tan^2(\delta)]$

42. $\dfrac{sin(15/2\pi+\beta)-cos(37/2\pi-\beta)}{sin(41/2\pi-\beta)+cos(73/2\pi+\beta)}$ $\left[\dfrac{sin(\beta)+cos(\beta)}{sin(\beta)-cos(\beta)}\right]$

43. $sin\left(\dfrac{19}{2}\pi+\alpha\right)\cdot csc\left(\alpha-\dfrac{13}{2}\pi\right)-cos\left(\dfrac{27}{2}\pi-\alpha\right)\cdot sec(\alpha-47\pi)$ $[1 – tan(\alpha)]$

44. $\dfrac{sin^2(13\pi+\alpha)+cos^2(15\pi+\alpha)}{tan^2(16\pi-\alpha)\cdot cot(15/2\pi+\alpha)}$ $[– cot^3(\alpha)]$ $\dfrac{tan(51\pi-\gamma)+cot(67/2\pi+\gamma)}{tan(19\pi+\gamma)-cot(75/2\pi-\gamma)}$ [Priva di significato]

45. $\left[cot\left(\frac{43}{2}\pi+\beta\right)\cdot tan\left(87\pi-\beta\right)+1 \right]^2$ $[tan^4(\beta) + 2tan^2(\beta) + 1]$

Lavoriamo insieme

Ci sono numeri reali x per i quali $sin(x)$ ha lo stesso valore, indipendentemente dal fatto che x sia considerato un angolo in gradi sessagesimali o in radianti?

Poiché vale la proporzione: $\frac{x°}{180°}=\frac{x^r}{\pi}$, abbiamo che $x°=\frac{x^r\cdot 180°}{\pi}$, quindi $sin\left(x°\right)=sin\left(\frac{180\cdot x}{\pi}\right)$.

Ciò implica o che gli angoli rappresentino lo stesso angolo, eventualmente con una certa periodicità (per esempio $sin\left(35°\right)=sin\left(35°+360°\right)=sin\left(35°+2\cdot 360°\right)=...=sin\left(35°+k\cdot 360°\right)$) Quindi:

$$sin\left(x\right)=sin\left(\frac{180\cdot x}{\pi}\right)\Rightarrow x=\frac{180\cdot x}{\pi}+k360°$$

cioè: $x=\frac{360\pi k}{\pi-180}$. Ma anche i seni di angoli fra loro supplementari sono uguali (per esempio $sin\left(35°\right)=sin\left(180°-35°\right)=sin\left(145°\right)=sin\left(145°+k\cdot 360°\right)$). Pertanto

$$x=180°-\frac{180\cdot x}{\pi}+k360°\Rightarrow x=\frac{180\pi\cdot\left(2k+1\right)}{\pi+180}$$

Così per esempio $sin\left(\frac{360\pi}{\pi-180}\right)\approx-0,11137\vee sin\left(\frac{180\pi}{\pi+180}\right)\approx 0,0538$, indipendentemente dal fatto che l'argomento sia misurato in gradi sessagesimali o gradi radianti.

Livello 3

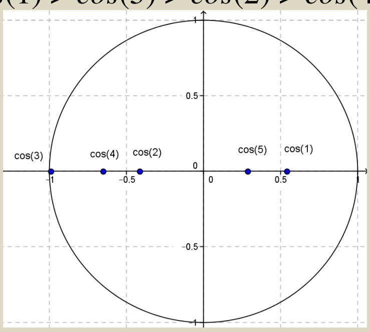
46. Ci sono numeri reali x per i quali $cos(x)$ ha lo stesso valore, indipendentemente dal fatto che x sia considerato un angolo in gradi sessagesimali o in radianti? $\left[x=\frac{360\pi k}{\pi-180}\vee x=\frac{360\pi k}{\pi+180}\right]$

47. Ci sono numeri reali x per i quali $tan(x)$ ha lo stesso valore, indipendentemente dal fatto che x sia considerato un angolo in gradi sessagesimali o in radianti? $\left[x=\frac{180\cdot\pi\cdot k}{\pi-180}\right]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo mettere in ordine crescente i seguenti numeri: $cos(1)$, $cos(2)$, $cos(3)$, $cos(4)$, $cos(5)$; l'unità di misura è in radianti. Intanto osserviamo che 1 radiante è un angolo del primo quadrante ($1 < \pi/2$), 2 e 3 stanno invece nel secondo quadrante ($\pi/2 < 2 < 3 < \pi$), 4 nel III quadrante ($\pi < 4 < 3/2\pi$) e 5 nel IV quadrante ($3\pi/2 < 5 < 2\pi$). Poiché sappiamo che la funzione $\cos(x)$ è decrescente in $[\pi/2; \pi]$ si ha: $cos(2) < cos(3)$. Inoltre $cos(2)$, $cos(3)$ e $cos(4)$ sono numeri negativi, quindi confrontiamo fra $cos(1)$ e $cos(5)$, chi è il maggiore. Ciò dipende dal confronto fra $\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$ e $\left(5-\frac{3\cdot\pi}{2}\right)$. Non è difficile capire che il primo numero è maggiore, pertanto $cos(1) > cos(5)$. Allo stesso modo, poiché 3 è più vicino a π di quanto 2 sia più vicino a $\pi/2$, e dato che parliamo di numeri negativi possiamo dire che l'ordine cercato è

$$cos(1) > cos(5) > cos(2) > cos(4) > cos(3)$$



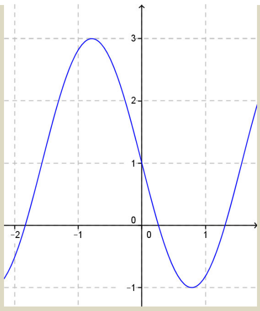
Ecco la figura esemplificativa

Livello 3

Mettere in ordine crescente i seguenti numeri, tenendo conto che l'unità di misura è in radianti

48. $sin(1), sin(2), sin(3), sin(4), sin(5)$ [$sin(2) > sin(1) > sin(3) > sin(4) > sin(5)$]
49. $sec(1), sec(2), sec(3), sec(4), sec(5)$ [$sec(5) > sec(1) > sec(3) > sec(4) > sec(2)$]
50. $csc(1), csc(2), csc(3), csc(4), csc(5)$ [$csc(3) > csc(1) > csc(2) > csc(5) > csc(4)$]
51. $tan(1), tan(2), tan(3), tan(4), tan(5)$ [$tan(1) > tan(4) > tan(3) > tan(2) > tan(5)$]
52. $cot(1), cot(2), cot(3), cot(4), cot(5)$ [$cot(4) > cot(1) > cot(5) > cot(2) > cot(3)$]
53. $sin(2), sin(6), sin(8), sin(10), sin(12)$ [$sin(8) > sin(6) > sin(2) > sin(12) > sin(10)$]
54. $cos(3), cos(7), cos(9), cos(10), cos(11)$ [$cos(7) > cos(11) > cos(10) > cos(9) > cos(3)$]
55. $sec(-4), sec(-2), sec(3), sec(6), sec(8)$ [$sec(6) > sec(3) > sec(-4) > sec(-2) > sec(8)$]
56. $csc(-4), csc(-2), csc(3), csc(8), csc(9)$ [$csc(3) > csc(9) > csc(-4) > csc(8) > csc(-2)$]
57. $tan(-1), tan(5), tan(7), tan(10), tan(11)$ [$tan(7) > tan(10) > tan(-1) > tan(5) > tan(11)$]
58. $cot(-4), cot(-2), cot(4), cot(8), cot(13)$ [$cot(13) > cot(4) > cot(-2) > cot(8) > cot(-4)$]

Lavoriamo insieme

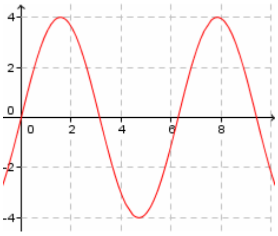
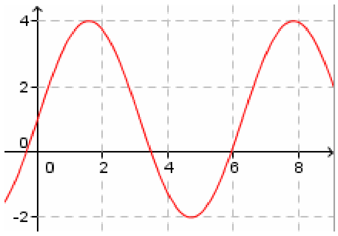


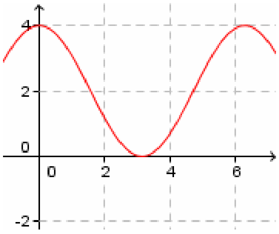
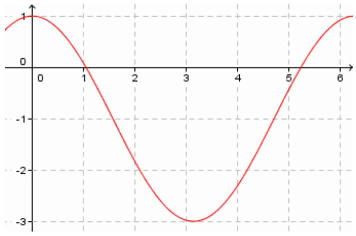
Quanto vale il codominio della funzione in figura?

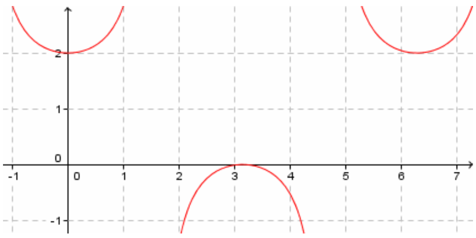
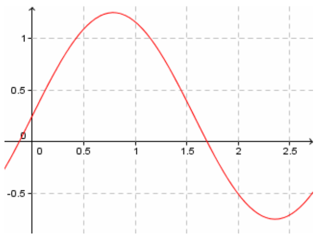
Abbastanza facilmente si vede che la funzione è compresa tra –1 e 3; quindi il codominio è [–1; 3].

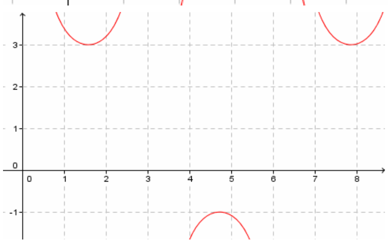
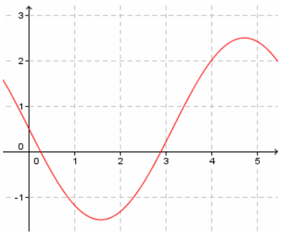
Determinare il codominio delle funzioni in figura

Livello 1

59.  [[–4; 4]]  [[–2; 4]]

60.  [[0; 4]]  [[–3; 1]]

61.  [(–∞; 0] ∪ [2; +∞)]  [[–¾; 5/4]]

62.  [(–∞; –1] ∪ [5; +∞)]  [[–3/2; 5/2]]

Lavoriamo insieme

Quanto vale il codominio della funzione $y = 1 + 3 \cdot sin(4x - 1)$?

Il massimo della funzione si ha quando è massimo il seno e perciò vale 1 + 3 = 4; il minimo quando è minimo il seno ed è perciò 1 – 3 = –2.

Determinare il codominio delle seguenti funzioni

Livello 2

63. $y = 1 - sin(x)$ [[0; 2]] $y = 3 - 2cos(2x)$ [[1; 5]] $y = 3/2 - sin(2x)$ [[½; 5/2]] $y = 1/4 - 1/2\, cos(x)$ [[–¼; ¾]]

64. $y = 2/3 + sin(x)$ [[1/3; 5/3]] $y = 1 + 2sec(x)$ [(–∞; –1] ∪ [3; +∞)] $y = 3 - 2\, sec(x)$ [(–∞; 1] ∪ [5; +∞)]

65. $y = 2 + \sqrt{2} sin(x+1)$ $\left[\left[2-\sqrt{2}; 2+\sqrt{2}\right]\right]$ $y = \sqrt{3} + 2 \cdot sin(x)$ $\left[\left[\sqrt{3}-2; \sqrt{3}+2\right]\right]$

66. $y = 2/3 - 3/4 csc(x)$ [(–∞; –9/12] ∪ [17/12; +∞)]

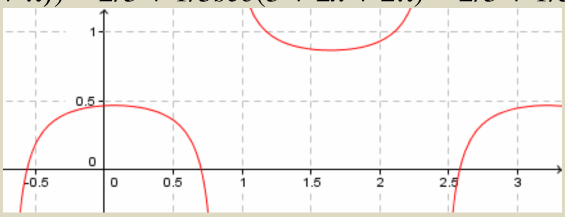
Lavoriamo insieme

Quanto vale il periodo della funzione $y = 2/3 + 1/5sec(3 + 2x)$?

Sul periodo incide solo il coefficiente dell'incognita x. Quindi il periodo è $2\pi/2 = \pi$. Infatti abbiamo

$$2/3 + 1/5sec(3 + 2(x + \pi)) = 2/3 + 1/5sec(3 + 2x + 2\pi) = 2/3 + 1/5sec(3 + 2x)$$

Confermiamo con il grafico.



Determinare il periodo delle seguenti funzioni

Livello 2

67. $y = sin(x + 2)$ [2π] $y = 3 - cos(3x)$ [2π/3] $y = 3sin(2x)$ [π] $y = 1 + 2cos(x)$ [2π] $y = tan(4x)$ [π/4]

68. $y = 1 + 2sec(3/4 x)$ [8π/3] $y = sec(-4/3x)$ [3/2π] $y = 5 + 2cot(1 - x/3)$ [6π]

69. $y = sin(2x + 1/2)$ [π] $y = 1/2 - 3/5cos(3/4 x - 1/2)$ [8π/3] $y = -1/2\, tan(\pi - 1/2 x)$ [2π]

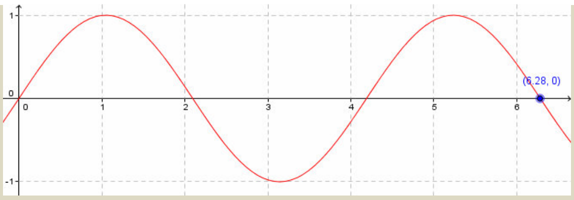
70. $y = -2 \cdot sec\left(3 - \sqrt{2} + \frac{1}{5}x\right)$ [10π] $y = \sqrt{5} + cot\left(x + \sqrt{3}\right)$ $\left[\sqrt{2}\pi\right]$ $y = 2 - sec\left(1 + \sqrt{2} \cdot x\right)$ $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\pi\right]$

Livello 3

71. $y = sin\left(\frac{k+1}{k-1} \cdot x\right)$ $\left[\frac{2 \cdot (k-1) \cdot \pi}{k+1}\right]$ $y = tan\left(\frac{k^2+1}{k^2-1} \cdot x\right)$ $\left[\frac{2 \cdot (k^2-1)}{k^2+1} \cdot \pi\right]$

72. $y = cos(\pi x)$ [2] $y = tan(\pi x)$ [1] $y = sec\left(\sqrt{\pi} \cdot x\right)$ $\left[2 \cdot \sqrt{\pi}\right]$

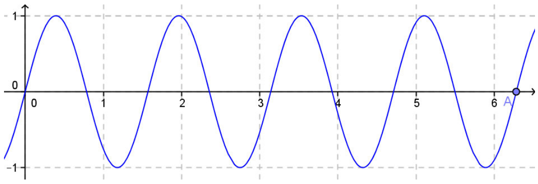
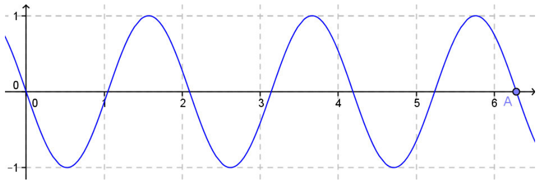
Lavoriamo insieme

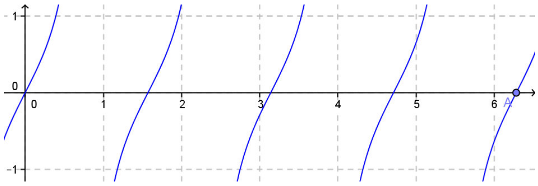
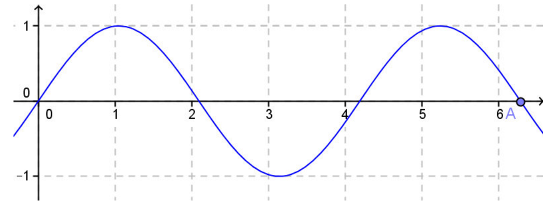


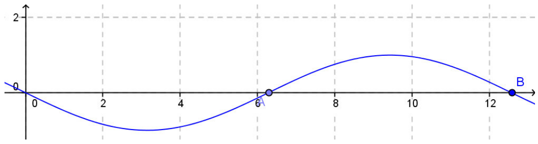
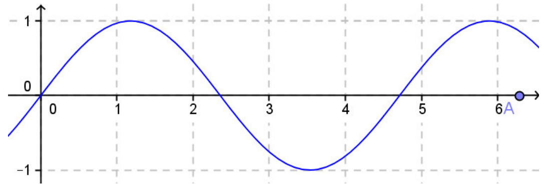
Quanto vale il periodo della funzione in figura? Quante volte si ripete la funzione in [0; 2π]? Una volta è mezzo, cioè 3/2, quindi il periodo è i 2/3 di 2π, cioè 4/3π.

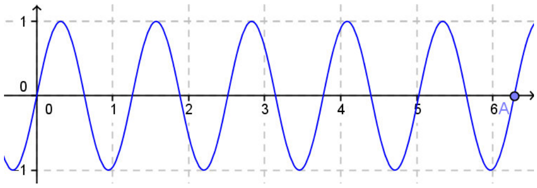
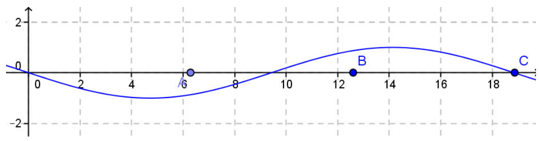
Tenuto conto del grafico determinare il periodo della funzione, che è sempre un multiplo intero di π, o di π/*n*, *n* ∈ ℕ. I punti mostrati hanno ascisse multiple di 2π.

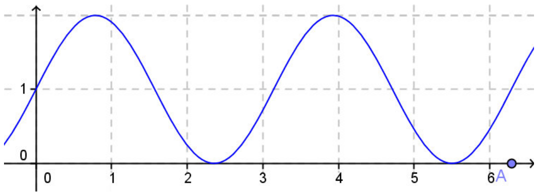
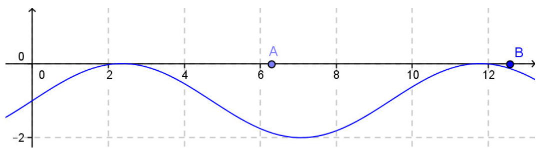
Livello 3

73.  [π/2]  [2π/3]

74.  [π/2]  [4π/3]

75.  [4π]  [3π/2]

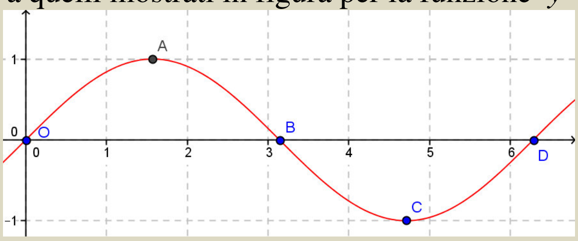
76.  [2π/5]  [6π]

77.  [π]  [3π]

Lavoriamo insieme

Vogliamo rappresentare la funzione $y = -7/2 + 2/5 sin(8/3x)$. Le sinusoidi sono determinate una volta che conosciamo i punti in cui si raggiunge il minimo e il massimo e quindi i punti che si trovano a metà fra di loro.

Ossia i punti che corrispondono a quelli mostrati in figura per la funzione $y = sin(x)$.



Cioè i punti di coordinate (0; 0), (π/2; 1),(π; 0),(3π/2; –1), (2π; 0).

Dobbiamo quindi determinare i corrispondenti di questi punti per la nostra funzione. Cominciamo a trovare le ascisse: $8/3x = 0 \Rightarrow x = 0$; $8/3x = \pi/2 \Rightarrow x = 3/16\pi$; $8/3x = \pi \Rightarrow x = 3/8\pi$; $8/3x = 3/2\pi \Rightarrow x = 9/16\pi$; $8/3x = 2\pi \Rightarrow x = 3/4\pi$

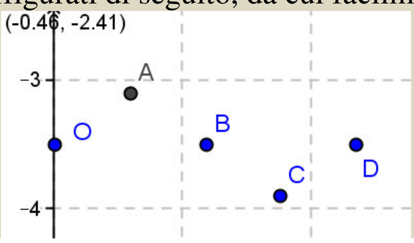
Le corrispondenti ordinate sono:

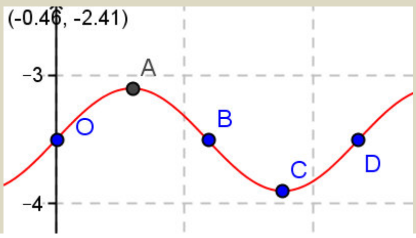
(0; –7/2), (3/16π; –31/10), (3/8π; –7/2), (9/16π; –39/10), (3/4π; –7/2)

Quindi i punti di coordinate approssimate:

(0; –3,5), (≈0,59; –3,1), (≈1,18; –3,5), (≈1,77; –3,9), (≈2,36; –3,5)

Cioè i punti raffigurati di seguito, da cui facilmente rappresentiamo la funzione





Disegnare qualitativamente i grafici delle seguenti funzioni.

Livello 2

78. $y = 1 + 2cos(2x)$ $y = -1 + sin(x/2)$ $y = -1 + 3cos(x)$ $y = 2sin(3x)$ $y = 2 - sin(x/3)$ $y = 1 - sin(4x)$
79. $y = 2 + cos(x/3)$ $y = -2 - 2sin(2x)$ $y = \frac{1}{2}cos(\frac{1}{2}x)$ $y = 1 + \frac{1}{2} sin(3x)$ $y = 3 + cos(2x)$ $y = 1 + sin(-x)$

Livello 3

80. $y = -3/2 + 4/5cos(6/7x)$ $y = 3 - 2sin(x + 1)$ $y = 4 - 2cos(x/3 + 1)$ $y = 6/7 - 2/3 cos(5/4x)$
81. $y = -3 + 2sin(3/2x - 1)$ $y = -4/3 + 6/11cos(4/9x + \frac{1}{2})$ $y = -2/3sin(3/4x)$
82. $y = -11/2 + 3/7cos(4/5x - \frac{1}{4})$ $y=\sqrt{2}+cos\left(\sqrt{2}x\right)$ $y=-1+\frac{1}{2}\cdot sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$

Lavoriamo insieme

Vogliamo scrivere una funzione del tipo $y = a + b\ sin(c\cdot x)$ di periodo 3π, e codominio $[-1; 3]$.
Se il periodo è 3π vuol dire che deve essere $2\pi/c = 3\pi \Rightarrow c = 2/3$.
Se il codominio è $[-1; 3]$ vuol dire che deve aversi $\begin{cases} a-b=-1 \\ a+b=3 \end{cases} \vee \begin{cases} a-b=3 \\ a+b=-1 \end{cases}$, cioè $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \vee \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$, quindi ci sono due funzioni del tipo richiesto, cioè $y = 1 + 2\ sin(2/3x)$ oppure $y = 1 - 2\ sin(2/3x)$. In effetti anche $y = 1 + 2\ sin(-2/3x)$ oppure $y = 1 - 2\ sin(-2/3x)$ verificano quanto richiesto.

Scrivere una funzione del tipo $y = a + b \cdot sin(c\cdot x)$, con $c > 0$, il cui periodo P e il codominio C siano quelli dati.

Livello 2

83. $P = 2\pi$; C = $[-1; 1]$ $[y = \pm sin(x)]$ $P = 3\pi$; C = $[-2; 2]$ $[y = \pm 2sin(2x/3)]$
84. $P = \pi$; C = $[-1; 3]$ $[y = 1 \pm 2sin(2x)]$ $P = 2\pi$; C = $[0; 4]$ $[y = 2 \pm 2sin(x)]$
85. $P = \pi/2$; C = $[1; 5]$ $[y = 3 \pm 2sin(4x)]$ $P = 2/3\pi$; C = $[-3; 2]$ $[y = -\frac{1}{2} \pm 5/2sin(3x)]$
86. $P = 4/3\pi$; C = $[-2; 5]$ $[y = 3/2 \pm 7/2sin(3x/2)]$ $P = 2/5\pi$; C = $[-\frac{1}{2}; 3/2]$ $[y = \frac{1}{2} \pm sin(5x)]$
87. $P = 7/6\pi$; C = $[-4;1]$ $[y = -3/2 \pm 5/2sin(12x/7)]$ $P = 11/2\pi$; C = $[-2/3; 1]$ $[y = 1/6 \pm 5/6sin(24x/11)]$

Livello 3

88. $P=\sqrt{2}\pi, C=\left[-\frac{2}{3};\frac{5}{4}\right]$ $\left[y=\frac{7}{24}\pm\frac{23}{24}sin\left(\sqrt{2}x\right)\right]$ $P=\pi+1, C=\left[-\frac{3}{2};\frac{5}{6}\right]$ $\left[y=-\frac{1}{3}\pm\frac{7}{6}sin\left(\frac{2\pi}{\pi+1}\cdot x\right)\right]$
89. $P=2, C=\left[0;\sqrt{2}\right]$ $\left[y=\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}sin\left(\pi\cdot x\right)\right]$ $P = 4$; C = $[\pi; 2\pi]$ $[y = 3/2\pi \pm \pi/2sin(\pi x/2)]$
90. $P=\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot\pi, C=\left[1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right]$ $\left[y=1\pm\sqrt{2}sin\left(2\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\pi\cdot x\right)\right]$
91. $P = p$; C = $[x_1; x_2]$ $\left[y=\frac{x_1+x_2}{2}\pm\frac{x_2-x_1}{2}sin\left(\frac{2\pi}{p}\cdot x\right)\right]$
92. Per quali d, $y = a + b\ sin(c\cdot x + d)$ e $y = a + b\cdot\ sin(c\cdot x)$ hanno lo stesso grafico? $[2k\pi, k\in\mathbb{Z}]$
93. Per quali d, $y = a + b\ tan(c\cdot x + d)$ e $y = a + b\ \cdot tan(c\cdot x)$ hanno lo stesso grafico? $[k\pi, k\in\mathbb{Z}]$

Lavoriamo insieme

Un certo fenomeno fisico segue una legge del seguente tipo $y(x) = A + B\ sin(C\cdot x + D)$, in cui A, B, C e D sono dei parametri reali. Se sappiamo che il periodo della funzione è di 452s, che il minimo, pari a 15, si è ottenuto dopo circa 38s, mentre il massimo valore è stato di 120. Vogliamo sapere
a) dopo quanti secondi si ottiene il massimo;
b) i valori dei parametri;
c) quanto vale il fenomeno all'inizio e quanto alla fine;
d) quanto vale dopo 312s;
e) quando ha un valore di 50.
Risolviamo.
a) Dato che il fenomeno è periodico il massimo si ottiene dopo mezzo periodo dal minimo, cioè dopo

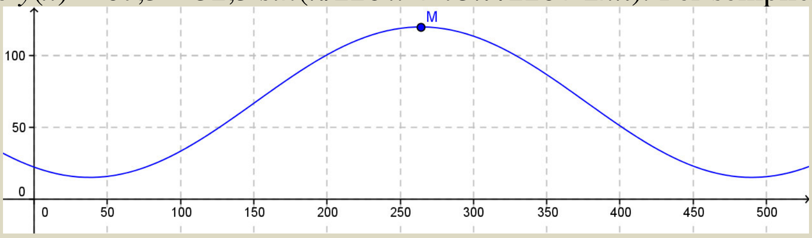
(38 + 452/2) *s* = 264*s*.

b) Noi sappiamo che il periodo di una funzione sinusoidale del tipo dato è 2π/*C*, quindi possiamo dire che si ha: *C* = 2π/452 = π/226. Inoltre poiché il minimo si ottiene prima del massimo, vuol dire che *B* < 0. e poiché il minimo si ha quando il seno vale –1, vuol dire che si ha: *A* + *B* = 15. Per lo stesso motivo, il massimo si ha quando il seno è 1, quindi avremo *A* – *B* = 120. Quindi $\begin{cases} A-B=120 \\ A+B=15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=67,5 \\ B=-52,5 \end{cases}$.

Per determinare *D* teniamo conto che il minimo si ha per *x* = 38, e poiché *B* < 0 si ha per

π/226 · 38 + *D* = π/2 + 2*k*π ⇒ *D* = 75π /226 + 2*k*π.

Perciò la legge che regola il fenomeno è *y*(*x*) = 67,5 – 52,5 *sin*(π/226·*x* + 75π /226+ 2*k*π). Per semplicità consideriamo *k* = 0. Vediamo il grafico



c) All'inizio e alla fine il fenomeno vale *y*(0) = *y*(452) = 67,5 – 52,5 *sin*(75π /226) ≈ 22,16.

d) Dopo 312 *s* vale *y*(312) = 67,5 – 52,5 *sin*(π/226 · 312 + 75π/226) ≈ 108,74.

e) Vale 50 quando si ha:

$$67,5-52,5\cdot sin\left(\frac{\pi}{226}\cdot x+\frac{75}{226}\pi\right)=50 \Rightarrow \frac{\pi}{226}\cdot x+\frac{75}{226}\pi = sin^{-1}\left(\frac{\cancel{17,5}^{1}}{\cancel{52,5}^{3}}\right) \Rightarrow x=\frac{sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{75}{226}\pi}{\frac{\pi}{226}}$$

Ovviamente $sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{75}{226}\pi<0$ se, come fa una calcolatrice consideriamo il minimo arco il cui seno è 1/3, poiché 75π/226≈1,04, per fare sì che l'espressione precedente sia positiva, dato che *sin*(π – α) = *sin*(α), dobbiamo prendere $\pi-sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\approx 2,80$. Quindi avremo: $x=\frac{\pi-sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{75}{226}\pi}{\frac{\pi}{226}}\approx 126,56$

e in effetti: *y*(126,56) ≈ 50.

Le risposte relative alla funzioni non sono da ritenersi vincolanti, perché dipendono dalla periodicità scelta

94. Gli eventi naturali possono considerarsi generalmente periodici. Supponiamo che la temperatura in una certa regione del mondo segua un andamento del tipo *y*(*x*) = *A* + *B* *sin*(*C*·*x* + *D*), con *A*, *B*, *C* e *D* dei parametri reali. Determinare il valore di tali parametri sapendo che la minima temperatura è stata raggiunta il 13 febbraio ed è stata di 2°, mentre la massima si è raggiunta dopo esattamente 182 giorni, ed è stata di 38°. $\left[y=20-18\cdot sin\left(\frac{\pi}{182}\cdot x+\frac{41}{182}\pi\right)\right]$

95. Con riferimento al precedente problema determinare quando, approssimativamente la temperatura è stata di circa 25°. Che temperatura c'era, all'incirca, il 24 settembre? [28 Ottobre; circa 33,7°]

96. Un certo fenomeno fisico segue una legge del seguente tipo *y*(*x*) = *A* + *B* *sin*(*C*·*x* + *D*), in cui *A*, *B*, *C* e *D* sono dei parametri reali. Se sappiamo che il periodo della funzione è di 188*s*, che il massimo, pari a 5, si è ottenuto dopo circa 37*s*, mentre il minimo valore è stato di 2. Dopo quanti secondi dall'inizio del fenomeno si è ottenuto il minimo? [Dopo 131 secondi]

97. Con riferimento al precedente esercizio, che valore si ha dopo 57 secondi? [≈ 4,68]

98. Con riferimento al precedente esercizio, quanti secondi dopo il massimo si ottiene per la prima volta il valore 4? [≈ 73,83]

99. Il modello matematico di un certo fenomeno naturale è *y*(*x*) = *A* + *B* *sin*(*C*·*x* + *D*), *A*, *B*, *C* e *D* numeri reali. Determinare il valore di tali parametri sapendo che il massimo è (290; 75) e il minimo (110; 42).

Determinare inoltre per quale x si ottiene, per la prima volta dopo il minimo, il valore 59. Infine determinare il valore ottenuto per $x = 308$. $\left[y=\frac{117}{2}-\frac{33}{2}\cdot sin\left(\frac{\pi}{180}\cdot x-\frac{\pi}{9}\right);\approx 201,7;\approx 74,2\right]$

100. Il modello matematico di un certo fenomeno naturale è $y(x) = A + B\ cos(C\cdot x + D)$, A, B, C e D numeri reali. Determinare il valore di tali parametri sapendo che il minimo è (72; 17) e il massimo (20; 67). Determinare inoltre per quale x si ottiene, per la prima volta dopo il minimo, il valore 42. Infine determinare il valore ottenuto per $x = 102$. $\left[y=42+25\cdot cos\left(\frac{\pi}{52}\cdot x-\frac{5}{13}\cdot\pi\right);98;\approx 48\right]$

101. Il modello matematico di un certo fenomeno naturale è $y(x) = A + B\ cos(C\cdot x + D)$, A, B, C e D numeri reali. Determinare il valore di tali parametri sapendo che il minimo è (17; 47) e il massimo (325; 98). Determinare inoltre per quale x si ottiene, per la prima volta dopo il minimo, il valore 56. Infine determinare il valore ottenuto per $x = 256$. $\left[y=\frac{145}{2}-\frac{51}{2}\cdot cos\left(\frac{\pi}{308}\cdot x-\frac{17}{308}\cdot\pi\right);\approx 102;\approx 91,9\right]$

102. Il moto armonico semplice è un moto periodico che ubbidisce a una legge del tipo $y=A\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$, in cui T è il periodo e t è il tempo. Un esempio importante di moto armonico si ha nell'oscillazione di una massa attaccata a una molla, in condizioni ideali, ossia senza attrito. Se una massa legata a una molla oscilla con legge $y=1,25\cdot cos(3\cdot t)$, vogliamo sapere il periodo del moto, in secondi, e la massima espansione della molla, in *cm*. [T = 2/3π; 1,25 *cm*]

103. Con riferimento al problema precedente, determinare gli istanti in cui la molla raggiunge la massima espansione, la massima contrazione e passa per la posizione iniziale di equilibrio.
$\left[\frac{2k}{3}\cdot\pi;\frac{(2k+1)}{3}\cdot\pi;\frac{(2k+1)}{6}\cdot\pi\right]$

104. Con riferimento al problema precedente, determinare se dopo 1,28 *s*, la molla si espande o contrae e quanto ampia è tale espansione o contrazione. Dopo quanti secondi la molla avrà la stessa espansione? E dopo quanti secondi una contrazione di uguale ampiezza?
[contrazione di circa 0,96 *cm*; ≈ 1,05*s*; ≈2,09*s*]

105. In un moto armonico di legge $y=A\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$, la velocità della massa in funzione del tempo è $y=-A\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$, mentre quella dell'accelerazione è $y=-A\cdot\frac{4\pi^2}{T^2}\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$. Con riferimento all'esercizio precedente, determinare le leggi della velocità e dell'accelerazione.
[$y = -3,75\ sin(3t)$; $y = -11,25\ cos(3t)$]

106. Quanto valgono la massima velocità e la massima accelerazione di un moto armonico di legge $y=A\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$? $\left[v_{\max}=A\cdot\frac{2\pi}{T};a_{\max}=A\cdot\frac{4\pi^2}{T^2}\right]$

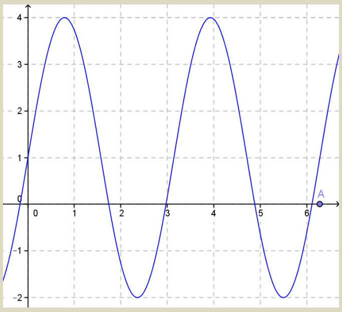
107. Determinare velocità ed accelerazione massima di una molla che oscilla con periodo di 1,32*s* e ampiezza di 3,12*cm*. [≈ 14,85 *cm*/*s*; ≈ 70,69 cm^2/s^2]

108. Determinare la legge dell'oscillazione di una molla che oscilla con velocità massima di 0,23 *cm*/*s* e accelerazione massima di 0,41 cm^2/s^2. [$y = 0,13 \cdot cos(1,78t)$]

109. Se consideriamo due onde (acustiche, ottiche, …) che ubbidiscono a leggi di tipo sinusoidale $y = A\ cos(2\pi t/T)$, queste possono interferire tra loro combinandosi in un'onda di ampiezza maggiore (interferenza costruttiva) o minore (interferenza distruttiva). Per quali t le onde di leggi $y = 3 \cdot cos(2t)$; $y = 2 \cdot cos(t)$ hanno massima interferenza costruttiva? Quando totalmente distruttiva?
[$t = 2k\pi$; $t = (2k + 1)\pi$, k, $\pi \in \mathbb{N}$]

Lavoriamo insieme

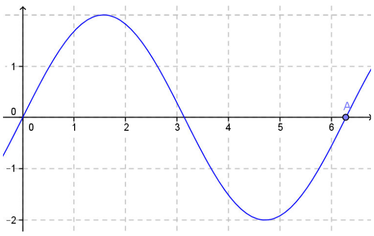
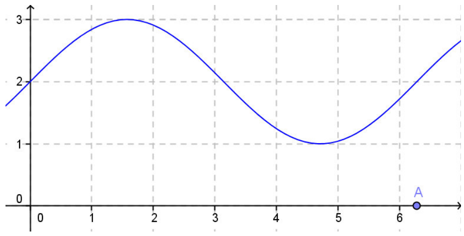
Sapendo che il seguente grafico si riferisce a una funzione del tipo $y = a + b\ sin(k\cdot x)$, vogliamo determinare i parametri incogniti. I punti A e B indicano le ascisse relative a π e 2π.

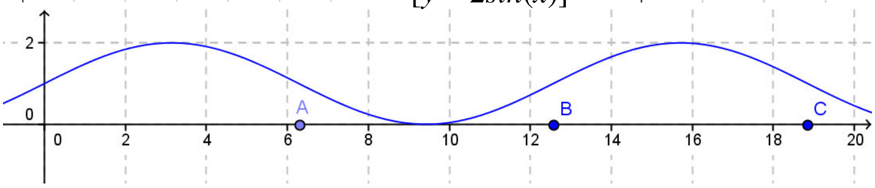


Dal grafico rileviamo che il codominio della funzione è, approssimativamente, [–2; 4], cioè ha un'ampiezza di 6 unità, che è il triplo di quella di $sin(x)$, il che significa che il parametro b è, in valore assoluto, pari a 3. poiché la "forma" della funzione è simile a quella della sinusoide, nel senso che la funzione prima cresce, poi decresce, vuol dire che b è positivo, pertanto si ha: $b = 3$. Inoltre $y(0) = 1$, quindi vuol dire che la funzione è una traslazione di vettore (0, 1) di $3sin(x)$, quindi $a = 1$. Passiamo adesso al periodo, che approssimativamente, è π. Ciò significa che l'argomento assume due volte in [0; 2π] gli stessi valori, quindi deve essere $k = 2$. infine la funzione cercata è $y = 1 + 3\ sin(2x)$

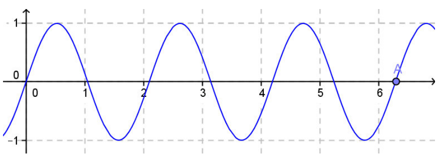
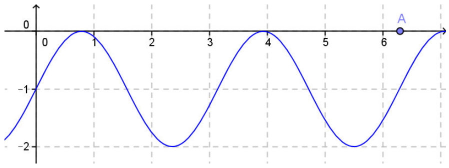
I seguenti grafici si riferiscono a funzioni del tipo $y = a + b\ sin(c \cdot x)$ con parametri numeri interi o di essi inversi. Determinare tali parametri. I punti indicano le ascisse relative a multipli interi di π.

Livello 1

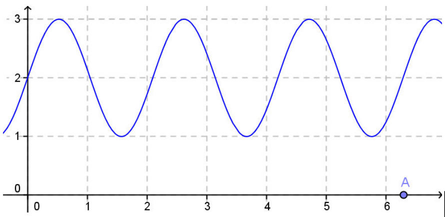
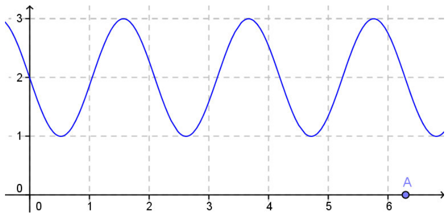
110.  [$y = 2sin(x)$]  [$y = 2 + sin(x)$]

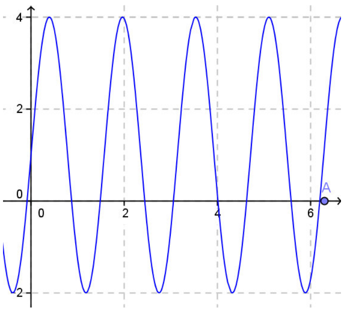
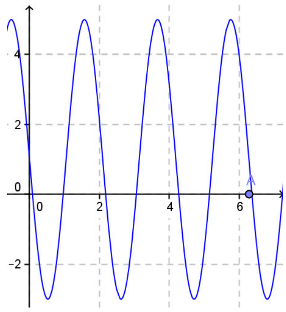
111. 

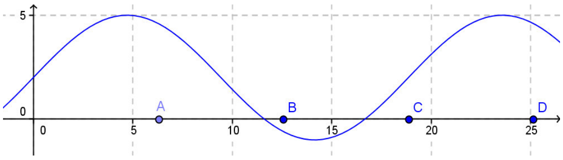
[$y = 1 + sin(x/2)$]

112.  [$y = sin(3x)$]  [$y = -1 + sin(2x)$]

Livello 2

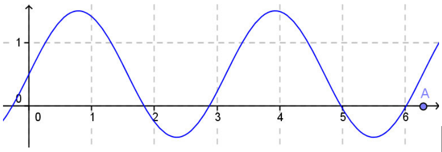
113.  [$y = 2 + sin(3x)$]  [$y = 2 - sin(3x)$]

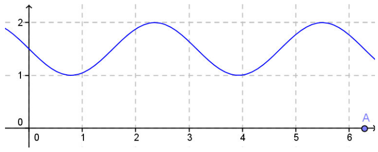
114.  [$y = 1 + 3sin(4x)$]  [$y = 1 - 4sin(3x)$]

115. 

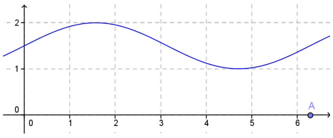
$[y = 2 + 3\ sin(x/3)]$

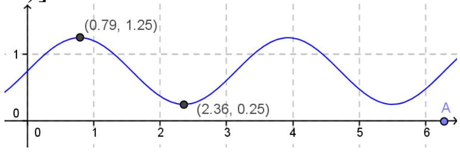
Livello 3

116. 

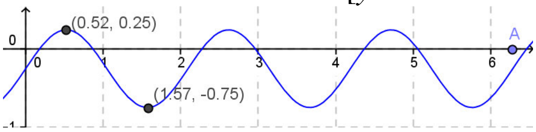
$[y = ½ + sin(2x)]$ 

$[y = 3/2 – ½sin(2x)]$

117. 

$[y = 3/2 + ½\ sin(x)]$ 

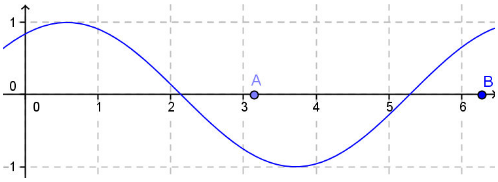
$[y = ¾ + ½\ sin(2x)]$

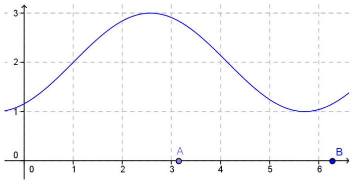
118. 

$[y = – ¼ + ½\ sin(3x)]$

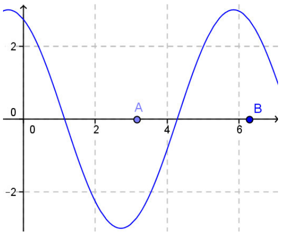
I seguenti grafici si riferiscono a funzioni del tipo $y = a + b\ sin(c·x + d)$ con parametri numeri interi. Determinare tali parametri. I punti A e B indicano le ascisse relative a π e 2π.

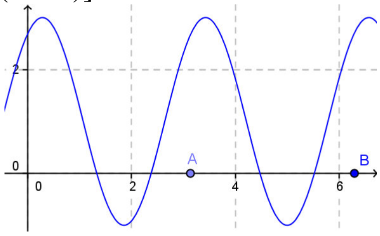
Livello 3

119. 

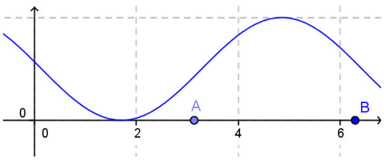
$[y = sin(x + 1)]$ 

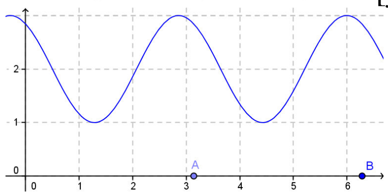
$[y = 2 + sin(x – 1)]$

120. 

$[y = 3sin(x + 2)]$ 

$[y = 1 + 2\ sin(2x + 1)]$

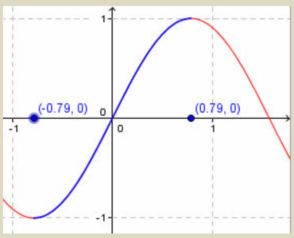
121. 

$[y = 1 + sin(x + 3)]$ 

$[y = 2 – sin(2x – 1)]$

Lavoriamo insieme

Che grafico ha la funzione $y = sin^{-1}(2x)$? Dobbiamo prima stabilire quando è invertibile $y = sin(2x)$. Poiché il periodo di questa funzione è 2 = π, l'invertibilità si avrà non più in [–π/2; π/2] come per $y = sin(x)$, bensì in [–π/4; π/4], come mostrato in figura.

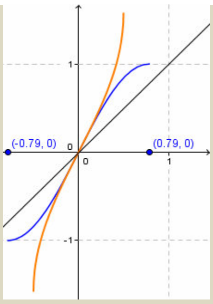


Del resto deve aversi ovviamente sempre l'argomento compreso tra –1 e 1, quindi deve essere

$$-1 \leq 2x \leq 1 \Rightarrow - ½ \leq x \leq ½$$

La funzione di cui la nostra è inversa è $2x = sin(y) \Rightarrow x = ½\ sin(y)$, che ha dominio [–π/2; π/2] e codominio [– ½; ½]. Quindi la funzione inversa è $y = sin^{-1}(2x)$: [– ½; ½] → [–π/2; π/2].

Il grafico (in arancio) è il seguente:



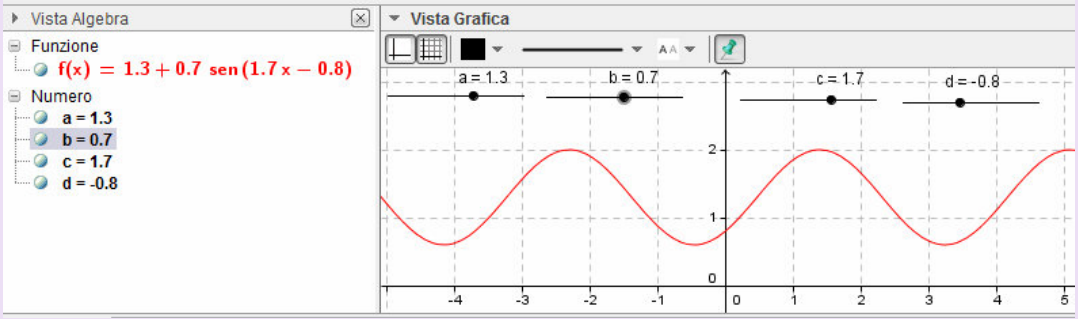
Tracciare il grafico delle seguenti funzioni, determinandone dominio e codominio.

Livello 3

122.	$y = sin^{-1}(3x)$	$[[-1/3; 1/3] \to [-\pi/2; \pi/2]]$	$y = 2sin^{-1}(x/2)$	$[[-2; 2] \to [-\pi; \pi]]$
123.	$y = 1 + sin^{-1}(2x)$	$[[-½ ; ½] \to [1-\pi/2; 1+\pi/2]]$	$y = cos^{-1}(x/4)$	$[[-4; 4] \to [0; \pi]]$
124.	$y = 2 - cos^{-1}(5x)$	$[[-1/5; 1/5] \to [2-\pi; 2]]$	$y = 4cos^{-1}(x/2)$	$[[-2; 2] \to [0; 4\pi]]$
125.	$y = sin^{-1}(x - 2)$	$[[-1; 2] \to [-\pi/2; \pi/2]]$	$y = 3sin^{-1}(2x + 1)$	$[[-1; 0] \to [-3\pi/2; 3\pi/2]]$
126.	$y = 2 + sin^{-1}(3 + x)$	$[[-4; -2] \to [2-\pi/2; 2+\pi/2]]$	$y = 2cos^{-1}(x/2 - 3)$	$[[4; 8] \to [0; 2\pi]]$
127.	$y = -1+ cos^{-1}(3x - 2)$	$[[1/3; 1] \to [-1; -1+\pi]]$	$y = 2 + 4\ cos^{-1}(2x + 3)$	$[[-2; -1] \to [2; 2+4\pi]]$
128.	$y = 1 + 2sin^{-1}(1 + x)$			$[[-2; 0] \to [1 - \pi; 1 + \pi]]$

L’angolo di Geogebra e Cabri

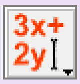
Geogebra è l’ambiente ideale per lo studio delle funzioni goniometriche. Possiamo usare in particolare le slider bar per determinare l’apporto di ciascuno dei parametri sulla forma della curva, come mostrato in figura.



Le funzioni goniometriche ammesse sono le seguenti, accessibili mediante digitazione oppure cliccando su

e poi scegliendo **Funzioni matematiche**.

sen(x)	arcsen(x)	sec(x)
cos(x)	arccos(x)	cosec(x)
tg(x)	arctg(x)	cotg(x)

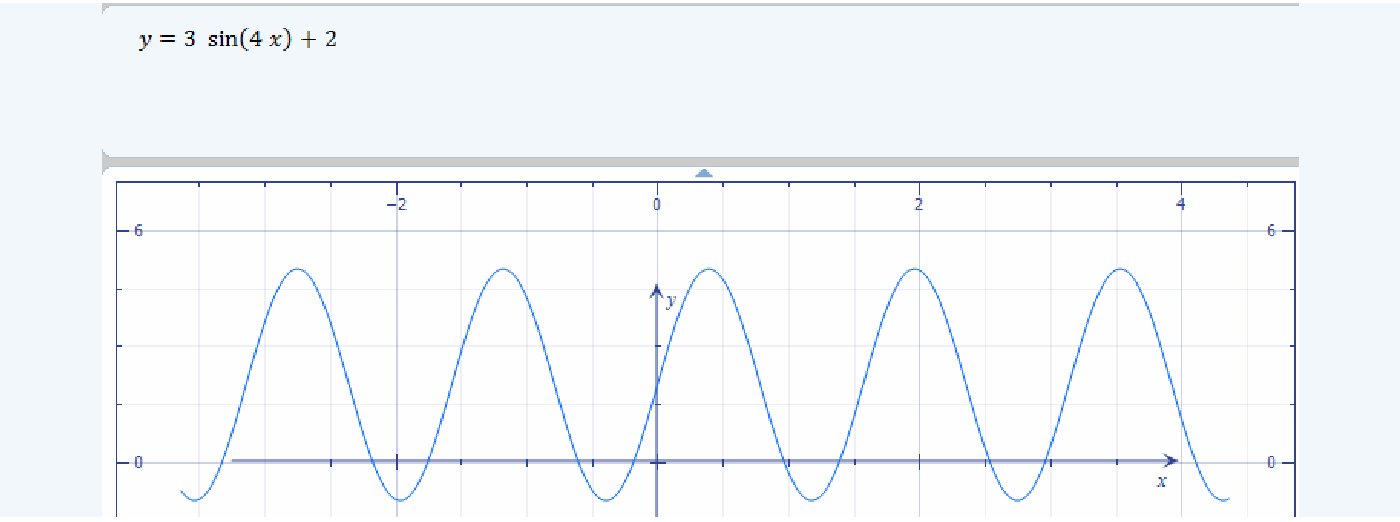
Anche con Cabri possiamo rappresentare facilmente funzioni goniometriche, dobbiamo però inserire la funzione mediante il comando  **Espressione**, quindi applicare il comando  **Applica un’espressione**, cliccando prima sull’espressione precedentemente inserita e poi sugli assi.

Attività

Usare i software per verificare i precedenti quesiti

L’angolo di Microsoft Mathematics

Ovviamente anche questo software permette l’immissione e la visualizzazione di funzioni di qualsiasi tipo, quindi anche di quelle goniometriche. Il grafico si manipola facilmente usando il mouse, sia traslandolo, che zoomando su di esso semplicemente ruotando la rotellina de mouse e così via.

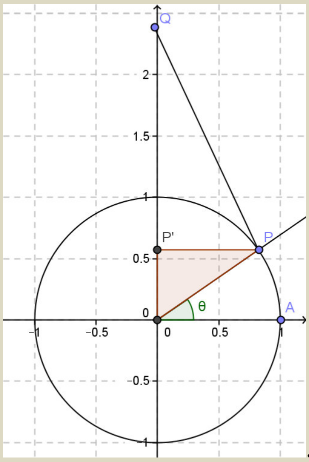


Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi

Lavoriamo insieme

Consideriamo la prima parte del secondo quesito assegnato al Liceo scientifico nell'a.s. 1992/93.
Dato un sistema di assi cartesiani ortogonali di centro O, tracciare la circonferenza γ di raggio unitario e centro O. Detto punto A il punto di coordinate (1; 0), indicare con θ l'angolo formato da una generica semiretta uscente dall'origine con il semiasse positivo delle x e con P il punto in cui tale semiretta interseca γ ($\angle P\hat{O}A = \theta$). Determinare in funzione di θ l'ordinata y del punto Q appartenente al semiasse positivo delle y tale che $PQ = 2$.

Rappresentiamo quanto detto: 

. Si ha $P \equiv (cos(\theta); sin(\theta))$, come si ricava facilmente dal triangolo rettangolo OPP', dove P' è la proiezione di P sull'asse x. E $Q \equiv (0; y)$, deve perciò essere: $\overline{PQ} = \sqrt{(cos(\theta) - 0)^2 + (sin(\theta) - y)^2}$, quindi

$$\overline{PQ}^2 = 4 \Rightarrow cos^2(\theta) + sin^2(\theta) - 2 \cdot y \cdot sin(\theta) + y^2 = 4 \Rightarrow y^2 - 2 \cdot y \cdot sin(\theta) - 3 = 0$$

risolvendo otteniamo le soluzioni:

$$y = \frac{2 \cdot sin(\theta) \pm \sqrt{4 \cdot sin^2(\theta) + 12}}{2} = \frac{2 \cdot sin(\theta) \pm 2 \cdot \sqrt{sin^2(\theta) + 3}}{2} = sin(\theta) \pm \sqrt{sin^2(\theta) + 3}$$

Accettiamo solo la soluzione positiva, data la richiesta.

1. (Liceo scientifico sperimentale 1991/92) In un piano cartesiano ortogonale si indichino con x e y le coordinate di un punto P e con X e Y le coordinate di un punto P'. Si consideri la trasformazione di e-

quazioni: $\begin{cases} X = ax+by \\ Y = a'x+b'y \end{cases}$, tale che al punto A di coordinate $x = 1$, $y = 1$ corrisponda il punto A' di coordinate $X = 0$, $Y = 2$ e al punto B di coordinate $c = 1$, $y = 0$ corrisponda il punto B' di coordinate $X = 1$, $Y = 0$. Si studi la trasformazione ottenuta determinando in particolare i punti e le rette che si trasformano rispettivamente in se stessi. Detto α l'angolo acuto formato dalla retta r di equazione $y = mx$ e dalla sua trasformata r' si studi come varia la tangente trigonometrica di α al variare della retta r.

$\left[a = 1,\ b = -1,\ a' = 0,\ b' = 2;\ \text{Punti uniti: } (x, 0),\ \text{rette unite: } ax + ay + c = 0;\ tan(\alpha) = \frac{|m^2+m|}{2m^2-m+1}\right]$

2. (Liceo scientifico 2011/2012) Sia $g(x) = sen(3/2\pi x)$, qual è il periodo della funzione g? Si disegni il grafico in un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy. [4/3]

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.

AHSME = Annual High School Mathematics Examination

HSMC = A&M University High School Mathematics Contest

Lavoriamo insieme

Assegnato agli HSMC del 1999.

Se 0 < A < 90 e cos(A) = 0,1 , trovare il valore di $log\,[cot\,(A)] + log\,[sin\,(A)]$.

Abbiamo: $log\,[cot\,(A)] + log[sin\,(A)] = log[cos(A)] = log(0,1) = -1$

1. (AHSME 1980) Se $b > 1$, $sin(x) > 0$, $cos(x) > 0$ e $log_b(sin(x)) = a$, calcolare $log_b(cos(x))$. $\left[log_b\left(\sqrt{1-b^{2a}}\right)\right]$
2. (AHSME 1983) L'equazione $x^2 - px + q = 0$ ha per soluzioni $tan(\alpha)$ e $tan(\beta)$; $x^2 - rx + s = 0$ ha per soluzioni $cot(\alpha)$ e $cot(\beta)$. Determinare rs in funzione di p e q. $\left[\frac{p}{q^2}\right]$
3. (AHSME 1987) Calcolare $log[tan(1°)] + log[tan(2°)] + ... + log[tan(89°)]$. [0]
4. (AHSME 1999) Sia $sec(x) - tan(x) = 2$, $x \in \mathbb{R}$. Calcolare $sec(x) + tan(x)$. [0,5]
5. (HSMC2001) Calcolare $cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\cdot cos\left(\frac{2\pi}{2}\right) + 3\cdot cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + ... + 45\cdot cos\left(\frac{45\pi}{2}\right)$. [22]
6. (RICE2007) Calcolare $tan(10°) \cdot tan(20°) \cdot tan(30°) \cdot \ldots \cdot tan(70°) \cdot tan(80°)$. [1]

Questions in English

Working together

This is a question assigned at HSMC in 2003. If $sin(x) + cos(x) = 1/2$, then $sin^3(x) + cos^3(x)$ is?

We remember that $x^3 + y^3 = (x + y) \cdot (x^2 - xy + y2)$, hence we have:

$$sin^3(x)+cos^3(x) = [sin(x)+cos(x)]\cdot[sin^2(x)-sin(x)\cdot cos(x)+cos^2(x)] =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot[sin^2(x)-sin(x)\cdot cos(x)+cos^2(x)] = \frac{1}{2}\cdot[1-sin(x)\cdot cos(x)]$$

But:
$$[sin(x)+cos(x)]^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow sin^2(x)+2\cdot sin(x)\cdot cos(x)+cos^2(x) = \frac{1}{4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1+2\cdot sin(x)\cdot cos(x) = \frac{1}{4} \Rightarrow sin(x)\cdot cos(x) = -\frac{3}{8}$$

Hence:
$$sin^3(x)+cos^3(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{3}{8}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{11}{8} = \frac{11}{16}$$

7. (AHSME 1999) Let x be a real number such that $sec(x) - tan(x) = 2$. Then $sec(x) + tan(x)$ is? [½]

8. (HSMC2000) Find the exact value of $sin(tan^{-1}(3)))$. $\left[\frac{3}{\sqrt{10}}\right]$

9. (HSMC2001) Find the exact value of $cos(sin^{-1}(2/3)))$. $\left[\frac{\sqrt{5}}{3}\right]$

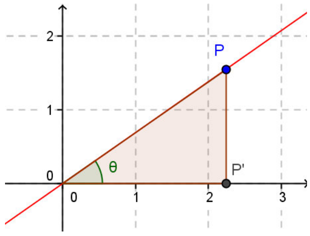
10. (HSMC2003) If $sin(x) + cos(x) = 1/2$, then $sin^3(x) + cos^3(x)$ is? [11/16]

11. (HSMC 2011) An arbitrary circle can intersect the graph of $y = cos(x)$ in
(A) at most 1 points; (B) at most 3 points; (C) at most 5 points;
(D) at most 7 points; (E) at most 9 points; (F) more than 9 points. [F]

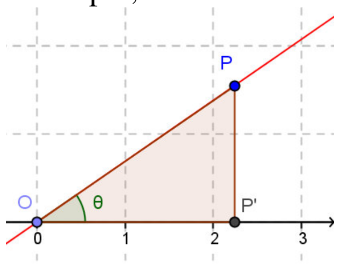
Quelli che vogliono sapere di più …

Riferimento polare

Concludiamo presentando un nuovo sistema di riferimento nel piano. Rappresentiamo un punto in un piano



cartesiano.
La posizione di P si può determinare anche se conosciamo la misura del segmento OP e la misura dell'angolo $P\hat{O}P' = \theta$. Un sistema di riferimento di questo tipo viene detto **polare**, in cui il polo è il punto O, inoltre solo l'asse x è fissato, mentre l'asse y non ci interessa più, le informazioni relative a esso vengono



sostituite dalla conoscenza dell'angolo $P\hat{O}P' = \theta$.
Ovviamente possiamo facilmente passare da un sistema all'altro, proprio usando la trigonometria. Infatti facilmente si ha: $P \equiv (x, y) \equiv \left(\overline{OP} \cdot cos(\theta), \overline{OP} \cdot sin(\theta)\right)$. O meglio, indicando $\overline{OP} = \rho$ avremo: $P \equiv (x, y) \equiv (\rho \cdot cos(\theta), \rho \cdot sin(\theta))$. Ovviamente possiamo ottenere anche le formule inverse. $P \equiv (\rho, \theta) \equiv \left(\sqrt{x^2 + y^2}, tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right)$.

Il riferimento polare risulta particolarmente importante per determinare equazioni di curve che in coordinate cartesiane sono particolarmente complicate.

Esempio 12

L'equazione cartesiana di una circonferenza di centro nell'origine e raggio R è $x^2 + y^2 = R^2$. In coordinate polari essa diventa molto semplicemente:

$$[\rho \cdot cos(\theta)]^2 + [\rho \cdot sin(\theta)]^2 = R^2 \Rightarrow \rho^2\, cos^2(\theta) + \rho^2\, sin^2(\theta) = R^2 \Rightarrow \rho^2 = R^2$$

Verifiche

Lavoriamo insieme

In coordinate polari una curva ha equazione $\rho = 10cos(\theta)$, quali sono le sue equazioni cartesiane?
Moltiplichiamo per ρ, ottenendo $\rho^2 = 10\rho \cdot cos(\theta)$, noi sappiamo che le relazioni fra coordinate cartesiane e polari sono: $\begin{cases} x = \rho \cdot cos(\theta) \\ y = \rho \cdot sin(\theta) \end{cases}$, quindi avremo: $\rho^2 = x$. Del resto si ha: $\rho^2 = x^2 + y^2$, quindi $x^2 + y^2 - 10x = 0$ è l'equazione cercata, che è quella di una circonferenza di centro in (5; 0) e raggio 5.

Esprimere in forma cartesiana le seguenti curve in forma polare

Livello 3

129. $\rho = 5sin(\theta)$ $[x^2 + y^2 - 5y = 0]$ $sin(2\theta) = 1$ $[2xy^2 - 1 = 0]$ $\rho = sin(2\theta)$ $[x^2 + y^2 - 2x^2y^2 = 0]$
130. $\rho^2 = 3 \cdot cos(2\theta)$ $\left[\left(1-\sqrt{3}\right) \cdot x^2 + \left(1+\sqrt{3}\right) \cdot y^2 = 0\right]$ $5sin^2(\theta) + 3 = 0$ $[4x^2 + 9y^2 - 1 = 0]$
131. $13sin^2(\theta) = 3$ $[4x^2 - 9y^2 - 1 = 0]$ $\rho^2 = 2sin(\theta)\, cos(\theta)$ $\left[x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy = 0\right]$

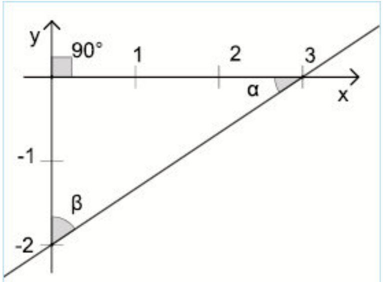
Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Accademia navale) Verificare che, dati tre numeri reali $\alpha, \beta, \gamma \neq \pi/2 + k\pi$, $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ si ha: $tan(\alpha) + tan(\beta) + tan(\gamma) = tan(\alpha) \cdot tan(\beta) \cdot tan(\gamma)$.
2. (Accademia navale) Calcolare la misura in radianti e in gradi sessagesimali di un angolo alla circonferenza che insista su un arco di lunghezza uguale al raggio.
3. (Odontoiatria 1997) L'insieme dei valori assunti, per x reale, dalla funzione $f(x) = cos^2(x)$
A) è l'intervallo tra (–1,1) estremi inclusi B) è l'insieme dei numeri reali
C) è l'intervallo (0,2) estremi inclusi D) dipende dal fatto che x sia espresso in gradi o radianti
E) è l'intervallo (0,1) estremi inclusi
4. (Ingegneria 1999) Siano α e β due angoli legati fra di loro dalla relazione $\beta = \pi - \alpha$. Quale delle seguenti uguaglianze è vera?
A) $tan(\alpha) + tan(\beta) = 0$ B) $cos(\alpha) = cos(\beta)$ C) $sin(\alpha) + sin(\beta) = 0$
D) $tan(\alpha) = tan(\beta)$ E) $cos(\alpha) + cos(\beta) = -1$
5. (Odontoiatria 2000) Un angolo di ampiezza 1 radiante, in gradi sessagesimali, corrisponde a:
A) poco più di 60° B) poco meno di 60° C) 50° D) un angolo retto E) 33°
6. (Ingegneria 2000) Si considerino le seguenti tre espressioni numeriche:
$$(1)\ \log_2\left[sin(26\pi)\right]\ (2)\ \log_2\left[cos(26\pi)\right]\ (3)\ \log_2\left[tan(26\pi)\right]$$
Allora
A) la (1) e la (2) hanno entrambe significato B) la (1) ha significato, la (3) non ha significato
C) la (1) e la (2) sono entrambe prive di significato D) la (1) ha significato, la (2) non ha significato
E) la (2) ha significato, la (1) non ha significato
7. (Ingegneria 2000) Se un angolo misura 15°, la sua misura ρ in radianti è
A) $\frac{1}{4} rad < \rho < \frac{1}{2} rad$ B) $\frac{3}{4} rad < \rho < 1\, rad$ C) $\rho < \frac{1}{4} rad$
D) $\frac{1}{2} rad < \rho < 1\, rad$ E) $\rho > 1\, rad$
8. (Veterinaria 2001) Se un angolo x misura $2{,}01\pi$ radianti
A) allora il punto $(cos(x), sin(x))$ appartiene al I quadrante
B) allora il punto $(cos(x), sin(x))$ appartiene al II quadrante
C) allora il punto $(cos(x), sin(x))$ appartiene al III quadrante
D) allora il punto $(cos(x), sin(x))$ appartiene al IV quadrante
E) la sua tangente è negativa
9. (Ingegneria 2002) La misura in radianti di un angolo di 20° è pari a A) $\frac{\pi}{18}$ B) $\frac{\pi}{8}$ C) $\frac{\pi}{7}$ D) $\frac{\pi}{9}$ E) $\frac{\pi}{10}$
10. (Medicina 2005) Si consideri la funzione trigonometrica $y = tan(x)$ con $0 < x \leq \pi$ (x è misurato in radianti). Quali fra i valori seguenti sono in ordine crescente?
A) $tan(3), tan(\pi), tan(1), tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$ B) $tan(1), tan(3), tan(\pi), tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$
C) $tan(\pi), tan(1), tan\left(\frac{\pi}{3}\right), tan(3)$ D) $tan\left(\frac{\pi}{3}\right), tan(\pi), tan(3), tan(1)$
E) $tan(1), tan\left(\frac{\pi}{3}\right), tan(3), tan(\pi)$
11. (Veterinaria 2007) Si consideri la funzione $y = sin(x)$ (x esprime l’ampiezza dell’angolo in radianti). I valori della funzione $sin(1)$, $sin(2)$, $sin(3)$ e $sin(4)$, disposti in ordine crescente, risultano:
A) $sin(2), sin(1), sin(4), sin(3)$ B) $sin(4), sin(3), sin(2), sin(1)$ C) $sin(1), sin(2), sin(3), sin(4)$
D) $sin(4), sin(3), sin(1), sin(2)$ E) $sin(3), sin(4), sin(2), sin(1)$
12. (Ingegneria 2009) Un angolo misura 2 radianti, quindi
A) il suo seno è positivo B) seno e coseno hanno lo stesso segno C) l’angolo è acuto
D) la sua tangente non esiste E) il suo coseno è positivo
13. (Ingegneria, 2009) L’espressione $log\left[x^4 + 2x^2 + sin^2(x) + cos^2(x)\right]$ coincide con

A) $4 \cdot log(1 + x)$ B) $\left[log\left(x^2+1\right)\right]^2$ C) $2 \cdot log(x^2 + 1)$

D) $log\left(x^4+2x^2\right)+log\left[sin^2(x)+cos^2(x)\right]$ E) $2 \cdot log\left[1+x+sin(x)+cos(x)\right]$

14. (Facoltà scientifiche, Roma La Sapienza 2009) Un angolo di 3 radianti ha misura in gradi (sessagesimali) compresa: A) tra 0° e 90° B) tra 90° e 180° C) tra 180° e 270° D) tra 270° e 360°
15. (Facoltà scientifiche CISIA 2010) Considera gli angoli α, β in figura; quale tra la seguenti relazioni è corretta?



A) $tan(\beta) < cos(\alpha)$ B) $sin(\beta) < cos(\alpha)$ C) $cos(\beta) > cos(\alpha)$ D) $tan(\beta) > tan(\alpha)$ E) $sin(\beta) < sin(\alpha)$

16. (Facoltà scientifiche CISIA 2010) Una sola delle seguenti funzioni ha periodo π. Quale?
A) $sin(x^2)$ B) $sin^2(x)$ C) $sin(x) + sin^2(x)$ D) $sin\, x + cos\, x$ E) $x + sin\, x$
17. (Corso di laurea in Informatica, Udine 2009) Si consideri la funzione $f(x) = sin(\omega x)$, dove ω è una costante positiva. Se $f(a) = 0$ e $f(b) = 1$, qual è la minima distanza possibile tra a e b?

A) $\dfrac{\pi}{2\omega}$ B) $\dfrac{\pi}{\omega}$ C) $\dfrac{2\pi}{\omega}$ D) $\dfrac{\pi}{4\omega}$

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito

http://mathinterattiva.altervista.org/volume_2_2.htm

Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1/2 rad; ≈ 28°38′52″	E	A	B	E	A	A	D
10	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**
A	D	A	C	B	D	B	A

7. La misurazione degli angoli

7.3 Equazioni e disequazioni goniometriche

Prerequisiti

- Concetto di angolo
- Concetto di misura
- Unità di misura sessagesimale degli angoli
- Le funzioni goniometriche elementari
- Dominio e codominio di una funzione
- Teoremi fondamentali di goniometria
- Uso della calcolatrice scientifica

Obiettivi

- Risolvere semplici equazioni e disequazioni goniometriche
- Sapere risolvere problemi di trigonometria mediante la risoluzione di equazioni o sistemi di equazioni goniometriche

Contenuti

- Risoluzione di equazioni e disequazioni goniometriche elementari
- Equazioni lineari in seno e coseno
- Equazioni omogenee in seno e coseno o riconducibili a esse, di I, II e IV grado

Risoluzione di equazioni goniometriche elementari

Anche se non lo abbiamo sottolineato, quando applichiamo le funzioni goniometriche inverse stiamo risolvendo delle equazioni. Infatti determinare per esempio $sin^{-1}(0,32)$ è lo stesso che determinare il minimo angolo, in valore assoluto, che sia soluzione dell'equazione $sin(x) = 0,32$. In questo paragrafo vogliamo trattare l'argomento in modo più organico.
La prima cosa che dobbiamo osservare è che un'equazione goniometrica ha, in generale, infinite soluzioni che sono legate tra di loro da un comune periodo. Un'altra ovvia osservazione è data dal seguente risultato:

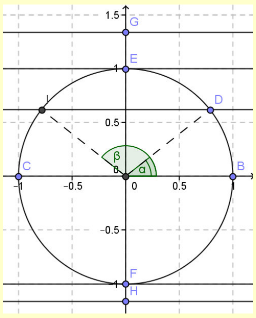
Teorema 1

Supposto che la funzione $f(x)$ abbia significato e la rispettiva funzione goniometrica di cui essa è argomento abbia anch'essa significato, allora le equazioni

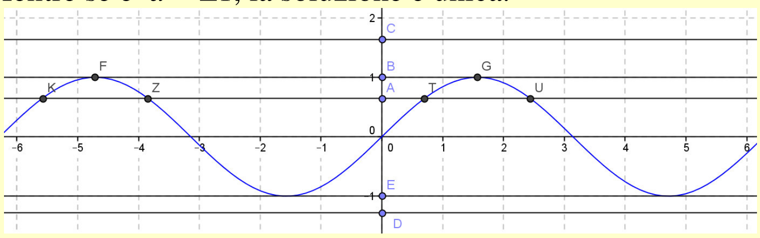
- $sin[f(x)] = h$, $h \in \mathbb{R}$; $cos[f(x)] = h$, $h \in \mathbb{R}$, hanno soluzioni solo se si ha: $-1 \le h \le 1$;
- $sec[f(x)] = h$, $h \in \mathbb{R}$; $csc[f(x)] = h$, $h \in \mathbb{R}$, hanno soluzioni solo se si ha: $h \le -1 \vee h \ge 1$;
- $tan[f(x)] = h$, $h \in \mathbb{R}$; $cot[f(x)] = h$, $h \in \mathbb{R}$, hanno sempre soluzioni reali.

Esempio 1

Consideriamo l'equazione $sin(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$. Possiamo risolverla in diversi modi. Possiamo cioè lavorare



sulla circonferenza goniometrica.
Vediamo che l'equazione ha soluzione solo se è $-1 \le a \le 1$, dato che per valori esterni a tale intervallo la retta, come mostrato per i punti G e H, non incontra la circonferenza goniometrica. Osserviamo che le soluzioni, limitatamente all'intervallo [0°; 360°] o [0; 2π] se lavoriamo in radianti, se $-1 < a < 1$ sono due, fra loro supplementari, indicati da α e $\beta = 180° - \alpha$. Mentre se è $a = \pm1$, la soluzione è unica.



Potremmo anche lavorare sulla sinusoide.
In questo caso ovviamente lavoriamo in radianti e le soluzioni sono infinite, sempre se $-1 \le a \le 1$ differenti di un multiplo di 2π dalle due principali, che sono le ascisse dei punti T e U. Se poi è $a = \pm1$, il valore principale è solo uno, rispettivamente le ascisse dei punti G o Q.

Vediamo adesso un esempio numerico.

Esempio 2

Vogliamo risolvere l'equazione $sin(x) = ½$. Noi sappiamo che in gradi sessagesimali il minimo angolo il cui seno è quello voluto è 30°, in radianti è π/6. Ma sappiamo anche che, in generale, si ha: $sin(x) = sin(180° - x) = sin(\pi - x)$. Pertanto abbiamo anche la soluzione 180° – 30° = 150° o, in radianti, $\pi - \pi/6 = 5\pi/6$. Tenuto conto delle periodicità possiamo dire perciò che le soluzioni sono infinite e si possono esprimere nelle forme compatte: $x = 30° + k\ 360°$; $x = 150° + k\ 360°$; o, in radianti, $x = \pi/6 + 2k\pi \vee x = 5\pi/6 + 2k\pi$. In entrambi i casi k indica un generico numero intero.

Tenuto conto dell'esempio precedente possiamo perciò enunciare il seguente risultato, in cui le funzioni inverse indicano i minimi archi, in valore assoluto, che hanno il dato argomento. Osserviamo che le calcolatrici scientifiche forniscono appunto una approssimazione di tale valore, tutte le volte in cui applichiamo le funzioni goniometriche inverse.

Teorema 2

L'equazione $sin(x) = h$, $-1 \le h \le 1$, ha come soluzioni, secondo che le calcoliamo in gradi sessagesimali o in radianti: $(x = sin^{-1}(h) + 2k\pi \vee x = \pi - sin^{-1}(h)+2k\pi)$; $(x = sin^{-1}(h)+k360° \vee x = 180° - sin^{-1}(h)+k360°)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ricordando le proprietà del coseno e della tangente possiamo enunciare i seguenti risultati.

Teorema 3

L'equazione $cos(x) = h$, $-1 \le h \le 1$, ha come soluzioni, secondo che le calcoliamo in gradi sessagesimali o in radianti: $(x = \pm\, cos^{-1}(h) + 2k\pi)$; $(x = \pm\, cos^{-1}(h) + k360°)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Teorema 4

L'equazione $tan(x) = h$, ha come soluzioni, secondo che le calcoliamo in gradi sessagesimali o in radianti: $(x = tan^{-1}(h) + k\pi)$; $(x = tan^{-1}(h) + k180°)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Dato che secante e cosecante possono essere ricondotte a coseno e seno, così come la cotangente alla tangente, non vale la pena di considerare risultati generali legati a tali funzioni.

Esempio 3

Vogliamo risolvere l'equazione $sec(x) = 3$. Essa è equivalente a: $cos(x) = 1/3$. Quindi, tenuto conto del teorema 3 possiamo dire che la soluzione generale è, $x = \pm\, cos^{-1}(1/3) + 2k\pi \approx \pm\, 1{,}23 + 2k\pi$, in radianti, oppure in gradi: $x = \pm\, cos^{-1}(1/3) + k360° \approx \pm\, 70°31'44'' + k360°$.

Possiamo risolvere anche equazioni goniometriche in cui non per forza l'argomento debba essere x.

Esempio 4

Risolvere l'equazione $tan(4x + 32°) = 1{,}32$. Data la presenza di 32° nell'argomento, le soluzioni sono ovviamente richieste solo in gradi sessagesimali. Si ha: $4x + 32° = tan^{-1}(1{,}32) + k180° \approx 52°51'12'' + k180°$. Dato che l'incognita da determinare è sempre x, dobbiamo risolvere la precedente equazione di I grado:

$$4x \approx 20°51'12'' + k180° \Rightarrow x \approx 5°12'48'' + k45°.$$

Capita anche di dover determinare soluzioni appartenenti ad un certo intervallo.

Esempio 5

Risolvere $tan(4x + 32°) = 1{,}32$; $-100° \le x \le 175°$. Riprendiamo il valore trovato nell'esempio precedente. Per stabilire quante delle infinite soluzioni rientrano nel dato intervallo, dobbiamo risolvere la coppia di disequazioni: $-100° \le 5°12'48'' + k45° \le 175°$. Si ha: $-100° - 5°12'48'' \le k45° \le 175° - 5°12'48'' \Rightarrow$

$$-105°12'48'' \le k45° \le 169°47'12'' \Rightarrow -\frac{105°12'48''}{45°} \le k \le \frac{169°47'12''}{45°}$$

Ora poiché si ha: $-\frac{105°12'48''}{45°} \approx -2{,}34; \frac{169°47'12''}{45°} \approx 3{,}77$, e k è un numero intero, i valori accettabili sono $-2 \le k \le 3$. Infatti per tali valori abbiamo:

$$5°12'48'' - 2 \cdot 45° = -84°47'12'';\ 5°12'48'' - 45° = -39°47'12'';\ 5°12'48'' + 0 \cdot 45° = 5°12'48'';$$

$$5°12'48'' + 1 \cdot 45° = 50°12'48'';\ 5°12'48'' + 2 \cdot 45° = 95°12'48'';\ 5°12'48'' + 3 \cdot 45° = 140°12'48'';$$

$$\text{Invece } 5°12'48'' - 3 \cdot 45° = -129°47'12'' < -100° \text{ e } 5°12'48'' + 4 \cdot 45° = 185°12'48'' > 175°.$$

Potevamo anche usare un metodo meno "rigoroso", assegnando valori a k in modo più o meno arbitrario, verificando quali rientravano nell'intervallo dato.

Ci sono anche altre equazioni che si possono ricondurre facilmente alle precedenti.

Esempio 6

Vogliamo risolvere l'equazione $sin^2(2x + 1) - 3cos(2x + 1) - 2 = 0$. Trasformando il seno in coseno otteniamo un'equazione di secondo grado in questa incognita:

$$1 - cos^2(2x + 1) - 3cos(2x + 1) - 2 = 0 \Rightarrow cos^2(2x + 1) + 3cos(2x + 1) + 1 = 0.$$

Determiniamo il discriminante dell'equazione: $\Delta = 9 - 4 = 5 > 0$. L'equazione ha soluzioni reali, troviamole: $cos(2x+1) = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow cos(2x+1) = \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \vee cos(2x+1) = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$. Queste due equazioni hanno soluzioni solo se i termini a destra appartengono all'intervallo $[-1; 1]$. Dato che $\frac{-3-\sqrt{5}}{2} \approx -2,61; \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \approx -0,38$, solo la prima equazione ha soluzioni. Si ha allora:

$$cos(2x+1) = \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow 2x + 1 \approx \pm 1,96 + 2k\pi \Rightarrow x \approx 0,48 + k\pi \vee x \approx -1,48 + k\pi$$

Ovviamente le soluzioni sono da calcolarsi in radianti, come si vede dal fatto che l'argomento delle funzioni goniometriche è formato da un'espressione priva di gradi sessagesimali.

Vi sono ancora altri tipi di equazioni facilmente risolvibili.

Esempio 7

Vogliamo risolvere l'equazione $sin(4x + 15°) = sin(31° - 3x)$, $x \in [-40°; 127°]$.
La risoluzione equivale alla domanda: quando due angoli hanno lo stesso seno? Ovviamente quando sono lo stesso angolo, ma anche, data la periodicità, quando differiscono di un multiplo di 360° (in questo caso, dato che vogliamo soluzioni in gradi sessagesimali). Così per esempio

$$sin(30°) = sin(390°) = sin(-330°) = \ldots = sin(30° + k360°)$$

Ma dato che si ha: $sin(x) = sin(180° - x) = sin(180° - x + k \cdot 180°)$, dobbiamo avere:

$$4x + 15° = 31° - 3x + k\,360° \text{ oppure } 4x + 15° = 180° - (31° - 3x) + k\,360°$$

Risolviamo la prima equazione. $7x = 16° + k\,360° \Rightarrow x = \frac{16°}{7} + k \cdot \frac{360°}{7} \Rightarrow x \approx 2°17'9'' + k \cdot 51°25'43''$

Passiamo alla seconda: $x = 134° + k\,360°$. Adesso vediamo quante soluzioni rientrano nell'intervallo desiderato. Facilmente si vede che la seconda equazione non ammette soluzioni accettabili, poiché $134° - 360° < -40°$ e $134° > 127°$. Invece la prima equazione ammette soluzioni per

$$k = 0\ (\approx 2°17'9''),\ k = 1\ (\approx 53°42'52'')\ \text{e}\ k = 2\ (\approx 105°18'35'').$$

Più in generale possiamo enunciare i seguenti risultati.

Teorema 5

L'equazione $sin[f(x)] = sin[g(x)]$, secondo che le calcoliamo in gradi sessagesimali o in radianti, è equivalente a: $f(x) = g(x) + 2k\pi \vee f(x) = \pi - g(x) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $f(x) = g(x) + k360° \vee f(x) = 180° - g(x) + 360°$, $k \in \mathbb{Z}$

Teorema 6

L'equazione $cos[f(x)] = cos[g(x)]$, secondo che le calcoliamo in gradi sessagesimali o in radianti, è equivalente a: $f(x) = \pm g(x) + 2k\pi$; $f(x) = \pm g(x) + k360°$, $k \in \mathbb{Z}$

Teorema 7

L'equazione $tan[f(x)] = tan[g(x)]$, secondo che le calcoliamo in gradi sessagesimali o in radianti, è equivalente a: $f(x) = g(x) + k\pi$; $f(x) = g(x) + k180°$, $k \in \mathbb{Z}$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere l'equazione $sin(5x - 25°) = 0,12$, $x \in [220°, 410°]$.
Cominciamo a determinare il minimo angolo in gradi sessagesimali il cui seno vale 0,12. Abbiamo:

$$sin^{-1}(0,12) \approx 6°53'32''$$

Quindi in generale dobbiamo avere: $5x - 25° \approx 6°53'32'' + k360°$ o $5x - 25° \approx 180° - 6°53'32'' + k360°$
Quindi: $5x \approx 31°53'32'' + k360°$ o $5x \approx 198°6'28'' + k360°$, da cui $x \approx 6°22'42'' + k72°$ o $x \approx 39°37'18'' + k72°$. Quante di queste soluzioni rientrano nell'intervallo [220°, 410°]?
Risolviamo le disequazioni:

$$220° < 6°22'42'' + k72° < 410° \Rightarrow 3 \le k \le 5 \text{ e } 220° < 39°37'18'' + k72° < 410° \Rightarrow 3 \le k \le 5$$

Quindi si ottengono 3 soluzioni da ciascuna delle due soluzioni generali:

$$6°22'42'' + 3\cdot72° = 222°22'42''; 6°22'42'' + 4\cdot72° = 294°22'42''; 6°22'42'' + 5\cdot72° = 366°22'42'';$$
$$39°37'18'' + 3\cdot72° = 255°37'18''; 39°37'18'' + 4\cdot72° = 327°37'18''; 39°37'18''+5\cdot72°=399°37'18''.$$

Risolvere le seguenti equazioni negli intervalli indicati

Livello 1

1. $cos(x) = ½$, $x \in [-100°; 512°]$ [–60°; 60°; 300°; 420°]
2. $sin(x) = \sqrt{3}/2$, $x \in [-300°; 400°]$ [–300°; –240°; 60°; 120°]
3. $tan(x) = -\sqrt{3}/3$, $x \in [-1000°; 10°]$ [–930°; –750°; –570°; –390°; –210°; –30°]
4. $cot(x) = 1$, $x \in [-25°; 190°]$ [45°] $csc(x) = \sqrt{2}$, $x \in [1000°; 1245°]$ [1125°; 1215°]
5. $sec(x) = -2/\sqrt{3}$, $x \in [-245°; 687°]$ [–210°; –150°; 150°; 210°; 510°; 570°]
6. $sin(x) = -\sqrt{3}/2$, $x \in [-2; 5]$ [–π/3; 4π/3] $cos(x) = -½$, $x \in [-4; 3]$ [–2π/3; 2π/3]
7. $tan(x) = 1$, $x \in [-1; 3]$ [π/4] $cot(x) = -\sqrt{3}/3$, $x \in [-2; 5]$ [–π/3; 2π/3]
8. $csc(x) = -\sqrt{2}$, $x \in [1; 4]$ [–π/4; 5π/4] $sec(x) = -1$, $x \in [-2; 3]$ [∅]
9. $cot(2x/3) = \sqrt{3}$, $x \in [-250°; 107°]$ [–225°, 45°] $sec(¾x) = 1$, $x \in [-2; 6]$ [0]
10. $csc(4x) = 1$, $x \in [100°; 245°]$ [112°30′; 202°30′] $sec(4x/3) = 1/\sqrt{2}$, $x \in [-24°; 68°]$ [33°45′]
11. $cos(2x) = -\sqrt{2}/2$, , $x \in [-110°; 312°]$ [–67°30′; 67°30′; 112°30′; 247°30′; 292°30′]
12. $sin(3x) = ½$, $x \in [-100°; 200°]$ [–70°; 10°; 50°; 130°; 170°] $tan(x/3) = \sqrt{3}$, $x \in [-100°; 105°]$ [∅]
13. $cos(3x) = -\sqrt{2}/2$, $x \in [-1; 3]$ [–π/4; π/4; 5π/12; 11π/12] $csc(½x) = 0$, $x \in [1; 4]$ [∅]
14. $sin(3/5x) = -½$, $x \in [-1; 2]$ [–5π/18] $cot(-2/5x) = 0$, $x \in [-2; 1]$ [∅]
15. $tan(2x) = -\sqrt{3}$, $x \in [-1; 3\pi]$ [–π/6; π/3; 5π/6; 4π/3; 11π/6; 7π/3; 17π/6]

Livello 2

16. $cos(2x + 10°) = -½$, $x \in [-48°; 215°]$ [55°; 115°]
17. $sin(32° - 2x) = \sqrt{2}/2$, $x \in [-75°; 48°]$ [–51°30′; –6°30′]
18. $tan(4x + 15°) = -1$, $x \in [-200°; -100°]$ [–195°; –105°; –50°]
19. $sec(2x + 15°) = 2$, $x \in [100°; 300°]$ [142°30′; 202°30′]
20. $cot(4x + 100°) = -\sqrt{3}/3$, $x \in [-50°; 100°]$ [–40°; 5°; 50°; 95°]
21. $cos(2 - 3x) = \sqrt{3}/2$, $x \in [-1; 2]$ $\left[\dfrac{12 \pm \pi}{18}\right]$
22. $sin(4x + 1) = ½$, $x \in [-3; 2]$ $\left[-\frac{1}{4}-\frac{17}{24}\pi; -\frac{1}{4}-\frac{13}{24}\pi; -\frac{1}{4}-\frac{5}{24}\pi; -\frac{1}{4}-\frac{1}{24}\pi; -\frac{1}{4}+\frac{7}{24}\pi; -\frac{1}{4}+\frac{11}{24}\pi\right]$

Nei seguenti esercizi i risultati sono approssimati ai secondi per difetto o per eccesso. I valori in radianti sono approssimati a due cifre decimali. Se le soluzioni sono più di sei, ne scriviamo il numero, quindi le prime e le ultime due.

Livello 2

23. $cos(4x - 51°) = 0,46$; $x \in [-100°; 112°]$ [–92°54'12"; –61°35'48"; –2°54'12"; 28°24'12"; 87°35'48"]
24. $sin(2x + 17°) = 0,32$; $x \in [-50°; 315°]$ [0°49'54"; 72°10'7"; 180°49'54"; 252°10'7"]
25. $sec(3x + 10°) = 1,37$; $x \in [-100°; 300°]$ [–17°42'24"; 11°2'24"; 102°17'36"; 131°2'24"; 222°17'36"; 251°2'24"]
26. $csc(3x - 54°) = -2,32$; $x \in [-10°; 305°]$ [9°29'20"; 86°30'40"; 129°29'20"; 206°30'40"; 249°29'20"]
27. $tan(3x + 25°) = 0,84$; $x \in [-521°; 217°]$ [x_1 = –474°59'24" ; x_2 = –414°59'24"; …; x_{12} = 185°0'36"]
28. $cot(32° - 2x) = 0,84$; $x \in [-20°; 501°]$ [1°44'19";91°44'19";181°44'19";271°44'19";361°44'19";451°44'19"]
29. $csc(5x + 32°) = -3,72$; $x \in [-251°; 62°]$ [–225°31'8"; –183°16'52";–153°31'8"; –111°16'52";–81°31'8";–39°16'52";–9°31'8";32°43'8"]
30. $tan(4x - 54°) = 3,47$; $x \in [-35°; 247°]$ [–13°1'9";31°58'52";76°58'52";121°58'52";166°58'52";211°58'52"]
31. $sin(3x + 28°) = -0,61$; $x \in [-213°; 105°]$ [–176°48'13";–141°51'47"; –56°48'13";–21°51'47"; 63°11'47";98°8'13"]
32. $cos(84° - 2x) = 0,64$; $x \in [-15°; 279°]$ [16°53'46"; 67°6'15"; 196°53'45"; 247°6'15"]
33. $sec(3x + 7°) = -4,51$; $x \in [-231°; 312°]$ [x_1 = –208°3'47"; x_2 = –156°36'13"; …; x_8 = 203°23'47"; x_9 = 271°56'13"]
34. $cot(2x - 49°) = 0,94$; $x \in [-50°; 302°]$ [–42°6'52"; 47°53'8"; 137°53'8"; 227°53'8"]
35. $cos(3x + 1) = -0,56$; $x \in [-1; 3]$ [–1,05; 0,39; 1,04; 2,48]
36. $sin(6x + 7) = -0,41$; $x \in [-1; 2]$ [–0,19; –0,57; 0,47; 0,86; 1,52; 1,90]
37. $cot(3x - 2) = 0,81$; $x \in [-2; 5]$ [−1,13; −0,08; 0,96; 2,01; 3,06; 4,10]
38. $sec(2x + 4) = 1,27$; $x \in [-4; 3]$ [–3,90; –3,24; –2,33; –1,67; –0,76; –0,10; 0,81; 1,47; 2,38]
39. $tan(3x + 2) = -0,78$; $x \in [-1; 5]$ [–0,89; 0,16; 1,21; 2,25; 3,30; 4,35]
40. $csc(2x + 1) = -3,12$; $x \in [1; 4]$ [–0,66; 1,23; 2,48] $cos(x/2 - 3) = 0,12$, $x \in [-\pi/2; 4\pi/3]$ [0,78]
41. $sin(3x/2 - 1,12) = -0,24$; $x \in [-3\pi/2; 7\pi/3]$ [–3,60; –1,19; 0,03; 0,59; 4,78; 7,19]
42. $csc(4x/5 + 2,12) = -5,02$; $x \in [-5\pi/4; 9\pi/2]$ [–2,90; 1,53; 4,95; 9,38; 12,81]
43. $sec(1,13x + 2,14) = -1,23$; $x \in [-\pi/5; \pi/8]$ [x_1 = –4,12; 0,34; …; x_{22} = 51,48; 55,94]
44. $cot(1 - 2x) = 3,41$; $x \in [-\pi/3; 2\pi/3]$ [0,36; 1,93]
45. $tan(3,14x + 2,31) = 2$; $x \in [-3\pi/2; 5\pi/3]$ [x_1 = –4,39; x_2 = –3,38; …; x_9 = 3,62; x_{10} = 4,62]

Lavoriamo insieme

Abbiamo visto che l'equazione $sin(5x - 25°) = 0,12$, $x \in [220°, 410°]$, ammetteva 6 soluzioni.
Se consideriamo un generico intervallo [30°, a], quanto deve essere a numero intero, affinché la data equazione abbia 10 soluzioni? Abbiamo visto che le soluzioni generali erano:

$$x \approx 6°22'42'' + k72° \text{ oppure } x \approx 39°37'18'' + k72°$$

Ora noi abbiamo $6°22'42'' + k72° \ge 30°$ se $k \ge 1$ e $39°37'18'' + k72° \ge 30°$ se $k \ge 0$. Essendo il periodo di entrambe le soluzioni pari a 72°, per avere altre 8 soluzioni, 4 dalla prima e 4 dalla seconda equazione, dobbiamo avere per la prima equazione $k = 5$ con la soluzione: $6°22'42'' + 5 \cdot 72° = 366°22'42''$ e $k = 4$ per la seconda con la soluzione: $39°37'18'' + 4 \cdot 72° = 327°37'18''$. Quindi il minimo valore intero a che risolve il problema è 367°.

Determinare il minimo valore del parametro positivo *a*, affinché le seguenti equazioni negli intervalli indicati i cui estremi sono sempre numeri interi, abbiano esattamente 5 soluzioni.

Livello 3

46. $cos(x) = \sqrt{3}/2$, $x \in [57°; a]$ [1150°] $sin(2x + 10°) = ½$, $x \in [40°; a + 2°]$ [428°]
47. $tan(2x + 1) = -1$, $x \in [-1; 3a + 2]$ [4/3] $cot(4x + 2) = 0$, $x \in [-2; 3a + 1]$ [1/3]
48. $csc(2x - 15°) = \sqrt{2}$, $x \in [a, 125°]$ [–285°] $sec(3x + 2) = -2$, $x \in [2a - 1; 6]$ [½]
49. $cos(3x + 10°) = 0,13$, $x \in [-a; 10°]$ [271°] $sin(2x + 1) = -0,3$, $x \in [-4a + 1; 3]$ [5/4]
50. $tan(x + 25°) = 2,13$, $x \in [-10°; 7a + 20°]$ [740/7] $cot(-2x + 1) = 3$, $x \in [-2a + 1; 3]$ [11/2]

51. $csc\left(\sqrt{2}\cdot x+15°\right)=3, x\in\left[2a+1°;125°\right]$ [–204°] $sec(¾x + 1{,}12) = –2{,}2$, $x \in [–2; 6a + 1]$ [3]

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere l'equazione $sin[sin(x)] = 0$. Si deve avere $sin(x)) = k\ 180°$ ∨ $sin(x) = k\pi$, a seconda che accettiamo la soluzione in gradi sessagesimali o in radianti.
Per evitare complicazioni lavoriamo in radianti, perché sono numeri puri più facili da trattare. L'equazione ha soluzione solo se $-1\le k\cdot\pi\le 1\Rightarrow \frac{-1}{\pi}\le k\le\frac{1}{\pi}$ e poiché $\frac{1}{\pi}\approx 0{,}32$ e k è un numero intero vi è una sola soluzione accettabile, cioè $k = 0$, quindi l'equazione data equivale all'equazione $sin(x) = 0$ e le soluzioni sono $x = k\pi$.

Risolvere le seguenti equazioni

Livello 3

52. $sin[cos(x)] = 0$ [$x = \pi/2 + k\pi$] $sin[tan(x)] = 0$ [$x = tan^{-1}(k\pi)$]
53. $cos[cos(x)] = 0$ [∅] $cos[sin(x)] = 0$ [∅] $cos[cos(x)] = 1$ [$x = k\pi$]
54. $tan[tan(x)] = 0$ [$x = tan^{-1}(k\pi) + h\pi$] $tan[sin(x)] = 0$ [$x = k\pi$]
55. $tan[sin(x)] = 1$ [$x = sin^{-1}(\pi/4) + 2k\pi \vee x = \pi - sin^{-1}(\pi/4) + 2k\pi$]
56. $cot[cos(x)] = -1$ [$x = \pm cos^{-1}(-\pi/4) + 2k\pi$] $tan\left(sin\left(x\right)\right)=-\sqrt{3}$ [∅]

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere la seguente equazione: $4sin^2(x - 1) - sin(x - 1) - 2 = 0$, $-3 \le x \le 3$.
Risolviamo l'equazione di II grado $sin\left(x-1\right)=\frac{1\pm\sqrt{1+32}}{8}=\frac{1\pm\sqrt{33}}{8}$.
Vediamo se i valori ottenuti sono accettabili, ossia rientrano nell'intervallo [–1; 1]. Abbiamo:

$$\frac{1-\sqrt{33}}{8}\approx -0{,}59;\frac{1\pm\sqrt{33}}{8}\approx 0{,}84$$

Entrambi sono accettabili. Dobbiamo allora risolvere le due equazioni

$$sin\left(x-1\right)=\frac{1-\sqrt{33}}{8}\Rightarrow x=1+sin^{-1}\left(\frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)+2k\pi\approx 0{,}37+2k\pi\vee$$

$$\vee x=1+\pi-sin^{-1}\left(\frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)+2k\pi\Rightarrow; x\approx 4{,}78+2k\pi$$

$$sin\left(x-1\right)=\frac{1+\sqrt{33}}{8}\Rightarrow x=1+sin^{-1}\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)+2k\pi\approx 2{,}00+2k\pi\vee$$

$$\vee x=1+\pi-sin^{-1}\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)+2k\pi\approx 3{,}14+2k\pi.$$

Vediamo adesso quante soluzioni rientrano nell'intervallo [–3; 3]. La prima famiglia di soluzioni ammette solo la soluzione 0,37; la seconda $4{,}78 - 2\pi \approx -1{,}50$; la terza 2,00 e l'ultima nessuna soluzione.

Risolvere le seguenti equazioni negli intervalli indicati.

Livello 1

57. $sin^2(x) = 1$; $x \in [-400°; 520°]$ [–270°; 90°; 450°] $cos^2(x) = ¼$; $x \in [-4; 5]$ [±π/3]
58. $tan^2(x) = 3$; $x \in [-1234°; 3456°]$ [$x_1 = -1140°$; $x_2 = -1020°$; …; $x_{13} = 3180°$; $x_{14} = 3300°$]
59. $cot^2(x) = 1$; $x \in [-2; 7]$ [–π/4; π/4; 3π/4; 5π/4; 7π/4] $sin^2(x) - sin(x) = 0$; $x \in [-4; 4]$ [–π; 0; π/2; π]
60. $sec^2(x) = 2$; $x \in [-2; 6]$ [–π/4; π/4; 3π/4; 5π/4; 7π/4]
61. $csc^2(x) = 4/3$; $x \in [-1000°; 50°]$ [–780°; –660°; –420°; –300°; –60°]
62. $cos^2(x) + 2cos(x) = 0$; $x \in [-40°; 525°]$ [90°; 270°; 450°]
63. $tan^2\left(x\right)-\sqrt{3}\cdot tan\left(x\right)=0, x\in\left[-1;5\right]$ [0; π/3; π; 4π/3] $\sqrt{3}csc^2\left(x\right)=2\cdot csc\left(x\right), x\in\left[-1;8\right]$ [π/3; 4π/3; 7π/3]

64. $3\cdot cot^2(x)=\sqrt{3}\cdot cot(x), x\in[-205°;754°]$ [$x_1 = -120°$; $x_2 = -90°$; $x_3 = 60°$; …; $x_9 = 600°$; $x_{10} = 630°$]

65. $sec^2(x) = 2sec(x)$; $x \in [-1002°; 615°]$ [–660°; –300°; 60°; 420°]

66. $4\cdot sin^2(x)+2\cdot(\sqrt{2}-1)\cdot sin(x)-\sqrt{2}=0; x\in[0;360°]$ [30°; 150°; 225°; 315°]

67. $2cos^2(x) + cos(x) - 1 = 0$, $x \in [-360°; 359°]$ [–330°; –180°; –30°; 30°; 180°; 330°]

68. $tan^2(x)-(\sqrt{3}-1)\cdot tan(x)-\sqrt{3}=0; x\in[-4;3]$ [–5π/4; –2π/3; –π/4; π/3; 3π/4]

69. $3\cdot cot^2(x)-4\cdot\sqrt{3}\cdot cot(x)+3=0, x\in[-3\pi;5\pi]$ [$x_1 = -17\pi/6$; $x_2 = -8\pi/3$;…; $x_{15} = 25\pi/6$; $x_{16} = 13\pi/3$]

70. $sec^2(x)+(\sqrt{2}-1)\cdot sec(x)-\sqrt{2}=0; x\in[-700°;400°]$

[$x_1 = -585°$; $x_2 = -495°$; $x_3 = -360°$; …; $x_7 = 225°$; $x_8 = 360°$]

71. $csc^2(x)+(\sqrt{2}+2)\cdot csc(x)+2\cdot\sqrt{2}=0; x\in[-5;3]$ [–5π/6; –3π/4; –π/4; –π/6]

Livello 2

72. $cos^2(x) + 6\cdot cos(x) - 1 = 0$; $x\in[412°; 625°]$ [≈530°39'39''] $4\cdot sin^2(x) - 5\cdot sin(x) - 3 = 0$; $x\in[125°; 236°]$ [∅]

73. $3\cdot csc^2(x) - 4\cdot csc(x) - 5 = 0$; $x\in[748°; 821°]$ [≈748°9'] $3\cdot sec^2(x) + 2\cdot sec(x) - 1 = 0$; $x\in[274°; 351°]$ [∅]

74. $6\cdot tan^2(x) - 3\cdot tan(x) - 7 = 0$; $x\in[421°; 652°]$ [499°20'53''; 486°21'12'']

75. $2\cdot cot^2(x) - 3\cdot cot(x) - 8 = 0$; $x\in[-245°; 306°]$

[–215°48'38''; –160°53'20''; –35°48'38''; 19°6'40''; 144°11'22''; 199°6'40'']

76. $sin^2(x) - 4cos(x) - 2 = 0$; $x\in[4; 6]$ [≈ 4;44] $3csc^2(x) + 4csc(x) + 1 = 0$; $x\in[-4; 8]$ [–π/2; 3π/2]

77. $cot^2(x) + 3\cdot cos(x) + 1 = 0$; $x\in[4; 9]$ [≈ 5;08; ≈ 5;92; ≈ 8;22]

78. $3\cdot cos^2(x) - 4\cdot sin(x) - 2 = 0$; $x\in[-1; 8]$ [≈ –0;90; ≈ 4;04; ≈ 5;38]

79. $6\cdot tan^2(x) + tan(x) - 1 = 0$; $x\in[1; 3]$ [≈2;68] $3\cdot csc^2(x) + 5\cdot csc(x) + 1 = 0$; $x\in[2; 5]$ [∅]

Livello 3

80. $5\cdot sin^2(2x + 1) + 3\cdot sin(2x + 1) - 1 = 0$; $x\in[-2; 1]$ [≈ –1,57; ≈ –1,00; ≈ –0,38; ≈ 0,95]

81. $2\cdot tan^2(4x - 3) - tan(4x - 3) - 3 = 0$; $x\in[-1; 2]$ $\left[\approx -0,58;\frac{12-5\pi}{16};\approx 0,21;\frac{12-\pi}{16};\approx 1,00;\frac{3\pi+12}{16};\approx 1,78\right]$

82. $3\cdot sec^2(2 - 3x) + 2\cdot sec(2 - 3x) - 2 = 0$; $x\in[-2; 1]$ [≈ –0,58; ≈ –0,18]

83. $2\cdot cos^2(3x + 2) - cos(3x + 2) - 2 = 0$; $x\in[-1; 3]$ [≈ 0,16; ≈ 0,61; ≈ 2,25; ≈ 2,70]

84. $3\cdot cot^2(5 - 3x) + 7\cdot cot(5 - 3x) - 1 = 0$; $x\in[-2; 1]$ [≈ –1,95; ≈ –1,35; ≈ –0,91; ≈ –0,30 ≈ 0,14; ≈ 0,75]

85. $4\cdot csc^2(2x + 1) + 5\cdot csc(2x + 1) + 1 = 0$; $x\in[-3; 2]$ [–π/4 – ½; ¾π – ½]

86. $6\cdot cos^2(2x + 32°) - 9\cdot cos(2x + 32°) + 2 = 0$; $x\in[-400°; 125°]$

[≈ –338°52'13''; ≈ –233°7'47''; ≈ –158°52'13''; ≈ –53°7'47''; ≈ 21°7'47'']

87. $8\cdot csc^2(3x - 47°) - 11\cdot csc(3x - 47°) + 3 = 0$; $x\in[-35°; 145°]$ [45°40']

88. $3\cdot cot^2(58° - 3x) + 7\cdot cot(58° - 3x) + 1 = 0$; $x\in[-205°; 178°]$

[13 soluzioni: ≈ –193°33'50''; ≈ –152°27'15''; …; ≈ 147°32'45'', ≈ 166°26'10'']

89. $3\cdot sin^2(2x + 15°) - 2\cdot sin(2x + 15°) - 3 = 0$; $x\in[-30°; 252°]$ [≈ 105°33'31''; ≈ 149°26'29'']

90. $6\cdot sec^2(2x + 35°) - 7\cdot sec(2x + 35°) + 1 = 0$; $x\in[-45°; 184°]$ [≈ –17°30'; ≈ 162°30']

91. $4\cdot tan^2(65° - 3x) - 7\cdot tan(65° - 3x) + 2 = 0$; $x\in[-38°; 124°]$

[≈ 3°34'29''; ≈ 15°4'25''; ≈ 63°34'29''; ≈ 75°4'25''; ≈ 123°34'29'']

92. $4\cdot cos^3(2x + 52°) - 4\cdot cos^2(2x + 52°) - cos(2x + 52°) + 1 = 0$; $x\in[-315°; 10°]$

[–266°30'; –236°30'; –206°30'; –176°30'; –146°30']

93. $2\cdot sin^3(4x - 2°) - 3\cdot sin^2(4x - 2°) + 1 = 0$; $x\in[-102°; 105°]$ [–97°; –67°; –37°; –7°; 83°]

94. $tan^3(3x + 2) - tan^2(3x + 2) + 3\cdot tan(3x + 2) - 3 = 0$; $x\in[-2; 2]$ $\left[\frac{-3\pi-8}{12};\frac{\pi-8}{12};\frac{5\pi-8}{12};\frac{9\pi-8}{12}\right]$

95. $cot^3(32° - 2x) + cot^2(32° - 2x) - 3\cdot cot(32° - 2x) - 3 = 0$; $x\in[-123°; 234°]$

[–89°; –59°; –51°30'; 1°;31°; 38°30'; 91°; 121°; 128°30'; 181°; 211°; 218°30']

96. $csc^4(1 - 3x) - 5\cdot csc^2(1 - 3x) + 4 = 0$; $x\in(1; 3)$

$\left[\frac{13\pi+6}{18};\frac{-7\pi+18}{18};\frac{11\pi+6}{18};\frac{3\pi+4}{12};\frac{5\pi+4}{12};\frac{7\pi+4}{12};\frac{9\pi+4}{12}\right]$

97. $4\cdot sec^3(4x - 15°) + 8\cdot sec^2(4x - 15°) - 3\cdot sec(4x - 15°) - 6 = 0$; $x\in(120°; 401°)$

[123°45'; 213°45'; 303°45'; 393°45']

98. $2 \cdot sin^3(4x - 3) - 1 = 0$; $x \in [-3; -1]$ [$\approx -2{,}16$; $\approx -1{,}84$; $\approx -0{,}26$]

99. $24 \cdot cos^3(5 - 3x) - 10 \cdot cos^2(5 - 3x) - 13 \cdot cos(5 - 3x) + 6 = 0$; $x \in (0; 3)$ [$\approx 0{,}38$; $\approx 2{,}47$; $\approx 2\ 95$]

100. $cot^4(2 + x) + cot^2(2 + x) - 6 = 0$; $x \in (1; 5)$ [$\approx 1{,}76$; $\approx 3{,}67$; $\approx 4{,}90$]

101. $20 \cdot tan^3(22° + x) + 47 \cdot tan^2(22° + x) - 37 \cdot tan(22° + x) + 6 = 0$; $x \in [-40°; 384°]$
[≈ −13°33'54"; ≈ −0°11'55"; ≈ 66°26'6'; ≈ 172°2'10"; ≈ 179°48'5"; ≈ 352°2'10"; ≈ 359°48'5"]

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere l'equazione: $sin(8x + 5) = cos(12 - x)$; $x \in [-6; 1]$.
Trasformiamo il coseno in seno (potremmo fare anche il viceversa): $sin(8x + 5) = sin(\pi/2 - 12 + x)$.
Adesso imponiamo la condizione che i seni siano uguali:

$$8x + 5 = \pi/2 - 12 + x + 2k\pi \vee 8x + 5 = \pi - (\pi/2 - 12 + x) + 2k\pi$$

Risolviamo le due equazioni:

$$7x = \pi/2 - 17 + 2k\pi \vee 9x = \pi/2 + 7 + 2k\pi \Rightarrow x = \pi/14 - 17/7 + 2/7k\pi \vee x = \pi/18 + 7/9 + 2/9k\pi$$

Vediamo quante soluzioni rientrano nell'intervallo indicato:

$$-6 \le \pi/14 - 17/7 + 2/7k\pi \le 1 \vee -6 \le \pi/18 + 7/9 + 2/9k\pi \le 1$$
$$-25/7 - \pi/14 \le 2/7k\pi \le 24/7 - \pi/14 \vee -61/9 - \pi/18 \le 2/9k\pi \le 2/9 - \pi/18$$
$$-25/(2\pi) - 1/4 \le k \le 12/\pi - 1/4 \vee -61/(2\pi) - 1/4 \le k \le 1 - \pi/4$$

Calcoliamo valori approssimati degli estremi:

$$-\frac{25}{2\pi} - \frac{1}{4} \approx -4{,}23; \frac{12}{\pi} - \frac{1}{4} \approx 3{,}57; -\frac{61}{2\pi} - \frac{1}{4} \approx -9{,}96; 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0{,}07$$

Quindi, tenuto conto del fatto che k deve essere intero abbiamo: $-4 \le k \le 3 \vee -9 \le k \le 0$.
Quindi la data equazione ha un totale di 8 + 10 = 18 soluzioni. Calcoliamone alcune:

$$x_1 = \frac{\pi}{14} - \frac{17}{7} + \frac{2}{7} \cdot (-4\pi) \approx -5{,}79; \ldots; x_8 = \frac{\pi}{14} - \frac{17}{7} + \frac{2}{7} \cdot 3\pi \approx 0{,}49;$$
$$x_9 = \frac{\pi}{18} + \frac{7}{9} + \frac{2}{9}(-9\pi) \approx -5{,}33; \ldots; x_{18} = \frac{\pi}{18} + \frac{7}{9} \approx 0{,}95.$$

Risolvere le seguenti equazioni negli intervalli indicati.

Livello **1**

102. $sin(5x - 25°) = sin(75° - 3x)$; $x \in [220°; 400°]$ [237°30'; 245°; 282°30'; 327°30'; 372°30']

103. $sec(8x - 68°) = sec(35° - 7x)$; $x \in [158°; 376°]$
[174°52'; 198°52'; 222°52'; 246°52'; 270°52'; 294°52'; 318°52'; 342°52'; 366°52']

104. $cos(3x - 47°) = cos(57° - 9x)$; $x \in [315°; 498°]$
[338°40'; 361°40'; 368°40'; 398°40'; 421°40'; 428°40'; 458°40'; 481°40'; 488°40']

105. $csc(6x+37°) = csc(29° - 4x)$; $x \in [235°; 428°]$ [251°12'; 237°; 287°12'; 323°12'; 359°12'; 395°12'; 417°]

106. $cot(9x + 14°) = cot(38° + 4x)$; $x \in [325°; 448°]$ [328°48'; 364°48'; 400°48'; 436°48']

107. $tan(6x - 58°) = tan(14° - 5x)$; $x \in [112°; 338°]$
[$x_1 \approx$ 121°5'27"; $x_2 \approx$ 137°27'16"; …; $x_{13} \approx$ 317°27'16"; $x_{14} \approx$ 333°49'5"]

108. $csc(7x+4) = csc(8 - 3x)$; $x \in [-3; 5]$ $\left[x_1 = \frac{2-5\pi}{5}, \ldots, x_{13} = \frac{7\pi+2}{5}, x_{14} = \frac{\pi-12}{4}, \ldots, x_{18} = \frac{9\pi-12}{4}\right]$

109. $sec(4x + 2) = sec(5 - 4x)$; $x \in [-4; 3]$ $\left[x_1 = \frac{3-10\pi}{8}, \ldots, x_6 = \frac{3}{8}, \ldots, x_9 = \frac{3+6\pi}{8}\right]$

110. $cos(5x+4)=cos(3 - 2x)$; $x \in [-5; 2]$ $\left[x_1 = \frac{-1-10\pi}{7}, \ldots, x_8 = \frac{4\pi-1}{7}, x_9 = \frac{-7-2\pi}{3}, \ldots, x_{12} = \frac{4\pi-7}{3}\right]$

111. $cot(5x + 3) = cot(4 + 2x)$; $x \in [-2; 6]$ $\left[x_1 = \frac{1-2\pi}{3}, x_2 = \frac{1-\pi}{3}, \ldots, x_8 = \frac{1+5\pi}{3}\right]$

112. $sin(2x + 7) = sin(5 - 4x)$; $x \in [-2; 5]$ $\left[x_1 = \frac{-1-\pi}{3}, \ldots, x_7 = \frac{5\pi-1}{3}, x_8 = \frac{12-\pi}{2}, \ldots, x_{10} = \frac{12-5\pi}{2}\right]$

113. $tan(8x + 2) = tan(11 - x)$; $x \in [-4; 2]$ $\left[x_1 = \frac{9-14\pi}{9}, x_2 = \frac{9-13\pi}{9}, \ldots, x_{17} = \frac{9+2\pi}{9}\right]$

Livello 2

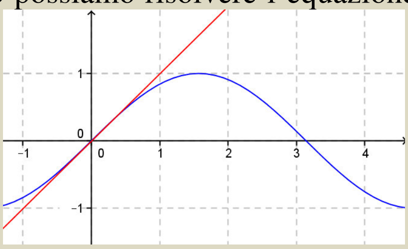
114. *tan*(7*x* + 94°) = *cot*(37° – 2*x*); *x*∈[320°; 520°] [351°48'; 387°48'; 423°48'; 459°48'; 495°48']
115. *sin*(7*x* + 12°) = *cos*(49° – 3*x*); *x*∈[250°; 450°] [264°42'; 277°15'; 300°42'; 336°42'; 367°15'; 372°42'; 408°42'; 444°42']
116. *cot*(7*x* – 34°) = *tan*(85° – 6*x*); *x*∈[210°; 380°] [219°]
117. *csc*(3*x* + 28°) = *sec*(67° – 7*x*); *x*∈[765°; 948°] [721°15'; 768°54'; 804°54'; 811°15'; 840°54'; 876°54'; 901°15'; 912°54']
118. *cos*(6*x* + 12°) = *sin*(32° – 8*x*); *x*∈[125°; 248°] [149°17'9''; 157°; 175°; 200°42'51''; 226°25'43'']
119. *sec*(7*x* – 64°) = *csc*(84°– 5*x*); *x*∈[180°; 370°] [184°50'; 214°50'; 215°; 244°50'; 274°50'; 304°50'; 334°50'; 364°50']
120. *tan*(6*x* – 7) = *cot*(4 + 3*x*); *x*∈[–5; 3] $\left[\frac{6-13\pi}{18},\frac{6-11\pi}{18},\ldots,\frac{6+\pi}{18},\frac{2+\pi}{6}\right]$
121. *cot*(4*x* – 2) = *tan*(3 + 5*x*); *x*∈[–2 ; 1] $\left[\frac{-2-9\pi}{18},\frac{-2-7\pi}{18},\ldots,\frac{-2+3\pi}{18},\frac{-2+5\pi}{18}\right]$
122. *sin*(9*x*+7)=*cos*(11 + *x*); *x*∈[–2; 2] $\left[x_1=\frac{\pi-36}{20},\ldots,x_6=\frac{21\pi-36}{20},x_7=\frac{8-11\pi}{14},\ldots,x_{11}=\frac{8+5\pi}{14}\right]$
123. *csc*(4*x* + 7) = *sec*(10 – *x*); *x*∈[–1; 3] $\left[\frac{9\pi-34}{6},\frac{13\pi-34}{6},\frac{6-3\pi}{10},\frac{6+\pi}{10},\frac{6+5\pi}{10}\right]$
124. *cos*(4*x* – 5) = *sin*(7 + 3*x*); *x*∈[–1 3] $\left[\frac{-3\pi-4}{14},\frac{\pi-4}{14},\ldots,\frac{13\pi-4}{14}\right]$

Livello 3

Senza risolvere le equazioni determinare quante soluzioni sono comprese negli intervalli indicati

125. *sin*(4*x*) = 0,73; *x*∈[0°; 360°] [8] *sin*(4*x*) = 0,23; *x*∈[0°; 300°] [7]
126. *sin*(4*x*) = 0,15; *x*∈[100°; 360°] [5] *sin*(10 – 2*x*) = –0,34; *x*∈[–100°; 100°] [3]
127. *cos*(170 + 2*x*) = 0,12; *x*∈[200°; 600°] [5] *cos*(4 – 3*x*) = –0,31; *x*∈[–5/6π; 5/6π] [5]
128. *tan*(*x* + 2) = 2,3; *x*∈[–2; 3] [2] *sec*(2*x* + 15°) = 2; *x*∈[–50°; 200°] [3]
129. *csc*(2 + *x*) = –3; *x*∈[–5; 3] [3] *cot*(25° – 2*x*) = –3; *x*∈[–10°; 400°] [2]

Lavoriamo insieme

Con l'aiuto dei grafici possiamo risolvere, almeno qualitativamente, anche equazioni non risolvibili con metodi analitici. Per esempio possiamo risolvere l'equazione *sin*(*x*) = *x*, rappresentando nello stesso grafico la sinusoide e la retta *y* = *x*. 

Facilmente si vede che i due grafici si incontrano nell'origine. Possiamo perciò concludere che l'equazione data ha l'unica soluzione *x* = 0.

Utilizzando le rappresentazioni grafiche dire quante e, se possibile, quali soluzioni hanno le seguenti equazioni goniometriche.

Livello 2

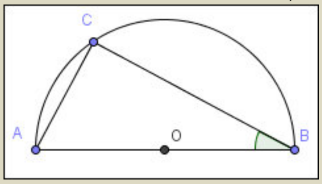
130. *cos*(*x*) = *x* [*x* ≈ 0,74] *tan*(*x*) = *x* [infinite] *sin*(*x*/2) = *x* [0] *cos*(2*x*) = *x* [*x* ≈ 0,50] *tan*(*x*) = *x* + 1 [infinite]
131. *sin*(*x*) = *x* – 1 [2] *cos*(*x*) = 2*x* – 1 [*x* ≈ 0,82] *sin*(2*x* + 1) = *x* [*x* ≈ 0,69] 3 + *sin*(*x*) = 2*x* – 1 [*x* ≈ 2,35]
132. *cos*(*x*/2 – 1) = 1 – *x* [*x* ≈ 0,33] *tan*(2*x*) = –*x* [infinite] 2*sin*(4*x* – 1) = 3*x* – 2 [*x* ≈ 0,33]
133. 1 + *cos*(*x*) = 3 – 2*x* [*x* ≈ 0,58] 2*tan*(*x*/3) = 3*x* [infinite] 1 – 3*sin*(*x*) = 2 + 3*x* [*x* ≈ – 0,17]

Livello 3

134. *cos*(*x*) = x^2 [*x* ≈ ±0,82] *tan*(*x*) = x^2 [infinite] *sin*(*x*) = x^2 [*x* ≈ 0,88] *cos*(*x*) = 1 – x^2 [*x* ≈ 0,74]
135. *tan*(2*x*) = x^2 + 1 [infinite] *sin*(*x* – 1) = x^2 – 1 [*x* ≈ –0,24] *cos*(*x*) = 1/*x* [infinite] *tan*(*x*) = 1/*x* [infinite]
136. *sin*(*x*) = 1/*x* [infinite] 1 + *cos*(2*x* – 1) = 2/*x* [infinite] 2*tan*(*x*) = 1 – 1/*x* [infinite] 2*sin*(3*x*) = 1/*x* [infinite]
137. *cos*(*x*) + *sin*(*x*) = *x* [*x* ≈ 1,26] *cos*(*x*) – *sin*(*x*) = *x* [*x* ≈ 0,46] *sin*(*x*) + *cos*(*x*) = x^2 [*x* ≈ –0,56 *x* ≈ 1,15]

Lavoriamo insieme

Data una semicirconferenza di diametro AB lungo 2, vogliamo determinare su di essa, se esiste, un punto C in modo che sia $\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}^2+\frac{2}{3}\cdot\overline{BC}^2=\frac{4}{3}$. Consideriamo la figura.



Abbiamo evidenziato uno dei due angoli acuti, che scegliamo come incognita, dato che esso ovviamente dipende dalla posizione di C sulla semicirconferenza. Possiamo allora trasformare la condizione data in un'equazione goniometrica, dato che, usando le proprietà sui triangoli rettangoli avremo, indicato con

$$\overline{AC}=\overline{AB}\cdot sin(x)=2\cdot sin(x);\overline{BC}=\overline{AB}\cdot cos(x)=2\cdot cos(x)\Rightarrow$$

$$A\hat{B}C=x:\quad \Rightarrow\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}^2+\frac{2}{3}\cdot\overline{BC}^2=\frac{4}{3}\Rightarrow\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{4}^2\cdot sin^2(x)+\frac{2}{3}\cdot 4\cdot cos^2(x)=\frac{4}{3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\cdot sin^2(x)+8\cdot cos^2(x)-4=0$$

L'equazione è risolvibile trasformando il seno in coseno o viceversa:

$$6\cdot sin^2(x)+8\cdot\left[1-sin^2(x)\right]-4=0\Rightarrow -2\cdot sin^2(x)+4=0\Rightarrow sin^2(x)-2=0$$

Facilmente si nota che l'equazione non ha alcuna soluzione, quindi neanche il problema ne ha. Se invece la richiesta fosse stata: $\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}^2-\frac{2}{3}\cdot\overline{BC}^2=\frac{4}{3}$, l'equazione da risolvere sarebbe stata:

$$6\cdot sin^2(x)-8\cdot\left[1-sin^2(x)\right]-4=0\Rightarrow 14\cdot sin^2(x)-12=0\Rightarrow sin^2(x)=\frac{6}{7}\Rightarrow sin(x)=\sqrt{\frac{6}{7}}$$

Abbiamo scelto solo il valore positivo poiché l'angolo deve ovviamente essere acuto, quindi un valore approssimato dell'angolo soluzione sarà: $sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{6}{7}}\right)\approx 67°47'32''$.

Risolvere i seguenti problemi nei quali si deve impostare e risolvere un'equazione goniometrica.

Livello **1**

138. In una circonferenza una corda è perpendicolare al diametro e lo divide in due parti che stanno nel rapporto 3/5. Determina l'ampiezza dell'angolo al centro che insiste sulla corda. [≈ 151°2'42"]
139. Determinare le misure degli angoli interni di un triangolo rettangolo di ipotenusa lunga 3,89 e di area 3,73. [≈ 49°48'8"; ≈ 40°11'52"]
140. Determinare la misura di uno degli angoli alla base α di un triangolo isoscele di perimetro 4,77 e lato obliquo 1,47. [≈ 51°30'17"]
141. Un triangolo isoscele di lato obliquo lungo 3,14 ha area 4,92. Quanto misura uno degli angoli alla base? [≈ 43°11'36" oppure ≈ 46°48'24"]
142. Su una semicirconferenza di diametro lungo 5,05, si scelga un punto C. Sia D la proiezione di C sulla tangente alla semicirconferenza in B. Se CD = 1,80, determinare $C\hat{A}B$. [≈36°39'25"]
143. Il rettangolo $ABCD$ ha lati AB = 1 e BC = 2. Sulla retta condotta perpendicolarmente al piano del rettangolo nel punto medio del lato BC prendiamo un punto V in modo che il piano dei punti V, B, C formi col piano di $ABCD$ un angolo x. Determinare x in modo che il volume della piramide di vertice V e base $ABCD$ sia pari a 3 unità cubiche. [≈ 36°52'12"]
144. Sia P un punto sull'arco AB, quarta parte di un cerchio di centro O e raggio r. Determinare la misura dell'angolo $A\hat{O}P$ in modo che l'area del triangolo isoscele OCP di base OP e con C appartenente al segmento OA, sia $1/3r^2$. [≈ 53°7'48"]
145. Siano A e B due punti sulla circonferenza di centro O e raggio r. Determinare la misura di $A\hat{O}B$ in modo che l'area del triangolo equilatero ABC sia r^2. [≈ 98°53'58"]

Livello **2**

146. In una circonferenza una corda forma con il diametro un angolo di 53° e lo divide nel rapporto 1/3. Determina l'ampiezza dell'angolo al centro che insiste sulla corda. [≈ 130°39'42"]

147. Sia D un punto sull'arco AB, quarta parte di un cerchio di centro O e raggio 4. Considera la proiezione ortogonale F di D sul raggio OB e il punto medio E del raggio OA. Determina la misura di $A\hat{O}D$ sapendo che $\overline{DE}^2 + \overline{DF}^2 = 17,22$. [≈ 39°05'31" ∨ ≈ 77°03'50"]

148. Sia P un punto sull'arco AB, quarta parte di un cerchio di centro O e raggio r. Determinare la misura dell'angolo $A\hat{O}P$ in modo che l'area del quadrilatero $OACP$ (C intersezione delle tangenti alla circonferenza in P e in A) sia $1/4r^2$. [≈ 28°4'21"]

149. In un triangolo rettangolo di ipotenusa lunga 7,75, la somma fra un cateto e la proiezione dello stesso cateto sull'ipotenusa è 4,82. Calcolare gli angoli acuti. [≈ 25°42'27"; ≈ 64°17'33"]

150. In un triangolo rettangolo di ipotenusa lunga 3,87, la differenza fra un cateto e la proiezione dello stesso cateto sull'ipotenusa è 0,87. Quanto misurano gli angoli acuti? [≈ 19°57'16,≈70°2'44" oppure ≈ 41°12'10",≈48°47'50"]

151. In un trapezio isoscele le diagonali sono perpendicolari ai lati obliqui. Determinare la misura dell'angolo che la detta diagonale forma con la base maggiore, sapendo che la base maggiore è lunga 6,77 e il perimetro è 16,90. [≈ 27°11'44" oppure ≈ 32°54']

152. Su una circonferenza di diametro AB lungo 4,32 cm, si consideri un punto C. Determinare la misura di $B\hat{A}C$ in modo che, detta D la proiezione di C sulla retta perpendicolare in B ad AB, si abbia $\overline{AC} + \overline{CD} = 4,86\ cm$. [≈ 81°34'44" oppure ≈ 31°23'59"]

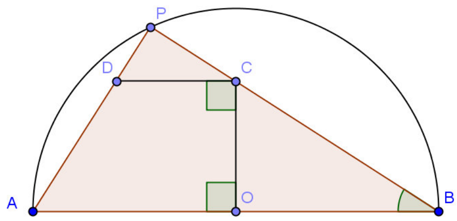
153. Data una semicirconferenza di diametro AB, sia un punto C su di essa e sia H la sua proiezione ortogonale su AB, determinare per quale valore dell'angolo $C\hat{A}B$, si ha $\dfrac{\overline{CB} + \overline{AH}}{\overline{AB} + \overline{HB}} = \dfrac{3}{4}$. [≈ 49°25'18"]

154. Il punto K è la proiezione sul diametro di un punto P su una semicirconferenza di diametro $AB = 2r$. Determinare la misura di $P\hat{A}B$ in modo che sia $AK + PB = 9/4r$. [≈ 8°25'16" oppure ≈ 58°36'1"]

155. Un cono è circoscritto a una sfera di raggio 1,4 cm. Determinare l'ampiezza dell'angolo di apertura del cono, in modo che il volume dello stesso cono valga 28,4 cm^3. [≈ 18°52'27" o ≈ 68°9'54"]

Livello 3

156. In figura, AB è lungo 6 cm, O è il centro della semicirconferenza, gli angoli in O e C sono retti. Determinare la misura di $A\hat{B}P$ in modo che sia $\overline{CD} = 1,91\ cm$. [≈ 31°04'49"]



157. Dato il triangolo rettangolo ABC, dal punto medio M dell'ipotenusa AB si tracci la perpendicolare al cateto BC che lo incontra nel punto D. Determinare la misura di $A\hat{B}C$ in modo che sia $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = 3 \cdot \dfrac{\overline{MD}}{\overline{BC}}$. [≈ 24°41'34"]

158. Con riferimento al precedente quesito se si ha $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = p \cdot \dfrac{\overline{MD}}{\overline{BC}}$, con p numero reale positivo, qual è il massimo valore che può assumere p? [4]

Equazioni omogenee in seno e coseno

Un altro tipo di equazioni facilmente risolvibili sono le cosiddette equazioni omogenee in seno e coseno. Poniamo una definizione.

Definizione 1

Un'equazione del tipo $a \cdot sin[f(x)] + b \cdot cos[f(x)] = 0$, si chiama **equazione omogenea di I grado in seno e coseno.**
Un'equazione del tipo $a \cdot sin^2[f(x)] + b \cdot sin[f(x)] \cdot cos[f(x)] + c \cdot cos^2[f(x)] = 0$, si chiama **equazione omogenea di II grado in seno e coseno.**

Vediamo perché questo tipo di equazioni si risolve abbastanza semplicemente.

Esempio 8

Vogliamo risolvere l'equazione $3 \cdot sin(4x + 1) - 5 \cdot cos(4x + 1) = 0$. Osserviamo che né le soluzioni dell'equazione $sin(4x + 1) = 0$, né quelle dell'equazione $cos(4x + 1) = 0$, sono soluzioni dell'equazione data. Infatti quando si annulla il seno non si annulla il coseno e viceversa. Ciò significa che possiamo dividere per $sin(4x + 1)$ o per $cos(4x + 1)$, ottenendo così una delle due equazioni equivalenti:

$$3 \cdot tan(4x + 1) - 5 = 0 \vee 3 - 5 \cdot cot(4x + 1) = 0.$$

Risolviamo la prima: $tan(4x + 1) = 5/3 \Rightarrow 4x + 1 = tan^{-1}(5/3) + k\pi \Rightarrow 4x + 1 \approx 1{,}03 + k\pi \Rightarrow x \approx 0{,}01 + k\pi/4$
Uguale risultato avremmo ottenuto risolvendo l'altra equazione.

Vediamo adesso un esempio di equazione di II grado omogenea.

Esempio 9

Vogliamo risolvere l'equazione $7 \cdot sin^2(3x - 10°) + 4 \cdot sin(3x - 10°) \cdot cos(3x - 10°) = 0$. Stavolta non possiamo dividere per $sin(3x - 10°)$, poiché in tal modo verremmo a perdere delle soluzioni. Quindi trattiamo la detta equazione come se fosse una spuria di II grado, ossia mettiamo in evidenza il fattore comune e applichiamo il principio di annullamento del prodotto: $sin(3x - 10°) \cdot [7 \cdot sin(3x - 10°) + 4 \cdot cos(3x - 10°)] = 0 \Rightarrow$

$$sin(3x - 10°) = 0 \vee 7 \cdot sin(3x - 10°) + 4 \cdot cos(3x - 10°) = 0$$

In tal modo dobbiamo risolvere due equazioni, la seconda delle quali è una omogenea di I grado.

$$sin(3x - 10°) = 0 \Rightarrow 3x - 10° = k \cdot 180° \Rightarrow x = 3°20' + k \cdot 60°$$

$$7 \cdot tan(3x - 10°) + 4 = 0 \Rightarrow 3x - 10° \approx -29°44'42'' + k \cdot 180° \Rightarrow x \approx -6°34'54'' + k \cdot 60°$$

Invece l'equazione $7 \cdot sin^2(3x - 10°) + 4 \cdot sin(3x - 10°) \cdot cos(3x - 10°) + cos^2(3x - 10°) = 0$, la risolviamo dividendo per $cos^2(3x - 10°) = 0$ o per $sin^2(3x - 10°)$.
Nel primo caso $7 \cdot tan^2(3x - 10°) + 4 \cdot tan(3x - 10°) + 1 = 0$, è priva di soluzioni reali, avendo il discriminante negativo. Ovviamente anche dividendo per $sin^2(3x - 10°)$ avremmo ottenuto un'equazione diversa, ma equivalente e quindi priva di soluzioni reali.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Risolviamo l'equazione omogenea di I grado in seno e coseno:

$$3 \cdot sin(7x + 2) - 2 \cdot cos(7x + 2) = 0, x \in (-2; 1)$$

Dividiamo per $cos(7x + 2)$, i cui zeri non sono soluzione dell'equazione:

$$3 \cdot tan(7x + 2) - 2 = 0 \Rightarrow tan(7x + 2) = 2/3 \Rightarrow 7x + 2 \approx 0{,}196 + k\pi \Rightarrow x \approx -0{,}26 + k\pi/7$$

Adesso si tratta di vedere quali soluzioni appartengono all'intervallo indicato.

$$-2 < -0{,}26 + k\pi/7 < 1 \Rightarrow -1{,}74 < k\pi/7 < 1{,}26 \Rightarrow -3 \le k \le 2$$

Abbiamo tenuto conto che k deve essere un numero intero.
Quindi vi sono 6 soluzioni: $x_1 \approx -1{,}6$; $x_2 \approx -1{,}16$; $x_3 \approx -0{,}71$; $x_4 \approx -0{,}26$; $x_5 \approx 0{,}19$; $x_6 \approx 0{,}64$.

Risolvere le seguenti equazioni omogenee di I grado in seno e coseno

Livello 1

1. $sin(x) - cos(x) = 0; x \in [120°; 210°]$ [$\varnothing$] $sin(x) + cos(x) = 0; x \in [-120°; 107°]$ [–45°]
2. $\sqrt{3} \cdot sin(x) - cos(x) = 0, x \in [-2; 3]$ [π/6] $sin(x) + \sqrt{3} \cdot cos(x) = 0, x \in [-4; 2]$ [–π/6]
3. $\sqrt{3} \cdot sin(x) + cos(x) = 0, x \in [-150°; 270°]$ [–30°; 150°]
4. $2sin(x) + 5cos(x) = 0; x \in [-15°; 1250°]$
[≈ 111°48'5"; ≈ 291°48'5"; ≈ 471°48'5"; ≈ 651°48'5"; ≈ 831°48'5"; ≈ 1011°48'5"; ≈ 1191°48'5"]
5. $sin(x) - 3cos(x) = 0; x \in [157°; 501°]$ [≈ 251°33'54"; ≈ 431°33'54"]
6. $4sin(x) - 3cos(x) = 0; x \in [-1; 2]$ [$tan^{-1}(3/4) \approx 0,64$] $3sin(x) - cos(x) = 0; x \in [-1; 5]$ [≈ 0,32; ≈ 3,46]
7. $\sqrt{2} \cdot sin(x) + cos(x) = 0, x \in [-1; 2]$ $\left[tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx -0,62\right]$

Livello 2

8. $sin(3x - 12°) - 2cos(3x - 12°) = 0; x \in [220°; 410°]$ [≈ 265°8'42"; ≈ 325°8'42"; ≈ 385°8'42"]
9. $6sin(7x + 4°) - 8cos(7x + 4°) = 0; x \in [213°; 453°]$
[$x_1 \approx$ 238°26'50"; $x_2 \approx$ 264°9'41"; … ; $x_8 \approx$ 418°26'50"; $x_9 \approx$ 444°9'41"]
10. $4 \cdot sin(3x + 23°) + 9 \cdot cos(3x + 23°) = 0; x \in [125°; 246°]$ [≈ 150°19'15"; ≈ 210°19'15"]
11. $sin(2x - 47°) + cos(2x - 47°) = 0; x \in [145°; 215°]$ [181°]
12. $3sin(4x + 15°) - 2cos(4x + 15°) = 0; x \in [247°; 384°]$ [≈ 274°40'21"; ≈ 319°40'21"; ≈ 364°40'21"]
13. $sin(7x - 5) + cos(7x - 5) = 0; x \in [1; 2]$ $\left[\frac{3\pi + 20}{28}; \frac{7\pi + 20}{28}; \frac{11\pi + 20}{28}\right]$
14. $sin(3x - 4) - 4cos(3x - 4) = 0; x \in [-2; 3]$ [≈ –1,37; ≈ –0,32; ≈ 0,73; ≈ 1,78; ≈ 2,82]
15. $3sin(5x - 3) + 5cos(5x - 3) = 0; x \in [1; 6]$ [≈ 1,02; ≈ 1,65; ≈ 2,28; ≈ 2,91; ≈ 3,54; ≈ 4,16; ≈ 4,79; ≈ 5,42]
16. $4sin(3x - 1) - 5cos(3x - 1) = 0; x \in [-2; 4]$ [≈ –1,46; ≈ –0,42; ≈ 0,63; ≈ 1,68; ≈ 2,73; ≈ 3,77]
17. $-2sin(7 - 2x) + 7cos(7 - 2x) = 0; x \in [-3; 4]$ [≈ –1,86; ≈ –0,29; ≈ 1,29; ≈ 2,85]

Lavoriamo insieme

L'equazione $sin^2(x) - 3sin(x)cos(x) + 4cos^2(x) - 2 = 0$, non è omogenea in seno e coseno a causa della presenza del termine noto. Però noi sappiamo che in goniometria vale la seguente identità, per qualsiasi angolo x: $sin^2(x) + cos^2(x) = 1$, pertanto possiamo riscrivere la data equazione nel seguente modo equivalente:

$$sin^2(x) - 3sin(x)cos(x) + 4cos^2(x) - 2 \cdot [sin^2(x) + cos^2(x)] = 0 \Rightarrow sin^2(x) + 3sin(x)cos(x) - 2cos^2(x) = 0$$

che adesso è un'equazione omogenea e possiamo perciò risolverla con il consueto metodo:

$$tan^2(x) + 3tan(x) - 2 = 0 \Rightarrow tan(x) = \frac{-3 \pm \sqrt{9+8}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2} \Rightarrow x \approx 0,51 + k \cdot \pi \vee x \approx -1,30 + k \cdot \pi$$

Risolvere le seguenti equazioni omogenee, o riconducibili a esse, di II grado in seno e coseno, negli intervalli indicati.

Livello 1

18. $sin^2(x) - 2sin(x) \cdot cos(x) + cos^2(x) = 0, x \in [-1; 3]$ [± π/4; 3π/4]
19. $sin^2(x) + 3sin(x) \cdot cos(x) = 0, x \in [-2; 2]$ [≈ –1,25; 0; ≈ 1,89]
20. $3sin^2(x) - 4sin(x) \cdot cos(x) - cos^2(x) = 0, x \in [-107°; 318°]$
[≈ –12°8'51"; ≈ 12°8'51"; ≈ 167°51'9"; ≈ 192°8'51"]
21. $5sin(x) \cdot cos(x) + 3cos^2(x) = 0, x \in [-310°; 357°]$
[–270°; ≈ –210°57'50"; –90°; ≈ –30°57'50"; 90°; ≈ 149°2'10"; 270°; ≈ 329°2'10"]
22. $4sin^2(x) - cos^2(x) = 0, x \in [-5; -3]$ [≈ –3,6]
23. $3sin^2(x) - sin(x) \cdot cos(x) + cos^2(x) = 0, x \in [-218°; 431°]$ [$\varnothing$]
24. $5sin^2(x) + 7sin(x) \cdot cos(x) + cos^2(x) = 0, x \in [-4; 0]$ [≈ –3,3; ≈ –0,89]
25. $sin^2(x) - 7sin(x) \cdot cos(x) + 10cos^2(x) = 0, x \in [-411°; 312°]$
[$x_1 \approx$ –296°33'54; $x_2 \approx$ –288°26'6";…; $x_7 \approx$ 243°26'56"; $x_8 \approx$ 251°33'54"]
26. $sin^2(x) - 5sin(x) \cdot cos(x) + 6cos^2(x) = 0, x \in [2; 5]$ [≈ 2,25; ≈ 4,39]

27. $sin^2(x) - 5sin(x) \cdot cos(x) + 6cos^2(x) = 0$, $x \in [-201°; 3°]$ [≈ −99°27'44"; −45°]

Livello 2

28. $sin^2(3x - 11°) - sin(3x - 11°) \cdot cos(3x - 11°) = 0$, $x \in [-45°; 140°]$
[≈ −11°20'; ≈ 3°40'; ≈ 48°40'; ≈ 108°40'; 123°40']

29. $sin^2(2x - 5) - 6cos^2(2x - 5) = 0$, $x \in [-1; 3]$ [≈ –0,05; ≈ 0,34; ≈ 1,52]

30. $3sin(5x - 12°) \cdot cos(5x - 12°) + cos^2(5x - 12°) = 0$, $x \in [-25°; 34°]$ [−15°36'; ≈ −1°17'14"]

31. $sin^2(1 - 2x) - 2sin(1 - 2x) \cdot cos(1 - 2x) - cos^2(1 - 2x) = 0$, $x \in [-2; 3]$
[≈ –1,66; ≈ –0,87; ≈ –0,09; ≈ 0,70; ≈ 1,48; ≈ 2,27]

32. $sin^2(17° - 3x) - 5sin(17° - 3x) \cdot cos(17° - 3x) + 2cos^2(17° - 3x) = 0$, $x \in [-25°; 137°]$
[≈ 39°47'18"; ≈ 57°46'30"; ≈ 99°47'18"; ≈ 117°46'30"]

33. $sin^2(x) + 4sin(x) \cdot cos(x) + cos^2(x) = 3$; $x \in [120°; 310°]$ [225°]

34. $-sin^2(x) - 2sin(x) \cdot cos(x) + cos^2(x) = -1$; $x \in [4; 6]$ [3π/2; 7π/4]

35. $cos^2(x) + 2sin(x) \cdot cos(x) - sin^2(x) = 4$; $x \in [230°; 465°]$ [∅]

36. $cos^2(x) + 2sin(x) \cdot cos(x) - sin^2(x) = -2$; $x \in [3; 7]$ [∅]

37. $-sin^2(x) + 4sin(x) \cdot cos(x) + 6 \cdot cos^2(x) = 3$; $x \in [304°; 415°]$ [≈ 333°26'6"]

38. $-sin^2(x) - 2sin(x) \cdot cos(x) + 5 \cdot cos^2(x) = 4$; $x \in [2; 6]$ [≈ 2,54; ≈ 3,42; ≈ 5,68]

39. $-sin^2(x) + 4sin(x) \cdot cos(x) - cos^2(x) = -3$; $x \in [2; 5]$ [¾π]

Livello 3

40. $2sin^2(2x - 1) - 3sin(2x - 1) \cdot cos(2x - 1) + cos^2(2x - 1) - 2 = 0$, $x \in [-2; 1]$ [≈ –1,23]

41. $3sin^2(4x - 1) - sin(4x - 1) \cdot cos(4x - 1) + 2cos^2(4x - 1) - 3 = 0$, $x \in [-3; 2]$ $\left[\frac{4-13\pi}{16};\frac{4-9\pi}{16};...;\frac{4+7\pi}{16}\right]$

42. $4sin^2(5x - 1) + 2sin(5x - 1) \cdot cos(5x - 1) - 4cos^2(5x - 1) - 3 = 0$, $x \in [2; 3]$
[≈ 2,05; ≈ 2,29; ≈ 2,45; ≈ 2,53; ≈ 2,68; ≈ 2,91]

43. $3sin^2(2x + 1) - sin(2x + 1) \cdot cos(2x + 1) + 4cos^2(2x + 1) - 1 = 0$, $x \in [-3; 4]$ [∅]

44. $sin^2(3x + 2) - 6sin(3x + 2) \cdot cos(3x + 2) + cos^2(3x + 2) + 2 = 0$, $x \in [2; 5]$ $\left[\frac{11\pi-8}{12};\frac{15\pi-8}{12};\frac{19\pi-8}{12}\right]$

45. $sin^2(4x - 1) - sin(4x - 1) \cdot cos(4x - 1) - 4cos^2(4x - 1) + 3 = 0$, $x \in [-3; 2]$ [≈ –2,98; ≈ –2,75; –2,20]

46. $sin^2(7x - 15°) - 4sin(7x - 15°) \cdot cos(7x - 15°) + 2cos^2(7x - 15°) - 3 = 0$, $x \in [-24°; 57°]$
[≈ −6°22'37"; ≈ −0°11'21"; ≈ 19°20'14"; ≈ 25°31'30"; ≈ 45°3'6"; ≈ 51°14'21"]

47. $4sin^2(2x + 34°) + sin(2x + 34°) \cdot cos(2x + 34°) - 8cos^2(2x + 34°) - 1 = 0$, $x \in [-248°; 71°]$
[−228°9'44"; ≈ −168°13'10"; ≈ −138°9'44"; ≈ −78°13'10"; ≈ −48°9'44"; ≈ 11°46'50"; ≈ 41°50'16"]

48. $3sin^2(5x + 41°) - sin(5x + 41°) \cdot cos(5x + 41°) + 2cos^2(5x + 41°) - 3 = 0$, $x \in [102°; 151°]$ [126°48']

49. $sin^2(3x - 25°) - 4sin(3x - 25°) \cdot cos(3x - 25°) - cos^2(3x - 25°) - 1 = 0$, $x \in [-2°; 418°]$
[≈ −0°31'18"; ≈ 59°28'42"; ≈ 119°28'42";…; ≈ 359°28'42'}]

50. $5sin^2(6° - 2x) - sin(6° - 2x) \cdot cos(6° - 2x) - 5cos^2(6° - 2x) + 3 = 0$, $x \in [2°; 108°]$
[≈ 78°14'12"; ≈ 104°54'29"]

51. $4sin^2(4x + 18°) - sin(4x + 18°) \cdot cos(4x + 18°) - 3cos^2(4x + 18°) - 1 = 0$, $x \in [-112°; 17°]$
[−105°45'; ≈ −81°13'3"; −60°45'; ≈ −36°13'3"]

52. $sin^3(x) + 2sin^2(x) \cdot cos(x) + sin(x) \cdot cos^2(x) - 4\,cos^3(x) = 0$, $x \in [-100°; 150°]$ [45°]

Lavoriamo insieme

L'equazione $2sin^4(x) - sin^2(x)cos^2(x) - cos^4(x) = 0$, è ancora un'equazione omogenea, di IV grado stavolta. Il procedimento risolutivo è simile ai precedenti, dando luogo alla risoluzione di un'equazione biquadratica.

$$2\cdot tan^4(x) - tan^2(x) - 1 = 0 \Rightarrow tan^2(x) = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4} = \frac{1\pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

La soluzione negativa non è ovviamente accettabile, pertanto dobbiamo risolvere solo l'equazione:

$$tan^2(x) = 1 \Rightarrow tan(x) = \pm 1 \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k\cdot\pi = \frac{\pi}{4} + k\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Risolvere le seguenti equazioni omogenee, o riconducibili a esse, di IV grado in seno e coseno

Livello 2

53. $sin^4(x) - sin^2(x) \cdot cos^2(x) = 0, x \in [320°; 530°]$ $[360°; 405°]$
54. $sin^4(x) - cos^4(x) = 0; x \in [750°; 876°]$ $[765°; 855°]$
55. $2sin^2(x) \cdot cos^2(x) + cos^4(x) = 0; x \in [624°; 748°]$ $[630°]$
56. $2cos^4(x) - sin^2(x) \cdot cos^2(x) + 3 \cdot sin^4(x) = 0; x \in [578°; 749°]$ $[\varnothing]$
57. $sin^4(x) - 2 \cdot sin^2(x) \cdot cos^2(x) - 3 \cdot cos^4(x) = 0; x \in [647°; 842°]$ $[660°; 780°; 840°]$
58. $sin^4(x) + sin^2(x) \cdot cos^2(x) - 5 \cdot cos^4(x) = 0; x \in [-2; 3]$ $[\approx -0,93; \approx 0,93; \approx 2,21]$
59. $3sin^4(x) + sin^2(x) \cdot cos^2(x) - 2 \cdot cos^4(x) = 0; x \in [3; 5]$ $[\approx 3,83]$
60. $4cos^4(x) - sin^2(x) \cdot cos^2(x) - 5 \cdot sin^4(x) = 0; x \in [4; 7]$ $[\approx 5,44]$
61. $3sin^4(x) + 5 \cdot sin^2(x) \cdot cos^2(x) - cos^4(x) = 0; x \in [0; 2]$ $[\approx 0,40]$
62. $4sin^4(x) + cos^4(x) = 0; x \in [-4; 7]$ $[\varnothing]$

Lavoriamo insieme

L'equazione $2sin^4(x) - sin^2(x) \cdot cos^2(x) - cos^4(x) = 3$, non è un'equazione omogenea di IV grado, ma può ricondursi a essa mediante una procedura simile a quella mostrata per le omogenee di II grado.

$$2sin^4(x) - sin^2(x) \cdot cos^2(x) - cos^4(x) - 3 \cdot [sin^2(x) + cos^2(x)]^2 = 0 \Rightarrow$$
$$2sin^4(x) - sin^2(x) \cdot cos^2(x) - cos^4(x) - 3 \cdot [sin^4(x) + cos^4(x) + 2sin^2(x) \cdot cos^2(x)] = 0 \Rightarrow$$
$$sin^4(x) + 7sin^2(x) \cdot cos^2(x) + 4cos^4(x) = 0 \Rightarrow tan^4(x) + 7tan^2(x) + 4 = 0 \Rightarrow$$
$$tan^2(x) = \frac{-7 \pm \sqrt{49-16}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{33}}{2}$$

Stavolta entrambe le soluzioni sono negative, quindi l'equazione non ha soluzioni.

Livello 3

63. $9sin^4(x) - 13sin^2(x) \cdot cos^2(x) - 10cos^4(x) = 2; x \in [30°; 340°]$ $[120°; 240°; 300°]$
64. $14sin^4(x) + 6 \cdot sin^2(x) \cdot cos^2(x) = 5; x \in [75°; 476°]$ $[135°; 225°; 315°; 405°]$
65. $15sin^4(x) + 11sin^2(x) \cdot cos^2(x) + 6cos^4(x) = 8; x \in [-62°; 348°]$ $[45°; 135°; 225°; 315°]$
66. $3sin^4(x) - sin^2(x) \cdot cos^2(x) = 1; x \in [130°; 405°]$ $[\approx 233°9'12''; \approx 306°50'48'']$
67. $sin^4(x) + 7sin^2(x) \cdot cos^2(x) - 6cos^4(x) = -2 \; ; x \in [-367°; 42°]$ $[-210°; -330°; -150°]$
68. $7sin^4(x) + 16sin^2(x) \cdot cos^2(x) - 15cos^4(x) = 6; x \in [1; 5]$ $[\pi/3; 2\pi/3; 4\pi/3]$
69. $4sin^4(x) + cos^4(x) = 1; x \in [-1; 2]$ $[\approx \pm 0,68]$ $3sin^4(x) - cos^4(x) + 1 = 0; x \in [-2; 2]$ $[\approx \pm 0,90]$
70. $-17cos^4(x) - 2sin^2(x) \cdot cos^2(x) - sin^4(x) = -2; x \in [-4; 0]$ $[-7\pi/6; -5\pi/6]$
71. $3sin^4(x) + sin^2(x) \cdot cos^2(x) - 2 = 0; x \in [-1; 3]$ $[\approx \pm 1,08; \approx 2,06]$
72. $-5sin^4(2x - 15°) - 5sin^2(2x - 15°) \cdot cos^2(2x - 15°) + 2cos^4(2x - 15°) = -2 \; ; x \in [-78°; 191°]$
$[-60°; -15°; 30°; 75°; 120°; 165°]$
73. $sin^4(11° - 3x) + 3sin^2(11° - 3x) \cdot cos^2(11° - 3x) - 2cos^4(11° - 3x) = 1; x \in [35°; 150°]$
$[43°40'; 83°40'; 93°40'; 103°40'; 143°40]$
74. $5sin^4(25° - 4x) + sin^2(25° - 4x) \cdot cos^2(25° - 4x) + cos^4(25° - 4x) = 3; x \in [-16°; 82°]$
$[\approx 36°24'33''; \approx 66°5'27''; \approx 81°24'33'']$
75. $3cos^4(72° + 3x) - sin^2(72° + 3x) \cdot cos^2(72° + 3x) + 2sin^4(72° + 3x) + 3 = 0; x \in [-17°; 91°]$ $[\varnothing]$
76. $4sin^4(5x + 47°) + sin^2(5x + 47°) \cdot cos^2(5x + 47°) - 3cos^4(5x + 47°) + 2 = 0; x \in [-66°; 42°]$
$[\approx -49°50'30''; \approx -40°57'30''; \approx -13°50'30''; \approx -4°57'30''; \approx 22°9'30''; \approx 31°2'30'']$
77. $sin^4(2 - 2x) + sin^2(2 - 2x) \cdot cos^2(2 - 2x) - 4cos^4(2 - 2x) = -2; x \in [-3; 1]$
$$\left[\frac{12-13\pi}{12}; \frac{12-11\pi}{12}; \frac{12-7\pi}{12}; \frac{12-5\pi}{12}; \frac{12-\pi}{12}\right]$$
78. $3sin^4(3x + 2) + 6sin^2(3x + 2) \cdot cos^2(3x + 2) - 5cos^4(3x + 2) - 1 = 0; x \in [-1; 2]$
$$\left[\frac{-\pi-8}{12}; \frac{\pi-8}{12}; \frac{3\pi-8}{12}; \ldots; \frac{9\pi-8}{12}\right]$$
79. $2cos^4(3x - 2) - 16 \cdot sin^2(3x - 2) \cdot cos^2(3x - 2) + 2sin^4(3x - 2) + 3 = 0 \; ; x \in [-2; 1]$
$$\left[\frac{8-9\pi}{12}; \frac{8-7\pi}{12}; \ldots; \frac{8+\pi}{12}\right]$$
80. $sin^4(x + 5) - cos^4(x + 5) + 3 = 0; x \in [-3; 0]$ $[\varnothing]$

81. $sin^4(2x-3) + 3sin^2(2x-3) \cdot cos^2(2x-3) + 5cos^4(2x-3) = 2;\ x \in [-2; 2]$ [≈ –1,22; ≈ –0,47; ≈ 0,35]

Risolvere i seguenti problemi nei quali deve impostarsi e risolvere un'equazione omogenea.

Livello 2

82. Data una semicirconferenza di diametro AB lungo 1, determinare su di essa un punto C in modo che sia $\frac{7}{4}\cdot\overline{AC}^2 - \frac{1}{2}\cdot\overline{BC}^2 = \frac{5}{4}$. [β ≈ 61°52'28"]

83. Nel triangolo rettangolo ABC di ipotenusa lunga 4,84 cm, si tracci l'altezza CH. Determinare la misura di $A\hat{B}C$ in modo che sia $\overline{CH} + \overline{BH} = 3{,}07$. [≈ 62°01'33"]

84. Nel trapezio rettangolo ABCD, la diagonale AC è perpendicolare al lato obliquo BC, la base maggiore AB è lunga 5,25. Determinare il valore dell'angolo formato da AB e BC in modo che sia $\overline{BC}^2 + 2\cdot\overline{CD} - 3\cdot\overline{AD} = 0{,}33$. [≈ 25°54'7" ∨ ≈ 45°39'47"]

85. Determinare l'ampiezza dell'angolo di apertura di un cono di altezza 3,25, in modo che la superficie laterale del cono valga 49,5 cm^2. [≈ 128°2'59"]

86. In una semicirconferenza di diametro AB lungo $2r$, sia un punto P, di cui M è la proiezione su AB. Determinare la misura di $P\hat{A}M$ in modo che la somma del quadruplo di AM con il doppio di MP sia $3r$. [≈ 64°44'35"]

87. Traccia la tangente t nel punto B alla semicirconferenza di diametro AB. Sia C un punto sulla semicirconferenza. D la sua proiezione su AB ed E quella su t , determina la misura di $C\hat{A}B$ in modo che sia $\overline{CD} + \overline{CE} = 4{,}35\cdot\overline{AD}$. [≈ 58°42'03"]

88. Dato il triangolo ABC inscritto in una semicirconferenza di diametro AB, si tracci la perpendicolare in B e sia D l'intersezione di essa con il prolungamento del cateto AC. Determinare la misura di $A\hat{B}C$ in modo che sia $2\cdot\overline{CD} + 3\cdot\overline{BC} = 4\cdot\overline{AC}$. [≈ 49°36'34"]

Livello 3

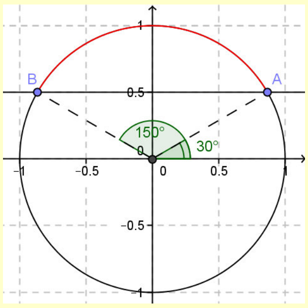
89. Sia una semicirconferenza di diametro AB, prolunghiamo AB dalla parte di A di un segmento AC lungo quanto il raggio. Scelto un punto D sulla semicirconferenza, determinare la misura dell'angolo $D\hat{A}B$ in modo che si abbia: $\overline{AD}\cdot\overline{BD} = \frac{3}{5}\cdot\overline{CD}^2$. [≈ 11°48'3" o ≈ 28°0'14"]

Disequazioni goniometriche

A questo punto il passaggio alle disequazioni appare abbastanza semplice.

Esempio 10

Vogliamo risolvere la disequazione $sin(3x - 48°) > ½$.



Considerando la circonferenza goniometrica abbiamo:
Le soluzioni, limitatamente all'intervallo [0°; 360°] sono quelle visualizzate in rosso, ossia, come era facile da capire, il seno di un angolo è maggiore di ½ se l'argomento ha valori appartenenti a (30°; 150°). Perciò si ha: $30° < 3x - 48° < 150°$, o, tenuto conto della periodicità: $30° + k \cdot 360° < 3x - 48° < 150° + k \cdot 360°$, quindi: $78° + k \cdot 360° < 3x < 198° + k \cdot 360° \Rightarrow 26° + k \cdot 120° < x < 66° + k \cdot 120°$.
Così se avessimo cercato soluzioni in [20°; 70°] avremmo ottenuto $26° < x < 66°$; invece per $x \in [27°; 70°]$ avremmo ottenuto $27° \le x < 66°$; infine se $x \in [27°; 60°]$ la soluzione è $27° \le x \le 60°$.

Vediamo adesso come risolvere una disequazione goniometrica di secondo grado.

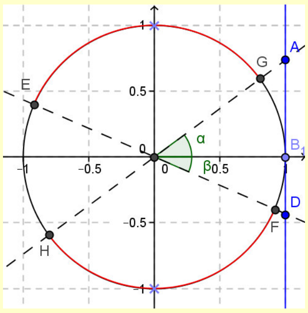
Esempio 11

Risolvere $3tan^2(x) - tan(x) - 1 > 0$. Risolviamo l'equazione di secondo grado in tangente:

$$tan(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1+12}}{6}.$$

La disequazione in questo caso ha soluzioni esterne all'intervallo delle soluzioni:

$$tan(x) > \frac{1+\sqrt{13}}{6} \vee tan(x) < \frac{1-\sqrt{13}}{6} \Rightarrow x > tan^{-1}\left(\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right) \approx 0,65 \vee x < tan^{-1}\left(\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right) \approx -0,41$$



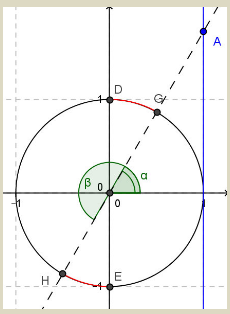
Rappresentiamo graficamente sulla circonferenza goniometrica. Ovviamente escludiamo $\pm \pi/2$, valori per i quali la tangente non esiste.

Le soluzioni sono sempre rappresentate in rosso. Allora, indicando per semplicità con $\alpha \approx 0,65$ e con $\beta \approx 0,41$, abbiamo: $\alpha + k\pi < x < \pi/2 + k\pi \vee \pi/2 + k\pi < x < \pi + \beta + k\pi$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere la disequazione $tan(4-3x) < \sqrt{3}$. Intanto cominciamo a vedere quando la tangente è uguale a $\sqrt{3}$ e sappiamo che ciò accade per $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$. Il grafico seguente ci mostra invece quando la tangente è minore di $\sqrt{3}$.



Pertanto deve essere $\pi/2 + k\pi < 4 - 3x < \pi/3 + k\pi$, ossia:

$$-4 + \pi/2 + k\pi < -3x < -4 + \pi/3 + k\pi \Rightarrow 4/3 - \pi/3 + k\pi/3 < x < 4/3 - \pi/2 + k\pi/3$$

Osserviamo che non è necessario cambiare il segno di $k\pi$, poiché k indica un qualsiasi numero intero relativo.

Risolvere le seguenti disequazioni.

Livello **1**

Nell'intervallo [0°, 360°]

159.	$csc(x) \le 2/\sqrt{3}$	[$60° \le x \le 120$; $180° < x < 360°$]	$sin(x) > 1$	[$\varnothing$]
160.	$sec(x) > \sqrt{2}$	[$45° < x < 90°$; $270° < x < 315°$]	$cos(x) < 0$	[$90° < x < 270°$]
161.	$tan(x) < -\sqrt{3}/3$	[$90° < x < 150°$; $270° < x < 330°$]	$cot(x) \ge 1$	[$0° < x \le 45°$; $180° < x \le 225°$]

Nell'intervallo [0, 2π]

162.	$sin(x) \le ½$	[$0 \le x \le \pi/6$; $5\pi/6 \le x \le 2\pi$]	$cos(x) \le -1$	[$x = 2\pi$]
163.	$sec(x) > -\sqrt{2}$	[$0 \le x \le \pi/2$; $\pi/2 < x < 3\pi/4$; $5\pi/4 < x \le 2\pi$]	$csc(x) \le 1$	[$x = \pi/2$; $\pi < x < 2\pi$]

164. $tan(x) > 0$ [$0 < x < \pi/2$; $\pi < x < 3\pi/2$] $cot(x) \ge \sqrt{3}$ [$0 < x \le \pi/6$; $\pi < x \le 7\pi/6$]

Livello 2

Nell'intervallo [0°; 360°]

165. $sin\left(3x-24°\right) > \frac{\sqrt{3}}{2}$ [$28° < x < 48°$; $148° < x < 168°$; $268° < x < 288°$]

166. $cos(4x+15°) > \frac{\sqrt{2}}{2}$ [$0° \le x \le 7°30'$;$75°<x<97°30'$;$165°<x<187°30'$;$255°<x<277°30'$;$345° < x \le 360°$]

167. $sec(2x-51°) < -\sqrt{2}$ [$93° < x < 138°$; $273° < x$ $318°$]

168. $csc(2x + 17°) > 2$ [$6°30' < x < 66°30'$; $186°30' < x < 246°30'$]

169. $tan(5x + 11°) > -1$

[$0° \le x < 15°48'$; $24°48' < x < 51°48'$; $60°48' < x < 87°48'$;…;$312°48' < x < 339°48'$; $348°48' < x \le 360°$]

170. $cot\left(3x+13°\right) < -\frac{\sqrt{3}}{3}$

[$35°40' < x < 55°40'$; $95°40' < x < 115°40'$;…;$275°40' < x < 295°40'$; $335°40' < x \le 360°$]

Nell'intervallo [0; 2π]

171. $sin\left(4x+1\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\left[\frac{3\pi-4}{16} < x < \frac{9\pi-4}{16}; \frac{11\pi-4}{16} < x < \frac{17\pi-4}{16}; \frac{19\pi-4}{16} < x < \frac{25\pi-4}{16}; \frac{27\pi-4}{16} < x < \frac{33\pi-4}{16}\right]$$

172. $cos(3 - 2x) > -½$ $\left[\frac{9+5\pi}{6} < x < \frac{9+7\pi}{6}; \frac{9-\pi}{6} < x < \frac{9+\pi}{6}\right]$

173. $sec(4 - 3x) \ge 0$ $\left[\frac{7\pi+8}{6} < x < \frac{9\pi+8}{6}; \frac{3\pi+8}{6} < x < \frac{5\pi+8}{6}; \frac{-\pi+8}{6} < x < \frac{\pi+8}{6}\right]$

174. $csc(x/3 - 2) \le 1$ [$0 \le x \le 6$] $tan\left(\frac{2}{3}x+1\right) \le -\sqrt{3}$ $\left[\frac{3\pi-6}{4} < x \le \frac{2\pi-3}{2}; \frac{9\pi-6}{4} < x \le 2\pi\right]$

175. $cot(5 - 2x) \ge -1$ $\left[0 \le x \le \frac{5-\pi}{2}; \frac{20-3\pi}{8} \le x < \frac{5}{2}; \frac{20+5\pi}{8} \le x < \frac{5+2\pi}{2}; \frac{9\pi+20}{8} \le x \le 2\pi\right]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere la disequazione $sec(3/2x - 15°) > 3$ nell'intervallo [0°; 360°]. Questa è equivalente alla disequazione $\frac{1}{cos\left(\frac{3x}{2}-15°\right)} > 3$. Quest'ultima, a sua volta, se il denominatore è positivo equivale a, $cos(3/2x - 15°) < 1/3$, mentre se il denominatore è negativo, ovviamente non ha soluzioni. Quindi la data disequazione è equivalente al sistema: $\begin{cases} cos\left(\frac{3x}{2}-15°\right) < \frac{1}{3} \\ 0° < \frac{3x}{2}-15° < 90° \vee 270° < \frac{3x}{2}-15° < 360° \end{cases}$

Ora $cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70°31'44"$, indichiamo questo valore con il simbolo α. Allora avremo

$$cos\left(\frac{3x}{2}-15°\right) < \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha < \frac{3x}{2}-15° < 360°-\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha+15° < \frac{3x}{2} < 375°-\alpha \Rightarrow 57°1'9" \approx \frac{2}{3}\alpha+10° < x < 250°-\frac{2}{3}\alpha \approx 202°58'51"$$

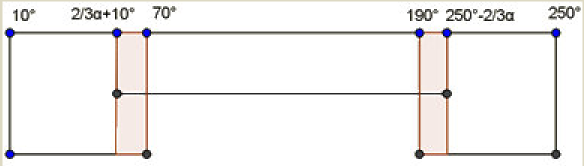
Consideriamo adesso la condizione affinché il coseno sia positivo:

$$15° < \frac{3x}{2} < 105° \vee 285° < \frac{3x}{2} < 375° \Rightarrow 10° < x < 70° \vee 190° < x < 250°$$

Quindi il sistema adesso è equivalente a

$$\begin{cases} 57°1'9'' \approx \frac{2}{3}\alpha + 10° < x < 250° - \frac{2}{3}\alpha \approx 202°58'51'' \\ 10° < x < 70° \vee 190° < x < 250° \end{cases}$$

Rappresentiamo graficamente:



Quindi le soluzioni sono: $2/3\alpha + 10° < x < 70° \vee 190° < x < 250° - 2/3\alpha$.

Risolvere le seguenti disequazioni.

Livello 2

Nell'intervallo [0°; 360°]

176. $sin(x) > 0{,}72$ [$\alpha < x < 180° - \alpha$, $\alpha \approx 46°3'13''$] $cos(x) < -0{,}31$ [$\alpha < x < 360° - \alpha$, $\alpha \approx 108°3'33''$]
177. $tan(x) \geq 2$ [$\alpha \leq x < 90° \vee 180° + \alpha \leq x < 270°$, $\alpha \approx 63°26'6''$]
178. $cot(x) \geq -4$ [$0 < x \leq \alpha \vee 180° < x \leq 180° + \alpha$, $\alpha \approx 165°57'50''$]

Nell'intervallo [0, 2π]

179. $sin(x) \geq -0{,}18$ [$0 \leq x \leq \pi + \alpha \vee 2\pi - \alpha \leq x \leq 2\pi$, $\alpha \approx 0{,}18$]
180. $cos(x) \geq 0{,}54$ [$0 \leq x \leq \alpha \vee 2\pi - \alpha \leq x \leq 2\pi$, $\alpha \approx 1{,}00$]
181. $tan(x) \leq -2$ [$\pi/2 < x \leq \alpha \vee 3/2\pi < x \leq \pi + \alpha$, $\alpha \approx 2{,}03$]
182. $cot(x) < -3$ [$\alpha < x < \pi \vee \pi + \alpha < x < 2\pi$, $\alpha \approx 2{,}82$]

Livello 3

Nell'intervallo [0°, 360°]

183. $sec(x) > \sqrt{2}$ [$45° < x < 90°$; $270° < x < 315°$] $csc(x) \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$ [$60° \leq x \leq 120°$; $180° < x < 360°$]
184. $sec(2x - 10°) < 1{,}23$ [$0° \leq x \leq \alpha \vee \beta < x \leq 180° + \alpha \vee 180° + \beta < x \leq 360°$; $\alpha \approx 22°48'16''$; $\beta \approx 167°11'43''$]
185. $csc(3/2x + 43°) > -2$ [$0° \leq x \leq 91°20' \vee \alpha < x \leq 80° - \alpha \vee 240° - \alpha < x \leq 360°$, $\alpha \approx 111°20'$]
186. $sin(2x + 15°) < 0{,}1$ [$\alpha < x < \beta \vee 180° + \alpha < x < 180° + \beta$, $\alpha \approx 79°37'49''$; $\beta \approx 175°22'10''$]
187. $cos(49° - 2x) < -0{,}8$ [$\alpha < x < \beta \vee 180° + \alpha < x < 180° + \beta$, $\alpha \approx 96°3'54''$; $\beta \approx 132°56'6''$]
188. $tan(14° - 2x) > 0{,}3$ [$52° + k\,90° < x < \alpha + k\,90°$, $\alpha \approx 88°39'1''$, $k = 0, 1, 2, 3$]
189. $cot(3x + 18°) > 0{,}14$ [$0° \leq x \leq \alpha \vee -6° + k60° < x < \alpha + k60° \vee 354° < x \leq 360°$, $\alpha \approx 21°20'36''$, $k = 1,2,\ldots 5$]

Nell'intervallo [0, 2π]

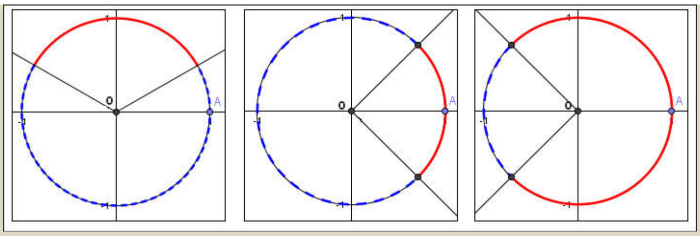
190. $sec(3x + 1) < 3{,}14$ [$0 \leq x < \alpha \vee \beta + 2/3k\pi < x < \alpha + 2/3k\pi \vee \beta + 2\pi < x \leq 2\pi$; $\alpha \approx 0{,}08$; $\beta \approx -0{,}75$, $k = 1,2$; $\vee \frac{\pi - 2}{6} + k \cdot \frac{2}{3}\pi < x < \frac{3\pi - 2}{6} + k \cdot \frac{2}{3}\pi, k = 0,1,2$]
191. $csc(1 - x) > 2{,}56$ [$\alpha < x < 1 \vee 1 + \pi < x < \beta$, $\alpha \approx 0{,}60$; $\beta \approx 4{,}54$]
192. $sec(x - 1) \geq -5$ [$0 \leq x < 1 + \pi/2 \vee \alpha < x < \beta \vee 1 + 3/2\pi < x \leq 2\pi$, $\alpha \approx 2{,}77$; $\beta \approx 5{,}51$]
193. $csc(2/3x - 2) > 1{,}24$ [$3 < x < \alpha$, $\alpha \approx 4{,}15$] $cos(x/3) \geq 0{,}28$ [$0 \leq x \leq \alpha$, $\alpha \approx 3{,}86$]
194. $sin(2x) > -0{,}31$ [$0 \leq x < \pi - \alpha \vee \alpha + k\pi < x < \pi - \alpha + k\pi \vee \alpha + 2\pi < x \leq 2\pi$; $\alpha = sin^{-1}(-0{,}31)$]
195. $tan(-4/3x) < -1{,}23$ [$\alpha + 3/4k\pi < x < 3/8\pi + 3/4k\pi$; $\alpha \approx 0{,}67$, $k = 0, 1, 2$]
196. $cot(4x) > 2{,}14$ [$1/4k\pi < x < \alpha + 1/4k\pi$; $\alpha \approx 0{,}11$; $k = 0, 1, \ldots, 7$]

Lavoriamo insieme

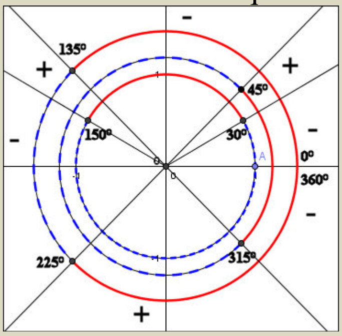
Vogliamo risolvere la disequazione $[2sin(x) - 1] \cdot [2cos^2(x) - 1] > 0$.

Scomponiamo il secondo fattore: $\left[2 \cdot sin(x) - 1\right] \cdot \left[\sqrt{2} \cdot cos(x) - 1\right] \cdot \left[\sqrt{2} \cdot cos(x) + 1\right] > 0$.

Adesso determiniamo il segno dei singoli fattori.



Abbiamo rappresentato con il colore rosso e il tratto continuo i valori per cui l'espressione è positiva, con il blu e il tratteggio laddove l'espressione è negativa.
Quindi riportando il tutto in un'unica circonferenza avremo quanto segue.



Abbiamo semplicemente moltiplicato i segni dei diversi intervalli. Quindi, nell'intervallo [0°; 360°] la disequazione ha soluzioni: $30° < x < 45° \vee 135° < x < 150° \vee 225° < x < 315°$.

Risolvere le seguenti disequazioni

Livello 2

197. $[2sin(x) - 1] \cdot [tan(x) + 1] < 0,\ x \in [0°; 360°]$ $[0° \le x < 30°,\ 90° < x < 135°,\ 150° < x < 270°,\ 315° < x \le 360°]$
198. $\left[\sqrt{3} \cdot sin(x) - 2\right] \cdot \left[\sqrt{3} \cdot tan(x) - 1\right] > 0, x \in [0°; 360°]$ $[0° < x < 30°,\ 90° < x < 210°,\ 270° < x \le 360°]$
199. $[sin(x) - 1] \cdot [cos(x) + 1] \ge 0,\ x \in [0°; 360°]$ $[90° \le x \le 180°]$
200. $\left[\sqrt{2} \cdot sin(x) - 1\right] \cdot \left[3 \cdot cot(x) - \sqrt{3}\right] > 0, x \in [0; 2\pi]$ $[\pi/4 < x < \pi/3 \vee ¾\pi < x < 4/3\pi \vee 4/3\pi < x < 2\pi]$
201. $\left[sec(x) - \sqrt{2}\right] \cdot \left[\sqrt{3} \cdot csc(x) + 2\right] \le 0, x \in [0; 2\pi]$ $[0 < x \le \pi/4 \vee 4/3\pi \le x < 3/2\pi \vee 5/3\pi \le x \le 7/4\pi]$
202. $sin^2(x) - 1 < 0,\ x \in [0°; 360°]$ $[0° \le x \le 360°,\ x \ne 90°, 270°]$
203. $tan^2(x) - 3 \ge 0,\ x \in [0°; 360°]$ $[60° \le x \le 120°,\ 240° \le x \le 300°,\ x \ne 90°, 270°]$
204. $csc^2(x) - 2 \ge 0,\ x \in [-100°; 400°]$ $[-45° \le x \le 45°, 135° \le x \le 225°,\ 315° \le x \le 400°, x \ne 0°, 180°, 360°]$
205. $3cot^2(x) - 1 < 0,\ x \in [-3; 1]$ $[-2/3\pi < x < -1/3\pi]$
206. $sin^2(x) - sin(x) < 0,\ x \in [-50°; 460°]$ $[0° < x < 180°,\ 360° < x \le 460°,\ x \ne 90°, 450°]$
207. $2cos^2(x) + cos(x) \ge 0,\ x \in [-1; 4]$ $[-1 \le x \le \pi/2 \vee 2/3\pi \le x \le 4]$
208. $\sqrt{3} \cdot tan^2(x) - tan(x) \ge 0, x \in [-200°; 200°]$
$[-200° \le x \le -180°,\ -150° \le x \le 0°,\ 30° \le x \le 180°,\ x \ne -90°, 90°]$
209. $2sin^2(x) - sin(x) - 1 \ge 0,\ x \in [-25°; 541°]$ $[x = 90°,\ 210° \le x \le 330°,\ x = 450°]$
210. $\sqrt{3} \cdot cot^2(x) + \left(\sqrt{3} - 1\right) \cdot cot(x) - 1 < 0, x \in [250°; 750°]$
$[250° \le x < 315°,\ 420° < x < 495°,\ 600° < x < 675°]$
211. $csc^2(x) - \left(\sqrt{2} - 2\right) \cdot csc(x) - 2 \cdot \sqrt{2} \ge 0, x \in [-1250°; -900°]$
$[-1250° \le x \le -1230°,\ -1110° \le x \le -1035°,\ -945° \le x < -900°,\ x \ne -1080°]$
212. $4 \cdot sin^2(x) - 2 \cdot \left(\sqrt{3} + 1\right) \cdot sin(x) + \sqrt{3} \le 0, x \in [0; 4]$ $[\pi/6 \le x < \pi/3 \vee 2/3\pi \le x \le 5/6\pi]$
213. $sin^2(x) + 2sin(x) \cdot cos(x) + cos^2(x) > 0,\ x \in [-101°; 303°]$ $[x \ne -45°, 135°]$
214. $sin^2(x) - \left(\sqrt{3} - 1\right) \cdot sin(x) \cdot cos(x) - \sqrt{3} \cdot cos^2(x) > 0, x \in [-270°; 308°]$
$[-270° < x < -225°,\ -120° < x < -45°,\ 60° < x < 135°,\ 240° \le 308°,\ x \ne -90°, 90°, 270°]$
215. $3 \cdot sin^2(x) + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot sin(x) \cdot cos(x) - 3 \cdot cos^2(x) \le 0, x \in [-1; 2]$ $[\pi/6 \le x \le 2,\ x \ne \pi/2]$

216. $sin(x) \cdot cos(x) + cos^2(x) \le 0$, $x \in [-31°; 507°]$ $[90° \le x \le 135°, 270° \le x \le 315°, 450° \le x \le 507°]$

Livello 3

217. $\frac{2sin(x)-1}{\sqrt{3}-tan(x)} < 0,\ x \in [0;2\pi]$ $\left[0 \le x < \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi < x < \frac{4}{3}\pi, \frac{3}{2}\pi < x \le 2\pi\right]$

218. $\frac{2 \cdot sin(x)+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-tan(x)} > 0,\ x \in [0;2\pi]$ $\left[0 \le x < \frac{\pi}{3}, \left(\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi \wedge x \ne \frac{4}{3}\pi\right), \frac{5}{3}\pi < x \le 2\pi\right]$

219. $\frac{2 \cdot cos(x)-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3} \cdot cot(x)} > 0,\ x \in [0;2\pi]$ $\left[0 < x < \frac{\pi}{6}, \frac{2}{3}\pi < x < \frac{5}{3}\pi, x \ne \pi, \frac{11}{6}\pi < x < 2\pi\right]$

220. $\frac{sec(x)+2}{1+tan(x)} < 0,\ x \in [0°;360°]$ $[0° \le x \le 90°, 120° \le x \le 135°, 210° \le x \le 270°, 315 \le x \le 360°]$

221. $\frac{2 \cdot sin(x)-1}{1-\sqrt{3} \cdot tan(x)} \le 0,\ x \in [0°;360°]$ $[0° \le x < 90°, 150° \le x \le 210°, 270° \le x \le 360°, x \ne 30°]$

222. $\frac{4 \cdot sin^2(x)-1}{\sqrt{3}+tan(x)} \ge 0,\ x \in [0°;360°]$ $[30° \le x < 90°, 120° \le x \le 150°, 210° \le x < 270°, 300 < x \le 330°]$

Livello 3

223. $\left[\sqrt{3} \cdot cot(2x-31°)-1\right] \cdot \left[2 \cdot cos(4x+11°)+1\right] < 0, x \in [0°;90°]$ $[27°15' < x < 45°30', 57°15' < x \le 90°]$

224. $\left[2 \cdot cos(4x+1)-1\right] \cdot \left[\sqrt{3} \cdot tan(3x-2)-1\right] \le 0, x \in [-2;1]$

$$\left[\frac{12-11\pi}{18} \le x \le \frac{4-3\pi}{6}, \frac{-3-\pi}{12} \le x \le \frac{12-5\pi}{18}, \frac{\pi-3}{12} \le x \le \frac{4-\pi}{6}, \frac{\pi+12}{8} \le x \le 1\right]$$

225. $2cos^2(4x + 1) - 1 > 0$, $x \in [-2; 1]$ $\left[\frac{-4-5\pi}{16} < x < \frac{-4-3\pi}{16}, \frac{-4-\pi}{16} < x < \frac{-4+\pi}{16}, \frac{-4+3\pi}{16} < x < -\frac{4+5\pi}{16}\right]$

226. $\left[sin(3-x)+2\right] \cdot \left[cot(5x+1)+\sqrt{3}\right] \le 0, x \in [-2;1]$

$$\left[\frac{-6-13\pi}{30} < x < \frac{-1-2\pi}{5}, \frac{-6-7\pi}{30} < x < \frac{-1-\pi}{5}, \frac{-6-\pi}{30} < x < -\frac{1}{5}, \frac{-6+5\pi}{30} < x < \frac{-1+\pi}{5}\right]$$

227. $tan^2(3x + 15°) - 3 < 0$, $x \in [-10°; 105°]$ $[15° < x < 35°, 75° < x < 95°, x \ne 25°, 85°]$

228. $cos(3x + 1) + 2cos^2(3x + 1) - 1 \ge 0$, $x \in [-2; 1]$ $\left[\frac{-3-\pi}{9} < x < \frac{-3+\pi}{9}, x \ne \frac{-1+\pi}{3}\right]$

229. $\sqrt{3} \cdot sin(x) - cos(x) > 0, x \in [-123°;456°]$ $[30° < x < 90°, 180° < x < 210°, 390° < x < 450°]$

230. $sin(x) + cos(x) > 0$, $x \in [-1; 4]$ $[-1 \le x \le -\pi/4]$

231. $3 \cdot sin(x) + \sqrt{3} \cdot cos(x) \le 0, x \in [-23°;256°]$ $[150° \le x \le 180°]$

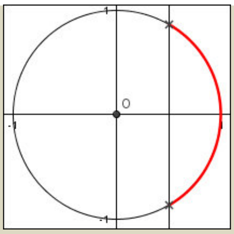
232. $sin(4x-1) - \sqrt{3} \cdot cos(4x-1) > 0, x \in [-2;2]$

$$\left[\frac{3-5\pi}{12} < x < \frac{2-3\pi}{8}, \frac{3+\pi}{12} < x < \frac{2+\pi}{8}, \frac{1-\pi}{4} < x < \frac{3-2\pi}{12}, \frac{1+\pi}{4} < x < \frac{3+4\pi}{12}\right]$$

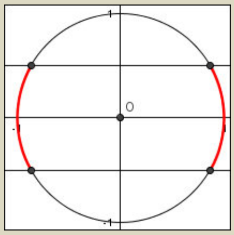
Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere il seguente sistema di disequazioni goniometriche: $\begin{cases} 2 \cdot cos(x) - 1 > 0 \\ 4 \cdot sin^2(x) - 1 \le 0 \\ 0 \le x \le 2\pi \end{cases}$.

Risolviamo singolarmente ciascuna disequazione: $cos(x) > \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \le x < \frac{\pi}{3} \vee \frac{5\pi}{3} < x \le 2\pi$. Rappresentiamo

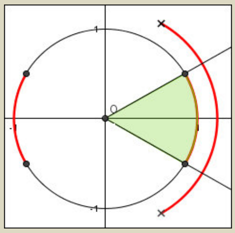


graficamente la situazione.



Passiamo alla seconda: $4 \cdot sin^2(x) - 1 \le 0 \Rightarrow sin^2(x) \le \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{2} \le sin(x) \le \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \le x \le \frac{\pi}{6} \vee \frac{5\pi}{6} \le x \le \frac{7\pi}{6} \vee \frac{11\pi}{6} \le x \le 2\pi$



Consideriamo le eventuali soluzioni comuni.

Pertanto le soluzioni del sistema sono: $0 \le x \le \frac{\pi}{6} \vee \frac{11\pi}{6} \le x \le 2\pi$.

Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni goniometriche

Livello 2

233. $\begin{cases} sin(x) > -\frac{1}{2} \\ tan(x) - 1 < 0 \\ 0° \le x \le 360° \end{cases}$ [0° ≤ x ≤ 45°, 90° < x < 220°, 330° < x ≤ 360°]

234. $\begin{cases} 2 \cdot sin(x) < \sqrt{2} \\ tan(x) - 1 < 0 \\ 0 \le x \le 2\pi \end{cases}$ $\left[0 \le x < \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi < x < \frac{5}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi < x \le 2\pi\right]$ $\begin{cases} csc^2(x) - 4 < 0 \\ 4 \cdot sin^2(x) - 1 < 0 \\ 0° \le x \le 360° \end{cases}$ [$\varnothing$]

235. $\begin{cases} sin(x) < \frac{\sqrt{3}}{2} \\ cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2} < 0 \\ 0° \le x \le 360° \end{cases}$ [45° < x < 60°, 120° < x < 315°] $\begin{cases} 2 \cdot cos(x) > \sqrt{3} \\ 4sin^2(x) - 3 < 0 \\ 0° \le x \le 360° \end{cases}$ [0° ≤ x < 30°, 330° < x ≤ 360°]

236. $\begin{cases} sin(x) < -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2 \cdot cos(x) - 1 > 0 \\ 0 \le x \le 2\pi \end{cases}$ $\left[\frac{5}{3}\pi < x < \frac{7}{4}\pi\right]$ $\begin{cases} 2 \cdot cos(x) > 1 \\ 2 \cdot sin^2(x) - 1 > 0 \\ 0 \le x \le 360° \end{cases}$ [45° < x < 60°, 300° < x < 315°]

Livello 3

237. $\begin{cases} sin(x)-1<0 \\ \sqrt{3}\cdot cot(x)-1>0 \\ csc(x)>2 \\ 0\le x\le 2\pi \end{cases}$ $\left[0<x<\frac{\pi}{6}\right]$ $\begin{cases} \sqrt{3}\cdot csc(x)-2<0 \\ 2\cdot sin(x)+1>0 \\ tan(x)-1\ge 0 \\ 0°\le x\le 360° \end{cases}$ $[60°<x<90°]$

238. $\begin{cases} \dfrac{4\cdot sec^2(x)-3}{1-sin(x)}<0 \\ 8\cdot sin^3(x)<1 \\ 0\le x\le 2\pi \end{cases}$ $\left[0\le x<\frac{\pi}{6},\frac{5}{6}\pi<x<\frac{7}{6}\pi,\frac{11}{6}\pi<x\le 2\pi\right]$ $\begin{cases} \dfrac{2\cdot sin(x)-1}{\sqrt{2}\cdot cos(x)+1}<0 \\ \sqrt{3}-cot(x)<0 \\ tan(x)>\sqrt{3} \\ 0\le x\le 2\pi \end{cases}$ $[\varnothing]$

239. $\begin{cases} 3\cdot cot^2(x)-1>0 \\ 4\cdot cos^2(x)<3 \\ 0\le x\le 360° \end{cases}$ $[0°<x<30°,\ 150°<x<180°,\ 210°<x<240°,\ 300°<x<330°]$

240. $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}\cdot tan(x)+1}{4\cdot sin^2(x)-1}\ge 0 \\ \dfrac{2\cdot sin(x)+1}{1-sec^2(x)}>0 \\ 0°\le x\le 360° \end{cases}$ $[30°<x<90°,\ 210°<x<270°]$ $\begin{cases} 2^{sin\,x}>1 \\ 3^{cos\,x}<1 \\ 0°\le x\le 360° \end{cases}$ $[90°<x<180°]$

Risolvi i seguenti problemi in cui si devono impostare e risolvere disequazioni

Livello 2

241. Determinare in quale intervallo varia la misura dell'angolo acuto maggiore di un triangolo rettangolo di ipotenusa lunga 8,58 e di area compresa tra 13,12 e 14,38. [≈ 64°18'28" < α < ≈ 67°15'54"]
242. Un triangolo isoscele di lato obliquo lungo 2,06, ha il perimetro minore di 6. Che valori possono assumere gli angoli alla base? [minori di ≈ 62°51'3"]
243. Dato un sistema di assi cartesiani ortogonali di centro *O*, tracciare la circonferenza γ di raggio unitario e centro *O*. Siano *A* ≡ (1; 0), *B* ≡ (0; 2), $P\hat{O}A=x$. Determinare per quali x si ha $2,54<\overline{PQ}<2,92$. [≈ 111°16'42" < x < ≈ 151°50'10" o ≈ 201°16'42" < x < ≈ 241°50'10"]
244. Con riferimento al precedente problema, sia *B* ≡ (0; *y*) e $\overline{PQ}=2$, determinare per quali valori di *y* il problema ammette soluzioni. $[-3\le y\le -1 \text{ o } 1\le y\le 3]$
245. Con riferimento al precedente problema, sia *B* ≡ (0; 3,12) e $\overline{PQ}=k$, determinare per quali valori di *k* il problema ammette soluzioni. $[-4,12\le k\le -2,12 \text{ o } 2,12\le k\le 4,12]$
246. In un triangolo rettangolo di ipotenusa lunga 8,62, la differenza fra un cateto e la proiezione dell'altro cateto sull'ipotenusa è compresa tra 1,25 e 5,13. In quale intervallo si trovano le misure degli angoli acuti? [≈ 42°55'48" < β < ≈ 59°7'57", ≈ 30°52'3" < γ < ≈ 47°4'12"]
247. In un triangolo rettangolo di ipotenusa lunga 7,08, la somma fra un cateto e la proiezione dell'altro cateto sull'ipotenusa è compresa tra 8,16 e 8,73. In quale intervallo si trovano le misure degli angoli acuti? [≈ 35°41'25" < β < ≈50°56'9", ≈ 39°3'51" < γ < ≈54°18'35"; ≈ 68°17'46" < β < ≈79°10'28", ≈ 10°49'32" < γ < ≈21°42'14"]
248. Data una semicirconferenza di diametro *AB* lungo 1, determinare su di essa un punto *C* in modo che sia $\frac{4}{3}\cdot\overline{AC}^2-\frac{3}{4}\cdot\overline{BC}^2<1$. [0° < β < ≈ 66°25'189"]
249. Data una semicirconferenza di diametro *AB* lungo 1, determinare su di essa un punto *C* in modo che sia $\frac{3}{4}<\frac{5}{6}\cdot\overline{AC}^2+\frac{1}{8}\cdot\overline{BC}^2<\frac{5}{4}$. [≈ 69°56'25" < β < 90°]

Livello 3

250. Sia un quadrato *ABCD* di lato 2 cm, si scelga un punto *F* sul lato *BC*, si tracci *DF* e sia *EF* perpendicolare a *DF*, con *E* sul lato *AB*. Determinare i valori che deve assumere l'angolo $F\hat{D}C$, in modo che la somma fra il triplo di *FB* e il doppio di *AE* sia minore di 8. [tra circa 12°21'54" e 45°]

Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi

1. (Liceo scientifico 2005/06) L'equazione risolvente un dato problema è: $k\, cos2x - 5k + 2 = 0$, dove k è un parametro reale e x ha le seguenti limitazioni: $15° < x < 45°$. Si discuta per quali k le radici dell'equazione sono soluzioni del problema. $\left[\frac{2}{5} < k < \frac{40+4\cdot\sqrt{3}}{97}\right]$
2. (Liceo scientifico 1992/93) Sia $\begin{cases} x = sin(t) \\ y = sin(2t) \end{cases}$. Esprimere y in funzione di x. $\left[y = 2\cdot|x|\cdot\sqrt{1-x^2}\right]$

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.
A = Abacus rivista di matematica online ARML = American Regions Math League
HSMC = A&M University High School Mathematics Contest NC = North Carolina Mathematical Contest
RICE = Rice University Mathematics Tournament SC = South Carolina Mathematical Contest V = Vermont High School Prize

Lavoriamo insieme

Questo quesito è stato assegnato agli HSMC del 2004.
Sapendo che $8 \cdot tan(x) = 3 \cdot cos(x)$, determinare sin($x$).
Si ha: $\frac{8\cdot sin(x)}{cos(x)} = 3\cdot cos(x)$. Se fosse $cos(x) = 0$; $tan(x)$ sarebbe indefinito, quindi possiamo moltiplicare per $cos(x)$ ambo i membri, ottenendo:
$8 \cdot sin(x) = 3 \cdot cos^2(x) \Rightarrow 8 \cdot sin(x) = 3 \cdot [1 - sin^2(x)] \Rightarrow 3 \cdot sin^2(x) + 8 \cdot sin(x) - 3 = 0$. Risolvendo l'equazione di secondo grado otteniamo $sin(x) = -3$ (impossibile) or $sin(x) = 1/3$.

1. (V 2003) Trovare la somma di tutte le soluzioni di $2cos(2x) + 1 = 0$, $0 \le x \le 100\pi$. [10000π]
2. (Rice 2006) Determinare l'area della regione definita da $x^2 + y^2 \le \pi^2$ e $y \ge sin(x)$. [$\pi^3/2$]
3. (HSMC 2006) Quante soluzioni ha l'equazione $2\theta = 101\pi\cdot(1 - cos(\theta))$? Suggerimento: Rappresentare geometricamente i due membri dell'equazione. [103]
4. (RICE 2006) L'equazione $sin(cos^{-1}(tan(sin^{-1}(x)))) = x$, ha due numeri positivi x come soluzioni, determinare il loro prodotto. [1]
5. (HSMC2007) Determinare quante soluzioni ha l'equazione $sin(x) = x/100$. [63]
6. (A2007) L'altezza minore di un triangolo rettangolo è lunga 7 *cm*, l'angolo minore è di 15°. Quanto misura l'ipotenusa? [28]
7. (ARML 2008) Siano $O \equiv (0; 0)$ e $A \equiv (5; 0)$. Per certi valori positivi di k, esiste $f(x) = ax^2$, $a > 0$, per cui $\angle Q\hat{O}A = 2\cdot\angle P\hat{O}A$, con $P \equiv (1; f(1))$ e $Q \equiv (k; f(k))$. Calcolare tutti i valori positivi di k. [$k > 2$]

Questions in English

Working together

This is a question assigned at HSMC in 2007.

What is the number of solutions of the equation $sin(x)=\dfrac{x}{30\pi}$, where x is in radians?

We have solutions iff[1] $\left|\dfrac{x}{30\pi}\right|\le 1 \Rightarrow -1\le\dfrac{x}{30\pi}\le 1\Rightarrow -30\pi\le x\le 30\pi$. These solutions are the intersections between the graph of $y = sin(x)$ and the graph of the line $y=\dfrac{x}{30\pi}$. The line pass by origin and is positive for $x > 0$ and negative for $x < 0$, hence it has two intersections with $y = sin(x)$ in each interval $\left[2k\pi,(2k+1)\cdot\pi\right],-15\le k\le 14$. Hence we have $2 \cdot 30 - 1 = 59$ roots. We have subtracted 1 because the origin is counted twice, in the interval $[-2\pi,0],[0,2\pi]$.

8. (HSMC1999) Solve $sin^{-1}(cos(x)) = 71°$ for x, where $0 \le x \le 90°$. [19°]
9. (HSMC2000) Find the exact value of $sin(tan^{-1}(3))$. $\left[3/\sqrt{10}\right]$
10. (HSMC2000) Solve $\begin{cases} cos(x+y)-cos(x)-cos(y)=1 \\ sin(x+y)-sin(x)-sin(y)=0\end{cases}; x, y\in[0,2\pi]$. $\left[\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right);\left(\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$
11. (NC 2002) [If $log_{sin(x)}[cos(x)] = ½$ and $0 < x < \pi/2$, find the value of $sin(x)$. $\left[\left(\sqrt{5}-1\right)/2\right]$
12. (HSMC2002) Given $5\, tan(x) = 6\, cos(x)$, with $0 < x < \pi$, find $sin(x)$. [2/3]
13. (SC2009) How many solutions does the equation $sin(x)\cdot sin(2x)\cdot sin(3x)\cdot\ldots\cdot sin(12x) = 0$, have in the interval $(0, \pi]$? [46]

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Accademia militare) L'equazione $cos\, x = -3$ ha per soluzione
   A) $x = 30°$ B) L'equazione non ha soluzioni C) $x = 120°$ D) $x = 0°$
2. (Accademia navale) Riconoscere che l'equazione $cos(cos(x)) = 0$ è impossibile, mentre l'equazione $sin(sin(x)) = 0$ ammette soluzioni (quali?).
3. (Accademia navale) Risolvere il seguente sistema di disequazioni $\begin{cases}\sqrt{sin^2 x} > sin\, x \\ \sqrt{cos^2 x} > cos\, x\end{cases}$.
4. (Scuola superiore di Catania) È dato il sistema nell'incognita ϑ $\begin{cases}8\cdot cos^2\vartheta - 6\cdot sin\,\vartheta - 3 = 0 \\ m\cdot cos\,\vartheta - sin\,\vartheta - \dfrac{1}{2} = 0\end{cases}$. Per quali valori del parametro m il sistema ha soluzioni? Determinare le soluzioni.
5. (Veterinaria 2000) L'equazione $-sin^2(x) + 1 = 3$
   A) ha due soluzioni reali B) ha due soluzioni reali e coincidenti C) non ha soluzioni
   D) ha infinite soluzioni E) ha soluzione $x = 45°$
6. (Ingegneria 2000) La condizione cui deve soddisfare il parametro k affinché l'equazione $4sin(x) = 3k$ abbia soluzione è A) $k\ge -\dfrac{4}{3}$ B) $k\le\dfrac{4}{3}$ C) k può essere qualsiasi D) $k=\pm\dfrac{4}{3}$ E) $-\dfrac{4}{3}\le k\le\dfrac{4}{3}$
7. (Ingegneria 2002) Indicato con x un angolo la cui misura in radianti può variare tra 0 e 2π, il numero di soluzioni dell'equazione $sin(x) + cos(x) = 0$ è A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

[1] Ii is an abbreviation for "if and only if"

8. (Odontoiatria 2004) La disequazione $2 \cdot cos^2(x) + \sqrt{2} < 0$
A) ha infinite soluzioni
B) ammette solo soluzioni irrazionali
C) equivale alla disequazione $2cos^4(x) + 1 > 0$
D) ha soluzioni comprese fra $-\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{4}$
E) non ha soluzioni

9. (Medicina 2002) L'equazione $x^2 + sin(x) + 1 = 0$
A) ha infinite soluzioni perché $sin(x)$ è una funzione periodica B) è un'equazione di 2° nell'incognita x
C) ha soluzioni appartenenti all'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ D) ha una sola soluzione E) non ha soluzioni

10. (Ingegneria 2009) Le soluzioni dell'equazione $sin(x) = \frac{1}{sin(x)}$ sono
A) $x = \pi/2 + k\pi$, per ogni valore intero di k
B) nessuna delle altre risposte
C) $x = k\pi/2$, per ogni valore intero di k
D) $x = 3\pi/2 + 2k\pi$, per ogni valore intero di k
E) $x = \pi/2 + 2k\pi$, per ogni valore intero di k

11. (Ingegneria 2009) Per $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ l'equazione $\sqrt{3} \cdot sin^2(x) + \sqrt{3} \cdot cos^2(x) - 2 \cdot sin(x) = 0$ ha soluzione
A) $x = \pi/3$ B) $x = \pi/6$ C) $x = \pi/4$ D) $x = 0$ E) $x = \pi/2$

12. (Ingegneria 2009) L'equazione $sin(x) = -x$
A) ammette infinite soluzioni
B) Se $h > 0$ è una soluzione, allora anche $x = h + \pi$ lo è
C) non ammette soluzioni D) ammette soltanto una soluzione E) ammette esattamente due soluzioni

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_2_2.htm

Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1	**2**	**3**
B	$x = k\pi$	$\pi + 2k\pi < x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$
4	**5**	**6**
$m = \pm\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}$ $\vartheta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \vartheta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$	C	E
7	**8**	**9**
C	E	E
10	**11**	**12**
A	A	D

7. La misurazione degli angoli

7.4 Formule goniometriche

Prerequisiti

- Concetto di angolo
- Concetto di misura
- Unità di misura sessagesimale degli angoli
- Le funzioni goniometriche elementari
- Dominio e codominio di una funzione
- Teoremi fondamentali di goniometria
- Uso della calcolatrice scientifica
- Equazioni e disequazioni goniometriche

Obiettivi

- Sapere padroneggiare le formule più comuni sugli archi
- Sapere risolvere problemi di trigonometria mediante l'uso delle formule goniometriche

Contenuti

- Formule di addizione, sottrazione, duplicazione e bisezione degli archi
- Formule di prostaferesi e di Werner

Formule di addizione, sottrazione, duplicazione e bisezione degli archi

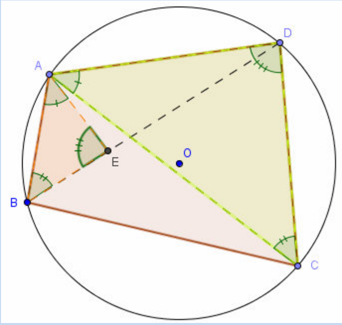
Adesso vogliamo trovare delle formule che possono risultare utili per semplificare alcuni calcoli, anche se con l'uso delle calcolatrici scientifiche adesso sono meno importanti di un tempo.
Cominciamo ad enunciare un importante risultato di geometria.

Teorema 1 (di Tolomeo)

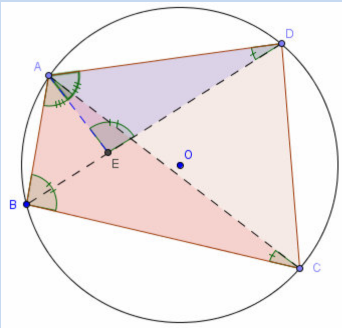
Sia *ABCD* un quadrilatero inscritto in una circonferenza, allora si ha: il prodotto delle misure delle diagonali è uguale alla somma dei prodotti dei lati opposti. In simboli: $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}$.

Dimostrazione.

Tracciamo *BE*, con *E* sulla diagonale *BD* in modo che sia $\angle B\hat{A}E = \angle D\hat{A}C$. Potrebbe anche succedere che E appartenga alla diagonale *AC*. In ogni caso i triangoli *ABE* e *ACD* sono simili perché hanno gli angoli ordinatamente isometrici. Infatti, oltre i due angoli precedenti, si ha anche $\angle A\hat{B}E = \angle A\hat{C}D$ perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $\overset{\frown}{AD}$.



Quindi possiamo scrivere: $\frac{\overline{AB}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} \Rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AC} \cdot \overline{BE}$.



Anche i triangoli *ABC* e *AED* sono simili, poiché $\angle A\hat{D}E = \angle A\hat{C}B$ perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $\overset{\frown}{AB}$, mentre $\angle B\hat{A}C = \angle E\hat{A}D$ perché ottenuti aggiungendo agli angoli $\angle B\hat{A}E = \angle D\hat{A}C$, lo stesso angolo $E\hat{A}C$. Possiamo quindi scrivere: $\frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \Rightarrow \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{DE}$. Adesso sommiamo termine a termine per ottenere la tesi:

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BE} + \overline{AC} \cdot \overline{DE} = \overline{AC} \cdot \left(\overline{BE} + \overline{DE}\right) = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$$

I protagonisti

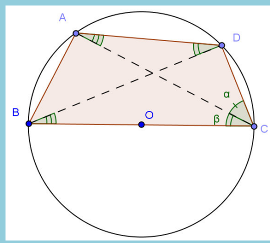
Claudio Tolomeo nacque in una località imprecisata dell'Egitto nel 85. Le notizie sulla sua vita sono scarse e sono legate soprattutto alla sua attività di astronomo. La prima data certa di una sua indagine astronomica è il 26 Marzo 127, l'ultima del 2 Febbraio 141. Le sue opere sono però giunte ai nostri giorni. La più importante di esse è l'*Almagesto*, un trattato in 13 libri, il cui nome è una latinizzazione della parola araba *al–majisti*¸che è a sua volta una traduzione del greco *la massima compilazione*. Quest'opera tratta da un punto di vista matematico i moti del sole, della luna e dei pianeti allora conosciuti, ed è stato la base della teoria astronomica utilizzata per 1400 anni, fino alla cosiddetta rivoluzione copernicana. Le tavole astronomiche contenute nei libri di Tolomeo fanno largo uso della trigonometria. Morì ad Alessandria, in Egitto, nel 165.

Come corollario del precedente teorema abbiamo la prima formula che stavamo cercando.

Corollario 1 (Formula di sottrazione degli archi dei seni).

Si ha: $sin(\alpha - \beta) = sin(\alpha) \cdot cos(\beta) - sin(\beta) \cdot cos(\alpha)$.

Dimostrazione.

Applichiamo il teorema di Tolomeo al quadrilatero in figura, 

in cui $BC = 2r$, è diametro $\angle B\hat{C}D = \alpha > \angle B\hat{C}A = \beta$: $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{DC} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}$ (1).

Poiché ABC e BCD sono triangoli rettangoli perché inscritti in una semicirconferenza si ha:

$$\overline{AC} = 2r \cdot cos(\beta); \overline{BD} = 2r \cdot sin(\alpha); \overline{AB} = 2r \cdot sin(\beta); \overline{DC} = 2r \cdot cos(\alpha)$$

Per il teorema della corda invece $\overline{AD} = 2r \cdot sin(\alpha - \beta)$, quindi sostituendo alla (1) otteniamo:

$$2r \cdot cos(\beta) \cdot 2r \cdot sin(\alpha) = 2r \cdot sin(\beta) \cdot 2r \cdot cos(\alpha) + 2r \cdot sin(\alpha - \beta) \cdot 2r \Rightarrow$$
$$sin(\alpha - \beta) = sin(\alpha) \cdot cos(\beta) - sin(\beta) \cdot cos(\alpha)$$

che è quello che si voleva provare.

Esempio 1

Utilizzando la precedente formula possiamo determinare $sin(15°)$ senza utilizzare la calcolatrice scientifica. Infatti abbiamo: $sin(15°) = sin(45°–30°)$ e quindi applicando la precedente formula avremo:

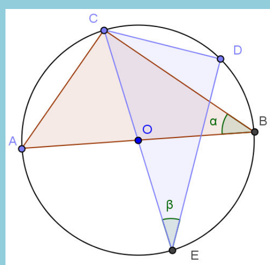
$$sin(15°) = sin(45°–30°) = sin(45°) \cdot cos(30°) - sin(45°) \cdot cos(30°) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

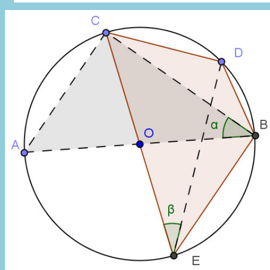
Abbiamo anche quest'altro risultato.

Corollario 2 (Formula di addizione degli archi dei coseni).

Si ha: $cos(\alpha + \beta) = cos(\alpha) \cdot cos(\beta) - sin(\alpha) \cdot sin(\beta)$.

Dimostrazione

Consideriamo i due triangoli rettangoli in figura 

Costruiamo adesso il quadrilatero 

$BDCE$ a cui applichiamo il teorema di Tolomeo $\overline{ED} \cdot \overline{BC} = \overline{CE} \cdot \overline{BD} + \overline{BE} \cdot \overline{CD}$ (1).

Per le proprietà dei triangoli rettangoli si ha: $\overline{ED} = 2r \cdot cos(\beta); \overline{BC} = 2r \cdot cos(\alpha); \overline{CE} = 2r; \overline{CD} = 2r \cdot sin(\beta)$.

Osserviamo poi che $\angle C\hat{B}D = \angle C\hat{E}D = \beta$ perché entrambi insistono sull'arco $\overset{\frown}{CD}$, quindi $\angle D\hat{B}A = \alpha + \beta$, perciò $\overline{BD} = 2r \cdot cos(\alpha + \beta)$. Ma OBC è isoscele sulla base BC, quindi $\angle B\hat{C}O = \alpha$, perciò $\overline{BE} = 2r \cdot sin(\alpha)$, quindi sostituendo alla (1) otteniamo:

$$2r\cdot cos(\beta)\cdot 2r\cdot cos(\alpha) = 2r\cdot 2r\cdot cos(\alpha+\beta) + 2r\cdot sin(\alpha)\cdot 2r\cdot sin(\beta) \Rightarrow$$

Da cui: $$\Rightarrow cos(\beta)\cdot cos(\alpha) = cos(\alpha+\beta) + sin(\alpha)\cdot sin(\beta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow cos(\alpha+\beta) = cos(\beta)\cdot cos(\alpha) - sin(\alpha)\cdot sin(\beta)$$

che è quello che voleva provarsi.

Esempio 2

Utilizzando la precedente formula possiamo determinare il valore esatto di $cos(75°)$, infatti:

$$cos(75°) = cos(45° + 30°) = cos(30°)\cdot cos(45°) - sin(30°)\cdot sin(45°) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Non ci sorprende il fatto che tale valore coincida con $sin(15°) = cos(90° - 15°) = cos(75°)$.

Utilizzando le due formule precedenti possiamo provare i seguenti risultati.

Teorema 2

Valgono le seguenti identità, per tutti i valori degli angoli per cui le singole espressioni hanno significato:

$$sin(\alpha \pm \beta) = sin(\alpha)\cdot cos(\beta) \pm sin(\beta)\cdot cos(\alpha) \qquad cos(\alpha \pm \beta) = cos(\alpha)\cdot cos(\beta) \mp sin(\alpha)\cdot sin(\beta)$$

$$tan(\alpha\pm\beta) = \frac{tan(\alpha)\pm tan(\beta)}{1\mp tan(\alpha)\cdot tan(\beta)} \qquad cot(\alpha\pm\beta) = \frac{cot(\alpha)\cdot cot(\beta)\mp 1}{cot(\alpha)\pm cot(\beta)}$$

$$sec(\alpha\pm\beta) = \frac{sec(\alpha)\cdot sec(\beta)\cdot csc(\alpha)\cdot csc(\beta)}{csc(\alpha)\cdot csc(\beta)\mp sec(\alpha)\cdot sec(\beta)} \qquad csc(\alpha\pm\beta) = \frac{sec(\alpha)\cdot sec(\beta)\cdot csc(\alpha)\cdot csc(\beta)}{csc(\alpha)\cdot sec(\beta)\pm sec(\alpha)\cdot csc(\beta)}$$

Dimostrazione

Proviamo solo qualcuna di queste.

$$sin(\alpha + \beta) = sin[\alpha - (-\beta)] = sin(\alpha)\cdot cos(-\beta) - sin(-\beta)\cdot cos(\alpha) = sin(\alpha)\cdot cos(\beta) + sin(\beta)\cdot cos(\alpha)$$

Poi: $$tan(\alpha+\beta) = \frac{sin(\alpha+\beta)}{cos(\alpha+\beta)} = \frac{sin(\alpha)\cdot cos(\beta) + sin(\beta)\cdot cos(\alpha)}{cos(\alpha)\cdot cos(\beta) - sin(\alpha)\cdot sin(\beta)}$$

adesso dividiamo termine a termine per $cos(\alpha)\cdot cos(\beta)$, ottenendo:

$$tan(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{sin(\alpha)\cdot \cancel{cos(\beta)}}{cos(\alpha)\cdot \cancel{cos(\beta)}} + \dfrac{sin(\beta)\cdot \cancel{cos(\alpha)}}{\cancel{cos(\alpha)}\cdot cos(\beta)}}{\dfrac{\cancel{cos(\alpha)\cdot cos(\beta)}}{\cancel{cos(\alpha)\cdot cos(\beta)}} - \dfrac{sin(\alpha)\cdot sin(\beta)}{cos(\alpha)\cdot cos(\beta)}} = \frac{tan(\alpha)+tan(\beta)}{1-tan(\alpha)\cdot tan(\beta)}$$

Lasciamo per esercizio le altre dimostrazioni.

Esempio 3

Usando le precedenti formule di addizione vogliamo mostrare che non esiste $tan(90°)$:

$$tan(90°) = tan(30°+60°) = \frac{tan(30°)+tan(60°)}{1-tan(30°)\cdot tan(60°)} = \frac{\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\dfrac{4\sqrt{3}}{3}}{1-1} = ?$$

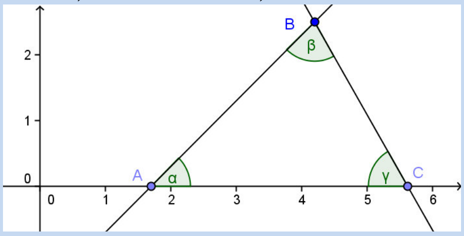
Sfruttando le formule di addizione della tangente possiamo determinare l'angolo formato da due rette di cui conosciamo le equazioni cartesiane.

Teorema 3

L'angolo formato dalle rette di equazioni $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$ è tale da verificare la seguente uguaglianza: $tan^{-1}\left(\dfrac{a'b-ab'}{aa'+bb'}\right)$.

Dimostrazione

Tracciamo due rette non parallele agli assi, né fra di loro, in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale.



Le rette formano un triangolo con l'asse delle ascisse. Sia $ax + by + c = 0$ la retta per AB e $a'x + b'y + c' = 0$ quella per BC. Determiniamo l'angolo formato dalle rette. $\angle C\hat{B}A = 180° - \angle B\hat{A}C - \angle A\hat{C}B$

Esprimiamo gli angoli mediante i coefficienti delle relative rette.

$$tan\left(\angle B\hat{A}C\right) = -\frac{a}{b}; 180° - tan\left(\angle A\hat{C}B\right) = -\frac{a'}{b'} \Rightarrow tan\left(\angle A\hat{C}B\right) = -\frac{a'}{b'}$$

Abbiamo tenuto conto del fatto che $\angle A\hat{C}B$ è il supplementare dell'angolo che la retta forma con il semiasse positivo delle ascisse e tangenti di angoli supplementari sono opposti.

Ora determiniamo la tangente dell'angolo formato dalle rette:

$$tan\left(\angle C\hat{B}A\right) = tan\left(180° - \angle B\hat{A}C - \angle A\hat{C}B\right) = tan\left(\angle B\hat{A}C + \angle A\hat{C}B\right)$$

Applichiamo la formula di addizione della tangente:

$$tan\left(\angle C\hat{B}A\right) = tan\left(\angle B\hat{A}C + \angle A\hat{C}B\right) = \frac{tan\left(\angle B\hat{A}C\right) + tan\left(\angle A\hat{C}B\right)}{1 - tan\left(\angle B\hat{A}C\right) \cdot tan\left(\angle A\hat{C}B\right)} = \frac{-\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'}}{1 - \left(-\frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'}\right)} = \frac{\frac{-a \cdot b' + a'b}{\cancel{b \cdot b'}}}{\frac{b \cdot b' + aa'}{\cancel{b \cdot b'}}} = \frac{a'b - a \cdot b'}{aa' + b \cdot b'}.$$

Che è quello che volevamo dimostrare.

Esempio 4

Consideriamo le rette di equazione $3x + y - 1 = 0$ e $2x - 3y + 2 = 0$, usando la formula stabilita nel precedente teorema vogliamo determinare la misura dell'angolo da esse formato.

$$tan^{-1}\left(\frac{2 \cdot 1 - 3 \cdot (-3)}{3 \cdot 2 + 1 \cdot (-3)}\right) = tan^{-1}\left(\frac{11}{3}\right) \approx 74°44'42''$$

Ovviamente la formula non si può applicare per rette perpendicolari, perché in tal caso il denominatore si annulla, ricordiamo che per rette perpendicolari si ha appunto $a \cdot a' + b \cdot b' = 0$. Analogamente se le rette sono parallele avremo $a \cdot b' - a' \cdot b = 0$ e così l'angolo sarà di 0°.

Dalle formule di addizione si ottengono facilmente le seguenti altre formule.

Corollario 3 (formule di duplicazione degli archi)

Valgono le seguenti identità, per tutti i valori degli angoli per cui le singole espressioni hanno significato:

$sin(2\alpha) = 2 \cdot sin(\alpha) \cdot cos(\alpha)$ $\quad$ $cos(2\alpha) = cos^2(\alpha) - sin^2(\alpha) = 2cos^2(\alpha) - 1 = 1 - 2sin^2(\alpha)$

$$tan(2\alpha) = \frac{2 \cdot tan(\alpha)}{1 - tan^2(\alpha)} \qquad cot(2\alpha) = \frac{cot^2(\alpha) - 1}{2 \cdot cot(a)}$$

$$sec(2\alpha) = \frac{sec^2(\alpha) \cdot csc^2(\alpha)}{csc^2(\alpha) - sec^2(\alpha)} \qquad csc(2\alpha) = ½ \cdot sec(\alpha) \cdot csc(\alpha)$$

Dimostrazione

Proviamo solo la prima. Consideriamo la formula di addizione del seno:

$$sin(\alpha + \beta) = sin(\alpha) \cdot cos(\beta) + sin(\beta) \cdot cos(\alpha)$$

valida per qualsiasi angolo, quindi anche se $\alpha = \beta$. Nel qual caso diviene:

$$sin(\alpha + \alpha) = sin(\alpha) \cdot cos(\alpha) + sin(\alpha) \cdot cos(\alpha) = 2 \cdot sin(\alpha) \cdot cos(\alpha)$$

Che è la formula voluta. Allo stesso modo si ottengono le altre.

Esempio 5

La formula di duplicazione permette di esprimere una funzione goniometrica mediante altre funzioni goniometriche dell'angolo metà, così per esempio abbiamo:

$$[sin(\alpha) + cos(\alpha)]^2 = sin^2(\alpha) + 2\, sin(\alpha) \cdot cos(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1 + 2\, sin(\alpha) \cdot cos(\alpha)$$

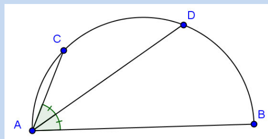
Ma anche $cos\left(\frac{7}{8}\alpha\right) = cos^2\left(\frac{7}{16}\alpha\right) - sin^2\left(\frac{7}{16}\alpha\right)$ e così via.

Come applicazione delle formule di duplicazione dimostriamo il seguente risultato relativo ai poligoni regolari, riprendendo una formula già provata nella precedente unità.
Adesso vogliamo determinare una relazione anche per $sin(\alpha/2)$.

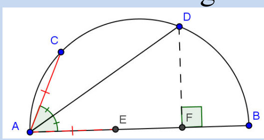
Teorema 4 (Formula di bisezione del seno)

Si ha: $sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-cos(\alpha)}{2}}$.

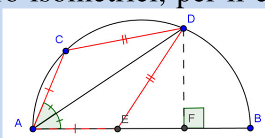
Dimostrazione



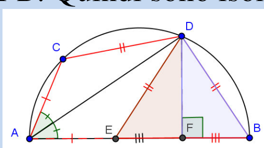
Consideriamo un semicerchio e un suo arco $\overset{\frown}{BC}$, che andiamo a bisecare in D
Adesso tracciamo la perpendicolare da D al diametro e il segmento AE isometrico ad AC.



Adesso i triangoli ACD e AED sono fra loro isometrici, per il criterio LAL, pertanto avremo isometrici anche ED e CD.



Ma ovviamente sono isometrici anche CD e DB, dato che D è punto medio dell'arco $\overset{\frown}{BC}$. Sono perciò isometrici anche i triangoli rettangoli DEF e DFB. Quindi sono isometrici EF e FB.



Ma si ha anche $\overline{FB} = \overline{AB} - \overline{AF} = \overline{AB} - \left(\overline{AE} + \overline{EF}\right) = \overline{AB} - \left(\overline{AC} + \overline{FB}\right) \Rightarrow 2 \cdot \overline{FB} = \overline{AB} - \overline{AC} \Rightarrow \overline{FB} = \frac{\overline{AB} - \overline{AC}}{2}$.

Per il I teorema di Euclide abbiamo: $\overline{DB}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{FB}$ e per la proprietà precedente: $\overline{DB}^2 = \overline{AB} \cdot \frac{\overline{AB} - \overline{AC}}{2}$.

Da cui, detto $\angle C\hat{A}B = \alpha$: $\overline{AB}^2 \cdot sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \overline{AB} \cdot \frac{\overline{AB} - \overline{AB} \cdot cos(\alpha)}{2} \Rightarrow sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - cos(\alpha)}{2}$.

Esempio 6

Vogliamo determinare $sin(22°30')$, senza usare la calcolatrice scientifica. Poiché $sin(22°30') = sin(45°/2)$, possiamo applicare la precedente formula: $sin(22°30') = \sqrt{\frac{1-cos(45°)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}$.

Possiamo determinare anche le formule di bisezione per le altre funzioni goniometriche.

Teorema 5 (Formule di bisezione)

Valgono le seguenti identità, per tutti i valori degli angoli per cui le singole espressioni hanno significato:

$$sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-cos(\alpha)}{2}} \qquad cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+cos(\alpha)}{2}} \qquad tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-cos(\alpha)}{1+cos(\alpha)}}$$

$$cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+cos(\alpha)}{1-cos(\alpha)}} \qquad sec\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{2\cdot sec(\alpha)}{1+sec(\alpha)}} \qquad csc\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{2\cdot sec(\alpha)}{sec(\alpha)-1}}$$

Dimostrazione.

Proviamo solo quella del coseno. Consideriamo la formula di duplicazione del coseno, espressa usando solo il coseno: $cos(2\alpha) = 2cos^2(\alpha) - 1$, valida qualsiasi cosa scriviamo al posto di α, quindi anche per $\alpha/2$:

$$cos(\alpha) = cos(2 \cdot \alpha/2) = 2cos^2(\alpha/2) - 1$$

da cui ricava l'espressione del coseno, ottenendo la formula voluta.

Esempio 7

Vogliamo determinare in altro modo il valore già calcolato di $tan(22°30')$, ossia usando le formule di bisezione. Abbiamo:

$$\sqrt{\frac{1-cos(45°)}{1+cos(45°)}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{\left(2+\sqrt{2}\right)\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)}}=\sqrt{\frac{4-4\cdot\sqrt{2}+2}{4-2}}=\sqrt{3-2\cdot\sqrt{2}}$$

Il risultato sembra diverso. Verifichiamo che invece sono lo stesso numero.

$$\sqrt{3-2\cdot\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1 \Rightarrow 3-3\cdot\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}-1\right)^2 \Rightarrow 3-2\cdot\sqrt{2}=2-2\cdot\sqrt{2}+1 \Rightarrow 3-2\cdot\sqrt{2}=3-2\cdot\sqrt{2}$$

Come applicazione delle formule di bisezione possiamo provare il seguente risultato.

Teorema 6 (formule di Briggs–Retico)

In un qualsiasi triangolo valgono le seguenti formule, in cui p indica il semiperimetro del triangolo:

$$sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{(p-b)\cdot(p-c)}{b\cdot c}} \qquad sin\left(\frac{\beta}{2}\right)=\sqrt{\frac{(p-a)\cdot(p-c)}{a\cdot c}} \qquad sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)=\sqrt{\frac{(p-a)\cdot(p-b)}{a\cdot b}}$$

$$cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{p\cdot(p-a)}{b\cdot c}} \qquad cos\left(\frac{\beta}{2}\right)=\sqrt{\frac{p\cdot(p-b)}{a\cdot c}} \qquad cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)=\sqrt{\frac{p\cdot(p-c)}{a\cdot b}}$$

$$tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{(p-b)\cdot(p-c)}{p\cdot(p-a)}} \qquad tan\left(\frac{\beta}{2}\right)=\sqrt{\frac{(p-a)\cdot(p-c)}{p\cdot(p-b)}} \qquad tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)=\sqrt{\frac{(p-a)\cdot(p-b)}{p\cdot(p-c)}}$$

Dimostrazione

Proviamo solo la prima. Partiamo dalla formula di bisezione del seno, in cui possiamo scegliere il segno positivo perché in ogni caso abbiamo da considerare seni di angoli non superiori a 180°, anzi a 90° perché consideriamo l'angolo metà: $sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-cos(\alpha)}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}}$.

Abbiamo espresso il coseno mediante il Teorema di Carnot. Adesso continuiamo a semplificare.

$$sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{(a-b+c)\cdot(a+b-c)}{4bc}} \qquad (1)$$

Consideriamo in che relazioni si trovano i due fattori al numeratore con il semiperimetro:

$$p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{a+b-c+2c}{2}=\frac{a+b-c}{2}+c\Rightarrow 2\cdot(p-c)=a+b-c;$$
$$p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{a-b+c+2b}{2}=\frac{a-b+c}{2}+b\Rightarrow 2\cdot(p-b)=a-b+c$$

Sostituiamo nella (1): $sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{\cancel{2}\cdot(p-b)\cdot\cancel{2}\cdot(p-c)}{\cancel{4}bc}}=\sqrt{\frac{(p-b)\cdot(p-c)}{bc}}$, che rappresenta la tesi.

Esempio 8

Vogliamo trovare le misure degli angoli di un triangolo di lati 7, 8 e 9, usando le formule precedenti. Si ha: $p=\frac{7+8+9}{2}=12$. Quindi

$$sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{(12-7)\cdot(12-8)}{7\cdot 8}}=\sqrt{\frac{5}{14}}\Rightarrow;\frac{\alpha}{2}\approx 36°41'57"\Rightarrow \alpha\approx 73°23'54";$$
$$sin\left(\frac{\beta}{2}\right)=\sqrt{\frac{(12-7)\cdot(12-9)}{7\cdot 9}}=\sqrt{\frac{5}{21}}\Rightarrow;\frac{\beta}{2}\approx 29°12'21"\Rightarrow \beta\approx 58°24'42";$$
$$sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)=\sqrt{\frac{(12-8)\cdot(12-9)}{8\cdot 9}}=\sqrt{\frac{1}{6}}\Rightarrow\frac{\gamma}{2}\approx 24°5'41"\Rightarrow \gamma\approx 48°11'22"$$

Un importante corollario delle formule di Briggs–Retico è il seguente risultato.

Corollario 4 (Formula di Erone).

L'area di un triangolo di lati *a*, *b*, *c* e semiperimetro *p* è data da $S=\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$

Dimostrazione

Partiamo dalla formula per il calcolo dell'area di un triangolo qualsiasi: ½ *ab sin*(γ). Adesso esprimiamo il seno usando la formula di duplicazione: ½ *ab* · 2 *sin*(γ/2) · *cos*(γ/2) = *ab* · *sin*(γ/2) · *cos*(γ/2)

Adesso applichiamo le formule di Briggs:

$$a\cdot b\cdot\sqrt{\frac{(p-a)\cdot(p-b)}{a\cdot b}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(p-c)}{a\cdot b}}=\sqrt{\cancel{a^2\cdot b^2}\cdot\frac{(p-a)\cdot(p-b)}{\cancel{a\cdot b}}\cdot\frac{p\cdot(p-c)}{\cancel{a\cdot b}}}=\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$$

Questa è la tesi.

Esempio 9

L'area di un triangolo rettangolo di cateti lunghi 3 e 4 è 3 · 4 /2 = 6. Vogliamo verificare questo risultato con il teorema di Erone. L'ipotenusa è lunga $\sqrt{3^2+4^2}=5$, il semiperimetro $p=\frac{3+4+5}{2}=6$. Quindi abbiamo: $S=\sqrt{6\cdot(6-3)\cdot(6-4)\cdot(6-5)}=\sqrt{6\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\sqrt{6^2}=6$.

Un risultato simile alla formula di Erone sussiste anche per un quadrilatero qualsiasi, che è una generalizzazione del teorema 23 dell'unità 7.1.

Teorema 7 (di Brahmagupta)

L'area di un quadrilatero *ABCD* si ottiene mediante la seguente formula, in cui *p* è il semiperimetro e α e γ sono due angoli opposti: $S=\sqrt{(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)\cdot(p-d)-a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}$.

Dimostrazione. Omessa.

A questo punto il predetto teorema 23, diventa una conseguenza del precedente teorema.

Corollario 5

L'area di un quadrilatero ciclico *ABCD* è $S=\sqrt{(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)\cdot(p-d)}$.

Dimostrazione.

Dal teorema precedente, dato che per i quadrilateri ciclici gli angoli opposti sono supplementari, quindi la loro metà è un angolo retto e il coseno è nullo.

Esempio 10

Una condizione necessaria e sufficiente per la ciclicità di un quadrilatero è che gli angoli opposti siano supplementari. Quindi per esempio un rettangolo è ciclico. In questo caso i lati sono a due a due isometrici, *a* e *b*, il semiperimetro sarà perciò *a* + *b* e gli angoli sono retti. Per la formula di Brahmagupta l'area si trova nel seguente modo:

$$S=\sqrt{(a+b-a)^2\cdot(a+b-b)^2-a^2\cdot b^2\cdot cos^2\left(\frac{90°+90°}{2}\right)}=\sqrt{b^2\cdot a^2-a^2\cdot b^2\cdot cos^2(90°)}=a\cdot b\,.$$

Che ovviamente coincide con la ben nota formula.

I protagonisti

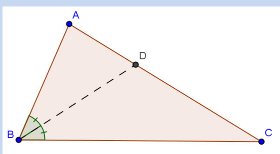
Ad **Henry Briggs** (1561 –1630) abbiamo già accennato nell'unità 5.2 sui logaritmi, egli compilò anche tavole goniometriche, legate sempre ai logaritmi, e sempre per questioni astronomiche.
Georg Joachim von Lauchen Rheticus nacque ne1 1514 a Feldkirch, in Austria. Fu un famoso astronomo e per due anni, apartire dal Maggio 1539, lavorò con Copernico. Proprio a causa dei suoi studi astronomici ebbe a che fare con la trigonometria. Infatti nel 1541 curò la pubblicazione del *De Revolutionibus* di Copernico a cui aggiunse le prime tavole trigonometriche di seno e coseno mai pubblicate. Mori nel 1574 a Kassa, in Ungheria.
Erone nacque ad Alessandria d'Egitto intorno al 10 e morì intorno al 75. Come per molti antichi studiosi, le notizie biografiche sono molto incerte. Per parecchio tempo si pensò che fosse vissuto intorno al 150 a.C. e poi invece intorno al 250 d.C. Fu uno studioso di geometria e di meccanica. Sono arrivati fino a noi diverse opere, fra cui ricordiamo *Sulla dioptra* (opera astronomica), *La pneumatica* (su strumenti meccanici che utilizzavano l'aria o l'acqua) *La Meccanica* in 3 libri, *La Geometria* (anche se taluni pensano non sia opera sua). La sua famosa formula è enunciata nella *Metrica*, uno dei tre libri della *Meccanica*.
Brahmagupta nacque in India nel 598 ed ivi morì nel 670. Fu un matematico e un astronomo. Ricordiamo in particolare la sua opera astronomica *Brahmasphutasiddhanta* (L'apertura dell'Universo), scritta nel 628. In questo lavoro vi è una interessante trattazione del numero zero (all'epoca ancora considerato un non numero) e dei numeri negativi, ancora non accettati dalla comunità matematica. Si avventura anche a parlare della divisione per zero, con interessanti, seppur sbagliate, conclusioni. Fornisce formule non dimostrate per la somma dei primi *n* quadrati dei numeri naturali e dei primi *n* cubi. Nello stesso lavoro enuncia e dimostra la formula sui quadrilateri ciclici.

Utilizzando le formule di bisezione possiamo trovare anche la misura di alcuni enti particolari di un triangolo.

Teorema 8

In un triangolo il segmento intercettato dalla bisettrice di un angolo interno è dato dal rapporto fra il doppio prodotto dei lati che comprendono il detto angolo e la somma degli stessi lati, il tutto moltiplicato per il coseno della metà dell'angolo. In simboli $b_a=\frac{2\cdot b\cdot c\cdot cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{b+c};b_b=\frac{2\cdot a\cdot c\cdot cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}{a+c};b_c=\frac{2\cdot a\cdot b\cdot cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{a+b}$

Dimostrazione

Consideriamo un qualsiasi triangolo 

e tracciamo la bisettrice di uno dei suoi angoli interni. Ricaviamo la misura di AD usando il Teorema dei seni applicato al triangolo ABD:

$$\frac{\overline{BD}}{sin\left(D\hat{A}B\right)}=\frac{\overline{AD}}{sin\left(A\hat{B}D\right)}\Rightarrow \overline{AD}=\frac{\overline{BD}\cdot sin\left(\beta/2\right)}{sin\left(\alpha\right)}$$

Ricordiamo il Teorema della Bisettrice che afferma che ogni bisettrice di un angolo interno di un triangolo divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati: $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}$. Adesso usiamo la proprietà del comporre. $\frac{\overline{AB}+\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AD}+\overline{DC}}{\overline{AD}}\Rightarrow\frac{\overline{AB}+\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}\Rightarrow\frac{c+a}{c}=\frac{b}{\overline{AD}}$. Semplifichiamo la precedente proporzione. $\frac{c+a}{c}=\frac{b}{\frac{\overline{BD}\cdot sin\left(\beta/2\right)}{sin\left(\alpha\right)}}\Rightarrow\frac{c+a}{c}=\frac{b\cdot sin\left(\alpha\right)}{\overline{BD}\cdot sin\left(\beta/2\right)}$. Per il Teorema dei seni applicato ad ABC, ricavando b mediante a, abbiamo ancora: $\frac{c+a}{c}=\frac{\frac{a\cdot sin\left(\beta\right)}{\cancel{sin\left(\alpha\right)}}\cdot \cancel{sin\left(\alpha\right)}}{\overline{BD}\cdot sin\left(\beta/2\right)}\Rightarrow\frac{c+a}{c}=\frac{a\cdot sin\left(\beta\right)}{\overline{BD}\cdot sin\left(\beta/2\right)}$

Per la formula di duplicazione del seno: $\frac{c+a}{c}=\frac{a\cdot 2\cdot \cancel{sin\left(\beta/2\right)}\cdot cos\left(\beta/2\right)}{\overline{BD}\cdot \cancel{sin\left(\beta/2\right)}}\Rightarrow\frac{c+a}{c}=\frac{a\cdot 2\cdot cos\left(\beta/2\right)}{\overline{BD}}$

Infine ricaviamo la misura cercata: $\overline{BD}=\frac{2\cdot a\cdot c\cdot cos\left(\beta/2\right)}{a+c}$. Ecco la tesi.

Esempio 11

Consideriamo il triangolo rettangolo (3, 4, 5), vogliamo trovare le misure dei segmenti intercettati dalle bisettrici degli angoli interni. Intanto calcoliamo i coseni di tali angoli.

$$cos\left(\alpha\right)=0; cos\left(\beta\right)=\frac{4^2+5^2-3^2}{2\cdot 4\cdot 5}=\frac{32}{40}=\frac{4}{5}; cos\left(\gamma\right)=\frac{3^2+5^2-4^2}{2\cdot 3\cdot 5}=\frac{18}{30}=\frac{3}{5}.$$

Adesso calcoliamo i coseni degli angoli metà:

$$cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}; cos\left(\frac{\beta}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+4/5}{2}}=\sqrt{\frac{9}{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}; cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+3/5}{2}}=\sqrt{\frac{8}{10}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Possiamo applicare le formule stabilite dal teorema precedente.

$$b_a=\frac{\cancel{2}\cdot 3\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}}{3+4}=\frac{12\cdot\sqrt{2}}{7}; b_b=\frac{2\cdot 5\cdot 4\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}}{5+4}=\frac{40}{3\cdot\sqrt{10}}; b_c=\frac{2\cdot 5\cdot 3\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}}{5+3}=\frac{15}{2\cdot\sqrt{5}}$$

Infine chiudiamo con un ultimo risultato.

Teorema 9

Detto r il raggio del cerchio inscritto in un triangolo di lati a, b, c si ha:

$$r=\left(p-a\right)\cdot tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\left(p-b\right)\cdot tan\left(\frac{b}{2}\right)=\left(p-c\right)\cdot tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

Dimostrazione

Sappiamo che si ha: $r = S/p$, quindi per il teorema di Erone possiamo scrivere:

$$r=\frac{\sqrt{p\cdot\left(p-a\right)\cdot\left(p-b\right)\cdot\left(p-c\right)}}{p}=\frac{\sqrt{p\cdot\left(p-a\right)}\cdot\sqrt{\left(p-b\right)\cdot\left(p-c\right)}}{p}=$$

$$=\frac{\cancel{p}\cdot\left(p-a\right)\cdot\sqrt{\left(p-b\right)\cdot\left(p-c\right)}}{\cancel{p}\cdot\sqrt{p\cdot\left(p-a\right)}\cdot}=\frac{\left(p-a\right)\cdot\sqrt{\left(p-b\right)\cdot\left(p-c\right)}}{\sqrt{p\cdot\left(p-a\right)}\cdot}$$

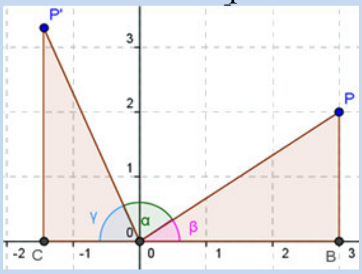
Usando le formule di Briggs–Retico abbiamo la tesi.

Concludiamo il paragrafo determinando, come applicazione delle formule di addizione e sottrazione degli archi, le leggi di una rotazione di angolo qualsiasi.

Teorema 10

Valgono le seguenti leggi che trasformano il punto $P \equiv (x; y)$ nel punto $P' \equiv (x'; y')$, ottenuto mediante la rotazione di un angolo α attorno all'origine $\begin{cases} x' = x \cdot cos(\alpha) - y \cdot sin(\alpha) \\ x' = x \cdot sin(\alpha) + y \cdot cos(\alpha) \end{cases}$

Dimostrazione.
Consideriamo la seguente figura in cui abbiamo ruotato il punto P attorno ad O di un angolo α.



Si ha: $\begin{cases} \overline{OB} = \overline{OP} \cdot cos(\beta) \\ \overline{BP} = \overline{OP} \cdot sin(\beta) \end{cases}; \begin{cases} \overline{OC} = \overline{OP'} \cdot cos(\gamma) \\ \overline{CP'} = \overline{OP'} \cdot sin(\gamma) \end{cases}$, ovviamente OP e OP' sono segmenti isometrici. Nelle ipotesi della figura possiamo anche scrivere: $\begin{cases} x = \overline{OP} \cdot cos(\beta) \\ y = \overline{OP} \cdot sin(\beta) \end{cases}; \begin{cases} x' = -\overline{OP'} \cdot cos(\gamma) \\ y' = \overline{OP'} \cdot sin(\gamma) \end{cases}$. Abbiamo anche: $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$, quindi $\begin{cases} x' = \overline{OP'} \cdot cos(\alpha + \beta) = x' \cdot [cos(\alpha) \cdot cos(\beta) - sin(\alpha) \cdot sin(\beta)] \\ y' = \overline{OP'} \cdot sin(\alpha + \beta) = y' \cdot [sin(\alpha) \cdot cos(\beta) + cos(\alpha) \cdot sin(\beta)] \end{cases}$

che possiamo anche semplificare nel seguente modo:

$$\begin{cases} x' = \overline{OP} \cdot cos(\alpha) \cdot cos(\beta) - \overline{OP} \cdot sin(\alpha) \cdot sin(\beta) = x \cdot cos(\alpha) - y \cdot sin(\alpha) \\ y' = \overline{OP} \cdot sin(\alpha) \cdot cos(\beta) + \overline{OP} \cdot cos(\alpha) \cdot sin(\beta) = x \cdot sin(\alpha) + y \cdot cos(\alpha) \end{cases}$$

che è proprio la tesi. Analoghi procedimenti possono farsi negli altri casi in cui P e/o P′ appartengano a un altro quadrante.

Esempio 12

Ruotiamo il punto $P \equiv (1; 2)$ attorno all'origine di 60°, troveremo il punto di coordinate:

$$\begin{cases} x' = 1 \cdot cos(60°) - 2 \cdot sin(60°) = \dfrac{1 - 2 \cdot \sqrt{3}}{2} \\ x' = 1 \cdot sin(60°) + 2 \cdot cos(60°) = \dfrac{\sqrt{3} + 2}{2} \end{cases}$$

Possiamo anche ottenere le leggi di una rotazione attorno a un centro qualsiasi.

Teorema 11

Le seguenti leggi $\begin{cases} x' = a + (x - a) \cdot cos(\alpha) - (y - b) \cdot sin(\alpha) \\ x' = b + (x - a) \cdot sin(\alpha) + (y - b) \cdot cos(\alpha) \end{cases}$ trasformano il punto $P \equiv (x; y)$ in $P' \equiv (x'; y')$, ottenuto mediante la rotazione di un angolo α attorno al centro $C \equiv (a; b)$.
Dimostrazione.

Basta applicare le traslazioni che portano C in O: $\begin{cases} x' = x - a \\ x' = y - b \end{cases}$, quindi applicare le leggi della rotazione attorno ad O già trovate.

Queste leggi ci permettono di determinare le equazioni di una generica conica.

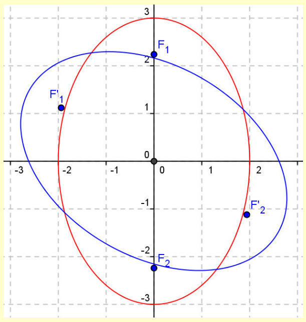
Esempio 13

Consideriamo l'ellisse canonica $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, vogliamo ruotarla attorno all'origine di 60°. Applichiamo le precedenti leggi: $\begin{cases} x' = \frac{x - \sqrt{3} \cdot y}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{3} \cdot x + y}{2} \end{cases}$, ricaviamo le leggi inverse: $\begin{cases} x = \frac{x' + \sqrt{3} \cdot y'}{2} \\ y = \frac{y' - \sqrt{3} \cdot x'}{2} \end{cases}$ e sostituiamo:

$$\frac{\left(\frac{x' + \sqrt{3} \cdot y'}{2}\right)^2}{4} + \frac{\left(\frac{y' - \sqrt{3} \cdot x'}{2}\right)^2}{9} = 1$$

Semplifichiamo ed eliminiamo gli apici, ottenendo l'equazione cercata: $21x^2 + 10 \cdot \sqrt{3} \cdot xy + 31y^2 - 144 = 0$

Vediamo la rappresentazione grafica:



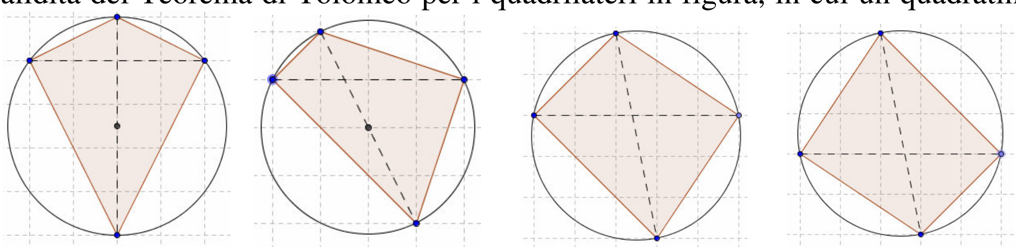
Verifiche

Lavoriamo insieme

Un quadrato è inscrivibile in una circonferenza, quindi per esso deve essere valido il teorema di Tolomeo. Infatti, le diagonali di un quadrato di lato ℓ misurano $\ell \cdot \sqrt{2}$. Quindi secondo il teorema deve aversi: $\ell \cdot \ell + \ell \cdot \ell = \left(\ell \cdot \sqrt{2}\right) \cdot \left(\ell \cdot \sqrt{2}\right) \Rightarrow 2 \cdot \ell^2 = 2 \cdot \ell^2$, che è vero.

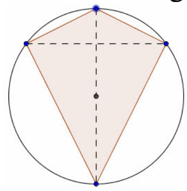
***Livello* 1**

1. Verificare la validità del Teorema di Tolomeo per un rettangolo generico di lati lunghi a e b.
2. A quale altro famoso Teorema equivale il teorema di Tolomeo nel caso di un rettangolo? [Teorema di Pitagora]
3. Usando il teorema di Tolomeo determinare la misura della diagonale di un trapezio isoscele di basi lunghe a e b e lato obliquo lungo c. $\left[\sqrt{a \cdot b + c^2}\right]$
4. Verificare la validità del Teorema di Tolomeo per i quadrilateri in figura, in cui un quadratino ha lato di 1 *cm*.



Livello 2

5. Verificare la validità del Teorema di Tolomeo per un trapezio isoscele generico di basi lunghe a e b e lato obliquo lungo c.
6. Verificare la validità del Teorema di Tolomeo per un aquilone generico di lati lunghi a e b e diagonali



perpendicolari uno dei quali è diametro della circonferenza circoscritta.
7. Verificare la validità del Teorema di Tolomeo per un quadrilatero ciclico di lati consecutivi lunghi 3,07; 3,68; 4,89 e 4,45. Si sa che le diagonali sono fra loro perpendicolari.
8. Un quadrilatero è inscritto in una semicirconferenza di diametro lungo 25 cm, ha i due lati consecutivi al diametro lunghi rispettivamente 7 cm e 15 cm. Quanto misura il quarto lato? [15 cm]
9. Un trapezio isoscele è inscritto in una semicirconferenza di diametro d, se il lato obliquo è lungo a, quanto misura il quarto lato? $\left[\dfrac{d^2-2a^2}{d}\right]$
10. Esternamente a un lato AB di un quadrato costruiamo un triangolo rettangolo ABC che ha per ipotenusa AB. Se i cateti sono lunghi rispettivamente 1,35 cm e 1,96 cm, determinare la misura del segmento CD, in cui D è il centro del quadrato. **Sugg.** Applicare il teorema di Tolomeo al quadrilatero $ABCD$. [≈ 2,34cm]

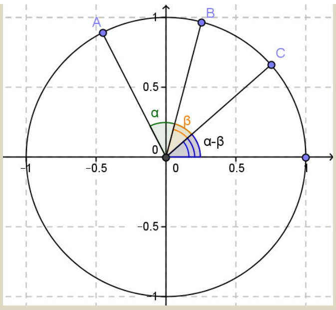
Livello 3

11. Un quadrilatero ciclico ha due lati consecutivi lunghi 3 e 4, l'angolo fra essi compreso retto, la diagonale che parte da tale angolo lunga anch'essa 4. Determinare la misura dei rimanenti lati del quadrilatero. [≈ 4,86; ≈1,35]
12. Dimostrare l'inverso del teorema di Tolomeo: *Se in un quadrilatero la somma dei prodotti dei lati opposti uguaglia il prodotto delle diagonali, allora il quadrilatero è ciclico*.
13. Il rettangolo $ABCD$ ha i lati AB e BC lunghi rispettivamente 1,34 cm e 2,48 cm. Scegliamo il punto E su BC in modo che si abbia BE lungo 1,03 cm. Il prolungamento di AE incontra la circonferenza circoscritta al rettangolo nel punto F, determinare la misura di BF. [≈ 1,71 cm]
14. Dato il triangolo rettangolo di cateti lunghi 3 e 4, dal punto medio del cateto maggiore si tracci la perpendicolare all'ipotenusa, che la incontra nel punto A, determinare la distanza di A dal vertice dell'angolo retto, usando il teorema di Tolomeo. $\left[\dfrac{4}{5}\cdot\sqrt{13}\right]$
15. Un quadrilatero è inscritto in una semicirconferenza di diametro d, con i due lati consecutivi al diametro lunghi rispettivamente a e b. Quanto misura il quarto lato? $\left[\dfrac{\sqrt{\left(d^2-a^2\right)\cdot\left(d^2-b^2\right)}-ab}{d}\right]$
16. Un triangolo isoscele ABC, di base BC, è inscritto in una circonferenza, si scelga un punto P sull'arco $\overset{\frown}{BC}$, provare che si ha: $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}+\overline{PC}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$.
17. Con riferimento al problema precedente, cosa succede se il triangolo è equilatero? $\left[\overline{PA}=\overline{PB}+\overline{PC}\right]$
18. Un quadrato $ABCD$ è inscritto in una circonferenza, si scelga un punto P sull'arco $\overset{\frown}{BC}$, provare che si ha: $\dfrac{\overline{PA}+\overline{PC}}{\overline{PB}+\overline{PD}}=\dfrac{\overline{PD}}{\overline{PA}}$.

Formule di addizione e sottrazione

Lavoriamo insieme

La formula di addizione del coseno si può anche dimostrare nel seguente modo:



Siano $A \equiv (cos(\alpha), sin(\alpha))$, $B \equiv (cos(\beta), sin(\beta))$ e $C \equiv (cos(\alpha - \beta), sin(\alpha - \beta))$, quindi l'arco CD è isometrico ad AB, pertanto avremo $\overline{CD}^2 = \overline{AB}^2$. Cioè abbiamo:

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= [cos(\alpha) - cos(\beta)]^2 + [sin(\alpha) - sin(\beta)]^2 = \\ &= cos^2(\alpha) + cos^2(\beta) - 2 \cdot cos(\alpha) \cdot cos(\beta) + sin^2(\alpha) + sin^2(\beta) - 2 \cdot sin(\alpha) \cdot sin(\beta) = \\ &= 2 - 2 \cdot cos(\alpha) \cdot cos(\beta) - 2 \cdot sin(\alpha) \cdot sin(\beta) = 2 - 2 \cdot [cos(\alpha) \cdot cos(\beta) + sin(\alpha) \cdot sin(\beta)]\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\overline{CD}^2 &= [cos(\alpha - \beta) - 1]^2 + [sin(\alpha - \beta)]^2 = \\ &= cos^2(\alpha - \beta) + 1 - 2 \cdot cos(\alpha - \beta) + sin^2(\alpha - \beta) = 2 - 2 \cdot cos(\alpha - \beta)\end{aligned}.$$

Abbiamo quindi:

$$\begin{aligned}&\overline{AB}^2 = \overline{CD}^2 \Leftrightarrow 2 - 2 \cdot [cos(\alpha) \cdot cos(\beta) + sin(\alpha) \cdot sin(\beta)] = 2 - 2 \cdot cos(\alpha - \beta) \Rightarrow \\ &cos(\alpha) \cdot cos(\beta) + sin(\alpha) \cdot sin(\beta) = cos(\alpha - \beta)\end{aligned}.$$

Che è proprio ciò che volevamo provare.

Usando le formule di addizione e sottrazione degli archi e i valori degli archi notevoli calcolare quanto richiesto.

Livello 1

19. $sin(75°) = sin(45° + 30°)$ $\left[\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right]$ $cos(105°) = cos(60° + 45°)$ $\left[\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right]$

20. $sin(15°) = sin(45° – 30°)$ $\left[\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right]$ $cos(90°) = cos(45° + 45°)$ [0]

21. $tan(15°) = tan(45° – 30°)$ $\left[2-\sqrt{3}\right]$ $cot(60°) = cos(30° + 30°)$ $\left[\sqrt{3}/3\right]$

22. $tan(120°) = tan(60° + 60°) = tan(90° + 30°) = tan(120° – 30°)$ $\left[-\sqrt{3}\right]$

23. $sin(150°) = sin(75° + 75°) = sin(180° – 30°)$ [½]

24. $cos(135°) = cos(30° + 105°)$ $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ $sin(105°) = sin(15° + 90°)$ $\left[\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right]$

25. $cot(0°) = cos(45° – 45°)$ [Non esiste]

26. $sec(75°)$ $\left[\sqrt{6}+\sqrt{2}\right]$ $csc(75°)$ $\left[\sqrt{6}-\sqrt{2}\right]$

27. $sec(105°)$ $\left[-\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\right]$ $csc(105°)$ $\left[\sqrt{6}-\sqrt{2}\right]$

Determinare quanto richiesto sulla base dei dati noti.

Livello 2

28. $sin(\alpha) = 1/2$, $cos(\beta) = 1$, $\alpha \in [\pi/2; \pi]$, $\beta \in [3/2\pi; 2\pi]$; $cos(\alpha + \beta) = ?$; $tan(\alpha - \beta) = ?$

$$\left[cos(\alpha+\beta) = \frac{\sqrt{3}}{4}; tan(\alpha-\beta) = -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$$

29. $sin(\alpha) = 2/7$, $cos(\beta) = – 7/9$, $\alpha \in [\pi/2; \pi]$, $\beta \in [\pi; 3/2\pi]$; $sin(\alpha + \beta) = ?$; $tan(\alpha - \beta) = ?$

$$\left[sin(\alpha+\beta) = \frac{4\cdot\sqrt{10}}{21} - \frac{2}{9}; tan(\alpha-\beta) = \frac{-2\cdot\left(243\cdot\sqrt{5}+686\cdot\sqrt{2}\right)}{2077}\right]$$

30. $sin(\alpha) = -3/5$, $cos(\beta) = 6/7$, $\alpha \in [\pi; 3/2\,\pi]$, $\beta \in [3/2\pi; 2\pi]$; $sin(\alpha - \beta) = ?$; $tan(\alpha + \beta) = ?$
$$\left[sin(\alpha-\beta)=\frac{-4\cdot\sqrt{13}}{35}-\frac{18}{35};tan(\alpha+\beta)=\frac{-2\cdot\left(25\cdot\sqrt{13}-98\right)}{153}\right]$$

31. $sin(\alpha) = 3/4$, $cos(\beta) = 8/9$, $\alpha \in [0; \pi/2]$, $\beta \in [3/2\pi; 2\pi]$; $cos(\alpha + \beta) = ?$; $cot(\alpha - \beta) = ?$
$$\left[cos(\alpha+\beta)=\frac{3\cdot\sqrt{7}}{16}-\frac{8\cdot\sqrt{17}}{81};cot(\alpha-\beta)=\frac{128\cdot\sqrt{17}+243\cdot\sqrt{7}}{457}\right]$$

32. $sin(\alpha) = -0{,}1$; $cos(\beta) = -0{,}2$; $\alpha \in [3/2\pi; 2\pi]$, $\beta \in [\pi; 3/2\pi]$; $cos(\alpha - \beta) = ?$; $cot(\alpha + \beta) = ?$
$$\left[cos(\alpha-\beta)\approx 0{,}297;cot(\alpha+\beta)\approx -0{,}311\right]$$

33. $sin(\alpha) = 0{,}3$; $cos(\beta) = -0{,}4$; $\alpha \in [0; \pi/2]$, $\beta \in [\pi; 3/2\pi]$; $sin(\alpha + \beta) = ?$; $tan(\alpha + \beta) = ?$
$$\left[sin(\alpha+\beta)=-0{,}994;tan(\alpha+\beta)\approx 9{,}326\right]$$

Lavoriamo insieme

Vogliamo semplificare la seguente espressione: $[1 + tan(x)] \cdot [1 + tan(45° - x)]$. Applichiamo la formula di sottrazione della tangente al secondo membro:
$$[1+tan(x)]\cdot\left[1+\frac{tan(45°)-tan(x)}{1+tan(45°)\cdot tan(x)}\right]=[1+tan(x)]\cdot\left[1+\frac{1-tan(x)}{1+tan(x)}\right]=\cancel{[1+tan(x)]}\cdot\frac{1+\cancel{tan(x)}+1-\cancel{tan(x)}}{\cancel{1+tan(x)}}=2$$

Semplificare le seguenti espressioni usando, laddove possibile, le formule di addizione e sottrazione degli archi

Livello 1

34. $sin(x - y) \cdot sin(x) + cos(x - y) \cdot cos(x)$ $[sin^2(x) \cdot cos(x) + cos^2(x) \cdot cos(y)]$
35. $sin(x + y) \cdot cos(x) - cos(x - y) \cdot sin(x)$ $[sin(y) \cdot (2cos^2(x) - 1)]$
36. $sin(x - 30°) + cos(x + 60°)$ $[0]$; $sin(x - 45°) + cos(x + 45°)$ $[0]$
37. $sin(x + 45°) - cos(x + 45°)$ $\left[\sqrt{2}\cdot sin(x)\right]$; $sin(x + 60°) - cos(x - 30°)$ $[0]$
38. $sin(x + y) - cos(x + y)$ $[sin(y) - cos(x) \cdot cos(y) + sin(x) \cdot cos(y) + sin(y) \cdot cos(x)]$
39. $tan(x + y) \cdot tan(x - y)$ $\left[\frac{cos^2(y)-cos^2(x)}{cos^2(x)-sin^2(y)}\right]$
40. $tan(x + 45°) \cdot tan(x - 45°)$ $[-1]$; $tan(x + 30°) \cdot tan(x - 60°)$ $[-1]$

Livello 2

41. $tan^2(x + 45°) - tan^2(x - 45°)$ $\left[\frac{8\cdot sin(x)\cdot cos(x)}{1-4\cdot sin^2(x)\cdot cos^2(x)}\right]$; $sin^2(x + 30°) - sin^2(x + 60°)$ $[½ - cos^2(x)]$
42. $cos^2(x + 45°) + sin^2(x - 45°)$ $[1 - 2sin(x)cos(x)]$; $cos^2(x + 45°) - cos^2(x - 45°)$ $[2\,sin(x)\,cos(x)]$
43. $cos^2(x + y) + sin^2(x - y)$ $[1 - 4sin(x)\,cos(x)\,sin(y)\,cos(y)]$
44. $cot(x + y) \cdot cot(x - y)$ $\left[\frac{sin^2(y)-cos^2(x)}{cos^2(x)-cos^2(y)}\right]$; $\frac{cos(x+y)+cos(x-y)}{sin(x+y)-sin(x-y)}$ $[cot(y)]$

Livello 3

45. Puoi trovare una legge generale in cui rientrano gli esercizi 32? $[sin(x - y) + cos(x + 90° - y) = 0]$
46. Puoi trovare una legge generale in cui rientra gli esercizi 33? $[sin(x + y) - cos(x + y - 90°) = 0]$
47. Puoi trovare una legge generale in cui rientrano gli esercizi 36? $[tan(x + y) \cdot tan(x + y - 90°) = -1]$
48. Sviluppare $sin(x + y + z)$ $[cos(x)cos(y)cos(z)+cos(x)sin(y)cos(z)+sin(x)cos(y)cos(z) - sin(x)sin(y)sin(z)]$
49. Sviluppare $cos(x + y + z)$ $[cos(x)cos(y)cos(z)-cos(x)sin(y)sin(z)- sin(x)cos(y)sin(z) - sin(x)sin(y)cos(z)]$

Lavoriamo insieme

Noi sappiamo che, per ogni angolo x, si ha: $sin^2(x) + cos^2(x) = 1$, possiamo quindi dire che la precedente u-

guaglianza è una identità per ogni numero reale *x*.
Nel box Lavoriamo insieme precedente abbiamo visto che $[1 + tan(x)] \cdot [1 + tan(45° - x)] = 2$, possiamo dire che anche questa uguaglianza è un'identità per ogni numero reale *x*? No, perché per esempio per $x = 90°$ otteniamo $[1 + tan(90°)] \cdot [1 + tan(45° - 90°)]$, che è un'espressione priva di significato perché contiene l'espressione $tan(90°)$ essa stessa senza significato. Possiamo perciò dire che abbiamo a che fare con una identità solo per quegli *x* per cui le espressioni presenti hanno tutte significato, ossia per quelle *x* per cui si ha: $x \neq 90° + k180° \wedge 45° - x \neq 90° + k180° \Rightarrow x \neq -45° + k180°$

Verificare se le seguenti sono identità, stabilendo altresì il relativo dominio in [0°; 360°] o [0; 2π]

Livello 2

50. $\dfrac{cos^2(x+y) - cos^2(x-y)}{sin^2(x) \cdot cos^2(y)} = -4 \cdot cot(x) \cdot tan(y)$ [Sì; $x \neq 0, \pi \wedge y \neq \pi/2, 3\pi/2$]

51. $\dfrac{sin^2(x+y) - sin^2(x-y)}{sin(x) \cdot sin(y)} = 4 \cdot cos(x) \cdot cos(y)$ [Sì; $x \neq 0, \pi \wedge y \neq 0, \pi$]

52. $\dfrac{cos^2(x+y) + cos^2(x-y)}{sin^2(x) \cdot cos^2(y)} = 2 \cdot \left[cot^2(x) + tan^2(y)\right]$ [Sì; $x \neq 0, \pi \wedge y \neq \pi/2, 3\pi/2$]

53. $\dfrac{sin^2(x+y) + sin^2(x-y)}{sin^2(x) \cdot sin^2(y)} = 2 \cdot \left[cot^2(x) - cot^2(y)\right]$ [No] $\dfrac{sin(x+y) - sin(x-y)}{cos(x+y) + cos(x-y)} = -tan(y)$ [No]

54. $\dfrac{1 + tan(x)}{1 - tan(x)} = \dfrac{sin(x + 45°)}{sin(45° - x)}$ [Sì; $x \neq 45°, 90°, 135°, 225°, 270°$]

55. $\dfrac{sin(x+y) + sin(x-y)}{cos(x+y) - cos(x-y)} = -cot(y)$ [Sì; $x \neq 0 \wedge y \neq 0, \pi$]

56. $\left[sin(x + 30°) - sin(x - 30°)\right] \cdot tan(x + 45°) = \dfrac{cos(x) \cdot \left[sin(x) + cos(x)\right]}{cos(x) - sin(x)}$ [Sì; $x \neq 45°, 225°$]

57. $\dfrac{tan(x + 30°)}{tan(x - 30°)} \cdot \dfrac{tan(x - 60°)}{tan(x + 60°)} = -1$ [No] $\dfrac{sin(x + 45°)}{cos(x - 45°)} \cdot \dfrac{cos(x + 45°)}{sin(x - 45°)} = -1$ [Sì; $x \neq 45°, 135°, 225°, 315°$]

58. $\dfrac{sin(x + 60°)}{cos(x - 30°)} \cdot \dfrac{sin(x - 60°)}{cos(x + 30°)} = -1$ [Sì; $x \neq 60°, 120°, 240°, 300°$]

Livello 3

59. Puoi trovare una legge generale in cui rientra il secondo degli esercizi 57?
$$\left[\frac{sin(x+y)}{cos(x - 90° + y)} \cdot \frac{cos(x + 90° - y)}{sin(x-y)} = -1\right]$$

60. Puoi trovare una legge generale in cui rientra l'esercizio 58? $\left[\dfrac{sin(x+y)}{cos(x - 90° + y)} \cdot \dfrac{sin(x-y)}{cos(x + 90° - y)} = -1\right]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere l'equazione: $sin(x - 5°) - sin(x + 5°) + 3cos(x) = 0,\ x \in [254°; 501°]$.
Applichiamo le formule di addizione e quelle di sottrazione del seno:
$$sin(x)\ cos(5°) - sin(5°)\ cos(x) - sin(x)\ cos(5°) - sin(5°)\ cos(x) + 3cos(x) = 0 \Rightarrow$$
$$-\ 2sin(5°)\ cos(x) + 3cos(x) = 0 \Rightarrow -cos(x) \cdot [2sin(5°) - 3] = 0 \Rightarrow cos(x) = 0$$
L'equazione è immediata e facilmente si determinano le soluzioni comprese nell'intervallo indicato:
$$x = 270° \vee x = 450°.$$

Risolvere le equazioni seguenti negli intervalli indicati.

Livello 1

61. $sin(x + y) - sin(x - y) = 0,\ x, y \in [-150°; 400°]$ [$x = -90°, 90°, 270°; y = 0°, 180°, 360°$]
62. $cos(x - y) + cos(x + y) = 0,\ x, y \in [-300°; 300°]$ [$x, y = -270°, -90°, 90°, 270°$]

63. $sin(x + 30°) - cos(x) = 0$, $x \in [-100°; 431°]$ [$x = 30°, 210°, 390°$]
64. $sin(x + 45°) - cos(x - 45°) = 0$, $x \in [-210°; 410°]$ [Identità]
65. $sin(x) + cos(x - 60°) = 0$, $x \in [-250°; 317°]$ [$x = -195°, -15°, 165°$]
66. $sin(x + 45°) - cos(x - 60°) = 0$, $x \in [0°; 360°]$ [$x = 52°30', 232°30'$]
67. $cos(x + \pi/6) + 2cos(x) - 3sin(x) = 0$, $x \in [-2; 4]$ [$x \approx 0{,}69; \approx 3{,}83$]
68. $sin(x - \pi/3) + sin(x) - cos(x) = 0$, $x \in [-2; 4]$ [$x \approx 0{,}89$]
69. $sin(x + 1) - sin(x - 1) + 5cos(x) = 0$, $x \in [2; 5]$ [$x = 3/2\pi$]
70. $cos(x + 2) - cos(x - 2) - sin^2(x) = 0$, $x \in [-1; 5]$ [$x = 0; \pi$]

Livello 2

71. $sin(x + y) - sin(x - y) - 3cos(x) = 0$, $x \in [125°; 348°]$ [$x = 270°$]
72. $cos(x + y) - cos(x - y) + 4sin(x) = 0$, $x \in [247°; 415°]$ [$x = 360°$]
73. $sin(x + y) - sin(x - y) + 5cos(x) = 0$, $x \in [27°; 218°]$ [$x = 90°$]
74. $cos(x + 30°) - cos(x - 30°) + 3sin(x) = 1$, $x \in [25°; 541°]$ [$x = 30°, 150°, 390°, 510°$]
75. $cos(x + \pi/4) - cos(x - \pi/4) - 1 = 0$, $x \in [-2; 5]$ [$x = -\pi/4, 5\pi/4$]
76. $sin(x + \pi/3) - sin(x) + cos(x - \pi/6) = 0$, $x \in [-2; 3]$ [$x \approx -0{,}96; \approx 0{,}96$]
77. $cos(x + \pi/3) - ½cos(x) + sin(x) - 0{,}1 = 0$, $x \in [-3; 1]$ [$x \approx 0{,}84$]
78. $sin(x + \pi/3) - 0{,}5sin(x) - 3cos(x) + 0{,}51 = 0$, $x \in [1; 4]$ [$x \approx 1{,}5$]
79. $tan(x + \pi/4) - tan(x - \pi/4) - 1 = 0$, $x \in [1; 4]$ [$\varnothing$]
80. $tan(x + \pi/6) - tan(x - \pi/3) + 5 = 0$, $x \in [-3; 3]$ [$x \approx -1{,}89: \approx -0{,}73; \approx 1{,}25; \approx 2{,}41$]

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere la disequazione $sin(x + 30°) - cos(x - 30°) > 0$, $x \in [0°; 360°]$

Sviluppiamo: $$sin(x)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+cos(x)\cdot\frac{1}{2}-cos(x)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-sin(x)\cdot\frac{1}{2}>0\Rightarrow$$ $$\Rightarrow\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot sin(x)+\left(1-\sqrt{3}\right)\cdot cos(x)>0\Rightarrow sin(x)-cos(x)>0$$. Abbiamo ottenuto una disequazione omogenea di I grado in seno e coseno. Per risolverla consideriamo i seguenti due sistemi:

$$\begin{cases} tan(x)-1>0 \\ cos(x)>0 \end{cases} \vee \begin{cases} tan(x)-1<0 \\ cos(x)<0 \end{cases}$$. Risolviamoli in [0°, 360°]

$$\begin{cases} 45°<x<90° \vee 225°<x<270° \\ 0<x<90° \vee 270°<x<360° \end{cases} \vee \begin{cases} 0°\le x<45° \vee 90°<x<225° \vee 270°<x\le 360° \\ 90°<x<270° \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 45°<x<90° \vee 90°<x<225°$$

come si vede la soluzione non è stata controllata per $x = 90°$, poiché in tale valore il coseno si annulla e quindi non possiamo applicare il procedimento. Basta verificare cosa accade per tale valore. $sin(90° + 30°) - cos(90° - 30°) = sin(120°) - cos(60°) > 0$. Possiamo allora scrivere l'unica soluzione: $45° < x < 225°$.

Risolvere le seguenti disequazioni nella circonferenza goniometrica

Livello 2

81. $sin(x + 45°) - sin(x - 30°) > 0$ [$0° \le x < 82°30', 262°30' < x \le 360°$]
82. $cos(x - 45°) + cos(x + 60°) \le 0$ [$172°30'\ x \le 352°30'$]
83. $sin(x + 45°) + sin(x)$ [$0° \le x \le 157°30', 337°30' \le x \le 360°$]
84. $2cos(x + 30°) + cos(x) \ge 0$ [$0° \le x \le \alpha, 180° + \alpha \le x \le 360°; \alpha \approx 69°53'46''$]
85. $tan(x - 45°) + tan(x + 45°) > 0$ [$0° < x < 45°, 90° < x < 135°, 180° < x < 225°, 270° < x < 315°$]
86. $tan(x - \pi/4) - tan(x + \pi/4) > 0$ [$\pi/4 < x < 3\pi/4, 5\pi/4 < x < 7\pi/4$]
87. $tan(x - \pi/4) + tan(x) < 0$ [$0 \le x < \pi/8, 3\pi/4 < x < 9\pi/8, 7\pi/4 < x \le 2\pi$]
88. $tan(x + \pi/4) - tan(x) \ge 0$ [$0 \le x < \pi/4, \pi/2 < x < 5\pi/4, 3\pi/2 < x \le 2\pi$]
89. $sin(x + 2) - sin(x - 2) - 3sin(x) < 0$ [$0 \le x < \alpha, \pi+\alpha < x \le 2\pi, \alpha \approx 0{,}54$]
90. $cos(x + 3) + cos(x - 3) + cos(x) < 0$ [$\pi < x < 2\pi$]

Lavoriamo insieme

Vogliamo verificare che in un triangolo qualsiasi la seguente uguaglianza è un'identità

$$\frac{b^2}{c^2}=\frac{cot(\alpha)+cot(\gamma)}{cot(\alpha)+cot(\beta)}$$

Lavoriamo sul secondo membro:

$$\frac{cot(\alpha)+cot(\gamma)}{cot(\alpha)+cot(\beta)}=\frac{\frac{cos(\alpha)}{sin(\alpha)}+\frac{cos(\gamma)}{sin(\gamma)}}{\frac{cos(\alpha)}{sin(\alpha)}+\frac{cos(\beta)}{sin(\beta)}}=\frac{\frac{cos(\alpha)\cdot sin(\gamma)+cos(\gamma)\cdot sin(\alpha)}{\cancel{sin(\alpha)}\cdot sin(\gamma)}}{\frac{cos(\alpha)\cdot sin(\beta)+cos(\beta)\cdot sin(\alpha)}{\cancel{sin(\alpha)}\cdot sin(\beta)}}=\frac{sin(\alpha+\gamma)}{sin(\gamma)}\cdot\frac{sin(\beta)}{sin(\alpha+\beta)}$$

Siamo in un triangolo, quindi si ha:

$$\alpha+\beta+\gamma=180°\Rightarrow\alpha+\beta=180°-\gamma\Rightarrow sin(\alpha+\beta)=sin(180°-\gamma)=sin(\gamma)$$

e analogamente: $sin(\alpha+\gamma)=sin(\beta)$. Quindi la precedente espressione diviene:

$$\frac{sin(\beta)}{sin(\gamma)}\cdot\frac{sin(\beta)}{sin(\gamma)}=\left[\frac{sin(\beta)}{sin(\gamma)}\right]^2$$

Applicando il teorema dei seni abbiamo: $\frac{b}{sin(\beta)}=\frac{c}{sin(\gamma)}\Rightarrow\frac{b}{c}=\frac{sin(\beta)}{sin(\gamma)}$. Quindi l'uguaglianza è effettivamente un'identità.

Livello 2

91. Come diventa l'identità svolta nel box *Lavoriamo insieme* in un triangolo rettangolo di ipotenusa a? $\left[\frac{b^2}{c^2}=\frac{cot(\gamma)}{cot(\beta)}=\frac{tan(\beta)}{tan(\gamma)}\right]$

Verificare la validità delle seguenti identità in un triangolo qualsiasi

92. $sin(\alpha) = sin(\beta)cos(\gamma) + sin(\gamma)cos(\beta)$ $\quad cos(\alpha) = sin(\beta)sin(\gamma) - cos(\beta)cos(\gamma)$
93. $cos^2(\alpha) + cos^2(\beta) + cos^2(\gamma) + 2cos(\alpha)cos(\beta)cos(\gamma) = 1$
94. $sin(\alpha)cos(\beta)cos(\gamma) - sin(\alpha)sin(\beta)sin(\gamma) + cos(\alpha)sin(\beta)cos(\gamma) + cos(\alpha)cos(\beta)sin(\gamma) = 0$
95. $cos(\gamma)\, sin(\alpha + \beta) + sin(\gamma)\, cos(\alpha + \beta) = 0$ $\quad \frac{sin^2(\alpha)}{sin(\beta-\gamma)}=\frac{a^2}{b^2-c^2}$

Livello 3

96. $tan(\alpha) + tan(\beta) + tan(\gamma) = tan(\alpha)tan(\beta)tan(\gamma)$
97. $csc(\alpha-\beta)\cdot[a\cdot cos(\beta)-b\cdot cos(\alpha)]=\frac{a}{sin(\alpha)}$ $\quad tan(\beta)=\frac{b\cdot sin(\alpha)}{c-b\cdot cos(\alpha)}$
98. $\frac{b+c}{b-c}=\frac{sin(\beta)+sin(\gamma)}{sin(\beta)-sin(\gamma)}$ $\quad \frac{1+cos(\alpha-\beta)\cdot cos(\gamma)}{1+cos(\alpha-\gamma)\cdot cos(\beta)}=\frac{a^2+b^2}{a^2+c^2}$
99. $a\cdot[cos(\alpha) + cos(\beta)cos(\beta)cos(\gamma)] = 2Rsin(\alpha)sin(\beta)sin(\gamma)$ $\quad R$ è il raggio della circonferenza circoscritta
100. Come diventa la precedente in un triangolo rettangolo di ipotenusa a? $[a = 2R]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo verificare che in un triangolo qualsiasi, in cui R è il raggio della circonferenza circoscritta, l'uguaglianza $1+cos(\alpha-\beta)\cdot cos(\gamma)=\frac{a^2+b^2}{4\cdot R^2}$ è un'identità

Lavoriamo sul primo membro:

$$1+cos(\alpha-\beta)\cdot cos(\gamma)=1+[cos(\alpha)\cdot cos(\beta)+sin(\alpha)\cdot sin(\beta)]\cdot cos(\gamma)=$$
$$=1+[cos(\alpha)\cdot cos(\beta)+sin(\alpha)\cdot sin(\beta)-2\cdot sin(\alpha)\cdot sin(\beta)]\cdot cos(\gamma)=$$
$$=1+[cos(\alpha+\beta)-2\cdot sin(\alpha)\cdot sin(\beta)]\cdot cos(\gamma)$$

Dato che siamo in un triangolo avremo:

$$\alpha+\beta+\gamma=180° \Rightarrow \alpha+\beta=180°-\gamma \Rightarrow cos(\alpha+\beta)=cos(180°-\gamma)=-cos(\gamma)$$

Quindi: $$1+\left[cos(\alpha+\beta)-2\cdot sin(\alpha)\cdot sin(\beta)\right]\cdot cos(\gamma)=1+\left[-cos(\gamma)-2\cdot sin(\alpha)\cdot sin(\beta)\right]\cdot cos(\gamma)=$$ $$=1-cos^2(\gamma)+2\cdot sin(\alpha)\cdot sin(\beta)\cdot cos(\gamma)=sin^2(\gamma)+2\cdot sin(\alpha)\cdot sin(\beta)\cdot cos(\gamma)$$

Ora per il teorema della corda si ha: $c=2R\cdot sin(\gamma)\Rightarrow sin(\gamma)=\frac{c}{2R}$.

Perciò: $sin^2(\gamma)+2\cdot sin(\alpha)\cdot sin(\beta)\cdot cos(\gamma)=\frac{c^2}{4\cdot R^2}+2\cdot\frac{a}{2R}\cdot\frac{b}{2\cdot R}\cdot cos(\gamma)=\frac{c^2+2\cdot a\cdot b\cdot cos(\gamma)}{4\cdot R^2}$

Applichiamo il teorema di Carnot al numeratore:

$$\frac{c^2+2\cdot a\cdot b\cdot cos(\gamma)}{4\cdot R^2}=\frac{a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot cos(\gamma)+2\cdot a\cdot b\cdot cos(\gamma)}{4\cdot R^2}=\frac{a^2+b^2}{4\cdot R^2}$$

Abbiamo a che fare con un'identità.

Livello 3

101. Tenendo conto dell'esercizio svolto nel box Lavoriamo insieme semplificare $\frac{1+cos(\alpha-\beta)\cdot cos(\gamma)}{1+cos(\alpha-\gamma)\cdot cos(\beta)}$. $\left[\frac{a^2+b^2}{a^2+c^2}\right]$

102. Come diventa l'identità verificata nel box Lavoriamo insieme in un triangolo rettangolo di ipotenusa c? $\left[\frac{c^2}{4\cdot R^2}=1\right]$

103. Tenuto conto dell'esercizio precedente ricavare una relazione fra la misura dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo e quella del raggio della circonferenza circoscritta. [L'ipotenusa è diametro della circonferenza circoscritta]

Lavoriamo insieme

In un triangolo si ha: $sin(\alpha + \beta) = 1/3$, $cos(\beta + \gamma) = -1/3$, $a = 3$, vogliamo determinare la misura del perimetro. Dato che siamo in un triangolo si ha: $\alpha+\beta+\gamma=180°$, quindi:

$$sin(\alpha+\beta)=sin(180°-\gamma)=sin(\gamma); cos(\beta+y)=cos(180°-\alpha)=-cos(\alpha)$$

Perciò dobbiamo determinare il perimetro di un triangolo di cui conosciamo (possiamo ricavarli) due angoli e un lato. Intanto calcoliamo $sin(\alpha)=\sqrt{1-cos^2(\alpha)}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\cdot\sqrt{2}}{3}$. Adesso applichiamo il teorema dei seni: $\frac{a}{sin(\alpha)}=\frac{c}{sin(\gamma)}\Rightarrow c=\frac{a\cdot sin(\gamma)}{sin(\alpha)}=3\cdot\frac{\frac{1}{\cancel{3}}}{\frac{2\cdot\sqrt{2}}{\cancel{3}}}=\frac{3}{2\cdot\sqrt{2}}=\frac{3\cdot\sqrt{2}}{4}$.

Abbiamo anche: $cos(\gamma)=\sqrt{1-sin^2(\gamma)}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\cdot\sqrt{2}}{3}$. Calcoliamo il lato rimanente:

$$sin(\beta)=sin(a+\gamma)=sin(\alpha)\cdot cos(\gamma)+sin(\gamma)\cdot cos(\alpha)=\frac{2\cdot\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{2\cdot\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{8}{9}+\frac{1}{9}=1$$

cioè il triangolo è rettangolo.

Quindi: $b=\sqrt{a^2+c^2}=\sqrt{3^2+\left(\frac{3\cdot\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\sqrt{9+\frac{\cancel{18}^{9}}{\cancel{16}^{8}}}=\sqrt{\frac{81}{8}}=\frac{9}{2\cdot\sqrt{2}}=\frac{9\cdot\sqrt{2}}{4}$ e il perimetro misura $3+3\cdot\sqrt{2}$.

Vediamo se vi è la possibilità di avere un'altra soluzione, ossia se è possibile che sia

$cos(\gamma) = -\sqrt{1 - sin^2(\gamma)} = \frac{-2 \cdot \sqrt{2}}{3} \Rightarrow sin(\beta) = \frac{8}{9} - \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$

In questo caso il triangolo non è rettangolo ma ottusangolo, di angolo ottuso γ. Si ha:

$$\frac{a}{sin(\alpha)} = \frac{b}{sin(\beta)} \Rightarrow b = \frac{a \cdot sin(\beta)}{sin(\alpha)} = \cancel{3} \cdot \frac{\frac{7}{\cancel{9}}}{\frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\cancel{3}}} = \frac{7}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{7 \cdot \sqrt{2}}{4}.$$

E il perimetro: $3 + \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2}$. Quindi abbiamo effettivamente due soluzioni.

Livello 2

Determinare la misura del perimetro dei seguenti triangoli con i dati accanto:

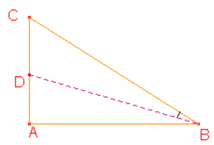
104. $sin(\alpha + \beta) = ½$, $cos(\beta + \gamma) = -¼$, $a = 5$ $\left[\frac{10 \cdot \sqrt{15} + 15 \cdot \sqrt{5} + 25}{4}\right]$

105. $sin(\alpha + \gamma) = 1/5$, $cos(\alpha + \beta) = 1/8$, $b = 5$ $\left[\frac{30 \cdot \sqrt{42} + 75 \cdot \sqrt{7} + 35}{8}\right]$

106. $cos(\alpha + \beta) = -2/3$, $a = 4$, $b = 3$ [10] $sin(\alpha + \gamma) = 0,87$, $a = 3,64$, $c = 5,96$ [≈14,83]

107. Nel quadrilatero *ABCD*, si ha che l'angolo *A* è di 120°, gli angoli *B* e *D* sono retti, i lati *AB* e *AD* sono rispettivamente di 4,01 *cm* e 1,44 *cm*. Trovare la misura di *AC*. [≈ 5,65]

108. (Dal Progetto Matematica & realtà dell'Università di Perugia) La statua della libertà è alta 92 *m* compreso il piedistallo di 46 *m*. Descrivere come varia l'angolo di visuale in funzione della distanza dalla statua. Determinare qual è l'angolo di visuale corrispondente a 70 *m*. In figura, *AD* è il piedistallo, *CD* la statua, *AB* la distanza e l'angolo segnato è quello da determinare.



$\left[tan^{-1}\left(\frac{46 \cdot \overline{AB}}{\overline{AB}^2 + 46 \cdot 92}\right); \approx 19°25'23''\right]$

109. Con riferimento al problema precedente, lasciando inalterati tutti i dati tranne *AB*, quanto vale *AB* se l'angolo di visuale è circa 18°? [≈ 42,88 *m* ∨ ≈ 98,69 *m*]

110. Con riferimento al problema della statua, lasciando inalterati tutti i dati tranne l'altezza della statua, che è sempre uguale al piedistallo, quanto sarebbe alta se l'angolo di visuale fosse di circa 15°? [≈ 22,70 *m* ∨ ≈ 107,92 *m*]

111. Con riferimento al problema della statua, lasciando inalterati tutti i dati tranne l'altezza del piedistallo, quanto sarebbe alto se l'angolo di visuale fosse di circa 23°? [≈ 33,70*m*]

112. Un punto *X* appartiene a una circonferenza, *AB* è una corda lunga 4,07, della stessa circonferenza scelta in modo tale che sia $B\hat{A}X = 45°$. Determinare la misura di $A\hat{X}B$ in modo che sia $\overline{XA} = 5,26$. [≈ 68°57′24″]

113. Con riferimento al precedente quesito, prolunghiamo *AB* dalla parte di *B* in modo da ottenere il segmento *BC* isometrico ad *AB*. Determinare $A\hat{X}B$ in modo che $\overline{XC} = 4,62$. [≈ 33°18′42″]

114. Un aereo si avvicina a una velocità di circa 900 *Km*/*h*, a un'altezza di 5127 metri dal suolo. Se l'angolo che l'ipotetica linea che congiunge la punta dell'aereo con un punto fissato sul suolo davanti l'aereo è di 17°14′33″, un minuto di quanto è aumentata la di misura tale angolo? [≈ 56°15′5″]

115. In un cerchio di raggio che misura 3, tracciare una corda *AB* isometrica al lato del quadrato inscritto nella circonferenza. Considerare poi un punto *C* appartenente al maggiore dei due archi *AB*. Determinare la misura di $C\hat{A}B$ in modo che la somma dei quadrati dei lati del triangolo *ABC* sia 50. [≈ 17°58′47″]

116. *ABC* è un triangolo equilatero di perimetro 6 cm, si tracci una semiretta per *A* che incontra i rimanenti lati, e siano *H* e *K* le proiezioni ortogonali di *B* e *C* su essa. Determinare i valori che deve assumere l'angolo $H\hat{A}B$, in modo che il rapporto fra le misure dei segmenti *BH* e *CK*, risulti compreso tra 0,25 e 2,41. [tra ≈ 10°53′36″ e ≈ 43°25′37″]

117. Un triangolo *LMN* è inscritto in una circonferenza di diametro lungo 6,17 *cm* e $\angle L\hat{M}N = 60°$. Determina l'ampiezza di $M\hat{L}N$ in modo che sia $\overline{LM}^2 - \overline{MN}^2 = 3$. [≈ 57°25′53″]

Livello 3

118. Con riferimento al problema della statua della libertà, lasciando inalterati tutti i dati tranne l'altezza della statua, che è sempre uguale al piedistallo, per quali angoli di visuale α il problema ha soluzione? [0° < α < 19°28′16″]

Formule di duplicazione e bisezione

Lavoriamo insieme

Sapendo che *sin*(α) = 2/3, α ∈ [90°; 180°], vogliamo determinare *cos*(2α) e *tan*(α/2), senza approssimazioni. Ci serviamo delle formule di duplicazione e di quelle di bisezione. Nel primo caso abbiamo: *cos*(2α) = 1 – 2sin^2(α) = 1 – 2 · 4/9 = 1/9. Nel secondo caso dobbiamo premettere un altro calcolo: $cos(\alpha) = -\sqrt{1-sin^2(\alpha)} = -\sqrt{1-\frac{4}{9}} = -\sqrt{\frac{5}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$; la scelta del segno dipende dal fatto che l'angolo si trova nel secondo quadrante, dove il coseno è appunto negativo.

Adesso abbiamo: $tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-cos(\alpha)}{1+cos(\alpha)}} = \sqrt{\frac{1-\frac{-\sqrt{5}}{3}}{1+\frac{-\sqrt{5}}{3}}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)^2}{9-5}} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

Determinare quanto richiesto sulla base dei dati noti, usando le formule di duplicazione o bisezione.

Livello 1

119. *sin*(α) = 2/7, *cos*(β) = –7/9, α∈ [90°; 180°], β∈ [180°;270°]; *cos*(2α) = ? *cot*(2β) = ? $\left[\frac{41}{49}; -\frac{17\cdot\sqrt{2}}{112}\right]$

120. *sin*(α) = –3/5, *cos*(β) = 6/7, α∈ [π; 3/2 π], β∈ [3/2π; 2π]; *sin*(2β) = ? *csc*(2α) = ? $\left[-\frac{24}{25}; \frac{49\cdot\sqrt{13}}{156}\right]$

121. *sin*(α) = 3/4, *cos*(β) = 8/9, α∈ [0; 90°], β∈ [270°; 360°]; *sec*(2α) = ? *tan*(2β) = ? $\left[-8; \frac{16\cdot\sqrt{17}}{47}\right]$

122. *sin*(α) = –5/6, *cos*(β) = 7/9, α∈ [180°; 270°], β∈ [270°;360°] *cos*(2β) = ? *tan*(2α) = ? $\left[-\frac{7}{18}; \frac{56\cdot\sqrt{2}}{17}\right]$

123. *sin*(α) = 2/7, *cos*(β) = –7/9, α∈ [0; π/2], β∈ [π; 3/2π]; *cot*(2α) = ? *cos*(2β) = ? $\left[\frac{41\cdot\sqrt{5}}{60}; \frac{17}{81}\right]$

124. *sin*(α) = 1/4, *cos*(β) = 3/5, α∈ [π/2; π], β∈ [0; π/2]; *sin*(2α) = ? *tan*(2β) = ? $\left[\frac{\sqrt{15}}{8}; -\frac{24}{7}\right]$

125. *sin*(α) = 1/5, *cos*(β) = –2/3, α∈ [90°; 180°], β∈ [180°; 270°]; *cos*(α/2) = ? *cot*(β/2) = ? $\left[\frac{\sqrt{30}+2\cdot\sqrt{5}}{10}; \frac{\sqrt{5}}{5}\right]$

126. *sin*(α) = 2/5, *cos*(β) = ¾, α∈ [90°; 180°], β∈ [270°; 360°]; *sin*(β/2)=? *csc*(α/2) = ? $\left[\frac{\sqrt{35}-\sqrt{15}}{10}; 2\cdot\sqrt{2}\right]$

127. $sin(\alpha) = 1/3$, $cos(\beta) = 4/9$, $\alpha \in [0°; 90°]$, $\beta \in [270°; 360°]$; $sec(\alpha/2) = ?$ $tan(\beta/2) = ?$ $\left[2\cdot\sqrt{3}-\sqrt{6};\frac{\sqrt{65}}{13}\right]$

128. $sin(\alpha) = -3/5$, $cos(\beta) = 5/8$, $\alpha \in [180°; 270°]$, $\beta \in [0°; 90°]$; $cos(\beta/2) = ?$ $tan(\alpha/2) = ?$ $\left[\frac{3\cdot\sqrt{10}}{10};\frac{\sqrt{3}}{4}\right]$

129. $sin(\alpha) = 1/7$, $cos(\beta) = -8/9$, $\alpha \in [0; \pi/2]$, $\beta \in [\pi; 3/2\pi]$; $csc(\alpha/2) = ?$ $cos(\beta/2) = ?$ $\left[\sqrt{42}+2\cdot\sqrt{14};\frac{\sqrt{2}}{6}\right]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo determinare la formula di triplicazione del seno. Abbiamo:

$$sin(3\alpha) = sin(2\alpha + \alpha) = sin(2\alpha)\, cos(\alpha) + sin(\alpha)\, cos(2\alpha) = 2sin(\alpha)cos(\alpha)cos(\alpha) + sin(\alpha)\,[2cos^2(\alpha) - 1] =$$
$$= 2sin(\alpha)cos^2(\alpha) + 2sin(\alpha)cos^2(\alpha) - sin(\alpha) = 4sin(\alpha)cos^2(\alpha) - sin(\alpha) = sin(\alpha)[4cos^2(\alpha) - 1] =$$
$$= sin(\alpha)[4 - 4sin^2(\alpha) - 1] = 3sin(\alpha) - 4sin^3(\alpha)$$

Esprimere la prima funzione mediante la seconda funzione

Livello 2

130. $cos(13/2\alpha)$; $cos(13/4\alpha)$ $[2cos^2(13/4\alpha) - 1]$ $cos(13/2\alpha)$; $sin(13\alpha)$ $[1 - 2sin^2(13\alpha)]$
131. $cos(3\alpha)$; $cos(\alpha)$ $[4cos^3(\alpha) - 3cos(\alpha)]$ $cos(4\alpha)$; $cos(\alpha)$ $[8cos^4(\alpha) - 8cos^2(\alpha) + 1]$
132. $cos(4\alpha)$; $sin(\alpha)$ $[8sin^4(\alpha) - 8sin^2(\alpha) + 1]$ $cos(\alpha)$; $cos(\alpha/4)$ $[8sin^4(\alpha/4) - 8sin^2(\alpha/4) + 1]$
133. $sin(4\alpha)$; $sin(\alpha)$ e $cos(\alpha)$ $[8sin(\alpha)cos^3(\alpha) - 4\, sin(\alpha)cos(\alpha)]$

Livello 3

134. $sin(2x)\, cos(x) + sin(3x)$; $sin(x)$ $[5sin(x) - 6sin^3(x)]$
135. $cos(2x)\, cos(x) - cos(3x)$; $cos(x)$ $[2cos(x) - 2cos^3(x)]$
136. $sin(2x)\, sin(x) - cos(3x)$; $cos(x)$ $[5cos(x) - 6cos^3(x)]$
137. $sin(4x)\, cos(x) - sin(3x)$; $sin(x)$ $[8sin^5(x) - 8sin^3(x) + sin(x)]$
138. $cos(4x) - sin(3x)$; $sin(x)$ $[8sin^4(x) + 4sin^3(x) - 8sin^2(x) - 3sin(x) + 1]$

139. Senza usare la calcolatrice semplificare: $cos(36°) - cos(72°)$ [½]

Lavoriamo insieme

Vogliamo verificare se la seguente è un'identità nel suo insieme di definizione,

$$\frac{sin^2(\alpha)}{tan^2(\alpha/2)} - 1 = cos(\alpha)\cdot[2 + cos(\alpha)]$$

ossia per quegli angoli per cui si ha: $\begin{cases}\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi \\ tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \neq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha \neq \pi + 2k\cdot\pi \\ \frac{\alpha}{2} \neq k\cdot\pi\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha \neq \pi + 2k\cdot\pi \\ \alpha \neq 2k\cdot\pi\end{cases} \Rightarrow \alpha \neq k\cdot\pi$

Lavoriamo sul primo membro: $\dfrac{sin^2(\alpha)}{\dfrac{1-cos(\alpha)}{1+cos(\alpha)}} - 1 = \dfrac{1-cos^2(\alpha)}{\dfrac{1-cos(\alpha)}{1+cos(\alpha)}} - 1 = \dfrac{\left[\cancel{1-cos(\alpha)}\right]\cdot\left[1+cos(\alpha)\right]}{\dfrac{\cancel{1-cos(\alpha)}}{1+cos(\alpha)}} - 1 =$

$= [1 + cos(\alpha)]^2 - 1 = 1 + 2cos(\alpha) + cos^2(\alpha) - 1 = cos(\alpha)\cdot[2 + cos(\alpha)]$. L'identità è stata verificata.

Verificare la validità delle seguenti identità, e determinare l'insieme di definizione, con gli angoli misurati in radianti.

Livello 1

140. $sec(x) = \frac{1}{2}\cdot\left[tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) + tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right]$ $\left[x \neq \pm\frac{(4k+1)\cdot\pi}{2} \wedge x \neq \left(k+\frac{1}{2}\right)\cdot\pi\right]$

141. $tan(x)=\frac{1}{2}\cdot\left[tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)-tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right]$ $\left[x\neq\pm\frac{(4k+1)\cdot\pi}{2}\wedge x\neq\left(k+\frac{1}{2}\right)\cdot\pi\right]$

142. $tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1-tan(\alpha)}{1+tan(\alpha)}$ $\left[\alpha\neq\frac{(4k+1)\cdot\pi}{4}\wedge\alpha\neq\left(k+\frac{1}{2}\right)\cdot\pi\right]$

143. $\frac{sin^2(\alpha)}{cot^2(\alpha/2)}+\frac{sin(2\alpha)}{sin(\alpha)}=2-sin^2(\alpha)$ [$\alpha \neq k\pi$] $\frac{sin^2(\alpha)}{sin^2(\alpha/2)}+cos(\alpha)=2+3\cdot cos(\alpha)$ [$\alpha \neq 2k\pi$]

144. $\frac{sin^2(\alpha)}{cos^2(\alpha/2)}+cos(\alpha)=2-cos(\alpha)$ [$\alpha \neq (2k+1)\pi$]

145. $\frac{cos(2\alpha)}{cos(\alpha)-sin(\alpha)}-cos(\alpha)-sin(2\alpha)=sin(\alpha)\cdot[1-2\cdot cos(\alpha)]$ [$\alpha \neq (k+¼)\pi$]

Livello 2

146. $1-4sin^2(\alpha)\cdot cos^2(\alpha)=cos^2(2\alpha)$ [$\forall\alpha\in\mathbb{R}$] $sec(\gamma)=1+tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cdot tan(\gamma)$ [$\gamma\neq(2k+1)\pi\wedge\gamma\neq(k+½)\pi$]

147. $sin^2(\gamma)=\left[\frac{sin(2\gamma)}{2}\right]^2+\left[\frac{1-sin(90°-2\gamma)}{2}\right]^2$ [$\forall\gamma\in\mathbb{R}$] $1-sin(2\alpha)=2sin(45°-\alpha)cos(45°+\alpha)$ [$\forall\alpha\in\mathbb{R}$]

148. $cot(2x)+tan(x)=csc(2x)$ [$x\neq k\pi/2\wedge x\neq(k+½)\cdot\pi$] $tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1-cos(\alpha)}{sin(\alpha)}$ [$\alpha \neq k\pi$]

149. $tan(\alpha)=\frac{2}{cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)-tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ $\left[\alpha\neq\frac{(4k+1)\cdot\pi}{2}\wedge\alpha\neq k\cdot\pi\right]$ $tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{sin(\alpha)}{1+cos(\alpha)}$ [$\alpha\neq(2k+1)\cdot\pi$]

150. $cos(\beta)=\frac{cot\left(\frac{\beta}{2}\right)-tan\left(\frac{\beta}{2}\right)}{cot\left(\frac{\beta}{2}\right)+tan\left(\frac{\beta}{2}\right)}$ $\left[\beta\neq\frac{(4k+3)\cdot\pi}{2}\wedge\beta\neq k\cdot\pi\right]$ $tan\left(\frac{\beta}{2}\right)=\frac{1-cos(\beta)}{sin(\beta)}$ [$\beta \neq k\pi$]

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere la seguente equazione: $cos(2x)+7sin(x)+4=0$, $x\in[-307°; 252°]$.
Applichiamo la formula di duplicazione del coseno, espressa solo in termini del seno:

$$1-2\cdot sin^2(x)+7\cdot sin(x)+4=0\Rightarrow 2\cdot sin^2(x)-7\cdot sin(x)-5=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow sin(x)=\frac{7\pm\sqrt{49+40}}{4}=\frac{7\pm\sqrt{89}}{4}$$

Da cui le due equazioni elementari: $sin(x)=\frac{7+\sqrt{89}}{4}>1\vee sin(x)=\frac{7-\sqrt{89}}{4}\approx-0,61$

La prima è priva di soluzioni.
Per la seconda invece si ha: $x\approx-37°28'51''+k360°\vee x\approx 217°28'51''+k360°$
Determiniamo le eventuali soluzioni accettabili: $x_1\approx-37°28'51''$; $x_2\approx 217°28'51''$; $x_3\approx-142°31'19''$

Risolvere le seguenti equazioni negli intervalli indicati

Livello 2

151. $cos(2x)-3sin(x)+4=0$; $x\in[207°; 426°]$ [$\varnothing$] $cos(2x)-3cos(x)-1=0$; $x\in[207°; 426°]$ [$x=240°$]
152. $sin(2x)-7sin^2(x)+1=0$; $x\in[374°; 536°]$ [$x\approx 242°34'4''$]
153. $sin(2x)+3cos^2(x)-2=0$; $x\in[57°; 327°]$ [$x\approx 107°35'17''\vee x\approx 319°47'32''$]
154. $sin(2x)-5sin^2(x)+3=0$; $x\in[102°; 425°]$ [$x\approx 122°30'11''\vee x\approx 281°5'59''$]
155. $cos(2x)-7sin(x)+1=0$; $x\in[374°; 536°]$ [$x\approx 375°24'2''\vee x\approx 524°35'58''$]
156. $cos^2(x)+cos^2(x/2)-1=0$; $x\in[207°; 426°]$ [$x=300°\vee x=420°$]
157. $cos(2x)-3sin(x)+4=0$; $x\in[-120°; 135°]$ [$x=90°$] $sin^2(x/2)-5cos^2(x)-2=0$; $x\in[178°; 502°]$ [$\varnothing$]

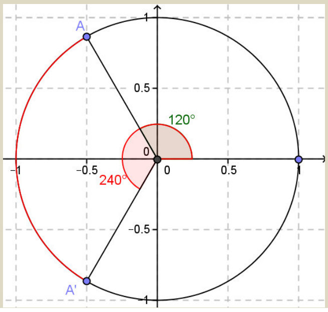
158. $cos(2x) - 5sin^2(x) + 3 = 0; x\in[1; 4]$ $[x \approx 2,28 \vee x \approx 3,99]$ $cos(2x) - 3cos(x) + 1 = 0; x\in[2; 4]$ $[\varnothing]$
159. $cos(2x) + 3cos^2(x) - 2 = 0; x\in[1; 3]$ $[x \approx 2,46]$
160. $cos(2x) + 7sin(x) + 4 = 0; x\in[-3; 0]$ $[x \approx -2,49 \vee x \approx -0,65]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere la disequazione: $cos(2x) - 3cos(x) - 1 > 0$, $x \in [0°; 360°]$.
Abbiamo: $2cos^2(x) - 1 - 3cos(x) - 1 > 0 \Rightarrow 2cos^2(x) - 3cos(x) - 2 > 0$.
Risolviamo prima l'equazione associata:

$$2\cdot cos^2(x)-3\cdot cos(x)-2=0\Rightarrow cos(x)=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{3\pm 5}{4}=\prec\begin{matrix}2\\ -\frac{1}{2}\end{matrix}$$

Quindi, ritornando alla disequazione, deve aversi: $cos(x) > 0 \vee cos(x) < -½$. La prima disequazione non ha ovviamente soluzioni, mentre per la seconda si ha: $120° < x < 240°$, come si evince dalla figura seguente, questa è perciò la soluzione della disequazione iniziale:



Risolvere le seguenti disequazioni nella circonferenza goniometrica

Livello 2

161. $cos(2x) - sin(x) - 1 < 0$ $[0 < x < 180°, 210° < x < 330°]$
162. $sin(2x) - 2sin^2(x) + 2 > 0$ $[0 \le x < 90°, 135° < x < 270°, 315° < x \le 360°]$
163. $sin(2x) + 2cos^2(x) - 2 \le 0$ $[45° \le x \le 180°, 135° \le x \le 360°]$
164. $2\,sin(2x) - sin^2(x) + 3 > 0$ $[0 \le x \le 360°]$ $3cos^2(x) + sin^2(x/2) - 1 < 0$ $[\varnothing]$
165. $3cos(2x) - 2sin(x) + 1 \ge 0$ $[0 \le x \le sin^{-1}(2/3), 180° - sin^{-1}(2/3) \le x \le 360°]$
166. $4cos(2x) - 5sin(x) + 1 < 0$ $\left[0\le x<cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{185}-5}{16}\right),2\pi-cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{185}-5}{16}\right)<x\le 2\pi\right]$
167. $cos^2(x/2) - cos^2(x) + 2 > 0$

$$\left[cos^{-1}\left(\frac{1+\sqrt{41}}{4}\right)<x<2\pi-cos^{-1}\left(\frac{1-\sqrt{41}}{4}\right),cos^{-1}\left(\frac{1-\sqrt{41}}{4}\right)<x<2\pi-cos^{-1}\left(\frac{1+\sqrt{41}}{4}\right)\right]$$

168. $sin(2x) - sin^2(x) + 3 \ge 0$ $[0 \le x \le 2\pi]$ $cos(2x) - 3sin(x) -1 \le 0$ $[0 \le x \le \pi]$
169. $cos(2x) + cos^2(x) \le 0$ $\left[cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)<x<2\pi-cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right),cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)<x<2\pi-cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]$
170. $cos(2x) + sin(x) > 0$ $[0 \le x < 7\pi/6, x \ne \pi/2, 11\pi/6 < x \le 2\pi]$
171. $sin(2x) - cos(2x) + 1 < 0$ $[3\pi/4 < x < \pi, 7\pi/4 < x < 2\pi]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo provare che nel triangolo di lati lunghi 4, 5 e 6 unità l'angolo maggiore è doppio del minore. Indicando con a il lato minore e con c il maggiore e usando il teorema di Carnot possiamo scrivere: $cos(\gamma)=\frac{4^2+5^2-6^2}{2\cdot 4\cdot 5}=\frac{1}{8};cos(\alpha)=\frac{6^2+5^2-4^2}{2\cdot 6\cdot 5}=\frac{3}{4}$. Ora noi sappiamo che

$$cos(2\alpha)=2\cdot cos^2(\alpha)-1=2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2-1=\cancel{2}\cdot\frac{9}{\cancel{16}^{8}}-1=\frac{1}{8}=cos(\gamma).$$

Dato che gli angoli sono acuti, se i coseni sono uguali anche gli angoli lo sono, quindi $2\alpha = \gamma$.

Livello 2

172. Verificare che in un triangolo rettangolo di ipotenusa *a* si ha: $tan\left(\frac{\beta}{2}\right)=\sqrt{\frac{a-c}{a+c}}$ e $tan\left(\frac{\beta}{2}\right)=\frac{a-c}{b}$.
173. Verificare le formule precedenti per un triangolo rettangolo di angoli acuti 30° e 60°.
174. Verificare le formule precedenti per un triangolo rettangolo di angoli acuti 45° e 45°.

Verificare la validità delle seguenti identità in un triangolo qualsiasi

175. $a^2=(b+c)^2-4bc\cdot cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ $\qquad (a-b+c)\cdot(a+b-c)=4bc\cdot sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
176. $tan\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)=cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{c-b}{c+b}$ $\qquad a^2=(b+c)^2-4bc\cdot cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
177. Semplificare la prima delle precedenti in un triangolo rettangolo di ipotenusa *a*. $\left[sin(\beta-\gamma)=\frac{b^2-c^2}{b^2+c^2}\right]$

Livello 3

178. $cos^2(\alpha) + cos^2(\beta) + cos^2(\gamma) + 2cos(\alpha) \cdot cos(\beta)\cdot cos(\gamma) = 1$
179. $1 + cos(2\alpha) + cos(2\beta) + cos(2\gamma) + 4cos(\alpha)\cdot cos(\beta)\cdot cos(\gamma) = 0$
180. $cos(2\alpha) + cos(2\beta) + cos(2\gamma) + 1 = 4cos(\alpha)\cdot cos(\beta)\cdot cos(\gamma)$ $\qquad cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot csc\left(\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{a+b}{c}$

Lavoriamo insieme

Vogliamo verificare se in un triangolo qualsiasi la seguente è un'identità $\frac{tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}=\frac{a-b}{a+b}$

Lavoriamo sul membro sinistro.

$$\frac{tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}=\sqrt{\frac{\frac{1-cos(\alpha-\beta)}{1+cos(\alpha-\beta)}}{\frac{1-cos(\alpha+\beta)}{1+cos(\alpha+\beta)}}}=\sqrt{\frac{1-cos(\alpha-\beta)}{1+cos(\alpha-\beta)}\cdot\frac{1+cos(\alpha+\beta)}{1-cos(\alpha+\beta)}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1-cos(\alpha)\cdot cos(\beta)-sin(\alpha)\cdot sin(\beta)}{1+cos(\alpha)\cdot cos(\beta)+sin(\alpha)\cdot sin(\beta)}\cdot\frac{1+cos(\alpha)\cdot cos(\beta)-sin(\alpha)\cdot sin(\beta)}{1-cos(\alpha)\cdot cos(\beta)+sin(\alpha)\cdot sin(\beta)}}=$$

$$=\sqrt{\frac{[1-sin(\alpha)\cdot sin(\beta)]^2-cos^2(\alpha)\cdot cos^2(\beta)}{[1+sin(\alpha)\cdot sin(\beta)]^2-cos^2(\alpha)\cdot cos^2(\beta)}}=$$

$$=\sqrt{\frac{[1-sin(\alpha)\cdot sin(\beta)]^2-[1-sin^2(\alpha)]\cdot[1-sin^2(\beta)]}{[1+sin(\alpha)\cdot sin(\beta)]^2-[1-sin^2(\alpha)]\cdot[1-sin^2(\beta)]}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\cancel{1}-2\cdot sin(\alpha)\cdot sin(\beta)+\cancel{sin^2(\alpha)\cdot sin^2(\beta)}-\cancel{1}+sin^2(\alpha)+sin^2(\beta)-\cancel{sin^2(\alpha)\cdot sin^2(\beta)}}{\cancel{1}+2\cdot sin(\alpha)\cdot sin(\beta)+\cancel{sin^2(\alpha)\cdot sin^2(\beta)}-\cancel{1}+sin^2(\alpha)+sin^2(\beta)-\cancel{sin^2(\alpha)\cdot sin^2(\beta)}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{sin^2(\alpha)+sin^2(\beta)-2\cdot sin(\alpha)\cdot sin(\beta)}{sin^2(\alpha)+sin^2(\beta)+2\cdot sin(\alpha)\cdot sin(\beta)}}=\sqrt{\frac{[sin(\alpha)-sin(\beta)]^2}{[sin(\alpha)+sin(\beta)]^2}}=\frac{|sin(\alpha)-sin(\beta)|}{sin(\alpha)+sin(\beta)}$$

Adesso teniamo conto del teorema della corda: $\dfrac{\left|\dfrac{a}{2R}-\dfrac{b}{2R}\right|}{\dfrac{a}{2R}+\dfrac{b}{2R}}=\dfrac{|a-b|}{a+b}$. In effetti l'identità sembrerebbe non essere valida, a causa della presenza del valore assoluto. Non è così perché se $a > b$ è anche $\alpha>\beta \Rightarrow \alpha-\beta>0 \Rightarrow tan\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)>0$ e se $a < b$ è anche $\alpha<\beta \Rightarrow \alpha-\beta<0 \Rightarrow tan\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)<0$. Quindi dobbiamo togliere il valore assoluto, perché quando $a < b$ il primo membro sarebbe negativo e il secondo positivo.

Verificare la validità delle seguenti identità in un triangolo qualsiasi, in cui A indica l'area, p il semiperimetro, r il raggio della circonferenza inscritta, R il raggio della circonferenza circoscritta.

Livello 3

181. $A = p\cdot tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\cdot tan\left(\dfrac{\beta}{2}\right)\cdot tan\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)$ (Usare le formule di Briggs–Retico e la formula di Erone)
182. $r=(p-a)\cdot tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=(p-b)\cdot tan\left(\dfrac{\beta}{2}\right)=(p-c)\cdot tan\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)$
183. $r=4\cdot R\cdot sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\cdot sin\left(\dfrac{\beta}{2}\right)\cdot sin\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)$ $p\cdot A=a\cdot b\cdot c\cdot cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\cdot cos\left(\dfrac{\beta}{2}\right)\cdot cos\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)$
184. Tenuto conto che il raggio della circonferenza inscritta in un triangolo è dato dal rapporto fra l'area e il semiperimetro, usando la formula di Erone e le formule di Briggs, esprimere il raggio mediante il semiperimetro p, un lato a e l'angolo a esso opposto α.

Lavoriamo insieme

François Viète, nonostante fosse un avvocato diede importanti contributi alla matematica, specialmente per la notazione e la simbologia. Nel suo libro *Ad logisticem speciosam notae priores* (Prime note sulla logistica speciosa[1]) del 1631, ha enunciato il seguente risultato. Se (B, D, A) è una terna pitagorica (cioè se $B^2 + D^2 = A^2$) anche la terna $\left(2\cdot B\cdot D, D^2-B^2, A^2\right)$ è pitagorica e inoltre quest'ultimo triangolo ha un angolo acuto doppio di un angolo acuto di quello di partenza.

Cominciamo a provare che la terna è pitagorica. Abbiamo:

$$(2\cdot B\cdot D)^2+\left(D^2-B^2\right)^2=4\cdot B^2\cdot D^2+D^4-2\cdot B^2\cdot D^2+B^4=D^4+2\cdot B^2\cdot D^2+B^4=\left(B^2+D^2\right)^2$$

Poiché sappiamo che $B^2 + D^2 = A^2$, abbiamo provato quanto richiesto.

Adesso proviamo che gli angoli acuti del secondo triangolo sono doppi dei corrispondenti angoli acuti del primo. Diciamo $tan(\beta)=\dfrac{B}{D}, tan(\beta')=\dfrac{2\cdot B\cdot D}{D^2-B^2}$. Lavoriamo sulla seconda espressione:

$$tan(\beta')=\frac{2\cdot B\cdot D/D^2}{\left(D^2-B^2\right)/D^2}=\frac{2\cdot B/D}{\left[1-(B/D)^2\right]}=\frac{2\cdot tan(\beta)}{\left[1-tan(\beta)^2\right]}=tan(2\beta)$$

Livello 3

185. Applicare il risultato dell'esercizio svolto precedente alla terna (3, 4, 5), determinando l'altra terna e le misure degli angoli acuti dei due triangoli.
[(7, 24, 25); ≈ 16°15′37″, ≈ 73°44′23″; ≈ 36°52′12″, ≈ 53°7′48″]
186. Provare questo risultato di Viète: se (B, D, A) è una terna pitagorica e le quantità siano tutte positive, allora anche ($3BD^2 - B^3$, $D^3 - 3B^2D$, A^3) è pitagorica se quest'ultimo triangolo ha un angolo acuto opposto triplo di uno di quello di partenza. Bisogna usare la formula di triplicazione della tangente.
187. Applicare il risultato dell'esercizio precedente alla terna (5, 12, 13), determinando l'altra terna e le misure degli angoli acuti dei due triangoli.

[1] La logistica speciosa è il calcolo simbolico

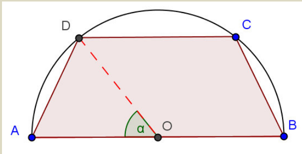
[(828, 2035, 2197); ≈ 22°8′25″, ≈ 67°51′35″; ≈ 22°37′12″, ≈ 67°22′48″]

188. Vale anche quest'altra formula di Viète: se (B, D, A) è una terna pitagorica e le quantità siano tutte positive, allora anche ($4BD^3 - 4B^3D$, $D^4 - 6B^2D^2 + B^4$, A^4) è pitagorica, se quest'ultimo triangolo ha un angolo acuto opposto quadruplo di uno di quello di partenza.

189. Applicare la formula precedente alla terna (5, 12, 13), determinando l'altra terna e le misure degli angoli acuti dei due triangoli. [(354144,164833,390625), ≈24°57′33″, ≈65°2′27″; ≈16°15′37″,≈73°44′23]

Lavoriamo insieme

Un trapezio è inscritto in una semicirconferenza, con la base maggiore coincidente con il diametro. Dopo avere provato che il trapezio è isoscele, determinare la misura dell'area mediante il raggio della circonferenza e l'angolo segnato in figura.



Il trapezio deve essere isoscele perché i triangoli OAD e OCB sono ovviamente isosceli, quindi gli angoli $D\hat{A}O, C\hat{B}O$, sono isometrici.

L'area del trapezio si può trovare come somma delle aree dei tre triangoli in cui esso è diviso dai raggi OC e OD. Quindi si ha:

$$S_{ABCD} = S_{AOD} + S_{ODC} + S_{OCB} = \frac{1}{2}\cdot r^2 \cdot sin(\alpha) + \frac{1}{2}\cdot r^2 \cdot sin(\pi - 2\alpha) + \frac{1}{2}\cdot r^2 \cdot sin(\alpha) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot r^2 \cdot \left[2\cdot sin(\alpha) + sin(2\alpha)\right] = \frac{1}{2}\cdot r^2 \cdot \left[2\cdot sin(\alpha) + 2\cdot sin(\alpha)\cdot cos(\alpha)\right] = r^2 \cdot sin(\alpha)\left[1 + cos(\alpha)\right]$$

Risolvere i seguenti problemi in cui vi è da impostare e risolvere un'equazione in cui sono da applicarsi formule di duplicazione e/o bisezione.

Livello 1

190. Con riferimento al problema risolto nel box lavoriamo insieme, determinare il perimetro del trapezio. $\left[2r\cdot\left[1+2\cdot sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)+cos(\alpha)\right]\right]$

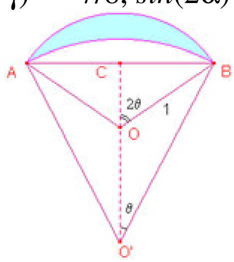
191. In un triangolo si ha: $cos(2\alpha) = 3/4$, $cos(2\beta) = 7/8$, $a = 10$. Determinare la misura di b. $\left[5\cdot\sqrt{2}\right]$

192. In un triangolo si ha: $sin(\alpha + \beta) = 5/7$, $sin(2\gamma) = 11/15$. Determinare $cos(\gamma)$. [77/150]

193. In un triangolo si ha: $cos(\alpha + \beta) = 3/8$, $sin(2\gamma) = 8/13$, $c = 9$. Determinare $sin(\gamma)$. [32/39]

194. In un triangolo si ha: $cos(\beta + \gamma) = -7/8$, $sin(2\alpha) = 3/4$, $b = 4$, $c = 3$. Determinare l'area. [18/7]

195. In figura l'area evidenziata,



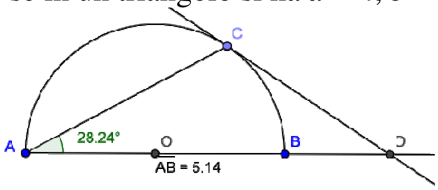
compresa fra i due settori circolari si chiama *lunula*. Determinare l'area di tale figura in funzione dell'angolo θ, sapendo che il minore dei due raggi è lungo 1 unità. $[2\cdot(1 - 2\,cos^2(\theta) + sin(\theta)\cdot cos(\theta))]$

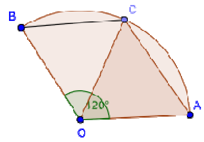
196. Trovare le lunghezze dei segmenti che le bisettrici del triangolo i cui lati sono lunghi 3, 5 e 7 unità, hanno in comune con il triangolo stesso. $\left[5\cdot\sqrt{21}/4;3\cdot\sqrt{7}/2;15/8\right]$

197. Calcolare l'area di un triangolo di lati lunghi 5, 7 e 9. $\left[21\cdot\sqrt{11}/4\right]$

198. Si consideri un punto M su un quarto di cerchio di raggio 1 cm, con centro O ed estremi A e B. Siano P e Q le proiezioni di M su OA e OB, determinare i valori che deve assumere l'angolo $M\hat{O}P$, in modo che il rettangolo $OPMQ$ abbia area compresa tra 0,37 e 0,45. [fra ≈ 23°51′57″ e ≈ 32°4′45″]

Livello 2

199. Di un triangolo ABC si sa che l'angolo di vertice A misura il doppio di quello di vertice B e che i lati BC e AC misurano rispettivamente 11,41 e 7,32. Determinare la misura del lato incognito e degli angoli. [$\approx 10{,}47$; $\approx 38°47'49''$; $\approx 77°35'38''$; $\approx 63°36'33''$]
200. In un triangolo isoscele si ha $a = b$. In che relazione sono $sin(\alpha)$ e $sin(\gamma)$? $\left[sin(\gamma) = sin(2\alpha) = 2 \cdot sin(\alpha) \cdot \sqrt{1 - sin^2(\alpha)}\right]$.
201. Data una circonferenza di diametro $AB = 3{,}14\ cm$, si prendano su di essa da parte opposta di AB, due punti C e D tali che $A\hat{B}C = 30°, A\hat{B}D = x$, determinare per quale valore di x il quadrato della corda CD è uguale a 9,49 cm^2. [$\approx 78{,}65°$]
202. Un trapezio è inscritto in una semicirconferenza, con la base maggiore coincidente con il diametro. Dopo avere provato che il trapezio è isoscele, determinare la misura dell'area mediante il raggio della circonferenza e uno degli angoli adiacenti alla base. [$4r^3 sin^3(\alpha) \cdot cos(\alpha)$]
203. Provare che se in un triangolo si ha $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$, allora si ha $\gamma = 2\ \alpha$.
204. In figura 

CD è tangente alla semicirconferenza, determinare la misura di AD. [$\approx 7{,}22$]
205. Risolvere il problema precedente con dati generici: $\overline{AB} = 2r, \angle C\hat{A}B = \alpha$. $\left[\dfrac{2r \cdot cos^2(\alpha)}{cos(2\alpha)}\right]$
206. Dato un settore circolare 

in cui l'angolo al centro AOB è di 120°, determinare la misura di $A\hat{O}C$, con C un punto dell'arco AB, tale che il rapporto fra i perimetri dei triangoli AOC e COB sia 0,93. [$\approx 52°48'4''$]
207. Sia M un punto su una semicirconferenza di centro O e diametro AB che misura 2, determinare la misura di $M\hat{A}B$ in modo che, tracciato il raggio OP parallelo ad AM, sia $\overline{AM} - \overline{MP}^2 = 5/4$.[$\approx 35°39'33''$]
208. In una semicirconferenza di diametro AB lungo 2, condurre una corda AC, quindi la corda AD che biseca l'angolo $B\widehat{A}C$. Determinare la misura di $B\widehat{A}C$ in modo che sia: $\overline{AC} + \overline{AD} = 3{,}75$. [$\approx 25°48'30''$]
209. Su una semicirconferenza di diametro $AB = 2$ cm, si scelga un punto C, sia AD la bisettrice dell'angolo $B\widehat{A}C$. Determinare la misura di $B\widehat{A}C$ in modo che $AC + AD$ sia compresa tra 2,75 e 3,68. [fra $\approx 29°15'31''$ e $\approx 59°32'17''$]

Livello 3

210. Un punto X appartiene a una circonferenza, AB è una corda lunga 3,72, della stessa circonferenza scelta in modo tale che sia $B\hat{A}X = 45°$. Prolunghiamo AB dalla parte di B in modo da ottenere il segmento BC isometrico ad AB. Determinare la misura di $X\hat{A}B$ in modo che sia $\overline{XA}^2 = 0{,}34 \cdot \overline{XC}^2$. Un dato non è necessario, quale? [$\approx 73°51'47''$; la misura di AB]
211. Nel triangolo ABC AB e BC misurano 3,62 cm e 1,93 cm. Sapendo che $\angle A\hat{B}C = 2 \cdot \angle B\hat{A}C$, determinare le misure degli angoli. (Servono le formule di triplicazione) [$\approx 32°1'3''$]
212. Determinare l'angolo della base di un triangolo isoscele ottusangolo sapendo che il raggio del cerchio circoscritto è di 2,83 cm, sapendo inoltre che la differenza fra il doppio della base e il triplo dell'altezza è di 4,35 cm. [$\approx 14°8'27''$ o $\approx 38°59'22''$]
213. Il trapezio rettangolo $ABCD$ ha retti gli angoli di vertici A e D; inoltre $\angle A\hat{C}B = 78°51'36''$. Determinare la misura dell'angolo $C\hat{A}B$, sapendo che la somma della base minore CD e dell'altezza AD ha con la base maggiore AB un rapporto di 1,16. [$\approx 8°39'45''$ o $\approx 47°28'39''$]
214. Se il precedente rapporto è k, per quali valori il problema ha soluzioni? [$\approx -0{,}12 \le k \le \approx 1{,}32$]

215. Provare che se in un triangolo si ha $a^2 = b \cdot (b + c)$, allora si ha: $\alpha = 2\beta$.

216. Se in un triangolo si ha $\gamma = 2\alpha$, determinare una relazione fra a, c e α. [$c = 2a \cdot cos(\alpha)$]

217. Spiegare perché non è possibile che in un triangolo si abbia: $sin(2\alpha) > 0$, $cos(\beta + \gamma) > 0$.

218. E' data una semicirconferenza il cui diametro AB misura $2r$, tracciare una corda AC in modo che, detto D l'estremo del raggio parallelo alla corda, si abbia $\overline{AC} + \overline{CD} = 2,2 \cdot r$. Si assuma come incognita la misura di $B\hat{A}C$. [$\approx 15°53'13''$ o $\approx 42°25'19''$]

219. Dato un triangolo equilatero ABC di lato a, determinare sul lato AC un punto M in modo che la somma dei quadrati delle sue distanze dai vertici A e B abbia rapporto 7/5 con il quadrato del lato del triangolo. Sia incognita la misura di $A\hat{M}B$. [$\approx 73°8'48''$]

220. Un cono è inscritto in una sfera di raggio R, determinare l'angolo formato dall'apotema del cono con il suo asse in modo tale che la superficie laterale del cono sia $3/2\pi R^2$. [$30°$ o $\approx 40°38'47''$]

Leggi della rotazione

Lavoriamo insieme

Vogliamo trovare le leggi della rotazione attorno al punto (–1; 2) di 30°. Basta applicare le leggi stabilite dal Teorema 11:
$$\begin{cases} x' = -1 + x \cdot cos(30°) - y \cdot sin(30°) \\ x' = 2 + x \cdot sin(30°) + y \cdot cos(30°) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \\ x' = 2 + \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{cases}$$

Determinare i trasformati dei seguenti punti rispetto alle rotazioni di centro C e angolo α indicati

Livello 2

221. (0; 0), $C \equiv (1; 1)$, $\alpha = 45°$ [(1; 1)] (1; 2), $C \equiv (0; 0)$, $\alpha = 45°$ $\left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

222. (–1; 0), $C \equiv (0; 0)$, $\alpha = 30°$ $\left[\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)\right]$ (2; –1), $C \equiv (0; 0)$, $\alpha = -45°$ $\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

223. (0; –1), $C \equiv (-1; 1)$, $\alpha = 90°$ [(0; 1)] (–1; –2), $C \equiv (0; 0)$, $\alpha = 150°$ $\left[\left(\frac{\sqrt{3}-2}{2}; \frac{-1-2\cdot\sqrt{3}}{2}\right)\right]$

224. (1; 0), $C \equiv (0; 0)$, $\alpha = 270°$ [(0; –1)] (1; –2), $C \equiv (1; -1)$, $\alpha = 60°$ $\left[\left(\frac{2\cdot\sqrt{3}+3}{2}; \frac{\sqrt{3}-4}{2}\right)\right]$

225. (0; 2), $C \equiv (0; 0)$, $\alpha = 210°$ $\left[\left(1; -\sqrt{3}\right)\right]$ (3; –2), $C \equiv (1; 2)$, $\alpha = 120°$ $\left[\left(\frac{2\cdot\sqrt{3}-1}{2}; \frac{6+3\cdot\sqrt{3}}{2}\right)\right]$

226. (–2; –1), $C \equiv (2; 1)$, $\alpha = 180°$ [(4; 2)] (0; –2), $C \equiv (0; 0)$, $\alpha = 240°$ $\left[\left(-\sqrt{3}; 1\right)\right]$

Determinare le equazioni delle trasformate delle seguenti coniche rispetto all'origine di angolo α indicato.

Livello 3

227. $x^2/9 + y^2 = 1$, $\alpha = 45°$ [$5x^2 - 8xy + 5y^2 - 9 = 0$] $x^2/4 - y^2 = 1$, $\alpha = -45°$ [$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 8 = 0$]

228. $x^2/16 + y^2/9 = 1$, $\alpha = 30°$ $\left[43x^2 - 14\cdot\sqrt{3}xy + 57y^2 - 576 = 0\right]$

229. $y^2 - x^2/25 = 1$, $\alpha = 150°$ $\left[11x^2 + 26\cdot\sqrt{3}xy + 37y^2 - 50 = 0\right]$ $x^2 - y^2 = 1$, $\alpha = -135°$ [$2xy = 1$]

230. $y = x^2$, $\alpha = 60°$ $\left[x^2 + 2\cdot\sqrt{3}xy + 3y^2 - 2\cdot\sqrt{3}\cdot x - 2y = 0\right]$

231. $y = -x^2$, $\alpha = -330°$ $\left[3x^2 + 2\cdot\sqrt{3}xy + y^2 - 2x + 2\cdot\sqrt{3}y = 0\right]$

232. $y = x^2 - x + 1$, $\alpha = 150°$ $\left[3x^2 - 2\cdot\sqrt{3}xy + y^2 + 2\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot x + 2\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot y + 4 = 0\right]$

233. $x = 2y^2 - 1$, $\alpha = -60°$ $\left[3x^2 + 2\cdot\sqrt{3}xy + y^2 - x + \sqrt{3}\cdot y - 2 = 0\right]$

234. Tenuto conto degli esercizi precedenti, possiamo dire che l'equazione di un'ellisse canonica ruotata attorno all'origine si riconosce da quale particolarità? [Manca dei termini in x e y]

Equazioni lineari in seno e coseno

Abbiamo già risolto le equazioni omogenee in seno e coseno sia di I che di II grado. Anzi per queste ultime abbiamo visto che sappiamo risolverle anche se non sono omogenee ma hanno un termine noto, poiché grazie all'identità $sin^2(x) + cos^2(x) = 1$, possiamo riportarle a equazioni omogenee. Non siamo riusciti a fare lo stesso con le equazioni non omogenee di I grado in seno e coseno. Adesso vogliamo vedere come fare. Ci sarà utile il seguente risultato.

Teorema 12

Per un generico angolo $x \neq \pi + 2k\pi$ valgono le seguenti formule parametriche:

$$sin(x) = \frac{2\cdot tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}; cos(x) = \frac{1-tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Dimostrazione

Proviamo solo la prima.

Scriviamo $sin(x)$ usando la formula di duplicazione: $sin(2x) = 2sin(x)cos(x)$.

Adesso dividiamo tutto per $1 = sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$: $sin(x) = \dfrac{2\cdot sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{x}{2}\right)}{sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$.

Dividiamo numeratore e denominatore per $cos^2(x/2)$, assicurandoci che sia

$$cos^2(x/2) \neq 0 \Rightarrow x/2 \neq \pi/2 + k\pi \Rightarrow x \neq \pi + 2k\pi.$$

$$sin(x) = \frac{2\cdot\dfrac{sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot \cancel{cos\left(\frac{x}{2}\right)}}{cos^{\cancel{2}}\left(\frac{x}{2}\right)}}{\dfrac{sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} + \dfrac{\cancel{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{\cancel{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}} = \frac{2\cdot tan\left(\frac{x}{2}\right)}{tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+1}$$

Analogamente si dimostra l'altra, lasciata per esercizio.

Grazie ai risultati recedenti, possiamo quindi ricondurre, e perciò risolvere, le cosiddette equazioni lineari in seno e coseno, cioè equazioni del tipo: $a\ sin[f(x)] + b\ cos[f(x)] + c = 0$, a equazioni di secondo grado algebriche.

Esempio 14

Vogliamo risolvere l'equazione lineare $3\ sin(x) + 2\ cos(x) - 1 = 0$. Applichiamo le formule parametriche, indicando con $t = tan\left(\frac{x}{2}\right)$: $3\cdot\frac{2\cdot t}{1+t^2} + 2\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} - 1 = 0$. L'equazione ottenuta è un'equazione fratta che risolviamo facilmente: $6t+2-2t^2-1-t^2=0 \Rightarrow 3t^2-6t-1=0 \Rightarrow t=\frac{3\pm\sqrt{12}}{3}$. Adesso ricostituiamo, ottenendo un'equazione goniometrica:

$$tan\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{3\pm\sqrt{12}}{3} \Rightarrow \frac{x}{2}\approx 1{,}136+k\pi \vee \frac{x}{2}\approx -0{,}153+k\pi \Rightarrow x\approx 2{,}272+2k\pi \vee x\approx -0{,}306+2k\pi .$$

Visto che le formule parametriche si applicano per $x \neq \pi + 2k\pi$, dobbiamo verificare che $x = \pi + 2k\pi$ non sia soluzione dell'equazione. Abbiamo: $3\ sin(\pi) + 2\ cos(\pi) - 1 = 0 - 2 - 1 \neq 0$. Pertanto le soluzioni trovate sono le uniche.

In effetti avremmo potuto risolvere le equazioni lineari in seno e coseno anche in altro modo.

Esempio 15

Vogliamo risolvere l'equazione lineare $3\ sin(x) + 2\ cos(x) - 1 = 0$ senza usare le formule parametriche. Mettiamo l'equazione a sistema con l'identità fondamentale della goniometria: $\begin{cases} 3\cdot sin(x)+2\cdot cos(x)-1=0 \\ sin^2(x)+cos^2(x)=1 \end{cases}$

A questo punto possiamo trasformare il sistema in uno fra due equazioni algebriche, semplicemente ponendo $sin(x) = A$, $cos(x) = B$. Si ha così: $\begin{cases} 3\cdot A+2\cdot B-1=0 \\ A^2+B^2=1 \end{cases}$, che risolviamo con il metodo di sostituzione:

$$\begin{cases} A=\frac{1-2B}{3} \\ \left(\frac{1-2B}{3}\right)^2+B^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1-2B}{3} \\ \frac{1-4B+4B^2}{9}+B^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1-2B}{3} \\ 13B^2-4B-8=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1-2B}{3} \\ B=\frac{2\pm\sqrt{4+104}}{13}=\frac{2\pm 6\cdot\sqrt{3}}{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{\frac{9\mp 12\cdot\sqrt{3}}{13}}{3} \\ B=\frac{2\pm\sqrt{4+104}}{13}=\frac{2\pm 6\cdot\sqrt{3}}{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{3\mp 4\cdot\sqrt{3}}{13} \\ B=\frac{2\pm 6\cdot\sqrt{3}}{13} \end{cases}$$

Quindi abbiamo: $\begin{cases} sin(x)=\frac{3-4\cdot\sqrt{3}}{13} \\ cos(x)=\frac{2+6\cdot\sqrt{3}}{13} \end{cases} \vee \begin{cases} sin(x)=\frac{3+4\cdot\sqrt{3}}{13} \\ cos(x)=\frac{2-6\cdot\sqrt{3}}{13} \end{cases}$. Ora si ha:

$$\begin{cases} sin(x)=\frac{3-4\cdot\sqrt{3}}{13} \Rightarrow x\approx -0{,}307+2k\pi \vee x\approx 3{,}449+2k\pi \\ cos(x)=\frac{2+6\cdot\sqrt{3}}{13} \Rightarrow x\approx \pm 307+2k\pi \end{cases} \Rightarrow x\approx -307+2k\pi$$

$$\begin{cases} sin(x)=\frac{3+4\cdot\sqrt{3}}{13} \Rightarrow x\approx 0{,}869+2k\pi \vee x\approx 2{,}273+2k\pi \\ cos(x)=\frac{2-6\cdot\sqrt{3}}{13} \Rightarrow x\approx \pm 2{,}273+2k\pi \end{cases} \Rightarrow x\approx 2{,}273+2k\pi$$

che corrispondono alle soluzioni trovate in precedenza, a parte qualche minima differenza dovuta alle approssimazioni.

Le disequazioni sono ovviamente riconducibili alle rispettive equazioni, ma poi si deve tenere conto delle rispettive funzioni goniometriche interessate.

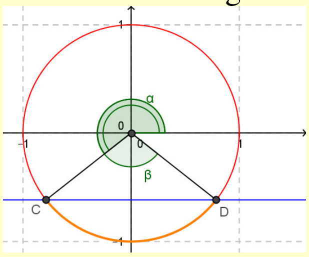
Esempio 16

Risolvere la disequazione $sin^2(3 - 4x) - sin(3 - 4x) - 1 > 0$. Risolviamo la disequazione nell'incognita $sin(3 - 4x)$, quindi intanto risolviamo l'equazione associata: $sin(3-4x)=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\Rightarrow sin(3-4x)=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Abbiamo eliminato la soluzione positiva perché maggiore di 1 e perciò non accettabile. La disequazione dovrebbe avere le seguenti soluzioni: $sin(3-4x)>\frac{1+\sqrt{5}}{2}\vee sin(3-4x)<\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

La prima disequazione ovviamente non ha soluzioni.

Per risolvere la seconda disequazione consideriamo la circonferenza goniometrica, su cui segniamo gli angoli il cui seno è pari al valore dato.



I valori segnati con il bordo arancione, sono tutti quelli riferiti alle soluzioni della disequazione, almeno limitatamente ai valori compresi tra 0 e 2π. Per averli tutti basta scrivere anche i periodi.

$$\alpha=\pi-sin^{-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)+2k\pi<3x-4<\beta=2\pi+sin^{-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)+2k\pi\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{4+\pi-sin^{-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{3}+\frac{2}{3}k\pi<x<\frac{4+2\pi+sin^{-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{3}+\frac{2}{3}k\pi$$

Osserviamo che, poiché $sin^{-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ è un numero negativo, abbiamo reso positivo l'arco aggiungendovi 2π. Volendo possiamo esprimere il tutto anche in modo più comprensibile usando delle approssimazioni:

$$\gamma+\frac{2}{3}k\pi<x<\delta+\frac{2}{3}k\pi,\gamma\approx 2{,}16;\delta\approx 3{,}65\ .$$

Verifiche

Lavoriamo insieme

Risolvere l'equazione $sin(x) - cos(x) = -¼$ per $x\in[-120°, 320°]$.

Applicando le formule parametriche abbiamo: $\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}=-\frac{1}{4},t=tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Semplifichiamo:

$$8t-4+4t^2+1+t^2=0\Rightarrow 5t^2+8t-3=0\Rightarrow t=\frac{-4\pm\sqrt{16+15}}{5}=\frac{-4\pm\sqrt{31}}{5}$$

Si ha: $tan\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{-4+\sqrt{31}}{5}\Rightarrow\frac{x}{2}\approx 17°24'32''+k180°\Rightarrow x\approx 34°49'2''+k360°$, che ha una sola soluzione accettabile: $x \approx 34°49'2''$.

Poi: $tan\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{-4-\sqrt{31}}{5}\Rightarrow\frac{x}{2}\approx -62°24'32''+k180°\Rightarrow x\approx -124°49'2''+k360°$, che ha anch'essa una sola soluzione accettabile (per $k = 1$): $x \approx 235°10'48''$

Risolvere le seguenti equazioni lineari in seno e coseno negli intervalli indicati

Livello 1

1. $3sin(x) + cos(x) = -2; x\in[0°; 360°]$ $[x \approx 200°47'48''; x \approx 302°20'1'']$
2. $2sin(x) - cos(x) = 2; x\in[-3; 0]$ $[\varnothing]$ $3sin(x) + \sqrt{3}cos(x) = -3; x\in[115°; 270°]$ $[x = 210°; x = 270°]$

3. $cos(x) - \sqrt{2}sin(x) = 1$; $x\in[-20°; 525°]$ [$x = 0°$; $x \approx 250°31'44''$; $x = 360°$]
4. $3sin(x) + 4cos(x) = 2$; $x\in[-1; 2]$ [$x \approx -0,516$; $x \approx 1,803$]
5. $sin(x) + cos(x) = 1/3$; $x\in[2; 6]$ [$x \approx 2,118$; $x \approx 5,736$]
6. $sin(x) + cos(x) + 1 = 0$; $x\in[-4; 4]$ [$-5\pi/4$; $-\pi$; $-\pi/4$; $3\pi/4$; π]

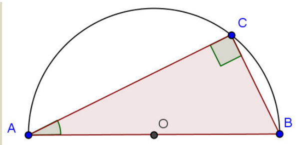
Livello 2

7. $sin(x+12°) + 2cos(x+12°) = 1$; $x\in[220°; 410°]$ [$x \approx 311°7'48''$]
8. $6sin(3x+ 27°) - 7cos(3x + 27°) = 0,71$; $x\in[100°; 520°]$ [$x \approx 128°56'18''$; $x \approx 185°59'38''$; $x \approx 248°56'18''$; $x \approx 305°59'38''$; $x \approx 368°56'18''$; $x \approx 425°59'38''$; $x \approx 488°56'18''$]
9. $3sin(4x+ 2°) - 7cos(4x+ 2°) = -0,25$; $x\in[-40°; 350°]$ [$x \approx -28°19'46''$; $x \approx 15°43'48''$; $x \approx 61°40'14''$; $x \approx 105°43'48''$; $x \approx 151°40'14''$; $x \approx 195°43'48''$; $x \approx 241°40'14''$; $x \approx 285°43'48''$; $x \approx 331°40'14''$; $375°43'48''$]
10. $sin(2x - 4°) + 3cos(2x - 4°) = 0,31$; $x\in[250°; 742°]$ [$x \approx 329°1'49''$; $x \approx 413°24'17''$; $x \approx 509°1'49''$; $x \approx 593°24'17''$; $x \approx 689°1'49''$]
11. $4sin(x+12°) - 3cos(x+12°) = 0,75$; $x\in[15°; 620°]$ [$x \approx 33°29'48''$; $x \approx 196°14'35''$; $x \approx 393°29'48''$; $x \approx 556°14'35''$]
12. $sin(2x+35°) + 2cos(2x+35°) + 2 = 0$; $x\in[-100°; 100°]$ [$x \approx -80°56'6''$; $x = 72°30'$; $x \approx 99°3'54''$]
13. $sin(5x - 2) + 6cos(5x - 2) = 0,21$; $x\in[0; 4]$ [$x \approx 0,126$; $x \approx 0,740$; $x \approx 1,382$; ; $x \approx 1,997$; $x \approx 2,639$; $x \approx 3,254$; $x \approx 3,896$; $x \approx 4,510$]
14. $sin(3x+ 2) + 4cos(3x+ 2) = 0,75$; $x\in[-1; 2]$ [$x \approx -0,122$; $x \approx 1,047$; $x \approx 1,972$]
15. $sin(x+12) + 2cos(x+12) = -0,59$; $x\in[3; 4]$ [$\varnothing$]

Livello 3

16. $cos(x + \pi/4) - cos(x - \pi/3) - cos(x) = -0,1$; $x\in[-2; 5]$ [$x \approx -0,41$; $x \approx 2,62$]
17. $sin(x + \pi/3) + cos(x - \pi/6) = 1$; $x\in[-2; 3]$ [$x \approx -0,52$; $x \approx 1,57$]
18. $cos(x + \pi/4) - cos(x) + sin(x) + 0,25 = 0$; $x\in[-3; 1]$ [$x \approx -1,71$; $x \approx 0,14$]
19. $sin(x + \pi/3) - sin(x) - 3cos(x) - 0,23 = 0$; $x\in[1; 4]$ [$x \approx 1,91$]

Lavoriamo insieme

Data una semicirconferenza di diametro AB lungo 2, 

determinare su di essa un punto C in modo che sia $\frac{4}{3}\cdot\overline{AC}-\frac{1}{2}\cdot\overline{BC}=\frac{3}{4}$.

Il triangolo è ovviamente rettangolo di ipotenusa AB. Facilmente ricaviamo i dati incogniti in funzione dell'angolo $C\hat{A}B = x$. $\overline{AC}=2\cdot cos(x); \overline{BC}=2\cdot sin(x)$. Quindi il problema ha le stesse soluzioni del sistema $\begin{cases}\frac{4}{3}\cdot 2\cdot cos(x)-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot sin(x)=\frac{3}{4}\\ 0°<x<90°\end{cases}$. Risolviamo:

$$\begin{cases}32\cdot cos(x)-12\cdot sin(x)-9=0\\ 0°<x<90°\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}32\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}-12\cdot\frac{2t}{1+t^2}-9=0 \Rightarrow 32-32\\ 0<t<1\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}32-32t^2-24t-9-9t^2=0\\ 0<t<1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}41t^2+24t-23=0\\ 0<t<1\end{cases} \Rightarrow t=\frac{\sqrt{1087}-12}{41}$$

Visto il significato di t, l'angolo x deve essere $\frac{x}{2}=tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1087}-12}{41}\right) \Rightarrow \frac{x}{2}\approx 27°5'15'' \Rightarrow x \approx 54°10'30''$

Risolvere i seguenti problemi

Livello 2

20. Il diametro *AB* di una semicirconferenza di centro *O* misura 6 cm e il quadrilatero *ABCD* in essa inscritto ha il lato *CD* lungo 3 cm. Determinare $A\hat{O}D$, in modo che sia $\frac{\overline{AD}^2+\overline{BC}^2}{\overline{AB}+\overline{CD}}=2$. [60°]
21. Sia *M* un punto su una semicirconferenza di centro *O* e diametro *AB*. Determinare il valore dell'angolo $M\hat{A}B$ in modo che sia $\overline{AM}+4\cdot\overline{BM}=4\cdot\overline{AB}$. [≈ 61°55′39″]
22. Il lato *AB* di un triangolo *ABC* è lungo 5. Si tracci una semiretta di vertice *A* interna al triangolo, sia *D* la proiezione di *B* sulla detta semiretta. Determinare la misura di $D\hat{A}B$ in modo che sia $\overline{AD}+2\cdot\overline{BD}=2\cdot\overline{AB}$. [≈ 36°52′12″]
23. Dato un cerchio di raggio che misura *r*, si consideri su di esso una corda *AB* isometrica al lato del triangolo equilatero inscritto nella circonferenza. Dato un punto *P* sull'arco maggiore *AB*, determinare la misura di $P\hat{A}B$ in modo che sia $\overline{AP}+\overline{PB}=2r$. [≈ 5°15′52″ o ≈ 114°44′8″]
24. Sia *P* un punto sull'arco *AB*, quarta parte di un cerchio di centro *O* e raggio *r*. Determinare la lunghezza dell'angolo $A\hat{O}P$ in modo che l'area del quadrilatero *NOMP* (*M* e *N* punti medi di *OA* e *OB*) sia $5/16r^2$. [≈ 17°6′52″ o ≈ 72°53′8″]
25. In un triangolo *ABC*, $2\cdot B\widehat{C}A=A\widehat{B}C$; *BC* è lungo 3 e *BH* e *CK* sono altezze. Determinare l'ampiezza di $B\widehat{C}A$ in modo che sia $\overline{BH}^2+\overline{CK}=5$. [≈ 30°8′15″]
26. Si consideri un punto *P* su un quarto di cerchio di raggio 1 cm, di centro *O* ed estremi *A* e *B*. Determinare i valori che deve assumere l'angolo $C\hat{O}P=x$, in modo che il quadrilatero *OCPB*, con *C* punto medio di *OA*, abbia area maggiore di 0,42. [$\approx 67°51′37″ < x < 90°$]
27. I due segmenti *OA* e *OB* sono fra loro ortogonali e lunghi rispettivamente 3,26 *cm* e 3,56 *cm*. Sia *P* un punto interno all'angolo tale che sia $\overline{OP}=\overline{OA}$. Determinare la misura di $A\hat{O}P$ in modo che si abbia $2\cdot\overline{PE}+3\cdot\overline{PF}=3{,}3\cdot\overline{OB}$, in cui $\overline{PE}$ è la distanza di *P* da *OB* e $\overline{PF}$ la distanza di *P* da *OA*. [$\approx 54°27′52″ \vee \approx 58°9′20″$]
28. Nel triangolo *ABC*, rettangolo in *B*, l'angolo acuto di vertice *A* è di 30°. Tracciata la semicirconferenza di diametro *AB*, esterna al triangolo, sia su di essa un punto *P* e sia *Q* l'intersezione della perpendicolare per *P* ad *AB* con l'ipotenusa *AC*. Determinare la misura di $P\hat{A}B$ in modo che si abbia $\overline{AQ}+\overline{QP}=2\cdot\overline{AP}$. [≈ 33°54′15″]
29. É dato il triangolo *ABC*, rettangolo in *B*, del quale l'altezza relativa all'ipotenusa è lunga 2,01*cm*. Determinare l'ampiezza degli angoli interni in modo che il perimetro del triangolo sia lungo 9,97 *cm*. [≈ 38°41′30″, ≈ 51°18′30″]
30. Sia il triangolo rettangolo *ABC* con angoli acuti di 60° e 30° e l'ipotenusa *BC* lunga 4,91 *cm*. Per *A*, conduciamo una retta *s* esterna al triangolo e siano *B′* e *C′* le proiezioni ortogonali di *B* e *C* su di essa. Determinare le misure dei due angoli che i cateti formano con *s*, sapendo che il perimetro del trapezio *BCC′B′* è 14 *cm*. [≈ 28°23′55″, ≈ 61°36′05″]
31. Un trapezio rettangolo ha basi lunghe 2,74 *cm* e 8,75 *cm*. Determinare la misura del suo angolo acuto in modo che il perimetro sia lungo 25,81 *cm*. [≈ 44°43′19″]
32. Due semicirconferenze di diametri isometrici *AB* e *BC*, sono tangenti esternamente in *B*. Presi i punti *C* sulla prima ed *E* sulla seconda in modo che $C\hat{B}E=45°$. Calcolare la misura di $C\hat{B}A$ in modo che sia $2\cdot\overline{BC}+3\cdot\overline{EC}=2\cdot\overline{AB}$. [≈ 72°32′22″]
33. Sia *d* la misura della diagonale *AC* del rettangolo *ABCD*; determinare l'angolo che essa forma con la base *AB* in modo che valga la relazione $\overline{AB}+2\cdot\overline{BC}=\sqrt{3}\cdot d$. [≈ 24°12′12″]

***Livello* 3**

34. Con riferimento al precedente problema se la condizione è $2\cdot\overline{BC}+3\cdot\overline{EC}=k\cdot\overline{AB}$, con *k* numero reale positivo, per quali valori di *k* il problema ha soluzione? $\left[0<k<\sqrt{13-6\cdot\sqrt{2}}\right]$
35. E' dato l'angolo retto *xOy* ed il punto *P* della sua bisettrice per il quale $\overline{OP}$ = 1 condurre per *P* una trasversale in modo che dette *A* e *B* le sue intersezioni con i lati *Ox* e *Oy* si abbia. $\frac{1}{\overline{PA}}+\frac{1}{\overline{PB}}=2$. Esprimere il risultato in termini dell'angolo $P\hat{A}O$. [45°]

36. Calcolare l'ampiezza $2x$ dell'angolo al vertice di un triangolo isoscele, dato il rapporto ¼ tra il perimetro e l'altezza relativa alla base. [≈ 96°56′33″]

37. È data la semicirconferenza di diametro AB lungo $2r$ e la semiretta t tangente in B e giacente nel medesimo semipiano della semicirconferenza rispetto alla retta AB. Determinare su t un punto P in modo che, detta Q l'ulteriore intersezione della retta AP con la semicirconferenza, si abbia: $2 \cdot \overline{BQ} + 3 \cdot \overline{PQ} = \frac{2}{3} \cdot \overline{BP}$. Determinare il valore di $B\hat{A}P$. [≈ 67°49′38″]

38. Nel trapezio $ABCD$ rettangolo in A e D, la base minore CD è isometrica al lato obliquo BC e che l'angolo di vertice B è di 60°. Determinare sul lato obliquo CB un punto P in modo che si abbia $\overline{DP} + \overline{CP} = 2 \cdot \overline{DC}$. [≈ 21°46′04″]

39. Il triangolo ABC è inscritto in una circonferenza di raggio lungo 2,13 *cm*. Sapendo che la distanza dal centro al lato AB è di 2,26 *cm* e che il perimetro è di 10,34 *cm*, determinare la misura dell'angolo di vertice A. [≈ 64°36′57″ o ≈ 83°20′38″]

Formule di prostaferesi e di Werner

Vediamo di determinare altre formule che a volte possono rivelarsi utili.

Teorema 13

Valgono le seguenti formule, dette di **prostaferesi**: $sin(\alpha) \pm sin(\beta) = 2 \cdot sin\left(\frac{\alpha \pm \beta}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{\alpha \mp \beta}{2}\right)$

$cos(\alpha) - cos(\beta) = -2 \cdot sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$ $\quad cos(\alpha) + cos(\beta) = 2 \cdot cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$

Dimostrazione.
Proviamo solo la prima nel caso della differenza.
Consideriamo le formule di addizione e sottrazione dei seni:

$$sin(x + y) = sin(x) \cdot cos(y) + sin(y) \cdot cos(x)$$
$$sin(x - y) = sin(x) \cdot cos(y) - sin(y) \cdot cos(x)$$

Sottraiamo membro a membro le due uguaglianze:

$$sin(x + y) - sin(x - y) = sin(x) \cdot cos(y) + sin(y) \cdot cos(x) - sin(x) \cdot cos(y) + sin(y) \cdot cos(x) = 2\ sin(y) \cdot cos(x)$$

Come si vede abbiamo trasformato una somma di seni in un prodotto. Vogliamo scrivere meglio la formula, in modo che essa sia applicabile ad angoli generici α e β. Quindi poniamo: $\begin{cases} x + y = \alpha \\ x - y = \beta \end{cases}$, da cui facilmente si ottiene: $\begin{cases} x = \frac{\alpha + \beta}{2} \\ y = \frac{\alpha - \beta}{2} \end{cases}$. Sostituendo otteniamo la formula cercata. Analogamente si provano le altre.

Che cosa significa?

La parola prostaferesi deriva dalla giustapposizione di due parole di origine greca, *prosthesis* (πρόσθεσις) e *aphairesis* (ἀφαίρεσις), che significano rispettivamente somma e sottrazione. Ed è quindi una formula che trasforma somme e sottrazioni in prodotti.

Esempio 17

Vogliamo calcolare il valore di $sin(75°) + sin(15°)$ senza ricorrere alla calcolatrice. Mediante il precedente risultato abbiamo: $2 \cdot sin\left(\frac{75° + 15°}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{75° - 15°}{2}\right) = 2 \cdot sin(45°) \cdot cos(30°) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Ci sono anche delle formule in qualche modo inverse di quelle di prostaferesi.

Corollario 6 (Formule di Werner)

Valgono le seguenti formule: $sin(x) \cdot sin(y) = ½ \cdot [cos(x - y) - cos(x + y)]$

$sin(x) \cdot cos(y) = ½ \cdot [sin(x - y) + sin(x + y)]$ $\quad cos(x) \cdot cos(y) = ½ \cdot [cos(x - y) + cos(x + y)]$

Dimostrazione

Si ottengono immediatamente dalle formule di prostaferesi. Consideriamo per esempio la formula di prostaferesi per la somma dei seni:

$$\begin{aligned} & sin(x)+sin(y) = 2 \cdot sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \Rightarrow \\ & \Rightarrow sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left[sin(x)+sin(y)\right] \end{aligned} \qquad (1)$$

Poniamo $\begin{cases} \frac{x+y}{2} = \alpha \\ \frac{x-y}{2} = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 2\alpha \\ x-y = 2\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha+\beta \\ y = \alpha-\beta \end{cases}$. Sostituendo nella (1) troviamo la formula di Werner per il prodotto di seno e coseno.

Come applicazione delle formule di prostaferesi proviamo un'interessante proprietà sui triangoli.

Teorema 14 (di Nepero)

In un qualsiasi triangolo si ha: $\frac{a-b}{a+b} = \frac{tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}; \frac{a-c}{a+c} = \frac{tan\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{tan\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}; \frac{b-c}{b+c} = \frac{tan\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}{tan\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}$

Dimostrazione

Proviamo la prima, le altre sono ovviamente identiche.

Per il teorema dei seni abbiamo: $\frac{sin(\alpha)}{sin(\beta)} = \frac{a}{b}$. Applichiamo le cosiddette proprietà del comporre e dello scomporre: $\frac{sin(\alpha)+sin(\beta)}{sin(\beta)} = \frac{a+b}{b}; \frac{sin(\alpha)-sin(\beta)}{sin(\beta)} = \frac{a-b}{b}$.

I due rapporti possono anche scriversi come uno solo: $\frac{sin(\alpha)-sin(\beta)}{sin(\alpha)+sin(\beta)} = \frac{a-b}{a+b}$.

Adesso applichiamo le formule di prostaferesi al primo membro:

$$\frac{\cancel{2} \cdot sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cancel{2} \cdot sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} = \frac{a-b}{a+b} \Rightarrow \frac{tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} = \frac{a-b}{a+b}$$

Esempio 18

Vogliamo verificare la validità delle formule di Nepero per un triangolo rettangolo in cui gli angoli acuti misurano β = 30° e γ = 60°. In questo caso sappiamo che, detta a l'ipotenusa, si ha $b = \frac{1}{2}a, c = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Deve quindi essere:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{a-\frac{1}{2}a}{a+\frac{1}{2}a}=\frac{\frac{1}{2}a}{\frac{3}{2}a}=\frac{1}{3};\frac{tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}=\frac{tan\left(\frac{90°-30°}{2}\right)}{tan\left(\frac{90°+30°}{2}\right)}=\frac{tan(30°)}{tan(60°)}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3};$$

$$\frac{a-c}{a+c}=\frac{a-\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a+\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}};\frac{tan\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{tan\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}=\frac{tan\left(\frac{90°-60°}{2}\right)}{tan\left(\frac{90°+60°}{2}\right)}=\frac{tan(15°)}{tan(75°)};$$

$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-2;\frac{tan\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}{tan\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}=\frac{tan\left(\frac{30°-60°}{2}\right)}{tan\left(\frac{30°+60°}{2}\right)}=\frac{tan(-15°)}{tan(45°)}$$

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo verificare la validità della seguente identità: $\frac{sin(x)+sin(y)}{sin(x)-sin(y)}=\frac{tan\left(\frac{x+y}{2}\right)}{tan\left(\frac{x-y}{2}\right)}$. Applicando le formule di prostaferesi al primo membro abbiamo: $\frac{\cancel{2}\cdot sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\cancel{2}\cdot sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{x+y}{2}\right)}$. Facilmente si vede che l'espressione equivale al secondo membro dell'identità di partenza, che risulta perciò verificata.

Verificare l'eventuale validità delle seguenti identità

***Livello* 1**

1. $\frac{cos(x)+cos(y)}{cos(x)-cos(y)}=\frac{cot\left(\frac{x+y}{2}\right)}{tan\left(\frac{x-y}{2}\right)}$ [No] $\frac{sin(x)+sin(y)}{cos(x)+cos(y)}=\frac{cos(y)-cos(x)}{sin(x)-sin(y)}$ [Sì]
2. $\frac{sin(x)+sin(y)}{cos(x)-cos(y)}=\frac{cos(x)+cos(y)}{sin(x)-sin(y)}$ [Sì] $tan(\alpha)+tan(\beta)=\frac{sin(\alpha+\beta)}{sin(\alpha)\cdot sin(\beta)}$ [No]
3. $tan(\alpha)-tan(\beta)=\frac{sin(\alpha-\beta)}{cos(\alpha)\cdot cos(\beta)}$ [Sì]
4. $sin(x)\cdot cos(45°+x)+cos(x)\cdot sin(45°+x)=\sqrt{2}/2$ [No]
5. $cos(27°+x)\cdot cos(18°-x)-sin(27°+x)\cdot sin(18°-x)=\sqrt{2}/2$ [Sì]
6. $cos(13°+x)\,cos(47°+x)-sin(47°+x)\,sin(13°-x)=½$ [Sì]

***Livello* 2**

7. $sin^2(x)-sin^2(y)-sin(x+y)\cdot sin(x-y)$ [Sì] $cos^2(x)-cos^2(y)-sin(x+y)\cdot sin(x-y)$ [No]

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare $\frac{1}{2\cdot sin(10°)}-2\cdot sin(70°)$ senza usare la calcolatrice.

Intanto scriviamo un'unica frazione $\frac{1-4\cdot sin(70°)\cdot sin(10°)}{2\cdot sin(10°)}$. Adesso applichiamo le formule di Werner al prodotto al numeratore: $\frac{1-[2\cdot cos(60°)-2\cdot cos(80°)]}{2\cdot sin(10°)}$.

Sostituiamo ancora: $\frac{1-\left[2\cdot\frac{1}{2}-2\cdot sin(10°)\right]}{2\cdot sin(10°)}=\frac{2\cdot sin(10°)}{2\cdot sin(10°)}=1$.

Senza l'uso della calcolatrice calcolare o semplificare le seguenti espressioni

Livello 2

8. $\frac{1}{2\cdot cos(10°)}-2\cdot cos(70°)$ [$-tan(10°)$] $\frac{1}{2\cdot cos(20°)}-2\cdot cos(50°)$ [– 1]
9. $\frac{\sqrt{2}}{2\cdot sin(52°30')}-2\cdot cos(7°30')$ $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2\cdot sin(52°30')}\right]$ $cos(74°)\cdot cos(29°)+sin(74°)\cdot sin(29°)$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$
10. $cos^2(22°30')-cos^2(67°30')$ $\left[\sqrt{2}/2\right]$ $cos^2(17°)-cos^2(73°)-cos(34°)$ [0]
11. $sin(10°)\cdot sin(20°)-cos(10°)\cdot cos(20°)$ $\left[-\sqrt{3}/2\right]$ $sin^2(58°)-sin^2(32°)-cos(64°)$ [0]
12. $sin(20°)\cdot sin(25°)+cos(20°)\cdot sin(25°)$ $\left[\sqrt{2}/2\right]$ $sin(58°)\cdot cos(28°)-cos(58°)\cdot sin(28°)$ [½]

Livello 3

13. $\frac{sin(\pi/9)+sin(2\pi/9)+sin(4\pi/9)+sin(5\pi/9)}{cos(\pi/9)+cos(2\pi/9)+cos(4\pi/9)+cos(5\pi/9)}$ $\left[\sqrt{3}\right]$
14. $sin(\pi/8)+sin(3\pi/8)+sin(5\pi/8)+sin(7\pi/8)$ $\left[\sqrt{4+2\cdot\sqrt{2}}\right]$
15. $cos(\pi/8)+cos(3\pi/8)+cos(5\pi/8)+cos(7\pi/8)$ [0]
16. Affinché possa calcolarsi senza calcolatrice il valore esatto di $sin(\alpha)\cdot sin(\beta)-cos(\alpha)\cdot cos(\beta)$, dobbiamo conoscere il valore di quale espressione? [$cos(\alpha+\beta)$]

Determinare la minima soluzione positiva delle seguenti equazioni

17. $cos(81°)+cos(39°)=cos(x)$ [21°] $sin(21°)+sin(39°)=cos(x)$ [9°]
18. $sin(72°)-sin(48°)=sin(x)$ [12°] $sin(63°)-sin(3°)=cos(x)$ [33°]
19. $sin(65°)-cos(35°)=sin(x)$ [5°] $sin(84°)-cos(54°)=cos(x)$ [66°]

Lavoriamo insieme

Vogliamo verificare se in un triangolo qualsiasi la seguente uguaglianza è un'identità

$$sin(\alpha)+sin(\beta)+sin(\gamma)=4\,cos(\alpha/2)\,cos(\beta/2)\,cos(\gamma/2)$$

Abbiamo: $sin(\alpha)+sin(\beta)+sin(\gamma)=sin(\alpha)+sin(\beta)+sin(180°-\alpha-\beta)=sin(\alpha)+sin(\beta)+sin(\alpha+\beta)$

Applichiamo le formule di prostaferesi alla prima somma e la formula di duplicazione al terzo addendo:

$$2\cdot sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+2\cdot sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=$$
$$=2\cdot sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\left[cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right]$$

. Applichiamo ancora una formula di prostaferesi:

$$2\cdot sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot 2\cdot cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{\beta}{2}\right)=4\cdot sin\left(\frac{180°-\gamma}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{\beta}{2}\right)=$$
$$=4\cdot sin\left(90°-\frac{\gamma}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{\beta}{2}\right)=4\cdot cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

Abbiamo a che fare con un'identità.

Verificare la validità delle seguenti identità in un triangolo qualsiasi

Livello 2

20. $p = 4 \cdot R \cdot cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)$ $\qquad \frac{sin(\alpha)+sin(\beta)+sin(\gamma)}{cos(\alpha)+cos(\beta)+cos(\gamma)} = tan(\beta)$

21. $a \cdot sin(\beta) \cdot sin(\gamma) + b \cdot sin(\alpha) \cdot sin(\gamma) + c \cdot sin(\alpha) \cdot sin(\beta) = 3A/R$

22. $2 \cdot a \cdot R \cdot sin(\beta - \gamma) = b^2 \cdot cos^2(\gamma) - c^2 \cdot cos^2(\beta)$

23. $cos^2(\alpha) + cos^2(\beta) + cos^2(\gamma) + 2 \cdot cos(\alpha) \cdot cos(\beta) \cdot cos(\gamma) = 1$

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere l'equazione $\frac{sin(8x)+sin(2x)}{cos(8x)-cos(2x)} = 2$, $x \in [-102°; 217°]$.

Applichiamo le formule di prostaferesi: $\frac{2 \cdot sin(5x) \cdot cos(3x)}{-2 \cdot sin(5x) \cdot sin(3x)} = 2$. Adesso, prima di potere dividere per il fattore comune $sin(5x)$, dobbiamo assicurarci che i valori che annullano tale espressione non siano soluzioni dell'equazione data. Poiché $sin(5x) \Rightarrow 5x = k \cdot 180° \Rightarrow x = k \cdot 36°$, verifichiamo che tale valore non è soluzione: $\frac{sin(5 \cdot k \cdot 36°) \cdot cos(3 \cdot k \cdot 36°)}{-sin(5 \cdot k \cdot 36°) \cdot sin(3 \cdot k \cdot 36°)} = \frac{sin(k \cdot 108°) \cdot cos(k \cdot 108°)}{-sin(k \cdot 180°) \cdot sin(k \cdot 108°)} = \frac{0}{0}$.

Otteniamo una espressione priva di senso, pertanto possiamo dividere senza problemi per $sin(5x)$:

$$-cot(3x) = 2 \Rightarrow 3x \approx 153°26'5'' + k180° \Rightarrow x \approx 51°8'41'' + k60°$$

Le soluzioni accettabili sono: $x_1 \approx -69°8'41''; x_2 \approx -9°8'41''; x_3 \approx 51°8'41''; x_4 \approx 111°8'41''; x_5 \approx 171°8'41''$

Risolvere le seguenti equazioni negli intervalli indicati

Livello 1

24. $\frac{cos(5x)-cos(3x)}{sin(5x)+sin(3x)} = -\frac{7}{3}$, $x \in [-94°; 216°]$ [≈ 66°48′5″]

25. $\frac{sin(7x)-sin(x)}{cos(7x)+cos(x)} = \frac{4}{3}$, $x \in [-74°; 267°]$
[≈ –42°17′24″; ≈ 17°42′36″; ≈ 77°42′36″; ≈ 137°42′36″; ≈ 197°42′36″; ≈ 257°42′36″]

26. $\frac{sin(10x)+sin(4x)}{cos(10x)-cos(4x)} = -\frac{3}{4}$, $x \in [-27°; 318°]$
[≈ 17°42′36″; ≈ 77°42′36″; ≈ 137°42′36″; ≈ 197°42′36″; ≈ 257°42′36″; ≈ 317°42′36″]

27. $\frac{sin(12x)-sin(6x)}{cos(12x)-cos(6x)} = -5$, $x \in [-30°; 29°]$ [≈ –18°44′36″; ≈ 1°15′24″; ≈ 21°15′24″]

28. $\frac{cos(9x)+cos(3x)}{sin(9x)-sin(3x)} = 9$, $x \in [105°; 229°]$ [≈ 122°6′48″; ≈ 182°6′48″]

29. $\frac{cos(5x)-cos(2x)}{sin(5x)-sin(2x)} = 5$, $x \in [-45°; 139°]$ [≈ – 22°28′58″;≈ 28°56′45″; ≈ 80°22′27″; ≈ 131°48′8″]

30. $\frac{sin(4x)+sin(3x)}{cos(4x)-cos(3x)} = 3$, $x \in [-71°; 291°]$ [≈ –36°52′12″]

31. $\frac{cos(5x)+cos(7x)}{sin(5x)+sin(7x)} = -\frac{2}{3}$, $x \in [-8°; 90°]$ [≈ 20°36′54″; ≈ 50°36′54″; ≈ 80°36′54″]

32. $\frac{cos(12x)-cos(7x)}{sin(12x)-sin(7x)} = \frac{11}{3}$, $x \in [-9°; 48°]$ [≈ –7°52′4″; ≈ 11°4′46″; ≈ 30°1′37″]

33. $\dfrac{cos(13x)-cos(17x)}{sin(13x)+sin(17x)}=-\dfrac{14}{5}$, $x \in [-84°; 314°]$ [≈–35°10′23″; ≈54°49′37″; ≈144°49′37″; ≈234°49′37″]

34. $\dfrac{sin(14x)-sin(7x)}{cos(14x)+cos(7x)}=\dfrac{15}{4}$, $x \in [-74°; 35°]$ [≈ –29°58′49″; ≈ 21°26′53″]

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere l'equazione $sin(3x) + sin(5x) - sin(2x)cos(x) = 0$; $x \in [0°; 360°]$. Applichiamo la formula di prostaferesi alla prima somma: $2sin(4x) \cdot cos(x) - sin(2x) \cdot cos(x) = 0$.
Mettiamo in evidenza a fattor comune: $cos(x) \cdot [2sin(4x) - sin(2x)] = 0$.
Applichiamo il principio di annullamento del prodotto: $cos(x) = 0 \vee 2sin(4x) - sin(2x) = 0$.
Risolviamo singolarmente, nell'intervallo richiesto: $cos(x) = 0 \Rightarrow x = 90° \vee x = 270°$.
$2sin(4x) - sin(2x) = 0 \Rightarrow 2 \cdot 2 \cdot sin(2x) \cdot cos(2x) - sin(2x) = 0 \Rightarrow sin(2x) \cdot [4cos(2x) - 1] = 0$, da cui
$sin(2x) = 0 \Rightarrow 2x=0° \vee 2x=180° \vee 2x = 360° \vee 2x = 540° \Rightarrow x = 0° \vee x = 90° \vee x = 180° \vee x = 270°$
e poi: $4cos(2x) -1= 0 \Rightarrow cos(2x) = ¼ \Rightarrow x \approx 37°45'40'' \vee x \approx 142°14'20'' \vee x \approx 217°45'40'' \vee x \approx 322°14'20''$.
Quindi in conclusione abbiamo 6 soluzioni comprese in [0°; 360°] (2 si ripetono).

Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni nell'intervallo [0°; 360°]

Livello 2

35. $cos(2x) + cos(3x) + cos(4x) = 0$ [30°; 90°; 120°; 150°; 210°; 240°; 270°; 330°]
36. $sin(x) - sin(2x) + sin(3x) = 0$ [0°; 60°; 90°; 180°; 270°; 300°; 360°]
37. $cos(x) - cos(3x) + sin(2x) = 0$ [0°; 180°; 210°; 330°; 360°]
38. $cos(3x) - sin(5x) + sin(x) = 0$ [30°; 90°; 150°; 210°; 270°; 330°]
39. $cos(4x) + cos(8x) + sin(4x) \cdot cos(6x) = 0$
[15°; 45°; 75°; 105°; 135°; 165°; 195°; 225°; 255°; 285°; 315°; 345°]
40. $sin(8x) - sin(4x) - sin(4x) \cdot cos(6x) = 0$
[0°; 15°; 45°; 75°; 90°; 105°; 135°; 165°; 180°; 195°; 225°; 255°; 270°; 285°; 315°; 345°; 360°]
41. $cos(6x) - cos(4x) + sin(2x) \cdot sin(5x) = 0$ [0°; 72°; 144°; 180°; 216°; 288°; 360°]
42. $sin(4x) + sin(6x) - sin(2x) \cdot sin(5x) = 0$ [30°; 72°; 90°; 144°; 150°; 216°; 288°]
43. $sin(4x) - sin(5x) + sin(6x) > 0$
[$0° < x < 36°$; $60° < x < 72°$; $108° < x < 144°$; $180° < x < 216°$; $252° < x < 288°$; $300° < x < 324°$]
44. $sin(2x) - cos(x) + cos(3x) < 0$ [$30° < x < 90°$; $150° < x < 180°$; $270° < x < 360°$]
45. $sin(2x) - sin(3x) + sin(4x) < 0$ [$120° < x < 180°$; $240° < x < 360°$; $x \neq 300°$]
46. $sin(4x) - sin(8x) + \sqrt{3}\, sin(2x) \leq 0$ [$0° \leq x \leq 5°$; $55° \leq x \leq 65°$; $90° \leq x \leq 115°$;$115° \leq x \leq 175°$;
$235° \leq x \leq 245°$; $270° \leq x \leq 295°$; $3055° \leq x \leq 355°$]
47. $sin(3x) + sin(7x) + \sqrt{2}\, sin(5x) = 0$ [67°30′; 72°; 112°30′; 144°; 216°; 247°30′; 288°; 292°30′; 360°]
48. $cos(5x) - cos(3x) + 2sin(2x) = 0$ [0°; 22°30′; 90°; 112°30′; 180°; 202°30′; 270°; 292°30′; 360°]
49. $cos\,(11x) + cos(7x) - 2\,cos(9x) \geq 0$ [$0° \leq x \leq 10°$; $30° \leq x \leq 50°$; $70° \leq x \leq 90°$;$110° \leq x \leq 130°$;
$150° \leq x \leq 170°$; $x = 180°$; $190° \leq x \leq 210°$; $230° \leq x \leq 250°$;
$270° \leq x \leq 290°$; $310° \leq x \leq 330°$; $350° \leq x \leq 360°$]

Livello 3

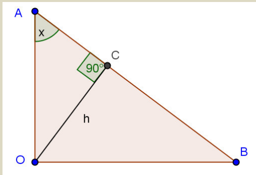
50. $sin(2x + 15°) + sin(4x - 15°) - sin(3x) = 0$ [60°; 75°; 120°; 180°; 240°; 300°; 315°; 360°]
51. $sin(3x - 20°) - sin(5x + 10°) + sin(x + 15°) = 0$
[16°15′; 76°15′; 106°15′; 165°; 166°15′; 256°15′; 286°15′; 345°; 346°15′]
52. $cos(6x + 20°) + cos(4x - 80°) - cos(5x - 30°) < 0$
[$10° < x < 24°$; $60° < x < 96°$; $132° < x < 168°$; $204° < x < 240°$; $250° < x < 276°$; $312° < x < 348°$]
53. $cos(4x + 10°) - cos(30° - 8x) + sin(6x - 10°) > 0$
[$1°40' < x < 28°20'$; $61°40' < x < 88°20'$; $115° < x < 121°40'$; $148°20' < x < 175°$; $181°40' < x < 208°20'$;
$241°40' < x < 268°20'$; $295° < x < 301°40'$; $328°20' < x < 355°$]
54. In un triangolo si ha $a = 5$, $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$. Usando il teorema di Nepero determinare b. [≈ 4,34]
55. In un triangolo si ha $a = 5$, $b = 4$, $\alpha = 60°$. Usando il teorema di Nepero determinare β. [≈ 21°4'3″]

Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi

Lavoriamo insieme

Il seguente problema è stato assegnato agli esami di stato del Liceo scientifico nell'a.s. 1970/71.
È dato il triangolo AOB rettangolo in O, del quale sia h l'altezza relativa all'ipotenusa. Detta x l'ampiezza dell'angolo $O\hat{A}B$, e posto $tan\left(\frac{x}{2}\right)=t$, si esprima per mezzo di h e di t il perimetro del triangolo.

Consideriamo la figura 

. Ricaviamo OA dal triangolo rettangolo AOC: $h=\overline{OA}\cdot sin(x)\Rightarrow \overline{OA}=\frac{h}{sin(x)}=\frac{h\cdot(1+t^2)}{2\cdot t}$ (abbiamo usato le formule parametriche). Facciamo lo stesso con OB nel triangolo rettangolo BOC: $h=\overline{OB}\cdot sin(90°-x)\Rightarrow \overline{OB}=\frac{h}{cos(x)}=\frac{h\cdot(1+t^2)}{1-t^2}$

Ricaviamo AB per esempio con il teorema di Pitagora:

$$\overline{AB}=\sqrt{\overline{OA}^2+\overline{OB}^2}=\sqrt{\frac{h^2\cdot(1+t^2)^2}{4\cdot t^2}+\frac{h^2\cdot(1+t^2)^2}{(1-t^2)^2}}=h\cdot(1+t^2)\sqrt{\frac{1}{4\cdot t^2}+\frac{1}{(1-t^2)^2}}=$$

$$=h\cdot(1+t^2)\sqrt{\frac{1+t^4-2t^2+4t^2}{4\cdot t^2\cdot(1-t^2)^2}}=h\cdot(1+t^2)\sqrt{\frac{1+t^4+2t^2}{4\cdot t^2\cdot(1-t^2)^2}}=h\cdot(1+t^2)\sqrt{\frac{(1+t^2)^2}{4\cdot t^2\cdot(1-t^2)^2}}=$$

$$=h\cdot(1+t^2)\cdot\frac{(1+t^2)}{2\cdot t\cdot(1-t^2)}=\frac{h\cdot(1+t^2)^2}{2\cdot t\cdot(1-t^2)}$$

Pertanto il perimetro cercato misura:

$$\frac{h\cdot(1+t^2)}{2\cdot t}+\frac{h\cdot(1+t^2)}{1-t^2}+\frac{h\cdot(1+t^2)^2}{2\cdot t\cdot(1-t^2)}=h\cdot(1+t^2)\cdot\frac{1-\cancel{t^2}+2t+1+\cancel{t^2}}{2\cdot t\cdot(1-t^2)}=$$

$$=h\cdot(1+t^2)\cdot\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{(1+t)}}{\cancel{2}\cdot t\cdot\cancel{(1-t^2)}^{1-t}}=h\cdot\frac{1+t^2}{t\cdot(1-t)}$$

1. (Liceo scientifico 1970/71) Dato un triangolo isoscele inscritto in una circonferenza di raggio r, esprimere la somma dell'altezza e del doppio della base mediante l'angolo al vertice.
[$y = 2rcos^2(x) + 4r\ sin(2x)$, $0 < x < \pi/2$; indicando con $2x$ la misura del detto angolo]
2. (Liceo scientifico 1971/72) Data una circonferenza di diametro $AB = 2r$, si prendano su di essa da parte opposta di AB, due punti C e D tali che $A\hat{B}C=\pi/3,\ A\hat{B}D=\alpha$, Si esprima il rapporto $y=\frac{\overline{AD}^2-\overline{CD}^2}{\overline{BC}^2}$, per mezzo di $x = tan(\alpha)$. $\left[y=\frac{3x^2-2\cdot\sqrt{3}x-3}{1+x^2}\right]$
3. (Liceo scientifico PNI 1989/90) Data la semicirconferenza di centro O e raggio r, si consideri il triangolo isoscele ABV i cui lati obliqui AV e BV siano tangenti alla semicirconferenza rispettivamente nei punti F e G e tale che la proiezione di V sulla base AB coincida con O. Detto P un punto dell'arco FG e, rispettivamente, L e M le intersezioni della tangente alla semicirconferenza in P con i lati AV e BV, si dimostri che i triangoli AOL e BMO sono simili. Indicato con x uno degli angoli alla base del triangolo ABV, si esprima in funzione di esso la somma s tra il lato del quadrato equivalente al rettangolo di

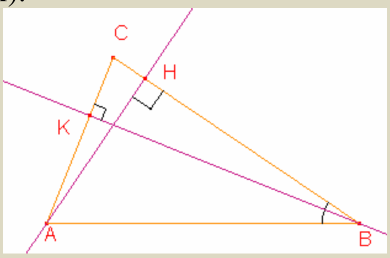
lati AL e BM e l'altezza VO del triangolo ABV, osservando che s non dipende dalla posizione del punto P. $\left[s = r \cdot \frac{sin(x)+cos(x)}{sin(x) \cdot cos(x)},\quad 0 < x < \frac{\pi}{2}\right]$

4. (Liceo scientifico 2005/06) Si considerino i triangoli la cui base è $AB = 1$ e il cui vertice C varia in modo che l'angolo $C\hat{A}B$ si mantenga doppio dell'angolo $A\hat{B}C$. Riferito il piano ad un conveniente sistema di coordinate, si determini l'equazione del luogo geometrico γ descritto da C. $[3x^2 - y^2 - 4x + 1 = 0]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere una parte di un problema assegnato nell'a.s. 2006/07 nei licei scientifici ordinari e anche in quelli con la sperimentazione PNI. Ecco il testo.

Si considerino i triangoli la cui base è $AB = 1$ e il cui vertice C varia in modo che l'angolo $C\hat{A}B$ si mantenga doppio dell'angolo $A\hat{B}C$. Si determini l'ampiezza dell'angolo $A\hat{B}C$ che rende massima la somma dei quadrati delle altezze relative ai lati AC e BC e, con l'aiuto di una calcolatrice, se ne dia un valore approssimato in gradi e primi (sessagesimali).

Rappresentiamo la figura. 

Dobbiamo determinare tutto in funzione dell'angolo indicato, la cui misura incognita chiamiamo x. Abbiamo $\overline{AH} = \overline{AB} \cdot sin(x) = sin(x); \overline{BK} = \overline{AB} \cdot sin(2x) = sin(2x)$. Quindi dobbiamo determinare il massimo della funzione $y = sin^2(x) + sin^2(2x)$. Se teniamo conto della formula di duplicazione, la funzione diviene:

$$y = sin^2(x) + [2sin(x)cos(x)]^2 \Rightarrow y = sin^2(x) + 4\, sin^2(x)\, cos^2(x) \Rightarrow y = sin^2(x)\, [1 + 4\, cos^2(x)] \Rightarrow$$
$$y = sin^2(x)\, [1 + 4 - 4\, sin^2(x)] \Rightarrow y = sin^2(x)\, [5 - 4\, sin^2(x)]$$

Così se poniamo $sin^2(x) = t$, la funzione diventa $y = t \cdot (5 - 4t) \Rightarrow y = -4t^2 + 5t$ che rappresenta l'equazione di una parabola che volge la concavità verso il basso, pertanto il suo massimo è rappresentato dall'ascissa del vertice, se ovviamente questo valore corrisponde a un valore accettabile per l'angolo x. Il vertice ha ascissa $\frac{-5}{-2 \cdot 4} = \frac{5}{8}$, pertanto il massimo si ha per $sin^2(x) = \frac{5}{8} \Rightarrow sin(x) = \sqrt{\frac{5}{8}} \Rightarrow x = sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{5}{8}}\right) \approx 52°14'20''$ che è un valore accettabile.

5. (Liceo scientifico 2011/2012) Quale delle seguenti funzioni è positiva per ogni x reale?
A) $cos[sin(x^2 + 1)]$ B) $sin[cos(x^2 + 1)]$ C) $sin[ln(x^2 + 1)]$ D) $cos[ln(x^2 + 1)]$ [A]

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi. Le soluzioni commentate si trovano alla fine del libro.

1. Determinare il minimo e il massimo di $2^{sin(x)cos(x)}$. $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{2}\right]$

Determinare il periodo delle seguenti funzioni:

2. $y=\sum_{k=1}^{n} sin(k\cdot x)$ [2π] $y=\sum_{k=1}^{n} sin\left(\frac{x}{k}\right)$. [2$n$π]

3. $y = sin(kx) + cos(hx) + tan(mx)$ [MAX(2π/k; 2π/h; π/m)]

Determinare periodo e codominio delle seguenti funzioni

4. $sin^{-1}(ax)$ $\left[\left[-\frac{1}{|a|};\frac{1}{|a|}\right]\to\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\right]$ $sin^{-1}(a\,x+b)$ $\left[\left[\frac{-b-1}{|a|};\frac{-b+1}{|a|}\right]\to\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\right]$

5. $h\,sin^{-1}(a\,x+b)$ $\left[\left[\frac{-b-1}{|a|};\frac{-b+1}{|a|}\right]\to\left[-|h|\cdot\frac{\pi}{2};|h|\cdot\frac{\pi}{2}\right]\right]$

6. $k+sin^{-1}(a\,x+b)$ $\left[\left[\frac{-b-1}{|a|};\frac{-b+1}{|a|}\right]\to\left[k-\frac{\pi}{2};k+\frac{\pi}{2}\right]\right]$

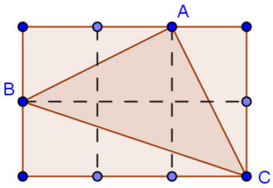
7. $k+h\,sin^{-1}(a\,x+b)$ $\left[\left[\frac{-b-1}{|a|};\frac{-b+1}{|a|}\right]\to\left[k-|h|\cdot\frac{\pi}{2};k+|h|\cdot\frac{\pi}{2}\right]\right]$

8. $cos^{-1}(ax)$ $\left[\left[-\frac{1}{|a|};\frac{1}{|a|}\right]\to[0;\pi]\right]$ $cos^{-1}(a\,x+b)$ $\left[\left[\frac{-b-1}{|a|};\frac{-b+1}{|a|}\right]\to[0;\pi]\right]$

9. $h\,cos^{-1}(a\,x+b)$ $\left[\left[\frac{-b-1}{|a|};\frac{-b+1}{|a|}\right]\to\left[0;|h|\cdot\pi\right]\right]$ $k+cos^{-1}(a\,x+b)$ $\left[\left[\frac{-b-1}{|a|};\frac{-b+1}{|a|}\right]\to[k;k+\pi]\right]$

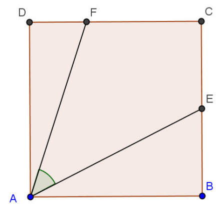
10. $k+h\,cos^{-1}(a\,x+b)$ $\left[\left[\frac{-b-1}{|a|};\frac{-b+1}{|a|}\right]\to\left[k;k+|h|\cdot\pi\right]\right]$

11. Sia $sec(x) + tan(x) = 22/7$, $csc(x) + cot(x) = m/n$, con m ed n numeri naturali primi tra di loro. Determinare $m + n$. [44]

12. Usando la figura 

determinare il valore esatto di $tan^{-1}(½) + tan^{-1}(1/3)$. [π/4]

13. Senza usare la calcolatrice calcolare $tan[tan^{-1}(½) + tan^{-1}(1/3) + tan^{-1}(¼) + tan^{-1}(1/5)]$. Sug: applicare la formula di addizione $tan(x + y + z + t) = tan[(x + y) + (z + t)]$. [14/5]

14. Sia E il punto medio del lato BC del quadrato $ABCD$, 

e sia F un punto su CD tale che DF = 1/3CD. Calcolare la misura di $E\hat{A}F$. (Suggerimento: Calcolare $tan\left(D\hat{A}F+E\hat{A}B\right)$) [45°]

15. Dato il quadrato $ABCD$ di lato 2,46 cm, determinare sulla retta AB un punto P in modo che si abbia $\left(\frac{\overline{PC}}{\overline{PD}}\right)^2=0,39$. Esprimere il risultato in termini dell'angolo $A\hat{P}D$. Un dato è inutile, quale?

[≈ 28°16′52″∨ ≈ 35°9′14″, la misura del lato]

16. Studiare il precedente problema quando il rapporto è il numero reale m. Per quali valori di m il problema ha soluzione? $\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}<m<\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$

17. Un cono è circoscritto a una sfera di raggio R, determinare l'angolo formato dall'apotema del cono con

il suo asse in modo tale che il rapporto tra la superficie totale del cono e la superficie della sfera sia pari a 10. [≈ 34°32′7″]

18. Studiare il precedente problema quando il rapporto è il numero reale *m*. Per quali valori di *m* il problema ha soluzione? [$m \ge 8$]
19. Data una sfera, tagliarla con un piano in modo che il cerchio sezione sia equivalente alla differenza fra la superficie di una delle calotte risultanti e la superficie laterale del cono avente la stessa base e la stessa altezza di quella calotta. Determinare l'angolo formato dall'apotema di detto cono col piano secante. [≈ 51°49′38″]
20. Un cono di rotazione è circoscritto ad una sfera di raggio r. Sapendo che il rapporto tra la superficie totale del cono e quella della sfera è 8,25, calcolare la misura dell'angolo che un lato qualunque del cono forma con l'asse. [≈ 15°4′57″ o ≈ 24°32′55″]
21. Con riferimento al problema precedente, detto *m* il rapporto assegnato, per quali valori di *m* vi sono soluzioni? Quando il problema ha una soluzione, quanto misura l'angolo? [$m \ge 8$; ≈ 19°28′16″]
22. Una semicirconferenza ha il diametro *AB* lungo 7,08 *cm*; nel semipiano che la contiene sia dato sulla tangente in *A* il punto *M* tale che *AM* abbia lunghezza doppia del diametro. Determinare la misura dell'angolo $A\hat{B}P$, con *P* sulla semicirconferenza in modo che si abbia: $\overline{MP} = \overline{AP} + 1{,}51 \cdot \overline{BP}$.
[≈ 16°24′12″ o ≈ 55°36′10″]
23. Un pentagono regolare *ABCDE* è inscritto in una circonferenza, si scelga un punto *P* sull'arco $\overset{\frown}{BC}$, provare che si ha: $\overline{PA} + \overline{PD} = \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PE}$.
24. Un esagono regolare *ABCDEF* è inscritto in una circonferenza, si scelga un punto *P* sull'arco $\overset{\frown}{BC}$, provare che si ha: $\overline{PE} + \overline{PF} = \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}$.
25. Il punto O è l'ortocentro del triangolo *ABC*, di cui si sa che $\angle B\hat{A}C = 60°, \overline{AO} = 2{,}15\,cm$. Determinare l'ampiezza dell'angolo $C\hat{A}O$ in modo che si abbia: $2 \cdot \overline{OB} + 3 \cdot \overline{OC} = 2{,}47 \cdot \overline{BC}$. [≈ 13°3′22″]
26. È data una circonferenza di centro *O* e raggio lungo 2,81 *cm*, della quale sia *AB* una corda il cui punto medio è *M*. Determinare la lunghezza di tale corda in modo che sia $\overline{AB} + \overline{OM} = 2{,}19 \cdot \overline{OA}$.
[≈ 4,42 *cm* ∨ ≈ 5,43*cm*]
27. Con riferimento al problema precedente, detto un punto *C* sulla circonferenza in modo che si abbia: $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 2{,}5 \cdot \overline{AB}^2$, si trovi la misura di $C\hat{A}B$.
[per *AB* ≈ 4,42 *cm* ci sono 2 soluzioni: ≈ 50°10′27″, ≈77°58′6″; per AB ≈ 5,43 non ci sono soluzioni]
28. Provare che se in un triangolo si ha: $b + c = 2a$, allora l'area del triangolo è uguale a $\frac{3}{4} \cdot a^2 \cdot tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.
Verificare il risultato per i triangoli di lati lunghi (3, 4, 5), (3, 5, 7). Possiamo applicare la formula al triangolo (1, 2, 3)? [No, perché non è un triangolo]
29. Un cono è ottenuto facendo ruotare un triangolo rettangolo di ipotenusa lunga 2 attorno a uno dei suoi cateti. Determinare l'angolo formato dall'apotema e dal raggio in modo che la misura del volume del cono appartenga all'intervallo [5π/8; 64π/81]. [≈14°28′39″ ∨ ≈ 52°15′24″]
30. Un triangolo rettangolo *ABC* ha l'ipotenusa *BC* lunga 5,81 *cm* e la somma della mediana *CM* con la metà del cateto AB è 6,57 *cm*. Determinare le misure degli angoli acuti.
[≈ 68°42′48″ e ≈ 21°17′12″; oppure ≈ 50°9′16″ e ≈ 39°50′44″]
31. Nel triangolo rettangolo *ABC*, l'ipotenusa *BC* è lunga 3,41 *cm*, il cateto *CA* è minore od uguale al cateto *BA*. Sia *M* il punto medio di *BC* e *D* il punto in cui l'asse di *BC* incontra la retta *AB*, determinare la misura degli angoli acuti, sapendo che l'area del rettangolo di lati *CA* e *DM* è uguale a 3,43 cm^2.
[≈ 41°36′54″, ≈ 48°23′6″]
32. É dato un angolo retto *XOY* e sono dati due punti *A* e *B* sui lati *OX* ed *OY* in modo che $\overline{OA} = \sqrt{3} \cdot \overline{OB}$. Sia *P* un punto interno all'angolo retto tale che $O\hat{P}A = 90°$, determinare la misura di $A\hat{O}P$ se $\overline{OP}^2 + \overline{PB}^2 = 1{,}68 \cdot \overline{OB}^2$. [≈ 51°1′23″]
33. Con riferimento al problema precedente, se si ha $\overline{OP}^2 + \overline{PB}^2 = k \cdot \overline{OB}^2$, con *k* numero reale positivo, per quali valori di *k* il problema ammette soluzioni? Quando il problema ammette una sola soluzione,

quanto misura $A\hat{O}P$? $\left[2\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)\le k\le 2\cdot\left(2+\sqrt{3}\right);\approx 28°11'12''\vee\approx 82°22'9''\right]$

34. In generale $sin(x + y) \neq sin(x) + sin(y)$, stabilire quali proprietà devono verificare x ed y affinché si abbia l'uguaglianza. Suggerimento: usare le formule di duplicazione e di prostaferesi. $[x + y = 2k\pi \vee x = 2k\pi \vee y = 2k\pi]$

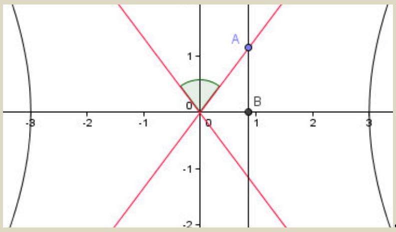
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.
HSMC = A&M University High School Mathematics Contest
ARML = American Regions Math League
SC = South Carolina Mathematical Contest
AHSME = Annual High School Mathematics Examination
RICE = Rice University Mathematics Tournament.
V = Vermont High School Prize

Lavoriamo insieme

Consideriamo un quesito assegnato agli HSMC nel 2003.

Gli asintoti dell'iperbole $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$, passano per l'origine. Determinare il coseno del loro angolo acuto di intersezione.

Ricordiamo che gli asintoti dell'iperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, hanno equazioni $y=\pm\frac{b}{a}\cdot x$; pertanto in questo caso sarà: $y=\pm\frac{4}{3}\cdot x$. Adesso consideriamo la figura 

. L'angolo di cui dobbiamo determinare il coseno è quello indicato, che è il doppio dell'angolo che un asintoto forma con l'asse delle y, che a sua volta è il complementare di $A\hat{O}B$. Quindi

$$cos(\alpha)=cos\left(2\cdot B\hat{A}O\right)=2\cdot cos^2\left(B\hat{A}O\right)-1=2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2-1=2\cdot\frac{16}{25}-1=\frac{7}{25}.$$

Abbiamo tenuto conto del fatto che il triangolo AOB è simile al triangolo (3, 4, 5), quindi il coseno è rapporto di 4 e 5.

1. (AHSME 1971) Il quadrilatero $ABCD$ è inscritto in una semicirconferenza di diametro $\overline{AD}=4$, sapendo che $\overline{AB}=\overline{BC}=1$, determinare la misura di CD. [3,5]
2. (AHSME 1976) Se $sin(2x) = a$, determinare $sin(x) + cos(x)$. $\left[\sqrt{a+1}\right]$
3. (AHSME 1979) Sapendo che $a = ½$ e $(a + 1) \cdot (b + 1) = 2$, determinare il valore espresso in radianti di $tan^{-1}(a) + tan^{-1}(b)$. [π/4]
4. (AHSME 1987) Determinare il seno dell'angolo formato congiungendo un vertice di un quadrato con i punti medi dei due lati non adiacenti. [3/5]
5. (HSMC2006) Calcolare $sin^8(75°) - cos^8(75°)$. $\left[\frac{7\cdot\sqrt{3}}{16}\right]$
6. (V 2007) Sia θ un angolo acuto per cui $tan(2\theta) + cot(2\theta) = 10$. Esprimere $sin(4\theta)$ come numero razionale. [1/5]

Lavoriamo insieme

Consideriamo un quesito assegnato agli HSMC nel 2008.
Senza usare la calcolatrice determinate il valore dell'espressione:

$$sin\left(\frac{\pi}{32}\right)\cdot cos\left(\frac{\pi}{32}\right)\cdot cos\left(\frac{\pi}{16}\right)\cdot cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\cdot cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Dovremmo riconoscere facilmente che il primo prodotto è "quasi" la formula di duplicazione. Possiamo allora scrivere::

$$\frac{1}{2}\cdot\left[2\cdot sin\left(\frac{\pi}{32}\right)\cdot cos\left(\frac{\pi}{32}\right)\right]\cdot cos\left(\frac{\pi}{16}\right)\cdot cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\cdot cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\cdot sin\left(\frac{\pi}{16}\right)\cdot cos\left(\frac{\pi}{16}\right)\cdot cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\cdot cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Ma allora possiamo ripetere il procedimento più volte, ottenendo:

$$\frac{1}{4}\cdot sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\cdot cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\cdot cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{8}\cdot sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{16}\cdot sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{16}$$

7. (ARML 2008) Sia $sin\left(2\cdot sin(x)\right)=cos\left(2\cdot cos(x)\right);0<x<\frac{\pi}{2}$ e $tan(x)+cot(x)=\frac{a}{b-\pi^c}$, a, b, c $\in\mathbb{R}$. Calcolare $a + b + c$. [50]

8. (ARML 2008) Sia x in radianti, se $f(x)=sin\left(\frac{2x}{50}\right), g(x)=cos\left(\frac{50x}{2008}\right), h(x)=tan\left(\frac{x}{27}\right)$ e i periodi di f, g e h siano p, q ed r rispettivamente. Calcolare max $\{p, q, r\}$. [100π]

Lavoriamo insieme

Consideriamo un quesito assegnato nel agli HSMC nel 2008.

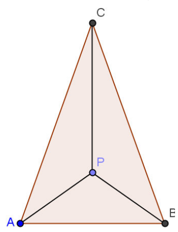
Senza usare la calcolatrice determinate il valore dell'espressione: $tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$.

Diciamo $x=tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right), y=tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\Rightarrow tan(x)=\frac{1}{2}, tan(y)=\frac{1}{3}$. Per la formula di addizione si ha:

$tan(x+y)=\frac{tan(x)+tan(y)}{1-tan(x)\cdot tan(y)}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{1}{6}}=1$. Poiché x e y sono angoli acuti avremo

$$x+y=tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

9. (SC 2008) In figura, AP è bisettrice dell'angolo di vertice A, BP bisettrice di quello di vertice B.



$\overline{AP}=\overline{BP}=\sqrt{3},\overline{CP}=3$, determinare l'area di ABC. $\left[4\cdot\sqrt{2}\right]$

10. (SC 2009) Semplificare $sin(\pi/32)\cdot cos(\pi/32)\cdot cos(\pi/16)\cdot cos(\pi/8)\cdot cos(\pi/4)$. [1/16]

11. (HSMC 2009) Data l'ellisse $x^2-4\cdot\sqrt{3}\cdot xy+13y^2-8x+6y=16$, ruotiamo gli assi coordinate di un angolo θ così che divengano paralleli agli assi dell'ellisse. Determinare il minimo valore di θ in radianti. [π/12]

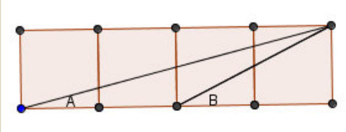
12. (V 2010) Senza calcolatrice semplificare $cos^3(15°)\cdot sin(15°)-cos(15°)\cdot sin^3(15°)$. $\left[\sqrt{3}/8\right]$

13. (HSMC 2011) Calcola $\theta=tan^{-1}\left[\frac{sin(\pi/18)+sin(2\pi/18)}{cos(\pi/18)+cos(2\pi/18)}\right]$, in gradi sessagesimali. [15°]

Questions in English

Working together

This is a question assigned at HSMC in 2005.
In figure we have 4 squares with lines connecting the indicated vertices. The angles between the slanted lines and the horizontal are denoted by *A* and *B*. what is the measure of the angle *A* + *B*?



We have: $tan(A)=\frac{1}{4}, tan(B)=\frac{1}{2}, tan(A+B)=\frac{tan(A)+tan(B)}{1-tan(A)\cdot tan(B)}=\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{6}{7}$.

So $A+B=tan^{-1}\left(\frac{6}{7}\right)\approx 40°36'5''$.

14. (HSMC2004) If $sin(x) - cos(x) = 1/5$, $\pi/4 \le x \le \pi/2$, find $cos(2x)$. [±7/5]
15. (V2006) Suppose that x and y are real numbers such that $tan(x) + tan(y) = 42$ and $cot(x) + cot(y) = 49$. What is the value of $tan(x + y)$? [294]
16. (V2007) Suppose that $sin(2x)=1/\sqrt{7}$. Express $sin^4(x)+cos^4(x)$ as a rational number in lowest terms. [13/14]
17. (V 2007) In triangle *ABC*, *AC* = 12. If one of the trisectors of angle *B* is the median to *AC* and the other trisector of angle *B* is the altitude to *AC*, find the area of triangle *ABC*. $\left[18\cdot\sqrt{3}\right]$
18. (HSMC2008) Without any electronic device calculate $\left[\frac{1}{2}-sin^2\left(\frac{\pi}{16}\right)\right]^2$. $\left[\frac{2+\sqrt{2}}{16}\right]$
19. (ARLM2008) If $f(x) = sin(x/25)$, $g(x) = con(25x/1004)$, $h(x) = tan(x/100)$, and x be in radians. Let the periods of f, g, and h be p, q, and r respectively. Compute max $\{p, q, r\}$. [r]
20. (V 2009) Find the value of $sin^2(15°)\cdot cos^2(15°)$. Express your answer as a rational number in lowest terms. [1/16]

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Accademia navale) Risolvere le seguenti equazioni: $4\cdot sin^2 x-3=0; 4\cdot sin^2(2x)-1=0; \frac{sin(2x)}{tan\,x}=0$.
2. (Accademia navale) Risolvere l'equazione $sin(5x) - sin(3x) = sin(x)$.
3. (Accademia navale) Risolvere il seguente sistema di disequazioni $\begin{cases} sin\,x+cos\,x<1 \\ sin\,x-cos\,x<0 \end{cases}$.
4. (Accademia navale) Determinare i valori di k per i quali la disuguaglianza $k\cdot cos\,x-sin\,x+1\ge 0$ è vera per ogni x.
5. (Odontoiatria 2002) La funzione $y=sin\,x\cdot cos\,x$:
   A) è periodica di periodo π B) non è periodica C) è periodica di periodo 3/2π
   D) è periodica di periodo π/2 E) è periodica di periodo 2/3π
6. (Medicina 2004) L'espressione goniometrica $sin(9x) - sin(3x)$ equivale a:
   A) $6sin(x)$ B) $sin(9x)\cdot cos(3x) - sin(3x)\cdot cos(9x)$ C) $3\,[sin(3x) - sin(x)]$
   D) ½ $[cos(6x) - cos(12x)]$ E) $2\,cos(6x)\,sin(3x)$

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_2_2.htm

Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1	**2**
$x = \pi/3 + k\pi \vee x = 2\pi/3 + k\pi$ $x = \pm\ \pi/4 + k\pi$ $x = k\pi$	$x = \pm\pi/12 + k\pi/6 \vee x = k\pi$
3	**4**
$-3\pi/4 + 2k\pi < x < 2k\pi$	$\boldsymbol{k = 0}$
5	**6**
A	E

7. La misurazione degli angoli

7.5 Il campo dei numeri complessi

Prerequisiti

- Il calcolo polinomiale.
- Il concetto di campo.
- Risoluzione delle equazioni di primo e secondo grado.

Obiettivi

- Comprendere il concetto di estensione di una struttura algebrica
- Comprendere il concetto di numero complesso
- Operare algebricamente con i numeri complessi

Contenuti

- Un approccio storico
- Operazioni aritmetiche con i numeri complessi
- Equazioni in $\mathbb{C}$
- Forma trigonometrica, radici ennesime dei numeri complessi e piano di Argand – Gauss

Parole Chiave

Modulo – Norma – Numero complesso – Numero complesso coniugato – Unità immaginaria

Simbologia

i	Indica l'unità immaginaria
$\overline{z}$	Indica il complesso coniugato del numero complesso z
$\lvert z \rvert$	Indica il modulo di un numero complesso z
$\lVert z \rVert$	Indica la norma di un numero complesso z
$\sqrt[n]{z}^{(c)}$	Indica le radici ennesime complesse di z

Richiamiamo le conoscenze

Razionalizzazione di binomi quadratici

Il procedimento di razionalizzazione di un'espressione irrazionale consiste nel *trasferimento* dell'irrazionalità, dal numeratore al denominatore di una frazione o viceversa. Nel caso che l'espressione sia binomia si sfrutta il prodotto notevole noto sotto il nome di differenza di quadrati.

Esempio A

- Si ha: $\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{2\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}=\frac{2\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{2\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{3-2}=2\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$
- Se invece abbiamo: $\sqrt{11}+\sqrt{5}$, possiamo *trasferire* l'irrazionalità al denominatore, che è sempre presente e pari a 1: $\sqrt{11}+\sqrt{5}=\frac{\left(\sqrt{11}+\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{11}-\sqrt{5}\right)}{\sqrt{11}-\sqrt{5}}=\frac{\left(\sqrt{11}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}{\sqrt{11}-\sqrt{5}}=\frac{11-5}{\sqrt{11}-\sqrt{5}}=\frac{6}{\sqrt{11}-\sqrt{5}}$

Radice ennesima algebrica

Definizione A

Dato un numero reale x, diciamo sua *radice ennesima algebrica,* l'unico numero reale y concorde con x, se esiste, per cui si ha: $y^n = x$. La radice ennesima algebrica la indichiamo con il simbolo $\sqrt[n]{x}$.

Esempio B

- $\sqrt[4]{16}=2$ perché $2^4 = 16$; nonostante si abbia anche $(-2)^4 = 16$ non possiamo scrivere $\sqrt[4]{16}=-2$, perché $\sqrt[4]{16}>0$ mentre $-2<0$.
- Abbiamo invece $\sqrt[3]{-64}=-\sqrt[3]{64}=-4$. Allo stesso modo $\sqrt{-4}$ non è un numero reale, perché il quadrato di ogni numero reale non è mai un numero reale negativo.

Risoluzione di un'equazione di secondo grado

Ogni equazione di secondo grado può scriversi nella forma $ax^2 + bx + c = 0$, a essa viene associato il numero reale $\Delta = b^2 - 4ac$, che viene chiamato suo delta o discriminante. Se il delta è positivo le soluzioni reali dell'equazione si ottengono applicando la seguente formula: $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; se il delta è nullo l'equazione ha una sola soluzione reale o, se si preferisce, due soluzioni reali e coincidenti, che si ottengono applicando la formula: $x=\frac{-b}{2a}$; se infine il delta è negativo, l'equazione non ha soluzioni reali.

Esempio C

- $7x^2 + x - 3 = 0$, ha $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-3) = 1 + 84 = 85 > 0$, quindi vi sono le seguenti due soluzioni reali e distinte: $x=\frac{-1\pm\sqrt{85}}{2\cdot 7}=\prec\begin{matrix}\frac{-1-\sqrt{85}}{14}\\ \frac{-1+\sqrt{85}}{14}\end{matrix}$.
- $9x^2 + 6x + 1 = 0$, si ha: $\Delta = 6^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 36 - 36 = 0$, quindi le soluzioni reali coincidono, e sono: $x=\frac{-6}{2\cdot 9}=-\frac{6}{18}=-\frac{1}{3}$.
- $4x^2 - 8x + 5 = 0$, si ha: $\Delta = 8^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = 64 - 80 = -16 < 0$, quindi non vi sono soluzioni reali .

Equazioni trinomie

Un'equazione che può scriversi nella forma $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, si chiama **equazione trinomia**, essa può risolversi applicando la stessa formula già vista per le equazioni di secondo grado e risolvendo poi una o più equazioni binomie.

Esempio D

Per risolvere $x^4 + x^2 - 2 = 0$, risolviamo l'equazione associata $t^2 + t - 2 = 0$, che ha soluzioni:

$$x^2 = t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \prec \begin{array}{l} \dfrac{-1-\sqrt{9}}{2} = \dfrac{-1-3}{2} = -2 \\ \dfrac{-1+\sqrt{9}}{2} = \dfrac{-1+3}{2} = 1 \end{array}$$

poi si risolvono le equazioni: $x^2 = -2$, che è priva di soluzioni reali, e $x^2 = 1$ che ha le soluzioni $x = \pm 1$.

Relazioni di ordinamento

Definizione B

Data una relazione binaria di un insieme su se stesso: $\mathcal{R}: A \rightarrow A$, diciamo che essa gode della

- **proprietà riflessiva** se $a \,\mathcal{R}\, a$, $\forall\, a \in A$; cioè ogni elemento è in relazione con se stesso.
- **proprietà antiriflessiva** se $a \not\mathcal{R}\, a$, $\forall\, a \in A$; cioè nessun elemento è in relazione con se stesso.
- **proprietà antisimmetrica** se $a \,\mathcal{R}\, b \wedge b \,\mathcal{R}\, a \Rightarrow a = b$, $\forall\, a, b \in A$; cioè se un elemento è in relazione con un secondo e anche il viceversa è vero allora i due elementi coincidono.
- **proprietà transitiva** se $a \,\mathcal{R}\, b \wedge b \,\mathcal{R}\, c \Rightarrow a \,\mathcal{R}\, c$, $\forall\, a, b, c \in A$; cioè se dal sapere che un elemento è in relazione con un secondo e questo è in relazione con un terzo, possiamo dedurre che anche il primo è in relazione con il terzo.
- **proprietà di connessione** se $a \,\mathcal{R}\, b \vee a \,\mathcal{R}\, b$, $\forall\, a, b \in A$. Cioè due elementi qualsiasi sono sempre in relazione fra loro.

Definizione C

Ogni relazione binaria su A, che verifica le proprietà riflessiva o antiriflessiva, antisimmetrica e transitiva è una **relazione di ordinamento** su A. Cioè gli elementi di A possono disporsi in una *graduatoria* in modo da stabilire chi viene prima e chi viene dopo. In particolare

- se vale la proprietà riflessiva si parla di **ordine debole**, ossia è possibile che vi siano elementi *pari merito*,
- se vale la proprietà antiriflessiva si parla di **ordine stretto**, nel senso che non vi sono *pari merito*.
- se vale anche la proprietà di connessione si parla di **ordine totale**, viceversa si parla di **ordine parziale**.

Esempio E

- $(\mathbb{R}, >)$ è un ordine totale stretto sui numeri reali e su ogni suo sottoinsieme, che perciò possono mettersi in una *scala ascendente*, dal minore al maggiore.
- L'ordine delle parole di un vocabolario è invece un ordine totale debole, dato che i sinonimi stanno allo stesso livello, nel senso che per esempio i diversi significati della parola catena (oggetto di metallo, vincolo, successione di avvenimenti, ...) sono posti in un ordine che non è però assoluto, essi possono scambiarsi fra loro senza che ciò pregiudichi la *serietà* del vocabolario. Invece non possono interscambiarsi gli ordini delle parole catena e carena.
- L'ordine delle file negli uffici in cui vi sono più sportelli è un ordine parziale stretto, dato che le persone in file hanno un ordine totale solo all'interno delle file, ma non fra file diverse.

Verifiche

Razionalizzazione di denominatori binomi quadratici

Lavoriamo insieme

Vogliamo razionalizzare il denominatore della frazione $\frac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{2}-1}$.

Per far ciò sfruttiamo il prodotto notevole noto sotto il nome di prodotto della somma delle basi per la loro differenza , ossia simbolicamente: $(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$.

In questo modo otteniamo infatti due quadrati, quindi eliminiamo le radici al denominatore della frazione, *trasferendole* al numeratore.

$$\frac{\left(\sqrt{7}+2\right)\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)}=\frac{\sqrt{14}+\sqrt{7}+2\cdot\sqrt{2}+2}{\left(\sqrt{2}\right)^2-1^2}=\frac{\sqrt{14}+\sqrt{7}+2\cdot\sqrt{2}+2}{2-1}=\sqrt{14}+\sqrt{7}+2\cdot\sqrt{2}+2$$

Razionalizzare i denominatori delle seguenti espressioni.

Livello 1

1. $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ $\left[\sqrt{3}-\sqrt{2}\right]$ $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ $\left[\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}\right]$ $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}$ $\left[\frac{\sqrt{21}-3}{4}\right]$ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ $\left[\sqrt{2}+2\right]$
2. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+2}$ $\left[2\cdot\sqrt{5}-\sqrt{15}\right]$ $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$ $\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]$ $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ $\left[3-2\cdot\sqrt{2}\right]$ $\frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+3}$ $\left[\frac{11-6\cdot\sqrt{2}}{7}\right]$
3. $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}+1}$ $\left[\frac{7-\sqrt{7}}{6}\right]$ $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ $\left[4+\sqrt{15}\right]$ $\frac{\sqrt{11}-\sqrt{2}}{\sqrt{11}+\sqrt{2}}$ $\left[\frac{13-2\cdot\sqrt{22}}{9}\right]$ $\frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{5}+1}$ $\left[\frac{\sqrt{35}-\sqrt{7}-\sqrt{5}+1}{4}\right]$
4. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{12}}{\sqrt{8}-\sqrt{2}}$ $\left[\sqrt{6}+\sqrt{3}\right]$ $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ $\left[\frac{2-\sqrt{6}-\sqrt{15}+\sqrt{10}}{3}\right]$ $\frac{\sqrt{15}+\sqrt{18}}{\sqrt{40}+\sqrt{24}}$ $\left[\frac{5\cdot\sqrt{6}-3\cdot\sqrt{10}+6\cdot\sqrt{5}-6\cdot\sqrt{3}}{8}\right]$

Risoluzione di equazioni trinomie in $\mathbb{R}$

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere le seguenti equazioni trinomie in $\mathbb{R}$.

- $3x^2 - x + 1 = 0$. Calcoliamo il discriminante dell'equazione: $\Delta=(-1)^2 - 4\cdot3\cdot1 = 1-12 = -11 < 0$.
  L'equazione non ha soluzioni reali.
- $2x^2 - 2 \cdot \sqrt{2}\, x + 1 = 0$. Calcoliamo il discriminante: $\Delta=\left(-2\cdot\sqrt{2}\right)^2-4\cdot2\cdot1=4\cdot2-8=0$.
  L'equazione ha una sola soluzione reale di molteplicità due. Per calcolarla basta applicare la formula $x = -b/a$, che in questo caso diviene $x=-\frac{-2\cdot\sqrt{2}}{2\cdot2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- $7x^2 + 3x - 5 = 0$. Si ha: $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-5) = 9 + 140 = 149 > 0$.
  L'equazione ha due soluzioni reali fra loro distinte, che si calcolano applicando la seguente formula risolutiva: $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$, che diviene: $x=\frac{-3\pm\sqrt{149}}{2\cdot7}=\frac{-3\pm\sqrt{149}}{14}$.
- $5x^6 - 3x^3 - 1 = 0$. Ponendo $x^3 = t$, otteniamo l'equazione di secondo grado $5t^2 - 3t - 1 = 0$, che risolvia-

mo: $x^3 = t = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-4\cdot 5\cdot(-1)}}{2\cdot 5} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+20}}{10} = \dfrac{3 \pm \sqrt{29}}{10}$.

Per ottenere le corrette soluzioni dobbiamo estrarre le radici cubiche delle due soluzioni trovate, entrambe accettabili perché la radice cubica di ogni numero reale è un numero reale: $x = \sqrt[3]{\dfrac{3 \pm \sqrt{29}}{10}}$.

- $7x^4 - 11x^2 + 1 = 0$. Ponendo $x^2 = t$, consideriamo l'equazione associata $7t^2 - 11t + 1 = 0$, che risolviamo: $x^2 = t = \dfrac{11 \pm \sqrt{121-4\cdot 7\cdot 1}}{2\cdot 7} = \dfrac{11 \pm \sqrt{121-28}}{14} = \dfrac{11 \pm \sqrt{93}}{14}$.

  In questo caso per ottenere le soluzioni dobbiamo controllare quali sono positive, dato che la radice quadrata di numeri reali negativi non è un numero reale. Ma $11 > \sqrt{93}$, quindi vi sono quattro soluzioni reali: $x = \pm\sqrt{\dfrac{11 \pm \sqrt{93}}{14}}$. Invece l'equazione $7x^4 + 11x^2 + 1 = 0$ non ha soluzioni reali perché i valori $x^2 = t = \dfrac{-11 \pm \sqrt{93}}{14}$ sono entrambi numeri negativi.

Risolvere in $\mathbb{R}$ le seguenti equazioni trinomie.

Livello 1

5. $3x^2 - x - 4 = 0$ $[x = 4/3 \vee x = -1]$ $3x^2 + 7x + 1 = 0$ $\left[x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{37}}{6}\right]$ $x^2 - 5x - 9 = 0$ $\left[x = \dfrac{5 \pm \sqrt{61}}{2}\right]$

6. $11x^4 - x^2 - 1 = 0$ $\left[x = \dfrac{\pm\sqrt{22\cdot\left(3\cdot\sqrt{5}+1\right)}}{22}\right]$ $x^4 + 12x^2 + 3 = 0$ $[\varnothing]$ $-x^4 - 2x^2 + 1 = 0$ $\left[x = \pm\sqrt{\sqrt{2}-1}\right]$

7. $3x^6 - x^3 - 5 = 0$ $\left[x = \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{61}+1}{6}} \vee x = -\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{61}-1}{6}}\right]$ $7x^6 + 11x^3 + 4 = 0$ $\left[x = -\dfrac{\sqrt[3]{196}}{7} \vee x = -1\right]$

8. $-3x^6 + 8x^3 - 2 = 0$ $\left[x = \pm\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{10} \pm 4}{3}}\right]$ $10x^8 - x^4 + 2 = 0$ $[\varnothing]$ $x^8 - 15x^4 + 6 = 0$ $\left[x = \pm\sqrt[4]{\dfrac{15 \pm \sqrt{201}}{2}}\right]$

9. $3x^8 + 9x^4 - 10 = 0$ $\left[x = \pm\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt{201}-9}{6}}\right]$ $x^{10} + x^5 - 3 = 0$ $\left[x = -\sqrt[5]{\dfrac{\sqrt{13}+1}{2}} \vee x = \sqrt[5]{\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}}\right]$

10. $x^{12} + 4x^6 - 7 = 0$ $\left[x = \pm\sqrt[6]{\sqrt{11}-2}\right]$ $7x^{14} + 5x^7 - 4 = 0$ $\left[x = -\sqrt[7]{\dfrac{\sqrt{137}+5}{14}} \vee x = \sqrt[7]{\dfrac{\sqrt{137}-5}{14}}\right]$

Un approccio storico

Com'è possibile che la matematica, essendo dopotutto un prodotto del pensiero umano indipendente dall'esperienza, si adatti in modo così ammirevole agli oggetti della realtà? *Albert Einstein.*

Il Problema

Gli algebristi italiani del rinascimento (Del Ferro, Tartaglia, Cardano), hanno dimostrato che ogni equazione di terzo grado si può ridurre alla forma equivalente $x^3 - px = q$, alla quale si può applicare la seguente formula risolutiva per determinare una soluzione:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}+\frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}-\frac{q}{2}}$$

In seguito Rafael Bombelli applicando la detta formula all'equazione $x^3 - 15x = 4$, che ha una evidente soluzione: $x = 4$. Bombelli trovò però la seguente scritta priva di senso:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{-15^3}{27}+\frac{4^2}{4}}+\frac{4}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{-15^3}{27}+\frac{4^2}{4}}-\frac{4}{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{-125+4}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{-125+4}-2} =$$

$$= \sqrt[3]{\sqrt{-121}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{-121}-2}$$

Quindi la soluzione c'è ma non si trova. Come è possibile?

Per risolvere il precedente problema Bombelli fornì una dimostrazione pratica di quel che significa *astrarre*. Egli infatti osservò che, a parte il segno –, dentro le radici quadrate vi erano dei quadrati perfetti ($121 = 11^2$), decise quindi di indicare il simbolo non reale $\sqrt{-121}$ nel seguente modo: + di –11, in pratica è come se avesse detto che $\sqrt{-121} = \sqrt{121} \cdot \sqrt{-1} = 11z$, dove z è il simbolo non reale $\sqrt{-1}$. A questo punto la formula risolutiva diviene: $x = \sqrt[3]{11z+2} - \sqrt[3]{11z-2}$.

Vi è ancora un problema: non sappiamo cosa rappresentano queste scritte singolarmente, sappiamo però che il valore della differenza deve essere 4. Quindi il problema equivale a trovare due numeri la cui differenza è 4, ciò significa che i due numeri si possono scrivere $4 + h$ e h, con un'opportuna scelta di h. Possiamo perciò scrivere nel modo seguente: $\begin{cases} 4+h = \sqrt[3]{11z+2} \\ h = \sqrt[3]{11z-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (4+h)^3 = 11z+2 \\ h^3 = 11z-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 64+12h^2+48h+h^3 = 11z+2 \\ h^3+2 = 11z \end{cases}$

Dalla seconda delle precedenti equazioni ricaviamo il valore di $11z$ e lo sostituiamo nella prima:

$$64 + 12h^2 + 48h + h^3 = h^3 + 2 + 2 \Rightarrow 64 + 12h^2 + 48h - 4 = 0 \Rightarrow 12h^2 + 48h + 60 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h^2 + 4h + 5 = 0 \Rightarrow h = -2 \pm \sqrt{4-5} = -2 \pm \sqrt{-1}.$$

Abbiamo ottenuto come equazione risolvente un'altra equazione priva di soluzioni reali, ma contenente il simbolo $\sqrt{-1}$ che avevamo già indicato con z. Ciò significa che possiamo scrivere:

$$\sqrt[3]{11z+2} = 4 + (-2+z) = 2 + z \wedge \sqrt[3]{11z-2} = -2 + z$$

Così facendo troviamo la soluzione *perduta*, infatti:

$$x = \sqrt[3]{11z+2} - \sqrt[3]{11z-2} = 2 + z - (-2 + z) = 4.$$

Naturalmente il nostro procedimento è *modernizzato* rispetto a quello che usò Bombelli (che vedremo nell'Antologia), ma è efficace. In pratica abbiamo applicato il cosiddetto **principio di permanenza delle proprietà formali**, ossia abbiamo operato con simboli sconosciuti e addirittura *proibiti* ($\sqrt{-121}$), come si fa con quelli noti ($\sqrt{-121} = \sqrt{121} \cdot \sqrt{-1}$).

Adesso facciamo in modo di *legalizzare* il nostro procedimento, definendo questi nuovi enti.

Definizione 1

Chiamiamo **unità immaginaria** il numero non reale $\sqrt{-1}$.

Notazione 1

L'unità immaginaria si indica con il simbolo i. Essa fu usata per la prima volta da Leonhard Euler in una memoria presentata nel 1777 all'Accademia di San Pietroburgo, anche se apparve a stampa solo nel 1794.

A questo punto quelle equazioni di secondo grado a delta negativo, che avevamo catalogato come *impossibili*, cioè prive di soluzioni reali, divengono *possibili* con l'uso di questo nuovo simbolo.

Esempio 1

L'equazione $x^2 + 1 = 0$ è priva di soluzioni reali. Possiamo però scriverla: $x^2 = -1$, che risolta come una normale equazione binomia diviene: $x = \pm\sqrt{-1}$, ossia, usando il nuovo simbolo da noi introdotto: $x = \pm\, i$.

Osserviamo che anche se abbiamo introdotto solo un nuovo simbolo, esso ci permette di costruire infiniti nuovi numeri.

L'angolo storico

Abbiamo già visto che il primo a concepire l'esistenza di numeri che non fossero *reali*, è stato Rafael Bombelli. In effetti qualche anno prima Nicolas Chuquet in un suo lavoro del 1484, *Le Triparty*, cercando di risolvere l'equazione $x^2 - 3x + 4 = 0$ mediante l'uso della formula risolutiva, notava che il discriminante era negativo e chiamava la soluzione impossibile. Successivamente Girolamo Cardano prima riconosceva l'impossibilità di risolvere il problema di trovare due numeri la cui somma fosse 10 e il cui prodotto 40, in $\mathbb{R}$, poi però introduceva il concetto astratto di radice quadrata di un numero negativo e operava su tali simboli con le stesse proprietà dei numeri reali, anche se più volte esprimeva dei dubbi sul fatto che ciò potesse essere lecito.
Invece Bombelli, con un modo di procedere poco *matematico*, pur di riconoscere la validità della formula di Del Ferro è disposto ad accettare l'uso di tali simboli astratti. Bombelli chiama tali numeri con le locuzioni *più di meno* (per radici positive di numeri negativi) e *meno di meno* (per radici negative di numeri negativi). Passano comunque parecchi secoli prima che i numeri immaginari (*battezzati* così solo nel 1637 da Cartesio ne *La geometrie*) possano essere considerati enti matematici a tutti gli effetti. Lo stesso simbolo *i* per l'unità immaginaria continua a essere alternato con $\sqrt{-1}$ per parecchio tempo.

I protagonisti

Rafael Bombelli nacque a Bologna nel 1526. Autodidatta, divenne ingegnere lavorando per diversi anni per Alessandro Rufini, che diverrà in seguito vescovo di Melfi. Cominciò a occuparsi di matematica in seguito ai grandi risultati ottenuti dagli algebristi italiani che avevano trovato le formule risolutive per le equazioni di III e IV grado. Così nel 1560 scrisse un libro, *Algebra*, pubblicato però solo nel 1572, in cui raccolse i più importanti risultati relativi appunto a tali formule. Il libro contiene molte esemplificazioni e appunto in una di queste, come abbiamo mostrato, fornisce il primo esempio cosciente di numeri complessi. Morì probabilmente a Roma nel 1573.

Esempio 2

Vogliamo risolvere l'equazione $x^2 + x + 1 = 0$, il cui discriminante è negativo: $\Delta = 1 - 4 = -3$. Applichiamo ugualmente la formula risolutiva: $x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\cdot i}{2}$. Quindi possiamo dire che la detta equazione ammette le due soluzioni, non reali, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\cdot i}{2}$.

Visti i risultati dell'esempio precedente poniamo una nuova definizione.

Definizione 2

Chiamiamo **numero complesso espresso in forma algebrica** il simbolo $a + bi$, in cui a e b sono numeri reali e i è l'unità immaginaria. Il numero a si chiama **parte reale**, il numero b **parte immaginaria**.

L'angolo storico

Il termine numero complesso (nell'originale latino *numeros integros complexos*) fu usato per la prima volta da Carl Friedrich Gauss in un lavoro del 1832.

Notazione 2

Dato un numero complesso z, la sua parte reale si indica con **Re**(z), la sua parte immaginaria con **Im**(z).

Notazione 3

L'insieme dei numeri complessi si indica con il simbolo $\mathbb{C}$.

Mediante la definizione precedente abbiamo stabilito una relazione fra gli insiemi $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{C}$, dato che a ogni numero complesso associamo appunto due numeri reali (la parte reale e la parte immaginaria). Tale relazione è chiaramente una corrispondenza biunivoca, nel senso che ogni coppia di numeri reali ha associato un solo numero complesso e viceversa ogni numero complesso ha associato un solo numero complesso. In particolare possiamo enunciare il seguente teorema.

Teorema 1

Due numeri complessi sono uguali solo se hanno la stessa parte reale e la stessa parte immaginaria. cioè $a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$.

Dimostrazione Segue dalla definizione di numero complesso.

Notiamo che le eventuali soluzioni complesse di un'equazione di secondo grado sono sempre della forma $a + bi$ e $a - bi$, sono cioè numeri che hanno la stessa parte reale e opposta parte immaginaria. Poiché ciò capiterà anche nella risoluzione di altre equazioni, come vedremo in seguito, è bene assegnare dei nomi a tali numeri.

Definizione 3

Dato un numero complesso $z = a + bi$, diciamo suo **complesso coniugato** il numero $z = a - bi$.

Notazione 4

Dato un numero complesso z, il suo coniugato si indica con la scritta **Con**(z) oppure $\overline{z}$.

Da quanto visto possiamo allora enunciare il seguente teorema di immediata dimostrazione.

Teorema 2

Ogni equazione di secondo grado a coefficienti reali e con discriminante negativo ammette sempre due soluzioni che sono complesse coniugate fra di loro.

Per sua stessa definizione è evidente che l'insieme dei numeri complessi contiene quello dei numeri reali, quindi ogni numero reale è un numero complesso, ma non viceversa.

Esempio 3

Il numero reale 5, può considerarsi anche come il numero complesso $5 + 0i$.

L'Antologia

Girolamo Cardano, *Ars Magna*, 1545

> *Se qualcuno vi dice di dividere 10 in due parti, una delle quali moltiplicata per l'altra produrrà 30 o 40, è evidente che questo caso o questione è impossibile.*

In pratica si tratta di risolvere il sistema $\begin{cases} x + y = 10 \\ xy = 30 \vee xy = 40 \end{cases}$, che equivale alla risoluzione di una delle due equazioni seguenti: $z^2 - 10z + 30 = 0 \vee z^2 - 10z + 40 = 0$. Solo che il discriminante di entrambe è negativo, $100 - 120 = -20 \vee 100 - 160 = -60$, quindi non vi sono soluzioni reali.

Tuttavia noi risolveremo in questo modo. Dividiamo 10 in due parti uguali e sia 5 questa metà. Moltiplicando per se stessi otteniamo 25. Da 25 sottraiamo lo stesso prodotto, cioè 40, che, come vi ho insegnato nel capitolo sulle operazioni nel sesto libro [dell'Ars Magna], *ci fornisce un resto di m :* 15 [Così Cardano indica –15]. *La radice quadrata di questo aggiunta e sottratta da 5 da le parti che moltiplicate insieme produrranno 40.*

Detto ciò Cardano fornisce una dimostrazione geometrica di ciò che ha enunciato e propone il seguente schema

$$\begin{array}{l} 5\,p : Rm : 15 \\ 5m : Rm : 15 \\ \hline 25m : m : 15\ \tilde{q}d\ \ est\ \ 40 \end{array}$$

In notazione moderna le scritte precedenti equivalgono a
$$\begin{array}{l} 5+\sqrt{-15} \\ 5-\sqrt{-15} \\ \hline 25-(-15)=40 \end{array}$$

che letteralmente si leggono

$$\begin{array}{l} 5\ plus\ Radix\ minus\ 15 \\ 5\ minus\ Radix\ minus\ 15 \\ \hline 25\ minus\ minus\ 15\ quid\ \ est\ \ 40 \end{array}$$

Quindi Cardano indica con le parole *Radix minus* la radice quadrata di un numero negativo e opera sui numeri non reali come sui numeri reali, anche se più volte esprime dei dubbi sul fatto che ciò possa essere lecito.

I protagonisti

Girolamo Cardano nacque a Pavia il 24 settembre 1501. Ebbe una vita tormentata sin dalla nascita, era infatti figlio illegittimo di un avvocato esperto di matematica. La madre era una vedova che aveva già tre figli quando conobbe l'avvocato Fazio Cardano e concepì Girolamo. Il padre comunque lo riconobbe e lo nominò in seguito suo assistente. Si iscrisse all'Università di Pavia ma in medicina e non in legge, come era desiderio del padre. A causa di una guerra che interessava Pavia si trasferì poi a Padova, dove riuscì a divenire rettore dell'Università, nonostante non fosse ben amato dai colleghi per il suo carattere. Ben presto esaurì il suo piccolo capitale e si diede ai giochi di azzardo, iniziando una vita dissoluta che lo condizionò per tutta la vita.
Nel 1525 si laureò in medicina, ma nonostante le sue brillanti doti sempre a causa delle sue cattive compagnie e del modo dissoluto di vita, non riuscì a ottenere l'iscrizione al Collegio dei Medici di Milano, che addusse come scusa il fatto che era figlio illegittimo. I tentativi di avviare uno studio privato furono fallimentari e nel giro di pochi anni fu ridotto in povertà. Ma ben presto ottenne il posto del padre alla Fondazione Piatti di Milano, come lettore di matematica. Questo gli consentì di riprendere la carriera medica, anche senza il riconoscimento ufficiale del collegio dei medici. Grazie ad alcune guarigioni prodigiose si costruì una solida fama di medico; ciononostante solo nel 1537 fu accettato dal Collegio. Nello stesso anno pubblicò i primi due libri matematici. Nel 1539 conobbe il famoso matematico Niccolò Tartaglia, dal quale ebbe rivelata la formula risolutiva dell'equazione di III grado, avendo giurato di non divulgarla, dato che Tartaglia non l'aveva pubblicata. Invece nel 1545 nella sua opera più famosa, *Ars Magna*, pubblicò i metodi per la risoluzione delle equazioni di III e IV grado. Vi è da dire però che ciò fu forse dovuto al fatto che sapeva che la formula dell'equazione di III grado era stata in effetti scoperta in precedenza dal bolognese Scipione del Ferro. La pubblicazione *dell'Ars Magna* lo rese famoso fra i suoi contemporanei, nello stesso tempo i suoi meriti medici furono ufficialmente riconosciuti e venne nominato rettore del Collegio dei Medici, fu inoltre richiesta la sua opera di medico dai maggiori regnanti europei. Ma il destino era ancora in agguato, così proprio quando era al vertice della gloria e della ricchezza, il suo figlio maggiore fu imprigionato e giustiziato per avere avvelenato la moglie. Ciò gli produsse una profonda depressione e aumentò il numero di coloro

che non lo vedevano di buon occhio. Quindi si trasferì a Bologna, dove insegnò medicina all'Università. Altri problemi gli diede un altro dei suoi figli, che accumulò debiti di gioco e fu esiliato da Bologna.
Nel 1570 Cardano fu imprigionato per eresia, dato che aveva scritto l'oroscopo di Gesù Cristo e un libro in onore di Nerone. Nonostante si fosse in pieno periodo inquisitorio rimase in carcere qualche mese e poi fu liberato. Fra i suoi altri importanti contributi alle matematiche ricordiamo il primo tentativo di dare una sistemazione scientifica ai giochi d'azzardo, *Liber de Ludo Aleae*, pubblicato solo nel 1663 ma probabilmente scritto nel 1563. Morì il 21 settembre 1576 a Roma.

Operazioni aritmetiche con i numeri complessi

Il cammino più breve tra due verità nel dominio reale passa attraverso il dominio complesso.
Jacques Hadamard (1865-1963)

Il problema

Possiamo definire, nell'insieme dei numeri complessi due operazioni, di somma e prodotto, in modo tale che mantengano le stesse proprietà valide nei numeri reali?

Abbiamo già notato che i numeri complessi possono considerarsi come degli speciali polinomi di primo grado nell'incognita i, quindi ci sembra naturale definire le operazioni aritmetiche su di essi come facciamo con i polinomi.

Esempio 4

Supponiamo di volere sommare i numeri complessi $7 - 2i$ e $4 + 3i$. Considerandoli come due polinomi nell'incognita i scriveremo: $7 - 2i + 4 + 3i = (7 + 4) + (-2 + 3)i = 11 + i$.

Definizione 4

Si ha: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.

Passiamo alla moltiplicazione.

Esempio 5

Moltiplichiamo fra loro i due numeri complessi $2 - 3i$ e $1 + 5i$, considerandoli come polinomi. Si ha:

$$(2 - 3i) \cdot (1 + 5i) = 2 + 10i - 3i - 15i^2 = 2 + 7i - 15i^2.$$

In effetti però i numeri complessi sono polinomi particolari, poiché in essi vale la proprietà $i^2 = -1$, pertanto possiamo ulteriormente semplificare: $(2 - 3i) \cdot (1 + 5i) = 2 + 7i - 15 \cdot (-1) = 2 + 7i + 15 = 17 + 7i$

In vista del risultato del precedente esempio, poniamo la seguente definizione.

Definizione 5

Si ha: $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

Possiamo quindi dire che l'insieme $\mathbb{C}$ con le definizioni precedenti di somma e prodotto si comporta come l'insieme dei numeri reali, quindi anch'esso è un campo.
Visto che stiamo considerando i numeri complessi come particolari polinomi in una variabile, possiamo applicare a essi anche i prodotti notevoli. Alcuni di essi sono particolarmente interessanti.

Esempio 6

Moltiplichiamo fra loro due numeri complessi coniugati: $(3 - i) \cdot (3 + i)$. Possiamo semplificare tale prodotto mediante la regola della differenza di quadrati, possiamo quindi scrivere: $9 - i^2 = 9 - (-1) = 9 + 1 = 10$, abbiamo cioè ottenuto un numero reale.

Facilmente possiamo generalizzare il risultato dell'esempio precedente.

Definizione 6

Diciamo **norma** di un numero complesso $z = a + bi$, il numero reale non negativo ottenuto moltiplicando z per il suo coniugato. In simboli $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$.

Notazione 5

La norma di un numero complesso z si indica con $\|z\|$.

Definizione 7

Diciamo **modulo** o **valore assoluto** di un numero complesso $z = a + bi$, la radice quadrata della sua norma. In simboli $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Notazione 6

Il modulo di un numero complesso z si indica con $|z|$.

Vediamo come possiamo effettuare la divisione fra due numeri complessi. In effetti basta solo definire in modo opportuno il reciproco di un numero complesso. Poiché l'elemento unità della moltiplicazione è 1, dato $z \in \mathbb{C}$ il suo reciproco è z^{-1}: $z \cdot z^{-1} = 1$. Vediamo un esempio.

Esempio 7

Vogliamo determinare il reciproco del numero complesso $4 - 3i$. Cerchiamo quindi un numero complesso $a + bi$ per cui si abbia: $(4 - 3i) \cdot (a + bi) = 1$. Cioè: $4a + 3b + (4b - 3a)i = 1$. In virtù del teorema 1, la precedente scritta è vera solo se accadono i seguenti fatti: $\begin{cases} 4a + 3b = 1 \\ 4b - 3a = 0 \end{cases}$. Risolviamo il sistema, per esempio moltiplicando contemporaneamente la prima equazione per 3 e la seconda per 4: $\begin{cases} 12a + 9b = 3 \\ 16b - 12a = 0 \end{cases}$ e poi sommando termine a termine, in modo da eliminare l'incognita a: $9b + 16b = 3 \Rightarrow 25b = 3 \Rightarrow b = 3/25$.
Per determinare il valore di a possiamo invece moltiplicare, nel sistema di partenza, la prima equazione per 4 e la seconda per 3: $\begin{cases} 16a + 12b = 4 \\ 12b - 9a = 0 \end{cases}$ e sottrarre termine a termine: $25a = 4 \Rightarrow a = 4/25$. Potevamo risolvere il sistema con un qualsiasi altro metodo. Abbiamo così trovato che il reciproco di $4 - 3i$ è $4/25 + 3/25i$.
Verifichiamo: $(4 - 3i) \cdot \left(\frac{4}{25} + i \cdot \frac{3}{25} \right) = \frac{16}{25} + \frac{12}{25}i - \frac{12}{25}i + \frac{9}{25} = \frac{25}{25} = 1$.

Possiamo applicare il procedimento dell'esempio precedente a un generico numero complesso.

Teorema 3

Il reciproco di un numero complesso non nullo $z = a + bi$ è $\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$.

Dimostrazione

Risolviamo l'equazione, nelle incognite, x e y, con $(a, b) \neq (0, 0)$: $(a + bi) \cdot (x + yi) = 1$.
Scriviamo: $(ax - by) + (ay + bx)i = 1 + 0i$. Uguagliamo fra loro le parti reali e le parti immaginarie.

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ ay + bx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$$

Risolviamo usando il metodo di Cramer: $x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -b \\ 0 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}} = \frac{a}{a^2 + b^2}$; $y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}} = \frac{-b}{a^2 + b^2}$. Il sistema ammette sempre soluzioni reali, perché $a^2 + b^2 \neq 0$, $\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Quindi abbiamo provato la tesi.

Grazie al teorema precedente possiamo svolgere la divisione fra due qualsiasi numeri complessi, il secondo dei quali non nullo.

Esempio 8

Vogliamo dividere il numero complesso $2 + 5i$ per il numero complesso $3 - 4i$. Cioè vogliamo scrivere la frazione $\frac{2+5i}{3-4i}$ come un solo numero complesso. Basta determinare il reciproco del denominatore e moltiplicarlo per il numeratore. Grazie al teorema 3 possiamo scrivere: $\frac{1}{3-4i} = \frac{3}{3^2+4^2} - i\frac{-4}{3^2+4^2} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$.

Quindi $\frac{2+5i}{3-4i} = (2+5i)\cdot\frac{1}{3-4i} = (2+5i)\cdot\left(\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i\right) = \frac{6+8i+15i-20}{25} = \frac{-14+23i}{25} = -\frac{14}{25}+\frac{23}{25}i$.

In effetti notiamo che possiamo eliminare il passo intermedio del calcolo del reciproco applicando un procedimento simile alla razionalizzazione del denominatore di una frazione di denominatore binomio:

$$\frac{2+5i}{3-4i} = (2+5i)\cdot\frac{1}{3-4i} = (2+5i)\cdot\left(\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i\right) = \frac{6+8i+15i-20}{25} = \frac{-14+23i}{25} = -\frac{14}{25}+\frac{23}{25}i.$$

Teorema 4

Il rapporto dei numeri complessi, $z = a + bi$ e $w = c + id$, $w \neq 0$, è $\frac{(ac+bd)}{c^2+d^2} + \frac{(bc-ad)}{c^2+d^2}i$.

Dimostrazione

Moltiplichiamo numeratore e denominatore della frazione per il complesso coniugato del denominatore: $\frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)}$, per ottenere il denominatore reale, quindi semplifichiamo ottenendo quanto richiesto.

Concludiamo con un richiamo sulle coniche.

Definizione 8

Una retta la cui equazione non riesce a scriversi in alcun modo come un'equazione i cui coefficienti sono tutti numeri reali, si chiama **retta complessa**.

Definizione 9

Due rette si dicono **rette complesse coniugate** se i coefficienti omonimi sono fra loro numeri complessi coniugati.

Esempio 9

- La retta di equazione $3ix + 4iy + i = 0$, non è complessa, poiché dividendo tutti i suoi termini per i otteniamo la retta reale equivalente: $3x + 4y + 1 = 0$;
- Invece la retta $3ix + 4iy + 1 + i = 0$, è complessa, poiché per qualsiasi numero reale o complesso moltiplichiamo tutti i suoi termini, non riusciamo a eliminare tutti i termini complessi;
- Le rette di equazione $3x + (1 + i)\, y + 1 = 0$ e $3x + (1 - i)\, y + 1 = 0$, sono fra loro complesse coniugate, da-

to che i numeri reali sono uguali, quindi sono coniugati fra loro;
- Le rette di equazione $3x + (1 + i)\, y + 1 = 0$ e $2x + (1 - i)\, y + 1 = 0$, non sono fra loro complesse coniugate.

A proposito delle rette complesse coniugate vale un teorema che appare quantomeno sorprendente.

Teorema 5
Due rette complesse e coniugate si incontrano in un punto reale.
Dimostrazione
Siano le rette complesse e coniugate: $(a + zi)\, x + (b + pi)\, y + c + di = 0$ e $(a - zi)\, x + (b - pi)\, y + c - di = 0$.
Risolviamo il sistema formato da esse: $\begin{cases}(a+zi)x+(b+pi)\,y+c+di=0\\(a-zi)x+(b-pi)\,y+c-di=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}ax+by+c=0\\zx+py+d=0\end{cases}$. Dato che il sistema è reale anche le sue soluzioni lo sono, quindi la tesi.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo semplificare la seguente espressione contenente numeri complessi:
$$(2+3i)\cdot(1-i)+(3-2i)^2-\frac{4-3i}{i+3}$$
Cominciamo con lo svolgere le moltiplicazioni considerandole come prodotti di polinomi.
$$2-2i+3i-3i^2+9-12i+4i^2-\frac{4-3i}{i+3}$$
Oltre a ridurre i termini simili applichiamo ora l'identità fondamentale $i^2 = -1$:
$$2+9+(-2+3-12)i+(-3+4)i^2-\frac{4-3i}{i+3}=11-11i+i^2-\frac{4-3i}{i+3}=$$
$$=11-11i-1-\frac{4-3i}{i+3}=10-11i-\frac{4-3i}{i+3}$$
Passiamo adesso alla frazione, che tratteremo con un procedimento simile alla razionalizzazione del denominatore, per rendere *reale* il denominatore:
$$10-11i-\frac{(4-3i)\cdot(i-3)}{(i+3)\cdot(i-3)}=10-11i-\frac{4i-12-3i^2+9i}{i^2-3^2}=10-11i-\frac{13i-12+3}{-1-9}=$$
$$=10-11i-\frac{13i-9}{-10}=\frac{100-110i+13i-9}{10}=\frac{91-97i}{10}=\frac{91}{10}-\frac{97}{10}i$$

Semplificare le seguenti espressioni.
Livello 1
1. $3 - 2i + i \cdot (4 - 5i)$ [$8 + 2i$] $1 - i \cdot (4 - i) + 2 \cdot (3 - 6i)$ [$6 - 16i$] $(i - 2)/3 - i/2 + 7/4 + i^2$ [$1/12 - 1/6i$]
2. $(i - 5) \cdot (2 - 7i) - 5i \cdot (3 - i)$ [$-8 + 22i$] $5/3i + (7i - 11)/8 - i/12$ [$-11/8 + 59/24i$] $(1 - i)^3$ [$-2 - 2i$]
3. $(i - 8)/3 + 4/5i - ½\,(3 - 4i)$ [$-25/6 + 47/15i$] $[(2i - 5) \cdot (2i + 5)]^2$ [841] $(1 - 2i + i^2)^2$ [-4]
4. $\sqrt{2}i-1+\left(\sqrt{2}-i\right)\cdot\left(i-\sqrt{2}\right)$ [$-2 + 3\sqrt{2}\, i$] $(1 - 9i) \cdot 3 - i \cdot (5i + 1)$ [$8 - 28i$] $(5i - 1)^2$ [$-24 - 10i$]
5. $7i - 5 - 6i \cdot (7i + 2) - i \cdot (i - 6)$ [$38 + i$] $4i - 3 + (7i - 8) \cdot (2i + 3)$ [$-41 + 9i$]
6. $(2 - 3i) \cdot (3i + 2) - 4i + 1$ [$14 - 4i$] $(2i - 7) \cdot (11 - i) + (i - 11) \cdot (7i + 2)$ [$-104 - 46i$]
7. $1 - (5 + i) \cdot (4i - 7) + 3i$ [$40 - 10i$] $\dfrac{\sqrt{2}-3i}{8}-\dfrac{i-5}{\sqrt{2}+1}$ $\left[\dfrac{41\cdot\sqrt{2}-40+\left(5-8\cdot\sqrt{2}\right)i}{8}\right]$
8. $(2 - i) \cdot (3 + i) \cdot (i - 4)$ [$-27 + 11i$] $(4 - i) \cdot (i + 4) \cdot (2i + 1)$ [$17 + 34i$] $i^{(2)^{i^4}}$ [-1]
9. $(7i - 1) \cdot (5 - 6i) \cdot (3i + 7)$ [$136 + 398i$] $(i/3 - 2)^2 - (5i/2 + ½)^2$ [$89/9 - 23/6i$]
10. $(i/2 - 1)\,(2/3i + 1)\,(i/4 + 1)$ [$-31/24 - ½i$] $(i/2 - 4)\,(5 - i/3)\,(3/4 - i)$ [$-265/24 + 545/24i$]
11. $(a + b\,i) \cdot (b - ia) \cdot (a - ib) \cdot (b + ia)$ [$(a^2 + b^2)^2$] $(¼ - 5i/4 - 2/3i - 5/3)^2$ [$-5/3 + 13/24i$]

12. $(i - 2i^3 + i^4)^2$ [$-8 + 6i$] $(4/5i - 3/5)^2$ [$-7/25i - 24/25i$] $(3/2 - i/2)^2 + (i/2 + 3/2)^2$ [4]

13. $(3 - i)^2 - (i + 3)^2$ [$-12i$] $(2 - i + 3i^2)^3$ [$2 - 2i$] $(1 - i)^3 - (1 + i)^3$ [$-4i$]

14. $¼ + i/2\ (½ - i) + (2/3 + i)\ (-3/2i + 1)$ [$35/12 + ¼i$] $(2/3i - 4)^2 - (2/3 - 4i)^2$ [280/9]

15. $(-1/3 + i)\ (i/3 - 1) + (2/3 - 2i)\ (½ - 3i) - (½ + i)^2$ [$-177/36 - 46/9i$] $(5-i)^{i^{48}}$ [$5 - i$]

16. $(3 - 2i)^2\ (2 + 3i)^2 - (1 - 3i)\ (1 + i)^3$ [$115 + 112i$] $(5/2 - 3i/2 + i/6) \cdot (5/2 + 3i/2 - i/6)$ [289/36]

17. $i^2 - i^3 + i^4 - i^5 + i^6$ [-1] $i - 2i^2 + 3i^3 + (4i)^4$ [$258 - 2i$] $(1-3i)^{i^8}$ [$1 - 3i$] $(1 - i)^{(1 - i)(1 + i)}$ [$-2i$]

18. $i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + 5i^5$ [$2 + 3i$] $i/2 - i^2/3 + i^5/4 - i^{12}/6$ [$1/6 + 3/4i$] $(4 - i)^{(1 - i)(1 + i)}$ [$15 - 8i$]

19. $(i - 2i^3)^2 + (i^8 + 4i^{15})^2$ [$-24 - 8i$] $(i - i^3 + i^{17} - i^{77})^2 + (i^2 + i^4 - i^{50} - i^{72})^2$ [-4]

20. $(4i + i^{13} + 2i^{171} + 3i^{49})^3 - (i^{42} - 2i^{54} + 3i^{150} + i^{160})^3$ [$1 - 216i$] $i^{87} - 5i^{92} + 6i^{37} - 8i^{112}$ [$-13 + 5i$]
$2001i^{2002} - 2002i^{2001}$ [$-2001 - 2002i$] $2004i^{2005} - 2005i^{2006} + 2006i^{2008} - 2007i^{2007}$ [$4011 + 4011i$]

21. $Im(Re(Im(Re(a + bi))))$ [0] $Re\left(Im\left(\overline{a-ib}\right)\right)$ [b] $Re(5 - 7i) - Im(4i - 2)$ [1]

22. $Re\left(a-ib\right)+Im\left(Re\left(a-ib\right)\right)+Im\left(\overline{a+ib}\right)$ [$a - b$] $\overline{a+ib}-\left(a+ib\right)$ [$-2bi$] $\dfrac{2-7i}{4-i}$ [$15/17 - 26/17i$]

23. $Re(Im(a + bi)) - Im(Re(a - bi))$ [b] $\left|\sqrt{3+2i}\right|$ $\left[\sqrt[4]{13}\right]$ $|3 - 7i|$ $\left[\sqrt{58}\right]$ $\left|\sqrt{2-i}\right|$ $\left[\sqrt[4]{5}\right]$

24. $\left|i-\sqrt{2}\right|$ $\left[\sqrt{3}\right]$ $\left|2\cdot\sqrt{2}-\sqrt{3}i\right|$ $\left[\sqrt{11}\right]$ $|1 + 8i|$ $\left[\sqrt{65}\right]$ $\dfrac{8i+1}{i-8}$ [$-i$] $\dfrac{11i-5}{2i+3}$ [$7/13 + 43/13i$]

25. $\dfrac{21-i}{5i}$ [$-1/5 - 21/5i$] $\dfrac{\sqrt{2}-i}{1+\sqrt{2}i}$ [$-i$] $\dfrac{\sqrt{3}i}{i-\sqrt{3}}$ $\left[\dfrac{\sqrt{3}-3i}{4}\right]$ $\dfrac{1}{i-\frac{1}{i}}$ [$-i/2$] $\dfrac{5i+6}{3i}$ [$5/3 - 2i$]

26. $\dfrac{i}{2i-1}$ [$2/5 - i/5$] $\dfrac{2i+8}{8-2i}$ [$15/17 + 8/17i$] $\dfrac{5i+13}{12-i}$ [$151/145 + 73/145i$] $\dfrac{2i-3}{5i}$ [$2/5 + 3/5i$]

Livello 2

27. $\dfrac{8i-9}{8+9i}-\dfrac{9i-8}{9+8i}$ [0] $Re\left(\dfrac{4+i}{5-i}\right)+Im\left(\dfrac{4-i}{5+i}\right)$ [5/13] $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2-\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2$ [0] $\dfrac{i\cdot(2-3i)}{3+2i}$ [i]

28. $\dfrac{\sqrt{3}+i}{i-\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{3}+i}$ $\left[\dfrac{1-7\cdot\sqrt{6}-\left(7\cdot\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)i}{12}\right]$ $Re\left(\dfrac{\sqrt{2}+3i}{3+\sqrt{2}i}\right)-Im\left(\dfrac{3-\sqrt{2}i}{\sqrt{2}-3i}\right)$ $\left[\dfrac{6\cdot\sqrt{2}-7}{11}\right]$

29. $\dfrac{6-i}{2i}+\dfrac{i}{6-i}-\dfrac{3i-2}{4i-3}$ [$-2307/1850-2588/925i$] $\overline{\left(\dfrac{7-2i}{11+13i}\right)}-\dfrac{7-2i}{11+13i}$ [$113/145i$] $\dfrac{1-i}{(1+i)^2}$ [$-½ - i/2$]

30. $\dfrac{(1+5i)\cdot(2-3i)}{7-i}$ [$56/25 + 33/25i$] $\dfrac{7-6i}{2i+3}\cdot\dfrac{i}{4i-5}$ [$-124/533 - 173/533i$] $\dfrac{i+i^2+i^3+i^4+i^5}{1+i}$ [$½ + i/2$]

31. $\dfrac{i^5-4}{3i^7+1}-\dfrac{5i+2}{3i-5}$ [$-72/85 - 16/85i$] $\left(\dfrac{2-i}{2+i}\right)^2+\left(\dfrac{2+i}{2-i}\right)^2$ [$-14/25$] $Re\left(\dfrac{2-i}{11+6i}\right)-Im\left(\dfrac{8i}{3-i}\right)$ [$-1804/785$]

Livello 3

Semplificare le seguenti operazioni fra matrici

32. $\begin{Vmatrix}1 & i\\ -1 & -i\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}i & 1\\ 0 & -i\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}i & -1\\ 1 & 0\end{Vmatrix}^2$ $\left[\begin{Vmatrix}-2+i & 2-i\\ 0 & -3\end{Vmatrix}\right]$ $\begin{Vmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\1&0&0&0&1\end{Vmatrix}^{10}$ $\left[\begin{Vmatrix}2^9&0&0&0&2^9\\0&2^9&0&2^9&0\\0&0&1&0&0\\0&2^9&0&2^9&0\\2^9&0&0&0&2^9\end{Vmatrix}\right]$

33. $(1-i)\cdot\begin{Vmatrix}1&0&i\\0&i&0\\i&0&1\end{Vmatrix}+(1+i)\cdot\begin{Vmatrix}i&1+i&0\\1-i&1&-1\\0&i&-1\end{Vmatrix}$ $\left[\begin{Vmatrix}0&2i&1+i\\2&2+2i&-1-i\\1+i&-1+i&-2i\end{Vmatrix}\right]$ $\begin{Vmatrix}i&0&0\\0&2i&0\\0&0&-i\end{Vmatrix}^{30}$ $\left[\begin{Vmatrix}-1&0&0\\0&-2^{30}&0\\0&0&-1\end{Vmatrix}\right]$

34. $\left(\begin{Vmatrix}1&-1\\0&i\\2i&-4i\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1&-2&i\\3&i&1\end{Vmatrix}\right)^2$ $\left[\begin{Vmatrix}17+4i&6+11i&9-2i\\10-9i&8-2i&1-6i\\-28+52i&-38+16i&2+30i\end{Vmatrix}\right]$ $\begin{Vmatrix}1&0&i\\0&-i&0\\0&0&-1\end{Vmatrix}^{15}$ $\left[\begin{Vmatrix}1&0&i\\0&i&0\\0&0&-1\end{Vmatrix}\right]$

35. $\begin{Vmatrix}1&-i&i&1\\i&1&-1&i\\-i&i&-1&1\\1&-1&i&-i\end{Vmatrix}^2$ $\left[\begin{Vmatrix}4&-2-2i&2i&2\\4i&2-2i&-2&2i\\0&-2&2&-2-2i\\2-2i&-2&2&0\end{Vmatrix}\right]$ $\begin{Vmatrix}i-1&0&0\\0&0&1+i\\0&i&0\end{Vmatrix}^6$ $\left[\begin{Vmatrix}8i&0&0\\0&2+2i&0\\0&0&2+2i\end{Vmatrix}\right]$

36. $(1-i)^2\cdot\begin{Vmatrix}1+i&0&1-i\\i&0&-i\\0&2i&0\end{Vmatrix}-(2-i)^2\cdot\begin{Vmatrix}2i&-1&3i\\0&i&0\\-i&1&-3i\end{Vmatrix}$ $\left[\begin{Vmatrix}-6-8i&3-4i&-14-11i\\2&-4-3i&-2\\4+3i&1+4i&12+9i\end{Vmatrix}\right]$

37. $\begin{Vmatrix}1&0&0&-1\\0&i&-i&0\\i&0&1&0\\0&-1&0&-i\end{Vmatrix}^9$ $\left[\begin{Vmatrix}20&4&-12i&-8+4i\\16+12i&8+4i&4-8i&-12\\36i&12i&20&-12-16i\\-12&-4&4i&8-4i\end{Vmatrix}\right]$ $\begin{Vmatrix}0&1&1&1\\0&0&i&i\\0&0&0&-1\\0&0&0&-i\end{Vmatrix}^6$ $\left[\begin{Vmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1-i\\0&0&0&i\\0&0&0&-1\end{Vmatrix}\right]$

38. $i\cdot\begin{Vmatrix}1&i&-1\\-i&0&1\\-1&i&1\end{Vmatrix}-2\cdot\begin{Vmatrix}2&1&0\\0&i&-1\\i&-i&1\end{Vmatrix}^2$ $\left[\begin{Vmatrix}-8+i&-5-2i&2-i\\1+2i&2-2i&2+3i\\-7i&-3&-2-i\end{Vmatrix}\right]$

Calcolare i seguenti determinanti

39. $\begin{vmatrix}i&1+i\\2i&3\end{vmatrix}$ [2 + i] $\begin{vmatrix}-3&i+2\\i-2&4\end{vmatrix}$ [–7] $\begin{vmatrix}\frac{1+i}{2}&1-2i\\-2&1\end{vmatrix}$ [5/2 – 7/2i] $\begin{vmatrix}\frac{1}{1-i}&2\\i&1\end{vmatrix}$ [½ – 3/2i] $\begin{vmatrix}\frac{1-i}{1+i}&3\\4&\frac{1+i}{1-i}\end{vmatrix}$ [–11]

40. $\begin{vmatrix}1&2\\3i&\frac{3}{i}\end{vmatrix}$ [–9i] $\begin{vmatrix}1&0&i\\0&i&0\\1&1&1\end{vmatrix}$ [1 + i] $\begin{vmatrix}i&0&1\\1&1&i\\i&0&1\end{vmatrix}$ [0] $\begin{vmatrix}1&i&-i\\i&1&-i\\i&-i&1\end{vmatrix}$ [2] $\begin{vmatrix}1+i&1&0\\0&1&0\\2&-1&1-i\end{vmatrix}$ [2]

41. $\begin{vmatrix}1-i&1+i&1\\1+2i&1&1-2i\\1-3i&1+3i&1\end{vmatrix}$ [–12] $\begin{vmatrix}i&-2&2i\\3&i&0\\0&0&2-i\end{vmatrix}$ [10 – 5i] $\begin{vmatrix}\frac{1-i}{1+i}&i&-2\\0&0&-i\\3i&\frac{i}{2}&\frac{1}{1-i}\end{vmatrix}$ [7/2i] $\begin{vmatrix}\frac{1}{i}&1&-i\\0&0&-1\\i&i^2&1\end{vmatrix}$ [0]

42. $\begin{vmatrix}\frac{i}{2}&\frac{2}{i}&i\\1&2&3\\-i&i&0\end{vmatrix}$ [–15/2] $\begin{vmatrix}3i&1+5i&5i\\2-i&i+2&0\\2i-3&2+3i&1\end{vmatrix}$ [–25 + 72i] $\begin{vmatrix}1&i&-i\\1&i^2&i^2\\1&i^3&-i^3\end{vmatrix}$ [–4i] $\begin{vmatrix}\frac{1-2i}{i}&1&0\\0&\frac{i}{1-2i}&i\\1&-1&0\end{vmatrix}$ [1 – i]

Lavoriamo insieme

Vogliamo semplificare la seguente espressione contenente numeri complessi: $|4-3i|\cdot|5-i|$

Stiamo considerando espressioni riguardanti il modulo di un numero complesso. Noi sappiamo che si ha $|a+ib|=\sqrt{a^2+b^2}$, che è un numero reale. Possiamo allora scrivere:

$$|4-3i|\cdot|5-i|=\sqrt{4^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{5^2+(-1)^2}=\sqrt{16+9}\cdot\sqrt{25+1}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{26}=5\cdot\sqrt{26}$$

Ci chiediamo se il seguente procedimento è ugualmente corretto:

$$\left|(4-3i)\cdot(5-i)\right|=|20-4i-15i-3|=|17-19i|=\sqrt{17^2+19^2}=\sqrt{289+361}=\sqrt{650}=5\cdot\sqrt{26}$$

Possiamo perciò dire che si ha: $|4-3i|\cdot|5-i|=|(4-3i)\cdot(5-i)|$.

Semplificare le seguenti espressioni

Livello 2

43. $|2-7i|\cdot|5+3i|$ $\left[\sqrt{1802}\right]$ $|5+3i|^2\cdot|4i-9|$ $\left[34\cdot\sqrt{97}\right]$ $\dfrac{4-5i}{|4-5i|}$ $\left[\dfrac{4\cdot\sqrt{41}-5i\cdot\sqrt{41}}{41}\right]$

44. $\dfrac{|5+7i|}{2i-3}-\dfrac{6-i}{|7i|}$ $\left[\dfrac{-21\cdot\sqrt{74}-78+\left(13-14\cdot\sqrt{74}\right)i}{91}\right]$ $\overline{\dfrac{Re(8-i)}{5-7i}+\left|\dfrac{i}{i-2}\right|}$ $\left[\dfrac{37\cdot\sqrt{5}+100+140i}{185}\right]$

45. $\dfrac{|12-i|}{3-4i}+\dfrac{13-5i}{|2i-7|}$ $\left[\dfrac{159\cdot\sqrt{145}+325\cdot\sqrt{53}}{1325}+i\left(\dfrac{212\cdot\sqrt{145}-125\cdot\sqrt{53}}{1325}\right)\right]$ $\dfrac{\|z\|}{\overline{z}}$ $[z]$ $|z|+|\overline{z}|, z\in\mathbb{C}$ $[2|z|]$

46. $\overline{\dfrac{Re(3+2i)}{5-9i}}+Im\left(\dfrac{|2+3i|}{2i-1}\right)$ $\left[\dfrac{75-212\cdot\sqrt{13}-135i}{530}\right]$ $Im\left(\overline{\dfrac{i}{Re(4-i)-Im(2-4i)}}\right)$ $[1/8]$

47. $Re\left(\dfrac{a+ib}{b+ia}\right)-Im\left(\dfrac{a-ib}{b-ia}\right)$ $\left[-\dfrac{a^2-2ab-b^2}{a^2+b^2}\right]$ $Re\left(\dfrac{a-ib}{b+ia}\right)+Im\left(\dfrac{a+ib}{b-ia}\right)$ $[1]$

48. $Re\left(\dfrac{a+ib}{a-ib}\right)+Im\left(\dfrac{b-ia}{b+ia}\right)$ $\left[\dfrac{a^2-2ab-b^2}{a^2+b^2}\right]$ $\overline{z+w}-\overline{z}-\overline{w}, z,w\in\mathbb{C}$ $[0]$ $(1+i)^{20}-(1-i)^{20}$ $[0]$

Livello 3

49. $i^{4n}+i^{4n+1}+i^{4n+2}+i^{4n+3}, n\in\mathbb{N}$ $[0]$ $i^{4n}-i^{4n+1}-i^{4n+2}+i^{4n+3}, n\in\mathbb{N}$ $[2-2i]$

50. $\dfrac{1}{\left(\dfrac{1-i\cdot\sqrt{3}}{2}\right)^2-\dfrac{1-i\cdot\sqrt{3}}{2}}$ $[-1]$ $\dfrac{a+ib}{a-ib}$ $\left[\dfrac{a^2-b^2+2iab}{a^2+b^2}\right]$ $\dfrac{a+ib}{a-ib}+\dfrac{a-ib}{a+ib}$ $\left[2\cdot\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right]$

51. $\left(\dfrac{a+ib}{a-ib}\right)^2-\left(\dfrac{a-ib}{a+ib}\right)^2$ $\left[\dfrac{8ab\cdot\left(a^2-b^2\right)}{\left(a^2+b^2\right)^2}i\right]$ $\left(\dfrac{a+ib}{a-ib}\right)^2+\left(\dfrac{a-ib}{a+ib}\right)^2$ $\left[\dfrac{2\cdot\left(a^4-6a^2b^2+b^4\right)}{\left(a^2+b^2\right)^2}\right]$

52. $\dfrac{ai+b}{bi-a}+\dfrac{bi+a}{ai-b}$ $[-2i]$ $\dfrac{(b+ai)^2}{ai-b}$ $\left[\dfrac{3a^2b-b^3+a\cdot\left(a^2-3b^2\right)i}{a^2+b^2}\right]$ $\dfrac{|a-ib|}{a+ib}$ $\left[\dfrac{a-ib}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$

53. Esprimere la parte reale di un numero complesso mediante z e $\overline{z}$. $\left[Re(z)=\dfrac{z+\overline{z}}{2}\right]$

54. Esprimere la parte immaginaria di un numero complesso mediante z e $\overline{z}$. $\left[Im(z)=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}\right]$

55. Provare che si ha: $|z|\cdot|w|=|z\cdot w|, \forall z,w\in\mathbb{C}$.

56. Provare la validità della seguente uguaglianza: $\|z+w\|=\|z\|+2\cdot Re(z\cdot\overline{w})+\|w\|, \forall z,w\in\mathbb{C}$.

57. Provare la validità della seguente uguaglianza: $\|z-w\|=\|z\|-2\cdot Re(z\cdot\overline{w})+\|w\|, \forall z,w\in\mathbb{C}$.

58. Provare la validità della seguente uguaglianza: $\|z+w\|+\|z-w\|=2\cdot(\|z\|+\|w\|), \forall z,w\in\mathbb{C}$.

59. Quanti e quali sono i distinti valori che assume l'espressione i^n+i^{-n}, al variare di n nell'insieme dei numeri naturali? [3: –2, 0, 2]

Lavoriamo insieme

Consideriamo l'espressione $\frac{1+xi}{x+i}, x \in \mathbb{R}$; vogliamo vedere se esistono numeri reali x per i quali la data espressione è un numero immaginario. Cominciamo con lo scrivere la frazione come un numero complesso:

$$\frac{1+xi}{x+i} = \frac{(1+xi)\cdot(x-i)}{(x+i)\cdot(x-i)} = \frac{x-i+ix^2-i^2x}{x^2-i^2} = \frac{x+\left(x^2-1\right)i+x}{x^2+1} = \frac{2x}{x^2+1} + \frac{x^2-1}{x^2+1}i.$$

Affinché il numero ottenuto sia immaginario puro, deve avere parte reale nulla, cioè $2x = 0 \Rightarrow x = 0$.
Se invece avessimo voluto sapere quando l'espressione rappresentava un numero reale, si sarebbe dovuta annullare la parte immaginaria, cioè $x^2 - 1$, fatto che si verifica per $x = \pm 1$.

Livello 3

Trovare i valori dei parametri reali *h* e *k*, se esistono, per cui le seguenti uguaglianze sono identità:

60. $h+k-1+(3k-h+2)\,i = \frac{1-i}{3-4i}$ [$h = 29/20$, $k = -17/100$] $h - k + (k - 2h + 1)i = 5 + 2i$ [$h = -6$, $k = -11$]

61. $3h - 1 + (2k - 3)i = 1 + i$ [$h = 2/3$, $k = 2$] $\frac{h-ki}{1+i} = 4-i$ [$h = 5$, $k = -3$] $\frac{ki}{2} = \frac{h}{3-i}$ [$h = k = 0$]

Trovare, se esistono numeri reali *x* per i quali le seguenti espressioni rappresentano rispettivamente numeri reali o numeri immaginari.

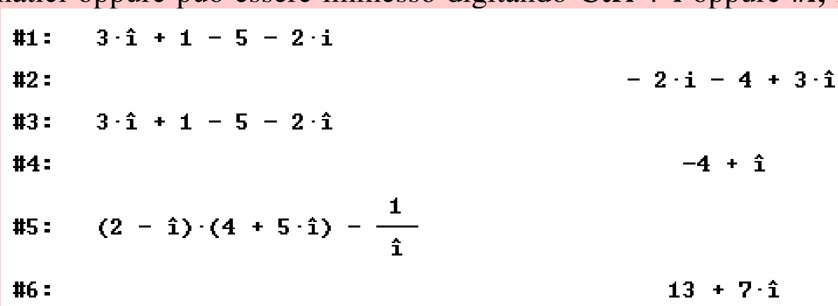
62. $\frac{x\cdot i}{1+i}$ [0; 0] $\frac{x-3+xi}{x-i}$ $\left[\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}; 0 \vee 4\right]$ $\frac{(2-xi)^2}{3x+2i}$ $\left[\varnothing; 0 \vee \pm\frac{2}{\sqrt{3}}\right]$ $\frac{3+x+xi}{3+x-i}$ [$-1 \vee -3$; $\varnothing$] $\frac{5x-i}{2+ix}$ [0; $\varnothing$]

Determinare le rette in cui si spezzano le ellissi immaginarie seguenti

63. $16x^2 + y^2 - 6y + 9 = 0$ [$4ix + y - 3 = 0$ e $-4ix + y - 3 = 0$]
64. $5x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y + 1 = 0$ [$(1 - 2i) \cdot x - y + 1 = 0$ e $(1 + 2i) \cdot x - y + 1 = 0$]
65. $9x^2 + y^2 + 6x + 1 = 0$ [$3x - iy + 1 = 0$ e $3x + iy + 1 = 0$]

L'angolo di Derive

In Derive, come nella maggior parte dei software matematici l'ambiente complesso è quello predefinito per tutti i calcoli. L'unità immaginaria ha un particolare simbolo, î, che può essere prelevato dalla barra dei simboli matematici oppure può essere immesso digitando **Ctrl + i** oppure **#i;** in ogni caso la visualizzazione è sempre î.

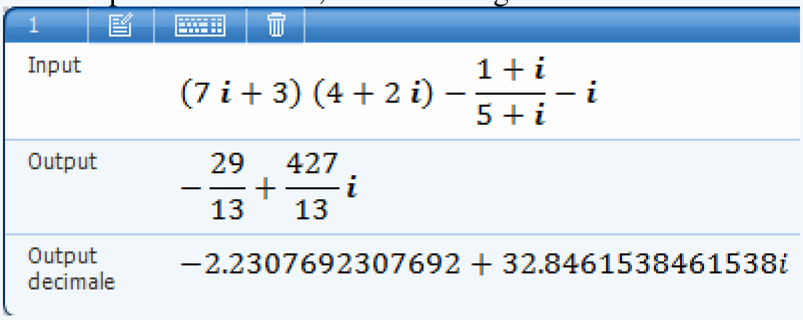


Notiamo che l'immissione dell'unità immaginaria come una i da tastiera non viene riconosciuta come tale, ma come una qualsiasi variabile, pertanto non viene sommato il termine corrispondente con quello della corretta immissione.
Attività Verificare gli esercizi assegnati.

L'angolo di Microsoft Mathematics

Per accedere ai calcoli con i numeri complessi bisogna selezionare 

, ciò attiva, sulla calcolatrice virtuale posta a sinistra, il menu seguente 

. Vediamo qualche comando. 

Osserviamo che l'unità immaginaria può immettersi anche digitando la i sulla tastiera.

Equazioni in ℂ

Il numero immaginario è un meraviglioso ricorso allo spirito di Dio, quasi un essere anfibio fra l'essere e il non essere. *Gottfried Whilhem Leibniz*

Il problema

In ℂ qualsiasi equazione algebrica ha soluzioni? E se la risposta è affermativa, quante ne ha? Che relazione c'è fra il grado dell'equazione e il numero delle sue soluzioni?

Prima di rispondere al quesito posto dal problema consideriamo altre questioni.
Dato un polinomio in una sola variabile, che indichiamo simbolicamente con $p(x)$, noi sappiamo (Teorema di Ruffini) che se al posto di x sostituiamo un numero reale q, il numero $p(q)$ che otteniamo svolgendo i calcoli, rappresenta il resto della divisione di $p(x)$ per $(x - q)$. In particolare sappiamo che se $p(q) = 0$, allora q è una delle soluzioni dell'equazione $p(x) = 0$.

Esempio 10

Consideriamo il polinomio $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$. Calcoliamo il numero $p(1) = 1^3 + 1^2 + 1 + 1 = 4$. Quindi per quanto detto in precedenza $x = 4$ non è una soluzione dell'equazione $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$. Adesso calcoliamo $p(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 = 0$, quindi stavolta possiamo dire che $x = -1$ è una soluzione dell'equazione $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

I risultati dell'esempio precedente ci pongono il problema di stabilire se il teorema di Ruffini, con le dovute astrazioni, è valido anche per numeri complessi. La risposta è positiva, dato che è la stessa definizione di soluzione di un'equazione a dirci che se sostituendo alla variabile un numero appartenente a qualsiasi insieme, il risultato è zero, allora quel numero è una soluzione dell'equazione associata. Inoltre, se estendiamo il concetto di fattorizzabilità nell'insieme dei polinomi anche ai coefficienti complessi, possiamo enunciare il seguente teorema.

Teorema 6

Se $p(x)$ è un polinomio di grado n e z è un suo zero (cioè $p(z) = 0$), $z \in \mathbb{C}$, allora $p(x)$ si può esprimere come il prodotto del binomio $x - z$ per un polinomio di grado $n - 1$.

Esempio 11

Consideriamo il polinomio $p(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6$. Calcoliamo il numero complesso

$$p(i) = i^4 + i^3 - 5 \cdot i^2 + i - 6 = 1 - i + 5 + i - 6 = 0$$

Possiamo dire che $x = i$ è una soluzione dell'equazione $x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6 = 0$.
Anzi possiamo dire che $x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6 = (x - i) \cdot q(x)$, in cui $q(x)$ è un polinomio di terzo grado da determinare con la consueta regola di Ruffini.

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 1 & -5 & 1 & -6 \\ i & & i & i-1 & -6i-1 & 6 \\ \hline & 1 & 1+i & i-6 & -6i & 0 \end{array}$$

, naturalmente abbiamo applicato le regole per le operazioni fra numeri complessi. Possiamo allora dire che si ha la seguente uguaglianza:

$$x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6 = (x - i) \cdot [x^3 + (1 + i) \cdot x^2 + (i - 6) \cdot x - 6i$$

Si vede poi che il polinomio di terzo grado è divisibile fra l'altro per $x = -i$, quindi continuiamo a ridurre di grado. Infine si vede che gli zeri del polinomio di quarto grado sono: i, $-i$, 2, -3, quindi possiamo scrivere:

$$x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6 = (x - i) \cdot (x + i) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3).$$

Un'altra cosa che possiamo notare è il fatto che la precedente equazione aveva due soluzioni complesse fra loro coniugate, del resto anche le equazioni di secondo grado a delta negativo abbiamo detto che hanno due soluzioni complesse e coniugate. Ciò ci suggerisce di vedere se questo è un fatto limitato alle equazioni di grado pari o se è vero in generale. Noi diciamo che vale il seguente risultato che non dimostriamo, come i seguenti.

Teorema 7

Se un'equazione polinomiale ha una soluzione complessa z allora ha per soluzione anche la sua complessa coniugata, $\bar{z}$.

Vale inoltre il seguente importantissimo teorema.

Teorema 8 (Fondamentale dell'algebra o di D'Alembert – Gauss)

Ogni equazione polinomiale di grado n a coefficienti reali, risolta in $\mathbb{C}$, ammette n soluzioni, ogni soluzione potendo avere molteplicità maggiore di 1.

Esempio 12

- L'equazione $(x - 2)^{82} = 0$, ha 82 soluzioni tutte coincidenti con $x = 2$.
- L'equazione $(x - i)^3 \cdot (x + 5)^2 = 0$, ha 3 soluzioni coincidenti con $x = i$ e 2 con $x = -5$. Non ha, né deve avere, come una delle sue soluzioni $x = -i$ (coniugato di i) perché non è un'equazione a coefficienti reali.

L'angolo storico

Il teorema 7 è ricordato con il nome di D'Alembert e Gauss perché il primo dei due lo enunciò nel 1747 senza riuscire a darne una dimostrazione corretta, il secondo invece ne propose la prima dimostrazione completa e rigorosa nella sua tesi di laurea del 1799. Nel seguito lo dimostrò con altre tecniche altre due volte.

Come immediata conseguenza dei precedenti teoremi si ha il seguente corollario.

Corollario 1

Ogni equazione algebrica di grado dispari a coefficienti reali, ha almeno una soluzione reale.
Dimostrazione Per il teorema 6 le soluzioni complesse sono a coppie. Per il teorema 7 esse sono in numero dispari, quindi almeno una di esse deve essere reale.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere l'equazione di secondo grado $4x^2 - 3x + 5 = 0$ nel campo $\mathbb{C}$.

Applichiamo la formula risolutiva, anche se il discriminante è negativo, dato che stiamo operando sui numeri complessi: $x = \frac{3 \pm \sqrt{9-80}}{8} = \frac{3 \pm \sqrt{-71}}{8}$. Se fossimo in $\mathbb{R}$ scriveremmo che l'equazione è priva di soluzioni, ma poiché siamo in $\mathbb{C}$ sfruttiamo il fatto che $\sqrt{-1} = i$: $x = \frac{3 \pm i \cdot \sqrt{71}}{8}$. Le soluzioni sono complesse coniugate.

Risolvere le seguenti equazioni in $\mathbb{C}$

Livello 1

1. $x^2 + x + 1 = 0$ $\left[x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}\right]$ $3x^2 + 5x + 11 = 0$ $\left[x = \frac{-5 \pm \sqrt{107}i}{6}\right]$ $x^2 - 9x + 15 = 0$ $\left[x = \frac{9 \pm \sqrt{21}}{2}\right]$
2. $x^2 - 3x + 1 = 0$ $\left[x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right]$ $x^2 - x + 1 = 0$ $\left[x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}\right]$ $x^2 - 3x + 4 = 0$ $\left[x = \frac{3 \pm \sqrt{7}i}{2}\right]$
3. $5x^2 + \sqrt{2}x + 1 = 0$ $\left[x = \frac{-\sqrt{2} \pm 3 \cdot \sqrt{2}i}{10}\right]$ $x^4 + 1 = 0$ $\left[x = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i}{2} \vee x = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i}{2}\right]$
4. $x^3 + x - 2 = 0$ $\left[x = \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2} \vee x = 1\right]$ $x^3 + 2 = 0$ $\left[x = \frac{\sqrt[3]{2} \pm \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2}i}{2} \vee x = -\sqrt[3]{2}\right]$
5. $x^2 + x + 4 = 0$ $\left[x = \frac{-1 \pm \sqrt{15}i}{2}\right]$ $\sqrt{2}x^2 - x + 1 = 0$ $\left[x = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2 \cdot \left(4 \cdot \sqrt{2} - 1\right)}i}{4}\right]$

Lavoriamo insieme

Data un'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$, sappiamo che la somma delle sue soluzioni, reali o complesse, è pari a $-b/a$, il prodotto delle stesse soluzioni è invece c/a.
Ciò si può provare in diversi modi.
Siano z_1 e z_2 le soluzioni dell'equazione; sappiamo anche che possiamo scrivere

$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - z_1) \cdot (x - z_2).$$

Sviluppiamo le moltiplicazioni:

$$ax^2 + bx + c = a \cdot [x^2 - (z_1 + z_2) \cdot x + z_1 \cdot z_2] = a \cdot x^2 - a \cdot (z_1 + z_2) \cdot x + a \cdot z_1 \cdot z_2.$$

Applicando il principio di identità dei polinomi, secondo il quale due polinomi sono identici se hanno lo stesso grado e ordinatamente gli stessi coefficienti possiamo dire che si ha:

$$b = -a \cdot (z_1 + z_2) \wedge c = a \cdot z_1 \cdot z_2 \Rightarrow z_1 + z_2 = -b/a \wedge z_1 \cdot z_2 = c/a$$

Possiamo generalizzare questo risultato a una qualsiasi equazione di grado n e, per semplicità, consideriamo quella di terzo grado: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.
Supponiamo che z_1, z_2 e z_3 sono le sue soluzioni, reali o complesse, distinte o no.
Avremo allora

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a \cdot (x - z_1) \cdot (x - z_2) \cdot (x - z_3) = a \cdot [x^2 - (z_1 + z_2) \cdot x + z_1 \cdot z_2] \cdot (x - z_3) =$$
$$= a \cdot [x^3 - (z_1 + z_2 + z_3) \cdot x^2 + (z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3 + z_1 \cdot z_2) \cdot x - z_1 \cdot z_2 \cdot z_3] .$$

Quindi stavolta abbiamo le seguenti relazioni:

$$b = -a \cdot (z_1 + z_2 + z_3) \wedge c = a \cdot (z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3 + z_1 \cdot z_2) \wedge d = a \cdot z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$$
$$z_1 + z_2 + z_3 = -b/a \wedge z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3 + z_1 \cdot z_2 = c/a \wedge z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = -d/a.$$

Quindi la somma delle soluzioni è sempre pari al rapporto $-b/a$, il prodotto è invece $-d/a$, infine il rapporto *c*/*a* è pari alla somma di tutti i prodotti delle soluzioni a due a due.

Livello 2

Determinare la somma s e il prodotto p di tutte le soluzioni reali e complesse delle equazioni seguenti:

6. $x^3 + x^2 - x + 1 = 0$ [s = p = –1] $2x^3 + 3x^2 + 4x + 5 = 0$ [s = –3/2, p = –5/2]
7. $x^3 + 1 = 0$ [s = 0, p = – 1] $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ [s = –*b*/*a*, p = *e*/*a*]
8. Determinare il prodotto di tutte le soluzioni reali e complesse dell'equazione $x^6 + 64 = 0$. [64]

Livello 3

9. Determinare il valore del parametro *k* in modo tale che l'equazione $x^4 + kx^3 - x^2 + x - 1 = 0$, abbia soluzioni la cui somma sia 0. [0]
10. Determinare il valore del parametro *k* in modo tale che l'equazione $x^4 + kx^3 - kx^2 + kx - 1 = 0$, abbia soluzioni il cui prodotto sia 1. [Impossibile]

Lavoriamo insieme

Data l'equazione $x^4 - x^3 - 6x^2 + 14x - 12 = 0$, vogliamo determinare tutte le sue soluzioni.
Noi sappiamo che le eventuali soluzioni intere sono divisori del termine noto, quindi in questo caso dobbiamo cercarle fra i divisori di 12, cioè fra gli elementi dell'insieme: {–12, –6, –4, –3, –1, 1, 2, 3, 4, 6, 12}.
Grazie al teorema di Ruffini dobbiamo sostituire al posto dell'incognita i detti numeri e verificare se così facendo otteniamo zero. Cominciamo a provare con i numeri più piccoli in valore assoluto :

$$x = 1 \Rightarrow 1^4 - 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 14 \cdot 1 - 12 = 1 - 1 - 6 + 14 - 12 = -4;$$
$$x = -1 \Rightarrow (-1)^4 - (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 + 14 \cdot (-1) - 12 = 1 + 1 - 6 - 14 - 12 = -30;$$
$$x = 2 \Rightarrow 2^4 - 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 14 \cdot 2 - 12 = 16 - 8 - 24 + 28 - 12 = 0.$$

Avendo trovato una soluzione, potremmo abbassare di grado con la regola di Ruffini, ma in tal modo otteniamo un'equazione di terzo grado, la quale avrà le stesse soluzioni della precedente equazione, a parte eventualmente $x = 2$, quindi continuiamo a sostituire per determinare le altre eventuali soluzioni intere.

$$x = -2 \Rightarrow (-2)^4 - (-2)^3 - 6 \cdot (-2)^2 + 14 \cdot (-2) - 12 = 16 + 8 - 24 - 28 - 12 = -40;$$
$$x = 3 \Rightarrow 3^4 - 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 14 \cdot 3 - 12 = 81 - 27 - 54 + 42 - 12 = 30;$$
$$x = -3 \Rightarrow (-3)^4 - (-3)^3 - 6 \cdot (-3)^2 + 14 \cdot (-3) - 12 = 81 + 27 - 54 - 42 - 12 = 0.$$

Quindi, anche $x = -3$ è soluzione. Adesso abbassiamo due volte di grado.

$$\begin{array}{r|rrrr|r}
 & 1 & -1 & -6 & 14 & -12 \\
2 & & 2 & 2 & -8 & 12 \\
\hline
 & 1 & 1 & -4 & 6 & 0 \\
-3 & & -3 & 6 & -6 & \\
\hline
 & 1 & -2 & 2 & 0 &
\end{array}$$

Quindi possiamo scrivere: $x^4 - x^3 - 6x^2 + 14x - 12 = (x - 2) \cdot (x + 3) \cdot (x^2 - 2x + 2) = 0$.
Adesso applichiamo la formula risolutiva all'ultimo trinomio:

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i.$$

Possiamo quindi concludere che le soluzioni dell'equazione $x^4 - x^3 - 6x^2 + 14x - 12 = 0$, sono:

$$x = 2, \quad x = -3, \quad x = 1 - i, \quad x = 1 + i.$$

Risolvere le seguenti equazioni e sistemi in $\mathbb{C}$ (se le soluzioni hanno molteplicità *k* nelle risposte scriveremo *k* fra parentesi) se non vi sono soluzioni intere, provare con quelle razionali.

Livello 2

11. $x^4 + x^3 + 7x^2 + 9x - 18 = 0$ [1; –2; ±3*i*] $x^4 - 3x^3 + 10x^2 - 6x - 20 = 0$ [2; –1; 1 ± 3*i*]
12. $x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 14x + 5 = 0$ [1 (2); 2 ± *i*] $x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 0$ [1 (3); ±*i*]
13. $x^3 + 5x^2 + 8 \cdot x + 6 = 0$ [–3; –1 ± *i*] $x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$ [–1; ±*i* (2)]
14. $x^6 - 4x^5 + 3x^4 + 8x^3 - 9x^2 - 4x + 5 = 0$ [–1 (2); 1 (2); 2 ± *i*]

Livello 3

15. $x^4 + 2 \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) \cdot x^3 - 4 \cdot \sqrt{2} \cdot x^2 - 6 \cdot \left(\sqrt{2} + 1\right) \cdot x - 9 = 0$ $\left[3; -1; -\sqrt{2} \pm i\right]$

16. $6x^4 + x^3 + 23x^2 + 4x - 4 = 0$ $[-½;\ 1/3;\ \pm 2i]$ $8x^4 + 50x^3 + 91x^2 + 14x - 10 = 0$ $[-¼;\ -½;\ -3 \pm i]$

17. $x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 7\cdot x + 12 = 0$ $\left[4;1;-1\pm\sqrt{2}i\right]$ $\begin{cases}(1-2i)x+(1+2i)y=1\\ ix-3y=-1\end{cases}$ $\left[x=\dfrac{6+4i}{13},\ y=\dfrac{3+2i}{13}\right]$

18. $\begin{cases}ix+2y=-i\\ 3x+y=1\end{cases}$ $\left[x=\dfrac{11+8i}{37},\ y=\dfrac{4-24i}{37}\right]$ $\begin{cases}3ix+2y=i-1\\ (1+i)x-y=-2i\end{cases}$ $\left[x=-\dfrac{17+i}{29},\ y=\dfrac{-16+40i}{29}\right]$

Lavoriamo insieme

Un numero reale che risulta soluzione di un'equazione di qualsiasi grado con coefficienti numeri razionali si chiama numero **algebrico,** diversamente si chiama numero **trascendente.** Anche se in genere verificare se un certo numero è o no algebrico è difficile, non lo è in casi particolari .

Vogliamo per esempio provare che $\sqrt{2}+1$ è un numero algebrico, quindi dobbiamo cercare un'equazione di cui è soluzione. Procediamo nel modo seguente: poniamo $\sqrt{2}+1=x$ e facciamo in modo da eliminare la radice quadrata $\sqrt{2}=x-1 \Rightarrow 2=(x-1)^2 \Rightarrow 2=x^2-2x+1 \Rightarrow x^2-2x-1=0$. L'equazione ottenuta è quella cercata, a coefficienti interi.

Dimostrare che i seguenti sono numeri algebrici, determinando le equazioni di cui sono soluzioni

Livello 3

19. $\sqrt{3}-1$ $[x^2 + 2x - 2 = 0]$ $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ $[x^4 - 10x^2 + 1 = 0]$ $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ $[x^4 - 14x^2 + 9 = 0]$

20. $\sqrt[3]{2}-1$ $[x^3 + 3x^2 + 3x - 1 = 0]$ $\sqrt[4]{2}+1$ $[x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x - 1= 0]$

21. $1+\sqrt[5]{3}$ $[x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 4 = 0]$ $\sqrt{2}+\sqrt{3}+1$ $[x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 16x - 8 = 0]$

22. $\sqrt{3+\sqrt{2}}$ $[x^4 - 6x^2 + 7 = 0]$ $1+\sqrt{3-\sqrt{2}}$ $[x^4 - 4x^3 + 8x + 2 = 0]$

23. $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ $[x^8 - 4x^6 + 2x^4 + 4x^2 - 2 = 0]$ $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ $[x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16x^2 + 2 = 0]$

24. $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$ $[x^{16} - 16x^{14} + 104x^{12} - 352x^{10} + 660x^8 - 672x^6 + 336x^4 - 64x^2 + 2 = 0]$

25. $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, $a, b \in \mathbb{R}^+$ $[x^4 - 2x^2 \cdot (a + b) + a^2 - 2ab + b^2 = 0]$

L'angolo di Derive

In Derive la risoluzione delle equazioni avviene nel campo complesso, come valore predefinito.
Il comando da utilizzare è: **SOLVE**(**equazione, variabile, modalità**).
Proprio l'opzione facoltativa **modalità** stabilisce se la risoluzione avviene nei reali, nel qual caso si scrive **REAL**, o nei complessi, nel qual caso non si scrive nulla.

#1: $\text{SOLVE}((1 - î)\cdot x^2 - î\cdot x + 1,\ x)$

#2: $x = -\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{41}}{16}-\dfrac{1}{4}\right)} - \dfrac{1}{4} + î\cdot\left(\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{41}}{16}+\dfrac{1}{4}\right)}+\dfrac{1}{4}\right) \vee x = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{41}}{16}-\dfrac{1}{4}\right)} - \dfrac{1}{4} + î\cdot\left(\dfrac{1}{4} - \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{41}}{16}+\dfrac{1}{4}\right)}\right)$

#3: $\text{SOLVE}(x^2 + 1,\ x)$

#4: $x = -î \vee x = î$

#5: $\text{SOLVE}(x^2 + 1,\ x,\ \text{Real})$

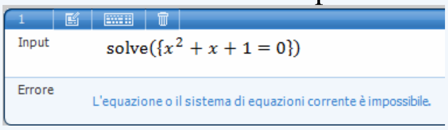
#6: false

Notiamo che le equazioni immesse in #1 e #3 sono risolte in $\mathbb{C}$, mentre la #5 è risolta in $\mathbb{R}$, dato che è specificata l'opzione **Real**.

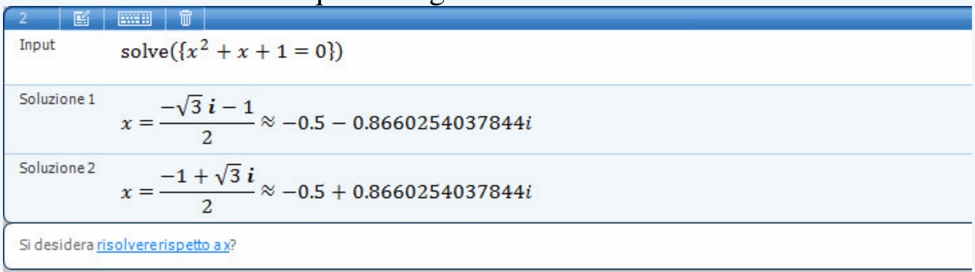
Attività

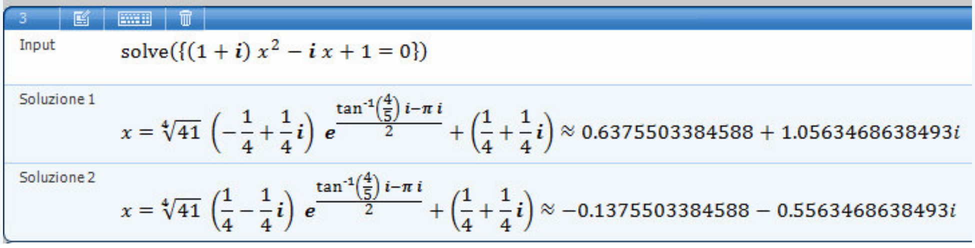
Verificare i risultati delle equazioni proposte negli esercizi.

L’angolo di Microsoft Mathematics

Per risolvere equazioni con soluzioni o coefficienti complessi dobbiamo selezionare l’opzione vista nel precedente box, diversamente otteniamo risposte come la seguente 

Invece con l’opzione corretta otteniamo quanto segue





Forma trigonometrica, radici ennesime dei numeri complessi e piano di Argand–Gauss

Vogliamo rappresentare graficamente i numeri complessi. Abbiamo già osservato che i numeri complessi si possono considerare come coppie di numeri reali, la parte reale e quella immaginaria. Quindi è abbastanza immediato pensare che al numero complesso $a + bi$ si possa associare il punto di coordinate $(a; b)$.

Definizione 10

Diciamo **piano di Argand-Gauss** il sistema di riferimento cartesiano ortogonale nel quale sulle ascisse rappresentiamo le parti reali dei numeri complessi e sulle ordinate i coefficienti dell’immaginario.

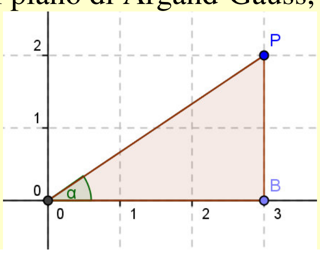
Esempio 13

Nel piano di Argand-Gauss il punto (3; 2), rappresenta il numero complesso $3 + 2i$.

Questo ci permette di fornire una ulteriore interpretazione dei numeri complessi, stavolta usando la trigonometria.

Esempio 14

In figura abbiamo la rappresentazione, nel piano di Argand-Gauss, del numero complesso $3 + 2i$.



Possiamo però dire anche che si ha: $3=\overline{OP}\cdot cos(\alpha); 2=\overline{OP}\cdot sin(\alpha)$, quindi possiamo anche dire che si ha: $3+2i=\overline{OP}\cdot\left[cos(\alpha)+sin(\alpha)\cdot i\right]$, o meglio, dato che $\overline{OP}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$, scriviamo: $3+2i=\sqrt{13}\cdot\left[cos(\alpha)+sin(\alpha)\cdot i\right]$. Possiamo anche esprimere l'angolo mediante le coordinate: $\alpha=tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$. Quindi alla fine avremo: $3+2i=\sqrt{13}\cdot\left\{cos\left[tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]+sin\left[tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\cdot i\right\}$.

Generalizzando quanto visto nell'esempio possiamo dire

Definizione 11

Dato il numero complesso $a + bi$, diciamo sua **forma trigonometrica** l'espressione

$$\sqrt{a^2+b^2}\cdot\left[cos(\vartheta)+sin(\vartheta)\cdot i\right], \vartheta=tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

Esempio 15

La forma trigonometrica del numero complesso $1 + i$, dato che si ha: $\vartheta=tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{\pi}{4}$, è:

$$\sqrt{1^2+1^2}\cdot\left[cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot i\right].$$

E in effetti si ha: $\sqrt{2}\cdot\left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot i\right)=\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot i\right)=\frac{2}{2}+\frac{2}{2}i=1+i$.

Cosa succede moltiplicando due numeri complessi in forma trigonometrica?

Esempio 16

Vogliamo moltiplicare i numeri complesso $1 + i$ e $1-\sqrt{3}i$.

Abbiamo già visto che $1+i=\sqrt{2}\cdot\left[cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot i\right]$. Poniamo in forma trigonometrica anche l'altro numero: $\vartheta=tan^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{1}\right)=-\frac{\pi}{3}$, quindi:

$$1-\sqrt{3}i=\sqrt{1+3}\cdot\left[cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cdot i\right]=2\cdot\left[cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cdot i\right]$$

Effettuiamo la moltiplicazione:

$$(1+i)\cdot\left(1-\sqrt{3}i\right)=\left[\sqrt{2}\cdot\left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot i\right)\right]\left[2\cdot\left(cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cdot i\right)\right]=$$

$$=2\cdot\sqrt{2}\cdot\left[cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cdot i+sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cdot i+sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cdot i^2\right]=$$

$$=2\cdot\sqrt{2}\cdot\left\{\left[cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)-sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]+\left[cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)+sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]\cdot i\right\}$$

Osserviamo che il numero complesso può semplificarsi usando le formule di addizione e sottrazione:

$$2\cdot\sqrt{2}\cdot\left[cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)+sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)\cdot i\right]=2\cdot\sqrt{2}\cdot\left[cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\cdot i\right]=2\cdot\sqrt{2}\cdot\left[cos\left(\frac{\pi}{12}\right)-sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\cdot i\right]$$

Il procedimento precedente ci permette di enunciare il seguente risultato, generalizzato anche alle divisioni.

Teorema 9

Si ha: $\{\rho_1 \cdot [\cos(\vartheta_1)+\sin(\vartheta_1)\cdot i]\}\cdot\{\rho_2 \cdot [\cos(\vartheta_2)+\sin(\vartheta_2)\cdot i]\} = \rho_1\cdot\rho_2\cdot[\cos(\vartheta_1+\vartheta_2)+\sin(\vartheta_1+\vartheta_2)\cdot i]$

$$\frac{\rho_1 \cdot [\cos(\vartheta_1)+\sin(\vartheta_1)\cdot i]}{\rho_2 \cdot [\cos(\vartheta_2)+\sin(\vartheta_2)\cdot i]} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot[\cos(\vartheta_1-\vartheta_2)+\sin(\vartheta_1-\vartheta_2)\cdot i]$$

Dimostrazione Per esercizio, sulla falsariga dell'esempio 16.

Si ha la seguente interessante conseguenza.

Corollario 2

Vale la seguente formula di De Moivre: $(a+bi)^n = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^n \cdot [\cos(n\cdot\vartheta)+\sin(n\cdot\vartheta)\cdot i]; \vartheta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

Esempio 17

Abbiamo $(1 + i)^5 = \left(\sqrt{2}\right)^5 \cdot \left[\cos\left(5\cdot\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(5\cdot\frac{\pi}{4}\right)\cdot i\right] = 4\cdot\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -4-4i$.

Possiamo generalizzare ancora le precedenti formule per calcolare le radici dei numeri complessi.

Esempio 18

Vogliamo calcolare $\sqrt{-9-40i}$. La definizione di radice quadrata non varia, stiamo perciò cercando un numero, naturalmente complesso, $a + bi$ il cui quadrato è uguale al radicando. Cioè vogliamo risolvere l'equazione $(a + b\ i)^2 = -9 - 40i$. Sviluppiamo il quadrato: $a^2 - b^2 + 2abi = -9 - 40i$, applichiamo il teorema 1: $\begin{cases} a^2-b^2=-9 \\ 2ab=-40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2-b^2=-9 \\ ab=-20 \end{cases}$. Abbiamo ottenuto un sistema di quarto grado, non simmetrico, nelle variabili reali a e b. Risolviamolo: $\begin{cases} \left(-\frac{20}{b}\right)^2-b^2=-9 \\ a=-\frac{20}{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{400}{b^2}-b^2=-9 \\ a=-\frac{20}{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{400-b^4+9b^2}{4b^2}=0 \\ a=-\frac{20}{b} \end{cases}$

Risolviamo l'equazione biquadratica nella variabile b: $b^4 - 9b^2 - 400 = 0 \Rightarrow$

$$b^2 = \frac{9\pm\sqrt{81+1600}}{2} = \frac{9\pm\sqrt{1681}}{2} = \frac{9\pm 41}{2} = \prec \begin{matrix} \frac{9+41}{2}=25 \\ \frac{9-41}{2}=-16 \end{matrix} \Rightarrow b = \prec \begin{matrix} \pm\sqrt{25}=\pm 5 \\ \pm\sqrt{-16}=\pm 4i \end{matrix}$$

Adesso sostituiamo i due valori trovati nel sistema per ottenere i valori di a.

$$\begin{cases} b=\pm 5 \\ a=-\frac{20}{\pm 5} \end{cases} \wedge \begin{cases} b=\pm 4i \\ a=-\frac{20}{\pm 4i} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=\pm 5 \\ a=\mp 4 \end{cases} \wedge \begin{cases} b=\pm 4i \\ a=\mp\frac{5}{i}=\pm 5i \end{cases}$$

Quindi possiamo dire che vi sono quattro radici quadrate del numero complesso $-9 - 40i$, dato che abbiamo ottenuto quattro soluzioni. Ma è proprio vero? Scriviamo queste soluzioni:

a	b	$a + b\ i$
4	–5	$4 - 5i$
–4	5	$-4 + 5i$
$5i$	$4i$	$5i + i \cdot 4i = 5i - 4$
$-5i$	$-4i$	$-5i + i \cdot (-4i) = -5i + 4$

Quindi le radici quadrate sono solo due: $\pm 4 \mp 5i$.

L'esempio precedente ci fa notare che vi è una differenza fra la radice quadrata algebrica, quella calcolata in $\mathbb{R}$ e questa radice calcolata in $\mathbb{C}$. Infatti nel primo caso la radice quadrata, se esiste, è unica; in questo caso ve ne sono due, entrambe accettabili. Mentre infatti sia 3^2 sia $(-3)^2 = 9$, ma $\sqrt{9} = 3$, perché $\sqrt{9} > 0$ e $-3 < 0$; per i numeri complessi non abbiamo definito il concetto di numero positivo o negativo, quindi possiamo scrivere tanto $\sqrt{-9-40i} = 4-5i$, quanto $\sqrt{-9-40i} = -4+5i$.

Definizione 12

Diciamo **radici ennesime di un numero complesso** *z* tutti i numeri complessi la cui ennesima potenza è pari a *z*.

Notazione 7

Le radici ennesime di numero complesso *z* si indicano con $\sqrt[n]{z}^{(c)}$.

Esempio 19

Possiamo allora dire che $\sqrt{1} = 1$, mentre $\sqrt{1}^{(c)} = \pm 1$.

Adesso possiamo generalizzare la formula di De Moivre per esponenti razionali.

Teorema 10

Esistono esattamente n radici ennesime, fra loro distinte, di un numero complesso che si ottengono usando l'identità di De Moivre: $\sqrt[n]{a+bi} = \sqrt[n]{a^2+b^2} \cdot \left[cos\left(\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}\right) + sin\left(\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}\right) \cdot i \right]; \vartheta = tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right), k = 0, \ldots, n-1$.

Esempio 20

Vogliamo calcolare le radici quarte dell'unità: $\sqrt[4]{1}^{(c)}$. Si ha: 1 = *cos*(0) + *sin*(0) · *i*; adesso applichiamo il risultato del teorema 9. $\sqrt[4]{1}^{(c)} = \sqrt[4]{1} \cdot \left[cos\left(\frac{2k\pi}{4}\right) + sin\left(\frac{2k\pi}{4}\right) \cdot i \right], k = 0, \ldots, 3$, cioè le 4 radici sono:

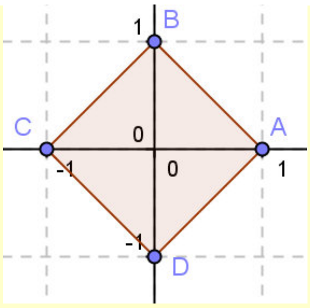
$cos(0) + sin(0)\, i = 1$, $cos(\pi/2) + sin(\pi/2)\, i = i$, $cos(\pi) + sin(\pi)\, i = -1$, $cos(3\pi/2) + sin(3\pi/2)\, i = -i$

Perciò le radici quarte dell'unità sono: $(\pm 1, \pm i)$.

Concludiamo con un'ultima questione. Se rappresentiamo le radici ennesime del numero 1 sul piano di Argand-Gauss otteniamo i vertici di un poligono regolare di *n* lati.

Esempio 21

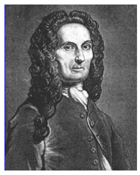
Rappresentando le radici quarte dell'unità: $(1, -1, i, -i)$, otteniamo



I protagonisti

Jean Robert Argand nacque il 18 Luglio 1768 a Ginevra e morì il 13 Agosto 1822 a Parigi. Come abbiamo visto il suo nome è legato alla rappresentazione grafica dei numeri complessi, ma questo è un esempio del modo strano in cui si evolve la storia degli eventi. Infatti il primo che scrisse un lavoro del genere, nel 1787, fu il norvegese Caspar Wessel (1745-1818), solo che l'articolo fu pubblicato solo nel 1799 e soprattutto non fu notato dai matematici. Solo nel 1895 l'articolo fu preso in considerazione e ripubblicato, Nel frattempo però, nel 1806, Argand aveva pubblicato un libro a proprie spese su questo argomento, senza però mettere ilproprio nome in risalto. Anche questo lavoro passò inosservato, però una copia fu spedita al famoso matematico francese Legendre che ne inviò una copia a un modesto altro matematico, François Français. Alla morte di questi il fratello Jacques Français lavorò sul lavoro di Argand e nel settember 1813 pubblicò un lavoro sull'argomento, alla fine del quale diceva di essersi basato su un libro di uno sconosciuto autore. D'altro canto però Argand fornì una bella, anche se non del tutto precisa, dimostrazione del Teorema fondamentale dell'Algebra, ma per questo non è ricordato.

Abraham de Moivre nacque il 26 Maggio 1667 a Vitry-le-François e morì il 27 Novembre 1754 a Londra. È considerato un pionere della geometria analitica della teoria della Probabilità. In particcolare pubblicò *The Doctrine of Chance: A method of calculating the probabilities of events in play* nel1718. La formula trigonometrica associata al suo nome apparve in un suo articolo del 1722, ma una precedente formula, abbastanza simile l'aveva pubblicata già nel 1707.



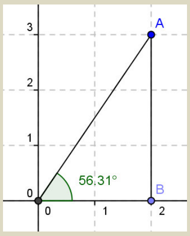
Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo esprimere in forma trigonometrica il numero complesso 2 + 3*i*. Cominciamo a calcolare l’angolo: $\vartheta = tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) \approx 0,98$, ovviamente in radianti. In gradi è ≈ 56°18’38”

Possiamo quindi scrivere $2+3i=\sqrt{4+9}\cdot\left[cos(\vartheta)+sin(\vartheta)i\right]=\sqrt{13}\cdot\left[cos(\vartheta)+sin(\vartheta)i\right];\vartheta\approx 0,98$.

Rappresentiamo nel piano di Argand Gauss



Rappresentare nel piano di Argand Gauss ed esprimere in forma trigonometrica i seguenti numeri complessi.

Livello 1

1. 1 [$cos(0) + sin(0)i$] $\quad -i$ [$cos(-\pi/2) + sin(-\pi/2)i$]
2. $1 - i$ [$\sqrt{2}\,(cos(-\pi/4) + sin(-\pi/4)i)$] $\quad \sqrt{3}+i$ [$2(cos(\pi/6) + sin(\pi/6)i)$]
3. $\sqrt{3}-i$ [$2(cos(-\pi/6) + sin(-\pi/6)i)$] $\quad 1+\sqrt{3}i$ [$2(cos(\pi/3) + sin(\pi/3)i)$]
4. $1 + 2i$ $\left[\sqrt{5}\cdot(cos(\vartheta)+sin(\vartheta)i);\vartheta\approx 1,107\right]$ $\quad 3 + 4i$ $\left[5\cdot(cos(\vartheta)+sin(\vartheta)i);\vartheta\approx 0,927\right]$

Usando la formula di De Moivre semplificare le seguenti potenze.

Livello 1

5. $(1-i)^7$ [$8 + 8i$] $\quad (1+i)^{11}$ [$-32 + 32i$] $\quad (1-\sqrt{3}i)^3$ [-8] $\quad (3-\sqrt{3}i)^6$ [-1728]
6. $(\sqrt{3}-3i)^4$ $\left[-72+72\cdot\sqrt{3}i\right]$ $\quad (\sqrt{3}+3i)^8$ $\left[-10368+10368\cdot\sqrt{3}i\right]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare le radici quadrate complesse di 3 – 2*i*, ossia vogliamo calcolare $\sqrt{3-2i}^{(c)}$.
Il risultato è ancora un numero complesso, $x + iy$, che verifica l'uguaglianza: $(x + iy)^2 = 3 - 2i$
quindi $x^2 - y^2 + 2ixy = 3 - 2i$. Dato che però due numeri complessi sono uguali solo se hanno uguali le ri-

spettive parti reali e immaginarie, dobbiamo risolvere il sistema: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -2 \end{cases}$.

Abbiamo così: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ xy = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(-\frac{1}{y}\right)^2 - y^2 = 3 \\ x = -\frac{1}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{y^2} - y^2 = 3 \\ x = -\frac{1}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - y^4 = 3y^2 \\ x = -\frac{1}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^4 + 3y^2 - 1 = 0 \\ x = -\frac{1}{y} \end{cases}$

Risolviamo adesso l'equazione biquadratica: $y^2 = \frac{-3 \pm \sqrt{9+4}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}}$

Abbiamo accettato solo le soluzioni reali. Quindi possiamo dire che:

$$\begin{cases} x = \mp\sqrt{\frac{2}{-3+\sqrt{13}}} \\ y = \pm\sqrt{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \mp\sqrt{\frac{2\cdot\left(-3-\sqrt{13}\right)}{\left(-3+\sqrt{13}\right)\cdot\left(-3-\sqrt{13}\right)}} \\ y = \pm\sqrt{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \mp\sqrt{\frac{2\cdot\left(-3-\sqrt{13}\right)}{-13+9}} \\ y = \pm\sqrt{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \mp\sqrt{\frac{2\cdot\left(-3-\sqrt{13}\right)}{-4}} \\ y = \pm\sqrt{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \mp\sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{2}} \\ y = \pm\sqrt{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}} \end{cases}$$

Le radici cercate sono dunque: $\sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{2}} - i\sqrt{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}}$, $-\sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{2}} + i\sqrt{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}}$.

Calcolare le seguenti radici quadrate complesse

Livello 2

7. $\sqrt{-3}^{(c)}$ $\left[\pm i\sqrt{3}\right]$ $\sqrt{25+9i}^{(c)}$ $\left[\pm\frac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{706}+25\right)}+i\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{706}-25\right)}}{2}\right]$

8. $\sqrt{1-i}^{(c)}$ $\left[\pm\left(\frac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)}}{2} - \frac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)}}{2}i\right)\right]$ $\sqrt{i}^{(c)}$ $\left[\pm\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\right]$

9. $\sqrt{-i}^{(c)}$ $\left[\pm\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}\right]$ $\sqrt{2-i}^{(c)}$ $\left[\pm\left(\frac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{5}+2\right)}}{2} - \frac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{5}-2\right)}}{2}i\right)\right]$

10. $\sqrt{3i}^{(c)}$ $\left[\pm\frac{\sqrt{6}+i\sqrt{6}}{2}\right]$ $\sqrt{i-5}^{(c)}$ $\left[\pm\frac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{26}-5\right)}+i\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{26}+5\right)}}{2}\right]$

11. $\sqrt{\frac{1}{2}-i}^{(c)}$ $\left[\pm\frac{\sqrt{\sqrt{5}+1}-i\sqrt{\sqrt{5}-1}}{2}\right]$ $\sqrt{\frac{2}{3}i-\frac{1}{2}}^{(c)}$ $\left[\pm\frac{\sqrt{6}+2i\sqrt{6}}{6}\right]$

12. $\sqrt{4i}^{(c)}$ $\left[\pm\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)\right]$ $\sqrt{\frac{i-21}{4}}^{(c)}$ $\left[\pm\frac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{442}-21\right)}+i\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{442}+21\right)}}{4}\right]$

13. $\sqrt{3i-4}^{(c)}$ $\left[\pm\frac{\sqrt{2}+3i\sqrt{2}}{2}\right]$ $\sqrt{4i+3}^{(c)}$ $[\pm(2+i)]$ $\sqrt{4i-3}^{(c)}$ $[\pm(1+2i)]$

14. $\sqrt{3-5i}^{(c)}+\sqrt{5i+3}^{(c)}$ $\left[\pm\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{34}+3\right)}\right]$ $\sqrt{1+2i}^{(c)}-\sqrt{1-2i}^{(c)}$ $\left[\pm\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)}\cdot i\right]$

Livello 3

15. $\sqrt{\sqrt{2}-i}^{(c)}$ $\left[\frac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}-i\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}}{2}\right]$ $\sqrt{1-\sqrt{2}i}^{(c)}$ $\left[\pm\frac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)}-i\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)}}{2}\right]$

16. $\sqrt{\frac{\sqrt{i}+1}{2}}^{(c)}$ $\left[\pm\frac{\sqrt{2\cdot\left(2\sqrt{\sqrt{2}+2}+\sqrt{2}+2\right)}+i\sqrt{2\cdot\left(2\cdot\sqrt{\sqrt{2}+2}-\sqrt{2}-2\right)}}{4}\right]$

17. $\sqrt{\sqrt{2}i-1}^{(c)}$ $\left[\pm\frac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)}\pm i\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)}}{2}\right]$ $\sqrt{|a+ib|}^{(c)}$ $\left[\pm\sqrt[4]{a^2+b^2}\right]$

18. $\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{3}i}^{(c)}$ $\left[\pm\frac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}+i\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}}{2}\right]$ $\sqrt{i-\sqrt{3}}^{(c)}$ $\left[\pm\frac{\sqrt{\sqrt{3}-1}+i\sqrt{\sqrt{3}+1}}{2}\right]$

19. $\sqrt{\sqrt{10}+\sqrt{6}i}^{(c)}$ $\left[\pm\frac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{10}+4\right)}\pm i\sqrt{-2\cdot\left(\sqrt{10}-4\right)}}{2}\right]$ $\sqrt{a^2i}^{(c)}$ $\left[\pm\frac{|a|\cdot\sqrt{2}+i\cdot|a|\cdot\sqrt{2}}{2}\right]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare $\sqrt[4]{3-4i}^{(c)}$. Piuttosto che cercare dei numeri complessi la cui quarta potenza sia uguale al radicando, consideriamo l'identità $\sqrt[4]{3-4i}^{(c)}=\sqrt{\sqrt{3-4i}^{(c)}}^{(c)}$.

Ma $\sqrt{3-4i}^{(c)}=\pm 2\mp i$, infatti: $3-4i=(x+iy)^2=x^2-y^2+2xyi$, da cui

$$\begin{cases}x^2-y^2=3\\2xy=-4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y^4+3y^2-4=0\\x=-2y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y^2=1\\x=-\frac{2}{y}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=\pm1\\x=\mp2\end{cases}$$ e quindi abbiamo $\sqrt[4]{3-4i}^{(c)}=\sqrt{\pm2\mp i}^{(c)}$.

Utilizzando ora il consueto procedimento per il calcolo delle radici quadrate di un numero complesso, otteniamo le seguenti quattro radici: $\sqrt[4]{3-4i}^{(c)}=\sqrt{\pm2\mp i}^{(c)}=\pm\frac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{5}\pm2\right)}\mp i\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{5}\mp2\right)}}{2}$.

Infatti: $\sqrt{\pm2\mp i}^{(c)}=v+iw\Rightarrow\pm2\mp i=(v+iw)^2$, poiché $\pm2\mp i$ = ± (2 – i) scriviamo ± (2 – i) = $(v+iw)^2=v^2-w^2+2vwi$, da cui

$$\begin{cases}v^2-w^2=\pm2\\2vw=\mp1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{4w^2}-w^2=\pm2\\v=\mp\frac{1}{2w}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1-4w^4=\pm8w^2\\v=\mp\frac{1}{2w}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4w^4\pm8w^2-1=0\\v=\mp\frac{1}{2w}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow w^2=\frac{\mp8+\sqrt{80}}{8}=\frac{\mp8+4\sqrt{5}}{8}=\frac{\mp4+2\sqrt{5}}{4}\Rightarrow\begin{cases}w=\pm\frac{\sqrt{2(\sqrt{5}\mp2)}}{2}\\v=\mp\frac{1}{2w}=\mp\frac{1}{\sqrt{2(\sqrt{5}\mp2)}}=\mp\frac{\sqrt{2(\sqrt{5}\pm2)}}{2}\end{cases}$$

Calcolare le seguenti radici ennesime complesse, usando, laddove possibile, l'espressione in forma trigonometrica

Livello 2

20. $\sqrt[4]{i}^{(c)}$ $\left[\pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}-\sqrt{2+\sqrt{2}}i}{2}, \pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}}i}{2}\right]$

21. $\sqrt[4]{3+4i}^{(c)}$ $\left[\pm\frac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{5}-2\right)}-\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{5}+2\right)}i}{2}, \pm\frac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{5}+2\right)}+\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{5}-2\right)}i}{2}\right]$

22. $\sqrt[4]{5-12i}^{(c)}$ $\left[\pm\frac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{13}-3\right)}+\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{13}+3\right)}i}{2}, \pm\frac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{13}+3\right)}-\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{13}-3\right)}i}{2}\right]$

23. $\sqrt[4]{8+15i}^{(c)}$ $\left[\pm\frac{\sqrt{2\cdot\sqrt{17}-5\cdot\sqrt{2}}-\sqrt{2\cdot\sqrt{17}+5\cdot\sqrt{2}}i}{2}, \pm\frac{\sqrt{2\cdot\sqrt{17}+5\cdot\sqrt{2}}+\sqrt{2\cdot\sqrt{17}-5\cdot\sqrt{2}}i}{2}\right]$

24. $\sqrt[4]{-i}^{(c)}$ $\left[\pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2+\sqrt{2}}i}{2}, \pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{2-\sqrt{2}}i}{2}\right]$

Determinare e rappresentare sul piano di Argand Gauss le seguenti radici complesse

25. $\sqrt[3]{1}^{(c)}$ $\left[1, \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\right]$ $\sqrt[6]{-1}^{(c)}$ $\left[\pm i, \pm\frac{\sqrt{3}+i}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right]$

26. $\sqrt[6]{1}^{(c)}$ $\left[\pm 1, \pm\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \pm\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right]$ $\sqrt[8]{1}^{(c)}$ $\left[\pm 1, \pm\sqrt{2}\cdot\frac{1+i}{2}, \pm\sqrt{2}\cdot\frac{1-i}{2}, \pm i\right]$

27. $\sqrt[3]{i}^{(c)}$ $\left[\frac{\pm\sqrt{3}+i}{2}, -i\right]$ $\sqrt[4]{-i}^{(c)}$ $\left[\pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}\mp\sqrt{2-\sqrt{2}}i}{2}, \pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}\pm\sqrt{2+\sqrt{2}}i}{2}\right]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere l'equazione di secondo grado $ix^2 - x + 1 = 0$. Applichiamo la formula risolutiva valida per le equazioni a coefficienti reali, senza considerare il segno del discriminante, anche perché potrebbe essere non reale: $x=\frac{1\pm\sqrt{1-4i}}{2i}$. Abbiamo quindi il problema di calcolare le radici quadrate del numero complesso $1 - 4i$. Con procedimento simile a quello visto in precedenza, troviamo: $\sqrt{1-4i}^{(c)}=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{2}}\mp i\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$. Visto che il segno ± è già presente nella formula possiamo scrivere che le soluzioni della data equazione sono:

$$x=\frac{1\pm\sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{2}}\mp i\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}}{2i}=\frac{i\pm i\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{2}}\pm\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}}{-2}=-\frac{1}{2}i\mp i\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{8}}\mp\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{8}}$$

Risolvere le seguenti equazioni a coefficienti numeri complessi.

Livello 2

28. $x^2 + x + 1 = 0$ $\left[x=\frac{-1\pm i\cdot\sqrt{3}}{2}\right]$ $x^2 + ix = 0$ $[x = -i \vee x = 0]$ $x^2 + ix - 1 = 0$ $\left[x=\frac{\pm\sqrt{3}-i}{2}\right]$

29. $ix^2 - x - i = 0$ $\left[x=\frac{\pm\sqrt{3}-i}{2}\right]$ $x^2 - 2ix - 1 = 0$ $[x = i]$ $ix^2 - x + i = 0$ $\left[x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\cdot i\right]$

30. $x^2 - i = 0$ $\left[x=\pm\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}\right]$ $x^3 - i = 0$ $\left[x=\frac{\pm\sqrt{3}+i}{2}\vee x=-i\right]$

Livello 3

31. $ix^2 - x + 1 = 0$ $\left[x=\frac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{17}-1\right)}+i\cdot\left(\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{17}+1\right)}-2\right)}{4}\vee x=\frac{-\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{17}-1\right)}-i\cdot\left(\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{17}+1\right)}+2\right)}{4}\right]$

32. $x^2 - (1 + i)\cdot x - 1 = 0$ $\left[x=\frac{\sqrt{\sqrt{5}+2}+1+i\cdot\left(\sqrt{\sqrt{5}-2}+1\right)}{2}\vee x=\frac{-\sqrt{\sqrt{5}+2}+1-i\cdot\left(\sqrt{\sqrt{5}-2}-1\right)}{2}\right]$

33. $(1 - i)\cdot x^2 - 2x + 1 = 0$ $\left[x=\frac{1+i\cdot\left(\pm\sqrt{2}+1\right)}{2}\right]$

34. $(1 - i)\cdot x^2 - (1 + i)\cdot x - 1 = 0$ $\left[x=\pm\frac{-\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)-i\cdot\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}-\sqrt{\sqrt{5}-2}-2\right)}{4}\right]$

35. $\frac{x^2}{i}-x-1=0$ $\left[x=\frac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{17}-1\right)}+i\cdot\left(\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{17}+1\right)}+2\right)}{4}\vee x=\frac{-\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{17}-1\right)}-i\cdot\left(\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{17}+1\right)}-2\right)}{4}\right]$

L'angolo di Derive

In Derive possiamo calcolare anche radici ennesime complesse, ma ne viene fornita *sempre* una sola.

#1: $\sqrt{(11\cdot i - 1)}$

#2: $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{122}}{2}-\frac{1}{2}\right)}+i\cdot\sqrt{\left(\frac{\sqrt{122}}{2}+\frac{1}{2}\right)}$

#3: $(1\cdot i - 1)^{1/3}$

#4: $\frac{2^{2/3}}{2}+\frac{2^{2/3}\cdot i}{2}$

#5: $(1\cdot i - 1)^{1/4}$

#6: $2^{1/8}\cdot(-1)^{3/16}$

#7: $\sqrt{(\sqrt{(1\cdot i - 1)})}$

#8: $\sqrt{\left(\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{8}-\frac{1}{8}\right)}+\frac{2^{1/4}}{2}\right)}+i\cdot\sqrt{\left(\frac{2^{1/4}}{2}-\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{8}-\frac{1}{8}\right)}\right)}$

Osserviamo che Derive ha dei problemi a calcolare radici di indice superiore a 2, specie se vengono scritte in modo esplicito. Le immissioni #5 e #7, sono matematicamente equivalenti, eppure Derive fornisce due risultati formalmente diversi , la #6 e la #8. L'ultima esplicita la radice complessa $(-1)^{3/16}$ e quindi è quella più

utilizzabile. Ciò accade perché la radice quadrata è un'operazione più semplice da effettuare rispetto alla radici di indice superiore.
Sfruttando però la risoluzione delle equazioni possiamo determinare tutte le radici ennesime complesse di un dato numero complesso.

#1: SOLVE(x^3 = 1, x)

#2: $x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\cdot\hat{\imath}}{2} \vee x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\cdot\hat{\imath}}{2} \vee x = 1$

#3: SOLVE(x^4 = 1, x)

#4: $x = -\hat{\imath} \vee x = \hat{\imath} \vee x = -1 \vee x = 1$

#5: SOLVE(x^4 = î, x)

#6: $x = -\sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)} + \hat{\imath}\cdot\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}\right)} \vee x = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)} - \hat{\imath}\cdot\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}\right)} \vee x = -\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}\right)} - \hat{\imath}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)} \vee x = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}\right)} + \hat{\imath}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)}$

Attività
Verificare i calcoli sulle radici ennesime proposte negli esercizi.

L'angolo di Microsoft Mathematics

Abbiamo già visto la panoramica dei comandi sui numeri complessi. Proviamoli.
Anche Microsoft Mathematics scrive solo la radice principale dei numeri complessi

1	
Input	$\sqrt[3]{i}$
Output	$e^{\frac{\pi i}{6}}$
Output decimale	$0.8660254037844 + 0.5i$

Di facile utilizzo e comprensione sono i seguenti comandi

1	
Input	$\sqrt[3]{i}$
Output	$e^{\frac{\pi i}{6}}$
Output decimale	$0.8660254037844 + 0.5i$

2	
Input	arg$(1 + 2\,i)$
Output	$\tan^{-1}(2)$
Output decimale	1.1071487177941

3	
Input	realPart$(1 + 2\,i)$
Output	1

4	
Input	imaginaryPart$(3 - 4\,i)$
Output	-4

5	
Input	conjugate$(5 - 2\,i)$
Output	$5 + 2i$

Particolarmente interessanti sono i comandi per le conversioni in forma polare e viceversa.

6	
Input	toPolar$(1 + i)$
Output	$\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi i}{4}}$
Output decimale	$1.4142135623731\,e^{0.7853981633974i}$

7	
Input	toRect$(e^{\pi i})$
Output	-1

In particolare osserviamo la validità della cosiddetta identità di Eulero $e^{\pi i} + 1 = 0$.

Quelli che… vogliono sapere di più

Il campo dei numeri complessi

Un altro modo di introdurre i numeri complessi è quello di stabilire una loro relazione con $\mathbb{R}^2$, ossia di considerare la corrispondenza biunivoca che a ogni coppia di numeri reali (a, b) associa il numero complesso $a + bi$. Vogliamo quindi stabilire un isomorfismo fra $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{C}$. Per far ciò definiamo le seguenti operazioni di somma e prodotto: $(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$; $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.
Con queste definizioni, che sono equivalenti alle precedenti definizioni algebriche polinomiali, le coppie $(a, 0)$ costituiscono i numeri reali, le coppie $(0, b)$ i numeri complessi *puri*, in particolare $(0, 1)$ rappresenta l'unità immaginaria i. Naturalmente questa coppia verifica la proprietà fondamentale dell'unità immaginaria: infatti $(0, 1) \cdot (0, 1) = (0 - 1, 0 +) = (-1, 0)$, che rappresenta appunto -1.
Abbiamo anche detto che il campo dei numeri reali è ordinato totalmente, nel senso che si può stabilire una *graduatoria* fra due numeri reali qualsiasi dicendo chi viene *prima* e chi *dopo*. In particolare scegliendo lo 0 come elemento separatore distinguiamo i numeri reali positivi da quelli negativi. Anche $\mathbb{C}$ può ordinarsi totalmente, anche se non possiamo poi parlare di numeri complessi positivi e di numeri complessi negativi.

Teorema 11

Il campo $\mathbb{C}$ è totalmente ordinato.

Dimostrazione

In $\mathbb{C}$ definiamo la seguente relazione binaria: $a + bi \ \mathcal{R}\ c + di \Leftrightarrow b < d \vee (b = d \wedge a < c)$. Così per esempio

$$7 + 2i \ \mathcal{R}\ 11 + 4i, \text{ perché } 2 < 4;\ 7 + 2i \ \mathcal{R}\ 7 + 4i, \text{ perché } 7 = 7 \wedge 2 < 4.$$

Verifichiamo che è una relazione di ordine totale forte.
Vale la proprietà antiriflessiva; se infatti fosse vera la proprietà riflessiva allora è vero $a + bi \ \mathcal{R}\ a + bi$ cioè è vera una delle due seguenti cose false: $b < b \vee (b = b \wedge a < a)$.
Vale la proprietà antisimmetrica, infatti sia $a + bi \ \mathcal{R}\ c + di$. Ma allora se $b < d$, è anche vero che $d < b$ e quindi è falso che $c + id \ \mathcal{R}\ a + bi$. Se invece $b = d \wedge a < c$, ancora una volta risulta falso $c + di \ \mathcal{R}\ a + bi$.
Vale la proprietà transitiva. Infatti se si ha $a + bi \ \mathcal{R}\ c + di \wedge c + di \ \mathcal{R}\ m + in$, allora possiamo avere:

$$b < d \wedge d < n \Rightarrow b < n \Leftrightarrow a + bi \ \mathcal{R}\ m + in;$$

$$b < d \wedge (d = n \wedge c < m) \Rightarrow b < d = n \Rightarrow b < n \Leftrightarrow a + bi \ \mathcal{R}\ m + in;$$

$$(b = d \wedge a < c) \wedge (d < n) \Rightarrow b = d < n \Rightarrow b < n \Leftrightarrow a + bi \ \mathcal{R}\ m + in;$$

$$(b = d \wedge a < c) \wedge (d = n \wedge c < m) \Rightarrow (b = d = n) \wedge (a < c < m) \Rightarrow (b = n) \wedge (a < m) \Leftrightarrow a+bi \ \mathcal{R}\ m + in.$$

Vale anche la proprietà di connessione, dato che se due numeri complessi sono distinti vuol dire che hanno o la parte reale o la parte immaginaria, o entrambe diverse.
Così per i numeri complessi $a + bi$ e $a + ci$, con $b \neq c$, deve aversi $b < c$ oppure $c < b$, cioè

$$a + bi \ \mathcal{R}\ a + ci, \text{ oppure } a + ci \ \mathcal{R}\ a + bi.$$

Per i numeri complessi $a + bi$ e $c + bi$, con $a \neq c$, deve aversi $a < c$ oppure $c < a$, cioè

$$a + bi \ \mathcal{R}\ c + bi, \text{ oppure } c + bi \ \mathcal{R}\ a + bi.$$

Infine, per i numeri complessi $a + bi$ e $c + di$, con $a \neq c \wedge b \neq d$, deve aversi $b < d$ oppure $d < b$, cioè

$$a + bi \ \mathcal{R}\ c + di, \text{ oppure } c + di \ \mathcal{R}\ a + bi.$$

Il precedente ordine è quello cosiddetto lessicografico, ossia quello che viene usato nei dizionari, nel senso che una parola viene prima di un'altra se la precede nell'ordine alfabetico. Pur avendo ordinato totalmente $\mathbb{C}$ non possiamo parlare di numeri complessi positivi e negativi, ciò dipende dal fatto che l'essere negativo o positivo di un numero ha a che fare con l'operazione di prodotto, in particolare con il fatto che il prodotto di due numeri concordi (entrambi positivi o entrambi negativi) è positivo, mentre noi sappiamo che per esempio $i^2 = -1$. Non solo, ma cercando di creare un ordine con lo zero otteniamo sempre delle assurdità.
Infatti, secondo l'ordine stabilito deve essere $i > 0$, del resto l'ordine valido per i numeri reali viene conservato, inoltre nei numeri reali moltiplicando per una quantità positiva ambo i membri di una disuguaglianza questa non cambia verso. Allora dovrebbe essere vera anche questa catena di disuguaglianze:

$-1 < 1 \Rightarrow i \cdot (-1) < i \cdot 1 \Rightarrow -i < i \Rightarrow i \cdot (-i) < i \cdot i \Rightarrow -i^2 < i^2 \Rightarrow 1 < -1$. Che è un'assurdità.

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi.

1. Costruire la tabella operatoria dell'insieme $\{1, -1, i, -i\}$ rispetto all'ordinaria operazione di prodotto, provando quindi che è un gruppo ciclico abeliano.
2. Provare che l'insieme $\{a + b\,i : a, b \in \mathbb{Z}\}$, rispetto alle ordinarie operazioni di addizione e moltiplicazione fra numeri complessi è un anello, detto degli interi di Gauss.
3. Dire un motivo perché $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, \cdot)$ e $(\mathbb{C}\setminus\{0\}, \cdot)$, non possono essere isomorfi. Suggerimento: se fossero isomorfi le equazioni dovrebbero avere le stesse ...
[$x^2 = -1$ non ha soluzioni in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e ha due soluzioni in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$]
4. Consideriamo l'insieme $\{1, i, j, k\}$ a cui associamo la seguente tabella operatoria

$\otimes$	1	i	j	k
1	1	j	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Consideriamo poi l'insieme delle scritture simboliche $Q = \{a + bi + cj + dk: a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$, su cui definiamo due operazioni, la somma $\oplus$ e il prodotto $\otimes$, che agiscono come la somma e il prodotto di due polinomi con il rispetto della precedente tabella.
Verificare che $(Q, \oplus, \otimes)$ è un corpo ma non un campo, detto *corpo dei quaternioni*.

5. Data l'equazione $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, un'equazione di grado n a coefficienti reali, determinare per quali valori dei coefficienti la somma e il prodotto delle soluzioni, se numeri reali, sono positivi. [La somma è positiva se a_n e a_{n-1} hanno segno discorde. Il prodotto è positivo se n è pari e a_n e a_0 hanno segno concorde, oppure se n è dispari e a_n e a_0 hanno segno discorde]
6. Dimostrare che $x = \dfrac{-1 + i\cdot\sqrt{3}}{2}$ e $y = \dfrac{-1 - i\cdot\sqrt{3}}{2}$ sono soluzioni dell'equazione $x^{3n} + y^{3n} = 2$ e, per n non multiplo di 3, dell'equazione $x^n + y^n = -1$.
7. Calcolare $\sqrt{a+ib}^{(c)}$ $\left[\pm\dfrac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)} \pm i\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)}}{2}\right]$
8. Calcolare $\sqrt{a+ib}^{(c)} + \sqrt{a-ib}^{(c)}$ $\left[\pm\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)}\right]$
9. Calcolare $\sqrt{a+ib}^{(c)} - \sqrt{a-ib}^{(c)}$ $\left[i\cdot\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)}\cdot\dfrac{b}{|b|}\right]$
10. Dopo aver calcolato le seguenti radici complesse, esprimere una congettura che dica quando $\sqrt{a+ib}^{(c)}$, con $a, b \in \mathbb{Z}$, è un numero complesso a coefficienti entrambi interi.

$\sqrt{3+4i}^{(c)}$ [$\pm (2 + i)$] $\quad$ $\sqrt{3i+4}^{(c)}$ $\left[\pm\dfrac{3\cdot\sqrt{2}+i\cdot\sqrt{2}}{2}\right]$ $\quad$ $\sqrt{5i+12}^{(c)}$ $\left[\pm\dfrac{5\cdot\sqrt{2}+i\cdot\sqrt{2}}{2}\right]$

$\sqrt{12i+5}^{(c)}$ [$\pm(3 + 2i)$] $\quad$ $\sqrt{8i+15}^{(c)}$ [$\pm(4 + i)$] $\quad$ $\sqrt{8+15i}^{(c)}$ $\left[\pm\dfrac{5\cdot\sqrt{2}+3i\cdot\sqrt{2}}{2}\right]$

[$a^2 + b^2$ quadrato perfetto con $b > a$]

11. Dimostrare che $\pm\, i$ sono radici di $\sqrt[n]{1}^{(c)}$, per ogni n multiplo di 4 .

12. Risolvere $10z^2 - 3iz - k = 0$, al variare di k in $\mathbb{C}$.

[Per $k \le 9/40$ e $k \ne 0$ le soluzioni sono immaginarie pure; per $k = 0$ vi è una soluzione reale z = 0 e una immaginaria pura, $3/10i$; per $k > 9/40$ sono complesse]

13. Data una generica equazione di II grado a coefficienti complessi, $x^2 + 2(c + di)\,x + m + ni = 0$. Determinare per quali valori dei parametri si hanno soluzioni a) uguali; b) una reale; c) una immaginaria pura; d) complesse coniugate.

[a) $m + in = (c + id)^2$; b) $n^2 - 4cdn + 4md^2 = 0$; c) $n^2 - 4cdn + 4mc^2 = 0$; d) $d = n = 0$, $c^2 < m$]

14. Tenuto conto dell'esercizio precedente, senza risolvere le equazioni stabilire quali delle seguenti equazioni verificano le rispettive condizioni a), b), c), d). Verificare poi la correttezza della deduzione.

a) $(1 - i) \cdot x^2 + (1 + i) \cdot x + 2i = 0$; b) $(1 - i) \cdot x^2 + 2 \cdot (1 + i) \cdot x + 2i = 0$; c) $x^2 - 2 \cdot (1 + i) \cdot x + 2i = 0$; d) $x^2 + (4 - i) \cdot x - 4i = 0$; e) $x^2 - 3 \cdot (1 + i) \cdot x + 2 + 6i = 0$; f) $x^2 + 4x + 5 = 0$.

[soluzioni uguali: c): $x = 1 + i$; una soluzione reale: a): $x = 1 - i \vee x = -1$; d): $x = i \vee x = -4$; e) $x = 1 + 3i \vee x = 2$; una soluzione immaginaria pura: d); soluzioni complesse coniugate: f) $x = -2 \pm i$; nessuna delle precedenti: b) $x = \dfrac{\pm\sqrt{2} + i \cdot \left(\mp\sqrt{2} - 2\right)}{2}$]

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.

AHSME = Annual High School Mathematics Examination

HSMC = A&M University High School Mathematics Contest

RICE = Rice University Mathematics Tournament.

Lavoriamo insieme

Questo quesito è stato assegnato agli HSMC del 2005.

Indichiamo $cos(\theta) + i\ sin(\theta)$, con $cis(\theta)$. Calcolare $cis(3/16\pi)\ cis(5/16\pi)$.

In generale si ha: $cis(a)\ cis(b) = [cos(a) + i\ sin(a)]\ [cos(b) + i\ sin(b)] = [cos(a)\ cos(b) - sin(a)\ sin(b)] + i\ [cos(a)\ sin(b) + sin(a)\ cos(b)] = cos(a+b) + i\ sin(a + b) = cis(a + b)$

Quindi $cis(3/16\pi)\ cis(5/16\pi) = cis((3+5)/16\pi) = cis(\pi/2) = cos(\pi/2) + i\ sin(\pi/2) = i$.

1. (AHSME 1962) L'equazione $2x^2 - 12x + s = 0$ ha come una delle sue soluzioni $x = 3 + 2i$, quanto vale s? [26]
2. (AHSME 1964) Semplificare l'espressione $1 + 2i + 3i^2 + \ldots + (n + 1) \cdot i^n$, con n numero naturale multiplo di 4. $\left[\dfrac{n+2-in}{2}\right]$
3. (AHSME 1971) Semplificare $(1 - w + w^2) \cdot (1 + w - w^2)$, sapendo che w è una delle soluzioni immaginarie dell'equazione $x^3 = 1$. [4]
4. (AHSME 1972) $a \pm bi$ sono le soluzioni dell'equazione $x^2 + qx + r = 0$, determinare q in funzione di a e b. [$-2a$]
5. (AHSME 1980) Per quanti numeri naturali n, $(n + i)^4 \in \mathbb{R}$? [3]
6. (AHSME 1988) Determinare $|z|^2$, con $z \in \mathbb{C}$ e $z + |z| = 2 + 8i$. [289]
7. (AHSME 1982) Se $a + bi$ è soluzione dell'equazione $c_4z^4 + i \cdot c_3z^3 + c_2z^2 + i \cdot c_1z + c_0 = 0$, quale fra i seguenti è anche soluzione? A) $-a - ib$ B) $a - ib$ C) $-a + b\ i$ D) $b + ia$ [B]
8. (AHSME 1984) Se $w = cos(40°) + i \cdot sin(430°)$, determinare $\dfrac{1}{\left|w + 2w^2 + 3w^3 + \ldots + 9w^9\right|}$. $\left[\dfrac{2}{9} \cdot sin(20°)\right]$
9. (HSMC 2003) Determinare il massimo di $(x + y)^2$ se x e y sono numeri tali che $x^2 + y^2 = 1$. Sugg. Portare in coordinate polari. [2]
10. (Rice 2006) Una ragazza vuol lasciare il suo ragazzo, perché secondo lei egli è più interessato alla matematica. Frustrata grida: "Voi matematici non avete anima siete tutti numeri ed equazioni! Qual è la radice quadrata della tua incompetenza?!" Il suo ragazzo crede che ella voglia dire la radice quadrata di se stesso, cioè di i (In inglese sta per Io). Qual è quindi la risposta? $\left[\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot (1+i)\right]$

11. (Rice 2007) Un grafico in coordinate polari ha equazione $r(\theta) = cos(\theta) + ½$, determinare la minima coordinata x di un punto sul grafico. [–1/16]
12. (ARML 2008) Nel piano complesso z, z^2, z^3 sono, in un certo ordine, tre dei vertici di un quadrato non-degenere. a e b siano il minimo e il massimo valore possibile dell'area del quadrato. Trovare (a, b). [(5/8, 10)]
13. (Rice 2008) Se $r \cdot e^{i\theta}$ è una radice dell'equazione $x^8 - x^7 + x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$, con $r > 0$, e $0 \le \theta \le 360°$ determinare tutti i valori possibili di θ. [20°; 60°; 100°; 140°; 220°; 260°; 300°; 340°]
14. (Rice 2008) Due numeri complessi z_1 e z_2 sono tali che $z_1 \cdot z_2$ è un numero complesso puro e z_1/z_2 un numero reale. Per quante coppie ordinate $(z_1; z_2)$ si ha: $|z_1| = |z_2| = 1$? [8]
15. (Rice 2008) Un numero complesso $z = a + bi$ si dice Gaussiano se ha a e b numeri interi. Un primo Gaussiano è un numero Gaussiano che non può essere scritto come prodotto di due numeri Gaussiani con coefficienti di valore assoluto minimo. Fattorizzare $-4 + 7i$ in primi Gaussiani con parti reali positive. $[(1 + 2i) \cdot (2 + 3i)]$
16. (Rice 2008) Determinare 3 numeri complessi a, b e tali che: $a + b + c = ab + bc + ac = abc = 1$. $[i, -i, 1]$

Questions in English

Working together

This is a question assigned at HSMC in 2002.
Suppose that x and y are complex numbers such that $x + y = xy = 1$. What is the value of $x^3 + y^3$?
If $x + y = xy = 1$, then we have $x^3 + y^3 = (x + y) \cdot (x^2 - xy + y^2) = (x + y) \cdot (x^2 + 2xy + y^2 - 3xy) =$
$= (x + y) \cdot [(x + y)^2 - 3xy] = 1 \cdot (1 - 3 \cdot 1) = -2$.

17. (AHSME 1984) Four complex numbers lie at the vertices of a square in the complex plane. Three of the numbers are $1 + 2i$, $-2 + i$, and $-1 - 2i$. The fourth number is? $[2 - i]$
18. (HSMC1999) Find two distinct (complex) numbers each of which is the square of the other. $\left[\frac{-1 \pm \sqrt{3} \cdot i}{2}\right]$
19. (HSMC2007) The complex numbers $1 + i$ and $1 + 2i$ are both roots of the equation $x^5 - 6x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$. Where A, B, C, D are real numbers. What is the value of D? Hint: Remember that complex roots are in pairs, if $a + bi$ is a root, also $a - bi$ is a root and D is the product of all five roots. [–20]

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Accademia navale) Verificare che, al avariare del parametro reale θ, le coppie $(x; y)$ tali che $\begin{cases} x = 5 \cdot cos\,\theta \\ y = 2 \cdot sin\,\theta \end{cases}$ individuano nel piano cartesiano i punti di una ellisse della quale si chiede l'eccentricità. (Suggerimento: quadrare e sommare, quindi eliminare θ).
2. (Accademia navale) Si descriva il luogo geometrico dei centri delle circonferenze di equazioni $(x - cos(\theta))^2 + (x - sin(\theta))^2 = 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Si riconosca che tali circonferenze passano tutte per uno stesso punto: quale?

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_2_2.htm

Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1	2
$\left[\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1, e = \frac{\sqrt{21}}{5}\right]$	L'origine

8. Successioni di numeri reali

8.1 L'insieme dei numeri naturali

Prerequisiti

- Sistema di riferimento cartesiano ortogonale
- Concetto di funzione
- Concetto di infinito
- Gli insiemi numerici fondamentali e le loro proprietà

Obiettivi

- Comprendere il concetto di insieme infinito
- Comprendere il concetto di equipotenza fra insiemi infiniti
- Comprendere il concetto di numerabilità
- Sapere applicare il principio di induzione

Contenuti

- Il concetto di insieme infinito e di numerabilità
- Il Principio di induzione

Parole Chiave

Equipotenza – Induzione

Il concetto di insieme infinito e di numerabilità

L'intero è maggiore delle sue parti
Aristotele, Metafisica

Il problema

40 studenti sono certamente più di 35 studenti, possiamo ugualmente dire che i punti di un segmento lungo 1 cm sono più di quelli di un segmento lungo mezzo centimetro? O che tutti i numeri interi sono più dei numeri pari? Cioè possiamo estendere il concetto di maggiore valido per insiemi finiti anche a quelli infiniti?

Il concetto di infinito è certamente uno dei più delicati e difficili che si trovano ad affrontare non solo le scienze, ma anche le discipline filosofiche. La prima questione è definire cosa intendiamo con il dire che un insieme è infinito. Rispondere che infinito è ciò che non è finito, ovviamente è una non risposta, perché dovremmo chiarire cosa è il finito. Per dare una risposta più convincente dobbiamo cercare di capire cosa distingue in modo netto un insieme finito da uno infinito.
Uno dei primi ad accorgersi della più interessante differenza fu Galilei.

L'Antologia

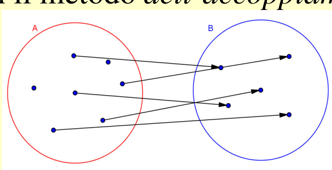
Galileo Galilei, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, 1638

> *Salviati – Onde se io dirò, i numeri tutti, comprendendo i quadrati e i non quadrati, essere più che i quadrati soli, dirò proposizione verissima, non è così?*
> *Simplicio – Non si può dir altrimenti.*
> *Salviati – Interrogando io di poi, quanti siano i numeri quadrati, si può con verità rispondere, loro esser tanti quante sono le proprie radici, avvenga che ogni quadrato ha la sua radice, ogni radice il suo quadrato, né quadrato alcuno ha più d'una sola radice, né radice alcuna più d'un quadrato solo.*
> *Simplicio – Così sia.*
> *Salviati – Ma se io domanderò, quante siano le radici, non si può negare che elle non siano quante tutti i numeri, poiché non vi è numero alcuno che non sia radice di qualche quadrato; e stante questo, converrà dire che i numeri quadrati siano quanti tutti i numeri, poiché tanti sono quante le lor radici, e radici sono tutti i numeri: e pur da principio dicemmo, tutti i numeri esser assai più che tutti i quadrati, essendo la maggior parte non quadrati.*

Quindi Galileo osserva prima che l'insieme dei numeri naturali contiene l'insieme dei quadrati perfetti, dato che tutti i quadrati perfetti sono numeri naturali, ma ci sono numeri naturali come il 3 o il 124, che non sono quadrati perfetti. Cioè $Q_p = \{1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots\} \subset \mathbb{N}$. Eppure lo stesso Galilei osserva che ogni numero naturale si può associare al proprio quadrato, non ci sono numeri naturali che non hanno quadrato, quindi vuol dire che *i numeri naturali sono quanti i quadrati perfetti*.
Questo è un risultato paradossale, nel senso non che sia assurdo, ma che è inatteso. Non ci aspettiamo che qualcosa che siamo convinti che sia più grande di un'altra, improvvisamente divenga uguale all'altra.
Prima di continuare dobbiamo stabilire se questo ragionamento è corretto. Possiamo confrontare due insiemi con il metodo dell'accoppiamento? Certamente sì, poiché in questo modo siamo in grado di stabilire se alla fine della procedura ci rimane qualcosa, e quindi uno dei due insiemi è maggiore dell'altro o no, e perciò sono uguali. Perlomeno nel caso di insiemi finiti funziona senz'altro.

Esempio 1

In figura mostriamo che l'insieme A è maggiore dell'insieme B, poiché con il metodo *dell'accoppiamento* in



A rimangono elementi non accoppiati, mentre in B ciò non succede.

Questo procedimento è tipico della matematica e lo ricordiamo qui.

Definizione 1

Una legge che a ogni elemento di un insieme *A* associa uno e un solo elemento di un insieme *B* e viceversa, si chiama **corrispondenza biunivoca di *A* in *B***.

Possiamo allora dare un concetto di uguaglianza numerica fra insiemi.

Definizione 2

Se vi è una corrispondenza biunivoca di *A* in *B*, diciamo che *A* e *B* sono **equipotenti**.

Possiamo adesso caratterizzare gli insiemi infiniti.

Definizione 3

Diciamo che un insieme *A* è **infinito** se può mettersi in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio.

La precedente definizione è dovuta a Richard Dedekind (1831 – 1916).

I protagonisti

Julius Wilhelm Richard Dedekind nacque a Braunschweig il 6 Ottobre 1831. Frequenta il Collegium Carolinum a Braunschweig che è un misto fra scuola superiore e Università, dove riceve una buona base matematica che perfezionerà in seguito iscrivendosi all'Università di Gottinga dove insegnava il grande Gauss. Consegue il dottorato nel 1852. Nel 1854, comincia a insegnare teoria della probabilità e geometria all'università di Gottinga. Nel 1858 si trasferisce al Politecnico di Zurigo. In questi anni comincia i suoi fondamentali studi sulle sezioni dei numeri razionali che porteranno a una sistematizzazione teorica dei numeri reali, che si cercava da tempo in matematica. Nel 1862 ritorna al Collegium Carolinum, diventato una Scuola tecnica superiore, dove finirà la sua carriera. Nel 1872 pubblica uno dei suoi più importanti lavori *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (*Continuità e numeri irrazionali*). Nel 1874 incontra Cantor con cui comincia a lavorare, anche se indipendentemente sulla teoria degli insiemi infiniti. Nel 1888 pubblica un altro suo importantissimo lavoro: *Was sind und was sollen die Zahlen?* (*Cosa sono i numeri e cosa dovrebbero essere?*) dove definisce gli insiemi infiniti come abbiamo visto. Muore a Braunschweig il 12 Febbraio 1916.

Nasce un altro problema. Tutti gli insiemi infiniti possono essere messi in corrispondenza biunivoca fra loro? Intanto poniamo una prima importante definizione.

Definizione 4

Diciamo che l'insieme dei numeri naturali e qualsiasi insieme a esso equipotente ha la **potenza del numerabile** ed indichiamo tale potenza con il simbolo $\aleph_0$, che si legge Aleph[1] con zero.

Dire che un insieme è numerabile vuol dire che lo possiamo trattare come i numeri naturali, cioè possiamo scrivere i suoi elementi ordinati in modo che essi si possano indicare con un numero naturale, cioè $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$.
Non è difficile dimostrare che anche i numeri interi relativi sono un insieme numerabile.

Esempio 2

Poniamo in relazione gli insiemi $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$, con la seguente legge: a ogni intero positivo associamo il suo doppio

[1] Aleph è la prima lettera dell'alfabeto ebraico.

(per esempio $1 \to 2$, $2 \to 4$, $3 \to 6$, …), a zero associamo 1, a ogni numero negativo associamo il successivo del doppio del loro valore assoluto (per esempio $-1 \to 3$, $-2 \to 5$, $-3 \to 7$, …). La relazione così definita è una corrispondenza biunivoca, infatti preso un qualsiasi numero intero sappiamo associargli un numero naturale (per esempio al numero intero –540 associamo $2 \cdot 540 + 1 = 1081$), e viceversa a ogni numero naturale sappiamo associare un numero intero relativo (per esempio al numero 673 associamo $-\frac{673-1}{2} = -336$. Ovviamente potremmo inventare infinite leggi di corrispondenza biunivoca.

Possiamo dimostrare il seguente risultato.

Teorema 1

L'unione di un numero finito di insiemi numerabili è un insieme numerabile.

Dimostrazione Per semplicità consideriamo due insiemi, A e B. Avremo

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\},\ B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots\},$$

Avremo $A \cup B = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots\}$, in cui alcuni degli elementi potrebbero anche essere ripetuti due volte e quindi uno di essi dovrebbe eliminarsi. Ma consideriamo il caso più generale possibile, cioè che A e B non abbiano elementi in comune e quindi non vi siano elementi da cancellare. Possiamo mettere $A \cup B$ in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$, per esempio mettendo in corrispondenza gli elementi di A con i numeri pari e quelli di B con i dispari. Ovviamente se gli insiemi fossero più di due potremmo ripetere un procedimento simile. Per esempio se sono in numero di k, associamo gli elementi di A_1 con i numeri che divisi per k hanno resto 1, quelli di A_2 con i numeri che divisi per k hanno resto 2, e così via, quelli di A_k con i multipli di k.

Il precedente risultato ha importanti conseguenze.

Corollario 1

L'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi relativi è numerabile

Dimostrazione Si ha $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$ e i due insiemi sono ovviamente numerabili.

Più difficile è dimostrare il seguente fatto.

Teorema 2

L'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali è numerabile.

Dimostrazione

Costruiamo una tabella infinita come mostrato in figura :

$$\begin{array}{llll}
\frac{0}{1} & & & \\
\frac{1}{1} & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{2}{1} & & \\
\frac{1}{3} & \frac{3}{1} & & \\
\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{3}{2} & \frac{4}{1}
\end{array}$$

....

In essa compaiono tutti i numeri razionali non negativi, infatti nella prima riga vi è l'unica frazione che, ridotta ai minimi termini, ha per somma dei suoi termini 1, nella seconda quella di somma 2, in generale nella n–esima quelle frazioni il cui numeratore e denominatore hanno somma n. All'interno di ciascuna riga scriviamo le frazioni ordinate in modo che sia scritta per prima quella che ha il numeratore minore. In questo modo nella tabella abbiamo scritto tutti i numeri razionali. Adesso costruiamo la relazione che pone in corrispondenza biunivoca i razionali con i naturali. A questo punto applichiamo il cosiddetto **primo procedimento diagonale di Cantor**, che consiste nel toccare tutti gli elementi della tabella nel modo indicato in figura

$$\begin{array}{llll}
\frac{0}{1}\downarrow & & & \\
\frac{1}{1}\downarrow & & & \\
\frac{1}{2}\rightarrow & \frac{2}{1}\swarrow & & \\
\frac{1}{3}\rightarrow & \frac{3}{1}\swarrow & & \\
\frac{1}{4}\rightarrow & \frac{2}{3}\rightarrow & \frac{3}{2}\rightarrow & \frac{4}{1}\swarrow \\
\ldots\ldots\ldots & & &
\end{array}$$

Così avremo la seguente corrispondenza biunivoca

$$\frac{0}{1}\rightarrow 1, \frac{1}{1}\rightarrow 2, \frac{1}{2}\rightarrow 3, \frac{2}{1}\rightarrow 4, \frac{1}{3}\rightarrow 5, \frac{3}{1}\rightarrow 6, \frac{1}{4}\rightarrow 7, \frac{2}{3}\rightarrow 8, \frac{3}{2}\rightarrow 9, \frac{4}{1}\rightarrow 10, \ldots .$$

Quindi $\mathbb{Q}^+$ è numerabile, d'altro canto $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^-$, e quindi anche $\mathbb{Q}$ è numerabile e abbiamo la tesi.

A questo punto potrebbe sembrare che qualsiasi insieme infinito sia numerabile. Ciò non è affatto vero. Premettiamo una definizione.

Definizione 5

Diciamo **numero reale** la scrittura formale $z,a_1a_2a_3a_4\ldots$, in cui z è un numero intero e a_i rappresentano *cifre*, ossia numeri naturali compresi tra 0 e 9, in modo che da un indice k in poi tutte gli a_i possono anche essere uguali tra loro, purché sia $a_i \neq 9$.

Chiariamo il motivo per cui non accettiamo numeri periodici di periodo 9. Supponiamo che esista per esempio il numero 2, 3459999… = $2,345\overline{9}$, noi sappiamo che un numero del genere si può trasformare in frazione con la regola seguente: $2,345\overline{9} = \frac{23459-2345}{9000} = \frac{21114}{9000} = \frac{1173}{500} = 2,346$. Cioè avremmo due diverse espressioni per uno stesso numero. Quello *dell'equivoco* è uno dei peggiori problemi con cui hanno a che fare le scienze e deve sempre essere evitato. Quando si parla di un oggetto matematico, tutti quelli che lo conoscono devono riferirsi allo stesso oggetto, in questo caso invece avremmo due possibilità. Ciò accade con tutti i numeri di periodo 9 ed ecco quindi perché li escludiamo.

Teorema 3

L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali non è numerabile.

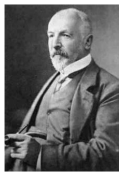
Dimostrazione

Stavolta usiamo il cosiddetto **secondo principio diagonale di Cantor**. Supponiamo per assurdo che $\mathbb{R}$ sia numerabile, allora possiamo scrivere $\mathbb{R} = \{r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n, \ldots\}$. Adesso costruiremo un numero reale a cui non abbiamo associato alcun numero naturale. Queste cifre potrebbero anche essere tutte uguali fra di loro, come nei numeri interi in cui sono tutte uguali a zero, o tutte che non seguono una semplice legge, come quelle di $\sqrt{2}$. Ricordando la definizione 5 un numero reale lo possiamo scrivere $z,a_1a_2a_3a_4\ldots$.
Adesso supponiamo che si abbia per esempio

$$r_1 = -2,12437\ldots;\ r_2 = 122,41903\ldots;\ r_3 = 0,12983\ldots;\ r_4 = -47,02578\ldots;\ \ldots$$

Costruiamo adesso un numero reale che è diverso da ciascuno dei numeri reali indicati con r_i, semplicemente scrivendo un numero la cui parte intera è 0, la sua prima cifra decimale è diversa dalla prima cifra decimale di r_1, la sua seconda cifra decimale è diversa dalla seconda cifra decimale di r_2, la sua terza cifra decimale è diversa dalla terza cifra decimale di r_3, e così via. In generale la sua n–esima cifra decimale è diversa dalla ennesima cifra decimale di r_1. Ovviamente faremmo sempre in modo da evitare il periodo 9. Questo numero che potrà essere, con i dati da noi scelti, per esempio 0,2643..., è un numero reale ma è diverso da ogni r_i. Quindi abbiamo la tesi.

I protagonisti



Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor nacque il 3 Marzo 1845 a San Pietroburgo. Nel 1856 la famiglia si trasferì in Germania. Nel 1867 conseguì il dottorato presso l'Università di Berlino. Ben presto cominciò a occuparsi della teoria degli insiemi infiniti e nel 1873 provò che i numeri razionali possono essere posti in corrispondenza biunivoca con i naturali. Negli stessi anni intraprese una fitta e proficua corrispondenza con Dedekind che si occupava di problemi simili. In una di queste lettere, nel 1877, comunicò all'amico, usando la famosa frase: *Lo vedo, ma non ci credo*, di avere provato un risultato paradossale, ossia che i punti dell'intervallo [0, 1] sono *tanti quanti* quelli di un insieme a n dimensioni. Cominciò a pubblicare i suoi risultati, che però erano troppo moderni per l'epoca e trovò molti oppositori, fra cui il potente Kronecker che fece di tutto per impedirgli una carriera accademica di rilievo. Anche per questo motivo, unito a diversi problemi familiari, fra cui la morte di un giovane figlio, cominciò a soffrire di stati depressivi. Per questo fu ricoverato diverse volte in manicomio. E proprio in un sanatorio morì, povero, il 6 Gennaio 1918 ad Halle, in Germania.

Diciamo che l'insieme dei numeri reali ha **la potenza del continuo**.

Sorge una domanda immediata. Esistono insiemi che sono più potenti di $\mathbb{N}$ e meno potenti di $\mathbb{R}$? A questa domanda non si può fornire risposta[2], come è stato provato da Kurt Gödel nel 1940 e da Paul Cohen nel 1967, quindi possiamo enunciare le seguenti proprietà che si escludono a vicenda, ma che possono considerarsi entrambe accettabili, anche se non contemporaneamente.

Ipotesi del continuo (CH).

Non ci sono insiemi che sono più potenti di $\mathbb{N}$ e meno potenti di $\mathbb{R}$.

Negazione dell'ipotesi del continuo (¬CH).

Esistono insiemi che sono più potenti di $\mathbb{N}$ e meno potenti di $\mathbb{R}$.

L'ipotesi del continuo è un esempio di problema indecidibile, nel senso che sia esso che la sua negazione possono essere considerati assiomi di distinti sistemi entrambi coerenti.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Possiamo mettere in corrispondenza biunivoca l'insieme dei multipli di 5, {5, 10, 15, 20, …}, con il suo sottoinsieme dei multipli di 15, {15, 30, 45, 60, …}. Per esempio possiamo associare al generico multiplo di 5, che possiamo perciò scrivere $5n$, il generico multiplo di 15, che indichiamo con $15n$, secondo lo stesso fattore n. Cioè associamo 5 a 15, $20 = 5 \cdot 4$ a $60 = 15 \cdot 4$ e così via. Quindi l'insieme dei multipli di 5, secondo la definizione data, è un insieme infinito.

[2] Almeno in un certo sistema assiomatico che è quello che va per la maggiore

Livello **1**

1. Utilizzando la corrispondenza biunivoca fra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ definita nell'esempio 2, determinare il corrispondente naturale associato all'intero 235 e il corrispondente intero associato al naturale 235. [–117; 470]
2. Porre in corrispondenza biunivoca $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ con una legge diversa da quella dell'esempio 2.
3. Porre in corrispondenza biunivoca $\mathbb{Z}$ con i naturali pari.

Stabilire quali fra le seguenti coppie di insiemi sono equipotenti (Con M_n indichiamo l'insieme dei multipli del numero naturale n)

Livello **2**

4. M_8 e $\left\{\frac{1}{3},\frac{3}{5},\frac{5}{7},\dots\right\}$ [Sì] M_5 e $\left\{\frac{2}{3},\frac{4}{5},\frac{6}{7},\dots\right\}$ [Sì] $\mathbb{Z}$ e $\left\{\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{5}{8},\dots\right\}$ [Sì] M_8 e $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ [No]
5. $\{1, 4, 9, \dots, n^2, \dots\}$ e $\mathbb{R}^+$ [No] M_4 e $\mathbb{R}^-$ [No] $\mathbb{Q}^+$ e $\left\{-\frac{7}{8},\frac{14}{9},-\frac{21}{10},\dots\right\}$ [Sì] $\mathbb{Z}^-$ e $\left\{\frac{2}{1},\frac{4}{3},\frac{6}{5},\dots\right\}$ [Sì]
6. $\{2, 4, \dots, 2n, \dots\}$ e $\mathbb{R}$ [No] $\{1, 3, \dots, 2n - 1, \dots\}$ e $\mathbb{R}^+\backslash\mathbb{Q}^+$ [No] $\{1, 8, \dots, n^3, \dots\}$ e $\left\{\frac{2}{3},\frac{4}{9},\frac{6}{27},\dots\right\}$ [Sì]
7. (Maturità scientifica PNI 2012/2013) Tre amici discutono animatamente di numeri reali. Anna afferma che sia i numeri razionali che gli irrazionali sono infiniti e dunque i razionali sono tanti quanti gli irrazionali. Paolo sostiene che gli irrazionali costituiscono dei casi eccezionali, ovvero che la maggior parte dei numeri reali sono razionali. Luisa afferma, invece, il contrario: sia i numeri razionali che gli irrazionali sono infiniti, ma esistono più numeri irrazionali che razionali. Chi ha ragione? Si motivi esaurientemente la risposta. [Luisa]

Livello **3**

8. Provare che l'insieme dei numeri reali negativi non può essere numerabile.
9. Provare che l'insieme dei numeri irrazionali non può essere numerabile.
10. Provare che un segmento di lunghezza 1 ha "tanti punti" quanto una retta.
11. Provare che l'insieme prodotto cartesiano $A\times B=\{(a,b),a\in,b\in B\}$ di insiemi numerabili è un insieme numerabile.
12. Provare che l'unione di una infinità numerabile di insiemi numerabile è numerabile.

Giochiamo alla matematica

Parecchi giochi logici sono effettuati a partire dai paradossi relativi all'infinito. Il più famoso di essi è quello dell'hotel infinito di Hilbert. Il famoso matematico immaginò che esistesse in una qualche galassia un hotel formato da infinite stanze, ciascuna con un ben determinato numero intero posto sulla sua porta. Un certo giorno l'hotel risulta esaurito, tutte le sue infinite stanze sono occupate da infiniti ospiti. La sera giunge un altro ospite. Si chiede: l'albergatore deve mandare via il cliente o riesce ugualmente ad alloggiarlo in una stanza? Rispondere alla domanda equivale solo a provare che l'insieme $\mathbb{N}$ e l'insieme $\mathbb{N} \cup \{0\}$ sono equipotenti, il che è vero perché abbiamo visto che l'unione di insiemi numerabili e numerabile. Se poi vogliamo mostrare come risolvere "praticamente" il problema, basta far spostare ciascun ospite nella camera successiva, lasciando così vuota la prima camera che sarà perciò destinata all'ospite sopraggiunto.

Attività

1. Mostrare che è possibile sistemare nell'hotel di Hilbert esaurito altri 10 clienti.
2. Mostrare che è possibile sistemare nell'hotel di Hilbert esaurito altri infiniti clienti, di infinità numerabile.

Il Principio di induzione

Avendo a che fare con insiemi numerabili può capitare di dovere dimostrare proprietà che riguardano i loro infiniti elementi.

Esempio 3

Se volessimo dimostrare che tutti i quadrati dei numeri interi compresi tra 1 e 100 hanno cifra delle unità diversa da 3, potremmo effettuare un ragionamento oppure potremmo più semplicemente calcolare tutti e 100 i quadrati e vedere che nessuno di essi finisce per 3. Questo tipo di procedura non è elegante ma è efficace, poiché risolve la questione. Ovviamente se avessimo voluto dimostrare che la proprietà vale per i quadrati di tutti i numeri inferiori a 1 miliardo, la verifica sarebbe diventata eccessivamente lunga.

Abbiamo osservato che verificare che i quadrati dei numeri naturali minori di un miliardo non finiscono mai per 3, è una procedura troppo lunga, però, almeno in linea teorica, è fattibile. Se volessimo dimostrare che il quadrato di qualsiasi numero naturale non finisce per 3 la verifica non sarebbe neanche fattibile perché non possiamo fare infinite verifiche. A volte però possiamo fare due sole verifiche che valgono per infinite.

Esempio 4

Il seguente aneddoto è riferito al piccolo Gauss, che divenne in seguito uno dei più grandi matematici di tutti i tempi. Si dice che alle scuole elementari, il maestro per far stare buoni i bambini assegnò loro di sommare tutti i numeri interi da 1 a 100. Dopo pochi minuti il piccolo genio porto la lavagnetta con il risultato corretto: 5050. La leggenda vuole che il bimbo avesse scoperto che la somma era riconducibile al prodotto $\frac{100\times 101}{2}$. Noi vogliamo provare più in generale che la somma dei primi n numeri naturali si trova con la seguente formula: $1+2+3+...+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$, di cui il caso di Gauss è particolare per n = 100. Ora se possiamo verificare che essa è vera per n = 100, semplicemente sommando tutti i 100 numeri e facendo vedere che effettivamente la loro somma è 5050, non possiamo verificarla per tutti i numeri naturali. Allora facciamo in questo modo. Intanto ci assicuriamo che la regola è valida per il primo valore per cui ha significato, cioè n = 1. E in effetti: $1=\frac{1\cdot(1+1)}{2}$. Ora vogliamo fare un tipo di verifica che vale per un numero generico e che mostriamo per esempio per n = 15. Supponiamo di avere già dimostrato che $1+2+3+ \dots +14 = 14 \cdot 15/2$. Allora per verificare che la proprietà è vera anche per n = 15, non c'è bisogno di rifare tutte le somme. Possiamo dire che $1 + 2 + 3 + \dots + 14 + 15 = (1 + 2 + 3 + \dots + 14) + 15 = 14 \cdot 15/2 + 15$. Questo ovviamente ci permette di semplificare i calcoli e adesso di mettere in evidenza, scrivendo:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 14 + 15 = 15 \cdot (14/2 + 1) = 15 \cdot 16/2$$

che è proprio la regola valida per n = 15.

La procedura mostrata nel precedente esempio può essere applicata a un generico numero naturale n, ottenendo così il seguente risultato generale.

Principio di induzione

Se $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$ è un insieme numerabile e P è una proprietà valida per gli elementi di A, se

1. a_1 verifica P
2. comunque scegliamo un elemento a_n in A, il sapere che P è verificata da a_n implica che P è verificata anche da a_{n+1}

allora P è verificata da tutti gli elementi di A.

Esempio 5

Dimostriamo la formula di Gauss usando il principio di induzione. Abbiamo già verificato che essa è vera per n = 1, quindi dobbiamo fare vedere che se è vera per un n generico lo è anche per (n + 1). Cioè vogliamo dimostrare che $1+2+3+...+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}\Rightarrow 1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$.

Per fare ciò dobbiamo cercare di scrivere quello che vogliamo provare in modo da sfruttare quello che già sappiamo. Allora scriviamo: $1 + 2 + … + n + (n + 1) = [1 + 2 + … + n] + (n + 1)$, infatti n questo modo all'interno delle parentesi quadrate abbiamo una somma che è quella dell'ipotesi, e quindi per la quale sappiamo il risultato, che perciò andiamo a sostituirlo a essa, ottenendo: $\frac{n\cdot(n+1)}{2}+(n+1)$.

Adesso mettiamo in evidenza a fattor comune: $(n+1)\cdot\left(\frac{n}{2}+1\right)=(n+1)\cdot\left(\frac{n+2}{2}\right)=\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$ e abbiamo ottenuto proprio ciò che volevamo provare. Quindi la formula è dimostrata.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Osserviamo che si ha: $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4=20=\frac{3\cdot 4\cdot 5}{3}; 1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5=40=\frac{4\cdot 5\cdot 6}{3}$.

Ciò ci conduce a pensare che sia vera la seguente formula generale:

$$1\cdot 2+2\cdot 3+...+n\cdot(n+1)=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3}$$

Vogliamo provarla per induzione.

Verifichiamola per $n = 1$. $1\cdot 2=\frac{1\cdot(1+1)\cdot(1+2)}{3}=\frac{1\cdot 2\cdot \cancel{3}}{\cancel{3}}=1\cdot 2$.

Adesso mostriamo che se è vero che $1\cdot 2+2\cdot 3+...+n\cdot(n+1)=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3}$ è anche vero che

$$1\cdot 2+2\cdot 3+...+(n+1)\cdot(n+2)=\frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}{3}$$

Abbiamo: $1\cdot 2+2\cdot 3+...+(n+1)\cdot(n+2)=\left[1\cdot 2+2\cdot 3+...+n\cdot(n+1)\right]+(n+1)\cdot(n+2)$.

Sostituiamo all'espressione fra parentesi quadrate l'ipotesi induttiva: $\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3}+(n+1)\cdot(n+2)$.

Mettiamo in evidenza a fattor comune: $(n+1)\cdot(n+2)\cdot\left(\frac{n}{3}+1\right)=(n+1)\cdot(n+2)\cdot\left(\frac{n+3}{3}\right)$, cioè la tesi.

Provare la validità delle seguenti proprietà, usando il metodo di dimostrazione per induzione

Livello 2

1. $1 + 3 + 5 + … + (2n – 1) = n^2$ $\qquad 1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$
2. $1 + 2^5 + … + n^5 + 1 + 2^7 + … + n^7 = 2 \cdot (1 + 2+ … + n)^4$ $\qquad 1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)^2=\frac{n\cdot(4n^2-1)}{3}$
3. $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+...+n\cdot(n+1)\cdot(n+2)=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}{4}$ $\qquad 1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left[\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right]^2$
4. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$ $\qquad \frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$
5. $\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+...+\frac{n^2}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{n\cdot(n+1)}{2\cdot(2n+1)}$ $\qquad \frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+...+\frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$

6. $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+...+\frac{1}{(4n-3)\cdot(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$ $\qquad 1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2 \cdot (2n^2-1)$

Lavoriamo insieme

Osserviamo che $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$, sono tutti numeri divisibili per 6. Non è difficile capire perché, infatti essendo tre numeri consecutivi, uno almeno di essi è pari e uno esattamente è divisibile per 3, quindi ovviamente il prodotto è divisibile per 6. Perciò possiamo dire che $n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)$ è divisibile per 6, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Nonostante ciò vogliamo provare la proprietà per induzione.

L'abbiamo già verificata per $n = 1$. Adesso proviamo che se è vero che $n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)$ è divisibile per 6 è anche vero che $(n + 1) \cdot (n + 2) \cdot (n + 3)$ è divisibile per 6. Dobbiamo però formalizzare che significa che un numero è divisibile per 6. Che possa scriversi come prodotto di 6 per un termine generico, cioè

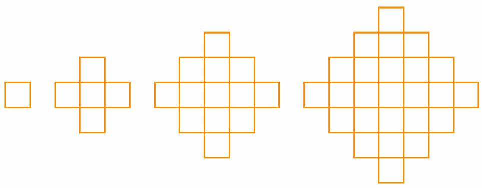
$$n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) = 6 \cdot h.$$

Ora si ha: $(n + 1) \cdot (n + 2) \cdot (n + 3)$ $(n + 1) \cdot (n + 2) \cdot n + (n + 1) \cdot (n + 2) \cdot 3$. Adesso applichiamo l'ipotesi induttiva al primo addendo: $6 \cdot h + (n + 1) \cdot (n + 2) \cdot 3 = 3 \cdot [2h + (n+1) \cdot (n + 2)]$.
Il prodotto di due numeri interi consecutivi è pari, quindi possiamo scrivere $3 \cdot (2h + 2 \cdot k) = 6 \cdot (h + k)$, che è quello che voleva dimostrarsi.

Provare la validità delle seguenti proprietà valide per ogni *n* naturale, usando il metodo di dimostrazione per induzione.
Può essere utile ricordare che *la somma di numeri divisibili per h è divisibile per h*

Livello 3

7. $17^n - 12^n$ è divisibile per 5 $\qquad 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$ è divisibile per 8 $\qquad 7^n + 5^{2n+1}$ è divisibile per 6
8. $13^{2n} + 6$ è divisibile per 7 $\qquad 3^{2n} + 4^{n+1}$ è divisibile per 5 $\qquad 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ è divisibile per 133
9. $cos(\theta)+cos(3\theta)+...+cos\left[(2n-1)\cdot\theta\right]=\frac{sin(2n\cdot\theta)}{2\cdot sin(\theta)}$ $\qquad sin(\theta)+sin(3\theta)+...+sin\left[(2n-1)\cdot\theta\right]=\frac{1-cos(2n\cdot\theta)}{2\cdot sin(\theta)}$

10. Le figure seguenti  costituiscono una successione di poligoni, che prosegue sempre seguendo la stessa legge. Determinare quanti quadrati formano il poligono al passo n e dimostrarla poi per induzione. $[2n^2 - 2n + 1]$

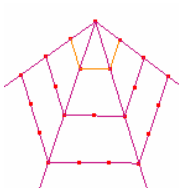
Provare la validità delle seguenti proprietà, valide per ogni *n* naturale, usando un metodo di dimostrazione diretto

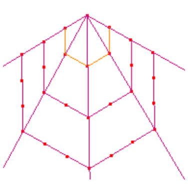
Livello 3

11. $n^2 \cdot (n^2 - 1)$ è divisibile per 12 $\qquad n^5 - n$ è divisibile per 30 $\qquad n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n$ è divisibile per 8
12. $n^3 + 11n$ è divisibile per 6 $\qquad 7^n - 5^n$ è divisibile per 2 $\qquad n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3$ è divisibile per 9

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi.

1. In figura  abbiamo tracciato i primi 3 numeri pentagonali (5, 12, 22), determinare la legge che permette di passare da un numero pentagonale al successivo, quindi trovare la legge che permette di determinare l'n–esimo numero pentagonale, dimostrandola per induzione. $\left[\frac{3n^2+5n+1}{2}\right]$

2. In figura  abbiamo tracciato i primi 3 numeri esagonali (6, 15, 28), determinare la legge che permette di passare da un numero esagonale al successivo, quindi trovare la legge che permette di determinare l'n–esimo numero esagonale, dimostrandola per induzione. $[2n^2 + 3n + 1]$
3. Si osservi che $1 = 1^3$, $3 + 5 = 2^3$, $7 + 9 + 11 = 3^3$, congetturare una legge generale e provarla per induzione. $\left[\sum_{k=1}^{n-1}\left(n^2 - n + 2k + 1\right) = n^3\right]$
4. Provare che $3n^5 + 5n^3 - 8n$ è divisibile per 120, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
5. Provare che $a^n - b^n$ è divisibile per $(a - b)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, a e b numeri reali positivi.
6. Provare la disuguaglianza di Bernoulli: $(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \geq -1$.
7. Provare che $n! > 2^{n-1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$. Si ha: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.
8. Provare che $\prod_{k=1}^{n} cos\left(2^k \cdot \theta\right) = \dfrac{sin\left(2^{n+1} \cdot \theta\right)}{2^{n+1} \cdot sin(\theta)}, \forall n \in \mathbb{N}$.
9. Consideriamo il seguente schema infinito di numeri interi non negativi, che hanno i numeri 0, 1, 2, 3, . . . lungo gli estremi, mentre i numeri interni sono ottenuti sommando i due numeri adiacenti della riga precedente. Mostriamo le righe fino alla sesta.

0
1 1
2 2 2
3 4 4 3
4 7 8 7 4
5 11 15 15 11 5

Con $f(n)$ denotiamo la somma dei numeri della riga n. Qual è il resto della divisione di $f(100)$ per 100? (**Sugg:** Provare per induzione che $f(n) = 2^n - 2$) [74]

Data la successione di Fibonacci, {1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …} in cui ogni numero, a parte i primi due, è somma dei due che lo precedono. Sulla base degli esempi proposti enunciare e dimostrare una congettura

10. $1 + 1 = 3 - 1$; $1 + 1 + 2 = 5 - 1$; $1 + 1 + 2 + 3 = 8 - 1$; $1 + 1 + 2 + 3 + 5 = 13 - 1$. $[F(1) + F(2) + \ldots + F(n) = F(n - 2) - 1]$
11. $1 + 3 = 5 - 1$; $1 + 3 + 8 = 13 - 1$; $1 + 3 + 8 + 21 = 34 - 1$ $[F(2) + F(4) + \ldots + F(2n) = F(2n + 1) - 1]$
12. $1 + 2 = 3$; $1 + 2 + 5 = 8$; $1 + 2 + 5 + 13 = 21$. $[F(1) + F(3) + \ldots + F(2n - 1) = F(2n)]$
13. $1^2 + 1^2 = 1 \cdot 2$; $1^2 + 1^2 + 2^2 = 2 \cdot 3$; $1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 3 \cdot 5$; $1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 = 5 \cdot 8$ $[F^2(1) + F^2(2) + \ldots + F^2(n) = F(n) \cdot F(n + 1)]$
14. $1^2 + 1^2 = 2$; $1^2 + 2^2 = 5$; $2^2 + 3^2 = 13$; $3^2 + 5^2 = 34$; $5^2 + 8^2 = 89$ $[F^2(k) + F^2(k + 1) = F(2k + 1)]$
15. $2^2 - 1^2 = 1 \cdot 3$; $3^2 - 2^2 = 1 \cdot 5$; $5^2 - 3^2 = 2 \cdot 8$; $8^2 - 5^2 = 3 \cdot 13$; $13^2 - 8^2 = 5 \cdot 21$ $[F^2(k+1) - F^2(k) = F(k-1) \cdot F(k+2)]$
16. $1 \cdot 2 = 1^2 + 1$; $1 \cdot 3 = 2^2 - 1$; $2 \cdot 5 = 3^2 + 1$; $3 \cdot 8 = 5^2 - 1$; $5 \cdot 13 = 8^2 + 1$ $[F(2k - 1) \cdot F(2k + 1) = F^2(2k) - 1;\ F(2k) \cdot F(2k + 2) = F^2(2k + 1) + 1]$

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_2_3.htm

8. Successioni di numeri reali

8.2 Combinatoria

Prerequisiti

- I numeri naturali e i numeri reali
- Operazioni aritmetiche elementari e loro proprietà
- Concetto di insieme numerabile
- Sviluppo della potenza ennesima di un binomio e triangolo di Tartaglia
- Equazioni algebriche

Obiettivi

- Imparare a "contare" in modo intelligente, evitando inutili calcoli
- Conoscere e sapere usare il concetto di fattoriale
- Comprendere i diversi modi di raggruppare oggetti appartenenti a insiemi numerabili
- Comprendere la differenza fra raggruppamenti semplici e ripetuti
- Comprendere la differenza fra i diversi tipi di raggruppamenti
- Conoscere le formule per il calcolo dei raggruppamenti più diffusi

Contenuti

- Raggruppamenti semplici e con ripetizione e principio dei cassetti
- Disposizioni semplici e ripetute
- Permutazioni semplici e ripetute
- Combinazioni semplici e ripetute

Parole Chiave

Coefficienti binomiali – Combinazioni – Disposizioni – Fattoriale – Permutazioni

Raggruppamenti semplici e con ripetizione e principio dei cassetti

Il problema

Erminia vuole avere la certezza di vincere al totocalcio, quindi si chiede quante colonne deve giocare per essere sicura di individuare tutti i risultati possibili. Come possiamo aiutarla?

Il problema di contare in modo opportuno insiemi particolarmente numerosi, o comunque di difficile determinazione, è uno dei più importanti della matematica. La prima cosa da fare è distinguere i diversi raggruppamenti che possono farsi scegliendo alcuni elementi da un insieme.

Esempio 1

Nel problema di Erminia vogliamo conoscere tutti i possibili modi di ordinare i simboli 1 X 2 su 14 diverse uscite, cioè tutte le colonne di 14 simboli scelti fra 3. Ovviamente essendo i simboli da usare meno di quelli che ci servono uno almeno di essi deve ripetersi più di una volta.
Se invece Erminia avesse giocato al superenalotto, in cui si tratta di individuare 6 numeri scelti da 90, tutti i 6 numeri devono essere diversi, quindi non vi saranno ripetizioni.

Tenuto conto dell'esempio precedente, una prima distinzione la facciamo sulla possibilità che i gruppi che vogliamo formare siano di elementi tutti diversi o no.

Definizione 1

Dato un insieme A di n elementi diversi e un numero naturale k, chiamiamo
- **raggruppamenti semplici** di A, il numero di gruppi che possono formarsi con alcuni elementi di A tutti distinti tra loro;
- **raggruppamenti ripetuti** di A, il **numero** di gruppi che possono formarsi con alcuni elementi di A non tutti distinti tra loro.

Nella definizione precedente alcuni significa almeno uno, ma anche tutti gli elementi. Adesso enunciamo un risultato apparentemente banale, ma di fondamentale importanza nel calcolo combinatorio.

Principio dei cassetti

Se abbiamo alcuni cassetti e un numero di oggetti superiore al numero dei cassetti, allora in almeno un cassetto c'è più di un oggetto.

Il principio è veramente banale e qualcuno potrebbe perciò obiettare che è inutile. In realtà in matematica nulla è così banale da potersi ritenere inutile.
Cominciamo a vedere qualche problema con una semplice applicazione del principio dei cassetti, detto anche del nido del piccione (Pigeon-hole in inglese).

Esempio 2

In un cassetto sono messi a caso 10 calzini neri e 8 calzini bianchi identici. Giorgio si sveglia una mattina e senza accendere la luce per non svegliare sua moglie prende dei calzini. Quanti ne deve prendere come minimo per essere sicuro che ce ne sono due dello stesso colore?
La risposta è semplice e non dipende da quanti calzini ci sono nel cassetto, ma solo da quanti colori ci sono. Basta che ne prenda 3, infatti se è sfortunato prendendone due ne prenderà uno bianco e l'altro nero, ma a questo punto il terzo è bianco o nero e perciò ne ha sicuramente due dello stesso colore.
Se invece vuole averne certamente due di un dato colore, per esempio tutti e due bianchi allora dovrà prendere almeno 12, perché i primi 10 potrebbero essere tutti i calzini neri. Allo stesso modo se vuol essere sicuro di prenderne almeno due neri deve prenderne almeno 10, perché i primi 8 potrebbero essere tutti bianchi.

Verifiche

Quali fra i seguenti raggruppamenti sono semplici e quali ripetuti?

Livello 1

1. PIN formato con 5 cifre [Ripetuti] Targhe automobilistiche italiane [Ripetuti]
2. Numeri interi minori di 100 le cui cifre sono in ordine crescente (pe 123, 369, ma non 452) [Semplici]
3. Anagrammi della parola CARTE [Semplici] Anagrammi della parola CARTA [Ripetuti]
4. Anagrammi della parola CARTA che iniziano per A [Semplici]
5. Anagrammi della parola CARTA che iniziano per C [Ripetuti]
6. Numeri usciti al gioco della roulette in tre turni successivi [Ripetuti]
7. Combinazioni di una cassaforte che usa 5 lettere scelte fra 5 vocali [Ripetuti]
8. Possibili menu completi (primo, secondo, dolce) [Semplici]
9. Estrazione del primo numero sulla ruota di Roma [Semplici]
10. Partite di una giornata di un campionato di calcio a 10 squadre [Semplici]
11. Estrazione di due carte da un mazzo da Ramino, senza considerare il seme, ma solo il valore [Ripetuti]
12. Estrazione di due carte da un mazzo da Ramino, considerando il seme, ma non il valore [Ripetuti]
13. Estrazione di due carte da un mazzo da Ramino, considerando il seme e il valore [Semplici]
14. Esiti dei lanci di una moneta per 10 volte [Ripetuti]
15. Esiti dell'estrazione di una pallina da un'urna che ne contiene 10 di colori tutti diversi [Semplici]
16. Esiti dell'estrazione di una pallina da un'urna che ne contiene 10 di colori non tutti diversi [Semplici]
17. Esiti dell'estrazione di due palline da un'urna che ne contiene 10 di colori tutti diversi [Semplici]
18. Esiti dell'estrazione di due palline da un'urna che ne contiene 10 di colori non tutti diversi [Ripetuti]

Lavoriamo insieme

In una busta vi è lo stesso numero di calzini bianchi e di calzini neri, indistinguibili al tatto. Sappiamo che il minimo numero di calzini da prendere, a caso, per averne un paio dello stesso colore è lo stesso del minimo numero da prendere per averne due di colore differente. Quanti calzini ci sono nella busta?
Per il principio dei cassetti, dato che i colori sono due, il minimo numero di calzini da prendere per avere la certezza che siano dello stesso colore è 3. Dato che questo numero coincide con il minimo numero da prendere per averne due di colore diverso, vuol dire che in totale i calzini sono 4, due bianchi e due neri

Livello 1

19. In un cassetto ci sono 4 calzini rossi, 5 verdi e 6 blu. Quanti calzini si devono prendere, come minimo, per essere sicuri che almeno due di essi siano dello stesso colore? [4]
20. Con riferimento all'esercizio precedente, quanti calzini dobbiamo prendere, come minimo, per essere sicuri di prendere almeno due calzini rossi? [13]
21. Ci sono 80 palle in un cestino. 35 sono rosse, 25 verdi, 15 gialle e 5 nere. Prendendo le palle senza guardare, quante se ne devono prendere, come minimo, per essere sicuri che ve ne sia almeno a) una rossa; b) una rossa o una nera; c) una rossa e una nera; d) due di diverso colore; e) tre dello stesso colore. [a) 46; b) 41; c) 76; d) 36; e) 9]
22. In una scatola ci sono alcune palle rosse ed alcune verdi. Sappiamo che dobbiamo estrarre almeno 10 palle per avere la sicurezza di estrarre, senza guardare, una palla rossa. Quante palle verdi ci sono nella scatola? [9]
23. Scegliamo a caso 3 numeri interi consecutivi, possiamo essere sicuri che almeno uno di essi è multiplo di 3? È possibile che ve ne siano due multipli di 3? [Sì; no]
24. Scegliamo a caso 5 numeri interi consecutivi, possiamo essere sicuri che almeno uno di essi è multiplo di 5? [Sì]
25. Quante persone dobbiamo prendere per essere certi che almeno due di esse siano nate lo stesso mese? E lo stesso giorno? E lo stesso giorno e mese? [13; 32; 366]
26. In un mazzo di carte da poker quante carte dobbiamo prendere, minimo, per essere sicuri che due di esse abbiano lo stesso seme? Che siano entrambe dello stesso colore? Che siano dello stesso valore numerico? [5; 3; 14]
27. Apriamo il vocabolario a caso e scegliamo una parola. Quante parole dobbiamo scegliere, minimo, per essere sicuri che almeno due di esse inizino con la stessa lettera? E almeno tre parole? [27; 53]

Lavoriamo insieme

Un classico problema che si risolve con il principio dei cassetti è il seguente.
A una festa ci sono alcune persone, per esempio 24, alcuni si salutano con una stretta di mano, altri no. Bisogna dimostrate che almeno due persone hanno stretto lo stesso numero di mani.
Cominciamo a osservare che ciascuno dei presenti può stringere da 0 a 23 mani, dato che non può stringere la mano con se stesso, o che, se lo facesse, in ogni caso non la conteremmo come stretta di mano. Quindi abbiamo in teoria 24 numeri da assegnare a 24 persone, il che funziona. Il problema però è che ciò non è vero, perché se esistesse una persona che non ha stretto la mano di nessuno, non ci potrebbe essere una persona che ha stretto 23 mani. Quindi l'insieme delle strette di mano è formato solo da 23 numeri: {1, 2, 3, …, 23} oppure {0, 1, 2, …, 22}. Ma allora, per il principio dei cassetti avremmo più persone che numeri di strette di mano, quindi almeno due persone dovrebbero avere stretto lo stesso numero di mani.

Livello 2

28. Scegliamo a caso n numeri naturali diversi, quanto deve essere minimo n, per essere sicuri che almeno due dei numeri scelti abbiano somma pari? [3]
29. Scegliamo a caso n numeri naturali diversi, quanto deve essere minimo n, per essere sicuri che almeno due dei numeri scelti abbiano somma dispari? [Il problema non ha soluzione]
30. Quanti numeri naturali minori di 20, dobbiamo scegliere a caso, al minimo, per essere sicuri che ce ne siano almeno due che sommati diano un risultato dispari? [11]
31. Scegliamo a caso 5 numeri dispari minori di 15, ed effettuiamo tutte le somme a due a due di questi numeri. Per esempio, se scegliamo i primi 5 numeri dispari: {1, 3, 5, 7, 9} otterremo: {1 + 3, 1 + 5, …, 1 + 9, 3 + 5, 3 + 7, 3 + 9, …, 7 + 9}. Tutte le somme ottenute sono diverse tra loro, comunque scegliamo i 5 numeri? [No]
32. Apriamo il vocabolario a caso e scegliamo una parola. Quante parole dobbiamo scegliere, minimo, per essere sicuri che almeno due di esse inizino e finiscano con la stessa lettera? [677]
33. Consideriamo i numeri interi da 1 a 8, ne prendiamo n a caso e siamo sicuri che almeno due dei numeri scelti hanno somma divisibile per 9, qual è il minimo valore di n? [5]

Lavoriamo insieme

Consideriamo l'insieme {1, 2, 3, 4, 5}, sappiamo che esso ha $2^5 = 32$ sottoinsiemi, vogliamo dimostrare che fra questi 32 sottoinsiemi ve ne sono almeno due disgiunti, la somma dei cui elementi è la stessa. La somma degli elementi varia da 0, somma degli elementi dell'insieme vuoto, a 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15. Quindi ovviamente i 32 sottoinsiemi non possono avere tutti somma diversa. Il problema è quello di provare che gli insiemi sono disgiunti. Supponiamo che A e B abbiano la stessa somma ma non sono disgiunti, cioè $A \cap B = C$, con $C \neq \emptyset$. Se consideriamo $A \setminus B$ e $B \setminus A$ questi sono insiemi ovviamente disgiunti, e hanno anche la stessa somma, perché abbiamo tolto da entrambi lo stesso insieme C. In particolare possiamo vedere che per esempio {1, 2, 3} e {1, 5} hanno somma 6, ma non sono disgiunti. Invece {1, 2, 3} \ {1} = {2, 3} e {1, 5} \ {1} = {5}.

Livello 3

34. Dal sacchettino dei 90 numeri della tombola ne scegliamo a caso n, per essere sicuri che la somma di almeno due di essi sia divisibile per 3, quanto deve essere n? [32]
35. Provare che fra i sottoinsiemi di {1, 2, …, n}, ce ne sono almeno due disgiunti che hanno la stessa somma.
36. Quanti numeri naturali minori di $2n$, dobbiamo scegliere a caso, al minimo, per essere sicuri che ce ne siano almeno due che sommati diano un risultato dispari? [$n + 1$]
37. Scegliamo 5 numeri dispari minori di n, ed effettuiamo tutte le somme a due a due. Se scegliessimo n = 26, potremmo ottenere tutte le somme distinte, per esempio scegliendo i numeri {1, 5, 11, 17, 25} otterremmo le somme {6, 12, 18, 26, 16, 22, 30, 28, 36, 42 }, tutte diverse tra loro. Qual è il minimo n per il quale possiamo ottenere, con una opportuna scelta, tutte somme diverse tra loro? [20]
38. Il sistema RGB (Red Green Blue) è usato nei monitor per visualizzare le diverse tonalità di colori. Ogni colore è formato da una terna di numeri compresi tra 0 e 255, che rappresenta la "quantità" di ciascuno dei tre colori principali. Così per esempio il rosso "puro" ha la terna (255, 0, 0). Si dice che si usano 16,7 milioni di diversi colori. È corretto? Quanti sono precisamente? [16777216]

39. Con riferimento al precedente esercizio, se volessimo ottenere almeno un miliardo di diverse tonalità, quanti diverse tonalità del singolo colore principale dovremmo usare? [1000]
40. Abbiamo un bersaglio circolare, quante freccette dobbiamo lanciare, con la certezza che colpiranno il bersaglio, in modo che almeno due di esse non distino più del raggio? [5]
41. Provare che, scelte sei persone a caso almeno tre di esse o sono mutuamente amiche o sono del tutto sconosciute. **Sugg**. Ragionare per assurdo.

Disposizioni semplici e ripetute

Ovviamente la scelta dei raggruppamenti può effettuarsi in diversi modi, anche nell'ambito dei raggruppamenti semplici o composti.

Esempio 3

- Nel gioco del superenalotto l'ordine con cui si susseguono i 6 numeri non è importante perché la sestina vincente è sempre scritta in ordine crescente e non importa se un certo numero sia stato estratto nella ruota di Napoli o in quella di Torino, ma solo che sia stato estratto.
- Invece nel caso del totocalcio l'ordine è importante, la colonna formata da 1 seguito da 13 X è diversa da quella in cui 1 è riferito alla seconda partita e tutti gli altri sono X.

Quindi una seconda distinzione riguarda la possibilità che i gruppi siano ordinati o no.

Definizione 2

Dato un insieme A di n elementi e un numero naturale k, chiamiamo **disposizioni di n oggetti di classe k**, il numero di gruppi di k elementi che possono formarsi con gli elementi di A, in modo che ogni gruppo differisca dagli altri o per un elemento o per l'ordine in cui si presentano gli elementi, o, se ripetuti, per il numero di volte che si ripetono.

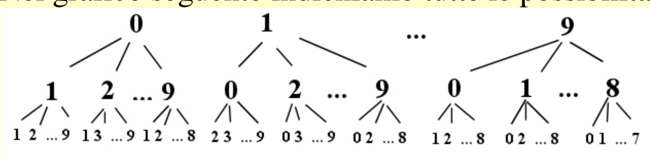
Notazione 1

Le disposizioni semplici si indicano con $D_{n,k}$, quelle con elementi ripetuti con $D'_{n,k}$.

Come possiamo calcolare il numero delle disposizioni?

Esempio 4

Il codice PIN di un bancomat è formato in genere da 5 cifre che possono anche ripetersi, supponiamo per semplicità che sia formato solo da 3 cifre tutte diverse scelte fra le 10 cifre 0, 1, 2, …, 9. Quanti diversi codici PIN possiamo ottenere? Nel grafico seguente indichiamo tutte le possibilità



La prima cifra la possiamo scegliere fra le 10, dato che la seconda cifra deve essere diversa dalla prima per tale cifra restano solo 9 scelte, ma per ognuna delle prime 10 scelte, quindi ci sono $10 \cdot 9 = 90$ scelte. Infine per la terza cifra rimangono 8 scelte per ognuna delle precedenti 90 scelte. Quindi il totale è $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

Generalizzando i risultati dell'esempio precedente otteniamo facilmente il seguente risultato.

Teorema 1

Il numero di disposizioni semplici di n oggetti di classe k è dato dal prodotto di k numeri interi consecutivi decrescenti a partire da n, in simboli: $D_{n,k} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot (n - k + 1)$.

DimostrazionePer esercizio, sulla falsariga dell'esempio 3.

Abbiamo detto che i codici PIN reali hanno più cifre anche ripetute, proprio perché allora sarebbe molto facile per un malintenzionato trovarlo, dato che con sole 3 cifre diverse le possibilità sarebbero soltanto 720. Senza contare il fatto che in questo modo ci sarebbero solo 720 clienti che possono usare un bancomat, se no siamo costretti a fare usare lo stesso codice a due diversi clienti.

Esempio 5

Se aumentiamo a 5 le cifre e accettiamo la loro ripetizione è ovvio che ogni volta vi saranno sempre 10 scelte, dato che la seconda scelta può coincidere con la prima e le successive con una delle precedenti. Quindi in totale i codici diversi saranno $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100000$. Come si vede adesso intercettare un codice PIN a tentativi diventa praticamente impossibile (anche perché per motivi di sicurezza dopo 5 tentativi falliti la carta viene ritirata), ma i clienti che possono accontentarsi sono molti di più e anche se ovviamente ci saranno due clienti con lo stesso PIN, perché 100000 è sempre un numero *piccolo*, per i tanti cittadini che usano il bancomat, la possibilità che due di essi abbiano lo stesso numero e possano incontrarsi scambiandosi le carte, anche per errore, è molto remota. Oltre tutto vi è da considerare che il bancomat dipende anche dalla banca, quindi per ogni banca possono esserci 100000 pin diversi.

Dallo svolgimento del precedente esempio, si ricava facilmente il seguente risultato.

Teorema 2

Il numero di disposizioni di n oggetti, ognuno ripetuto fino a un massimo di k volte è $D'_{n,k} = n^k$.
Dimostrazione Per esercizio, sulla falsariga dell'esempio 5.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Quanti numeri di 3 cifre hanno almeno una cifra uguale a 7?
Conviene calcolare quanti non hanno neanche una cifra uguale a 7. Un numero di 3 cifre senza una certa cifra, per esempio il 7, è un numero per il quale la prima cifra si può scegliere fra 8 numeri (escluso 0 e 7), la seconda e la terza fra 9 numeri, quindi in totale vi sono $8 \times 9 \times 9 = 648$ numeri che non hanno il 7 fra le loro cifre, su un totale di 900. Quindi quelle che hanno almeno un 7 sono $900 - 648 = 252$.

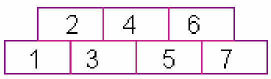
Si ricorda che i numeri NON possono iniziare per 0, i codici, i PIN e simili, sì.

***Livello* 1**

1. In un campionato di calcio a diciotto squadre, ciascuna squadra incontra le altre due volte. Quante partite si sono svolte in totale? [306]
2. A una finale olimpica dei 100 metri partecipano 8 atleti. Vengono premiati i primi tre. Quante sono le possibili classifiche dei premiati? [336]
3. Con riferimento al precedente problema, se tre dei finalisti sono italiani, quante sono le possibili classifiche dei premiati che contengono almeno un italiano? [276]
4. Quanti numeri di 5 cifre tutte diverse esistono? [30240]
5. Quanti numeri di 3 cifre tutte dispari esistono? [60]
6. Quanti numeri con 3 cifre pari (0 è considerato pari, ma non può stare al primo posto) e 1 dispari, tutte diverse, esistono? [1020]
7. Quanti numeri di 3 cifre hanno almeno una cifra uguale a 7? [252]
8. Marco scrive il numero di telefono di Daria in un foglio, ma dopo avere scritto 3471585 finisce l'inchiostro e riporta a mente gli altri tre. Nel tempo che cerca una nuova penna però dimentica le cifre mancanti. Quante telefonate deve fare Marco per essere sicuro di contattare Daria? [1000]
9. Con riferimento al problema precedente, quante sono le telefonate se ricorda che le cifre mancanti sono diverse tra loro? [720]
10. Con riferimento al problema 8, quante sono le telefonate se ricorda che le cifre mancanti sono diverse tra loro e formate da due pari e un dispari, e senza zeri? Se le cifre possono essere uguali? [180; 240]
11. Quanti sono i numeri di 4 cifre formati utilizzando tutte quelle che compaiono in 2012? [9]

12. Una targa italiana è formata da due lettere, tre numeri e due lettere. Quante diverse targhe possiamo formare, scegliendo le lettere fra 26? E se non usiamo O e I? [456976000; 331776000]
13. Un'urna contiene 5 palline numerate da 1 a 5. Estraiamo 3 palline rimettendo, dopo ogni estrazione, la pallina nell'urna. Quante diverse terne di estrazioni possiamo ottenere? Quante di queste non contengono il numero 5? [125; 64]
14. Come cambiano i risultati dell'esercizio precedente se invece a ogni estrazione non rimettiamo nell'urna la pallina estratta? [60; 24]
15. Un test è composto da 10 domande Vero-Falso, quante sono tutte le diverse sequenze di risposte possibili? [1024]

Livello 2

16. Quanti numeri di 4 cifre hanno almeno due cifre uguali? Sugg. Sottrarre dai numeri a 4 cifre quelli con le cifre diverse. [4464]
17. Quanti numeri di 4 cifre hanno esattamente due cifre uguali? [3888]
18. In un campionato di calcio ciascuna squadra incontra le altre due volte. Se in totale si sono svolte 182 partite, quante squadre vi sono? [13]
19. A una finale olimpica vengono premiati i primi tre concorrenti. Se le possibili classifiche dei premiati sono 990, quanti sono i partecipanti? [11]
20. A una finale olimpica partecipano 18 concorrenti. Se le possibili classifiche dei premiati sono 73440, quanti sono i premiati? [4]
21. In un pannello elettrico vi sono 4 interruttori adiacenti. In quanti modi diversi il pannello può trovarsi in modo che non vi siano mai due interruttori adiacenti entrambi spenti? [8]
22. Risolvere il problema precedente con 5 interruttori. [12]
23. Consideriamo tutte le tabelle di verità degli enunciati composti da *n* proposizioni logiche, quante sono quelle diverse tra loro? $\left[2^{2^n}\right]$
24. Nel seguente gioco si deve andare dalla cella 1 alla cella 7, con le seguenti regole: da una cella si può andare ad una confinante solo se quest'ultima ha un numero superiore. In quanti diversi modi si può completare il percorso? 

[13]
25. Quanti sono i numeri naturali di quattro cifre in cui compare una e una sola volta la cifra 5 ed essa è la cifra più grande presente nel numero? [425]
26. Quanti numeri fra 1 e 2013 hanno almeno una cifra uguale a 4? [543]
27. Nella città di Fantasia non vi sono due cittadini che abbiano gli stessi denti mancanti, cioè ci possono essere due a cui mancano due denti, ma se a uno mancano il sesto e il settimo dell'arcata inferiore, all'altro se manca il sesto non può mancare il settimo. Qual è al massimo la popolazione di questo paese, se ognuno ha un massimo di 32 denti e solo il presidente ne ha esattamente 32? [4294967296]
28. In una gara di matematica vi sono tre categorie di età: junior, standard e senior. I partecipanti per ciascuna categoria sono rispettivamente 10, 12 e 15. Se in ogni categoria vengono premiati i primi tre quante sono le diverse classifiche finali dei premiati? [2594592000]
29. Le diverse sequenze di risposte possibili a un test di *n* domande Vero-Falso sono 32768. Quante sono tutte le domande? [15]
30. Le diverse sequenze di risposte possibili a un test di *n* domande Vero-Falso sono 393216. Quante sono tutte le domande? [I dati sono incoerenti]

Livello 3

31. Ad una gara mondiale di matematica con 10 domande, in cui ogni domanda ha 3 diverse opzioni, hanno partecipato un milione di studenti. È possibile che fra le diverse sequenze di risposte fornite ci siano tutte le sequenze possibili, considerando il fatto che alle domande si può anche non rispondere? [No, servono almeno 1048576 partecipanti]
32. Nel totocalcio si può giocare un risultato fisso (1, X, 2), oppure una doppia (p.e. 1 X, che significa che si indovina purché si verifichi uno dei due risultati), o un tripla (certezza di indovinare: 1 X 2). Da quante colonne è costituito un sistema del totocalcio a 14 partite, con 5 doppie? E uno con 5 triple? E uno con 2 triple e 4 doppie? [32; 243; 144]

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere l'equazione $D_{n,5} = 3 \cdot D_{n,4}$. “Traduciamo” i simboli:

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \cdot (n - 4) = 3 \cdot n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3)$$

ovviamente deve essere $n \geq 5$, pertanto possiamo semplificare tutti i fattori uguali, ottenendo: $n - 4 = 3 \Rightarrow n = 7$. Verifichiamo: $D_{7,5} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$, $3 \cdot D_{7,4} = 3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$.

Risolvere le seguenti equazioni

Livello 3

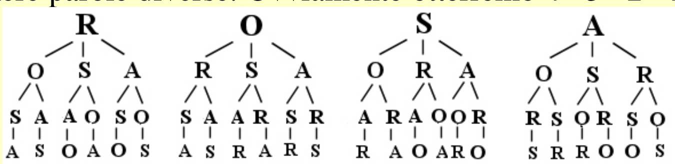
33. $D_{n,4} = 8 \cdot D_{n,3}$ [11] $D_{n,7} = 11 \cdot D_{n,6}$ [17] $D_{n,15} = 3 \cdot D_{n,14}$ [17] $D_{n,5} = 3 \cdot D_{n,3}$ [∅]
34. $D_{n,5} = 72 \cdot D_{n,3}$ [12] $D_{n,8} = 72 \cdot D_{n,6}$ [15] $D_{n,5} = 60 \cdot D_{n,2}$ [7] $D_{n,9} = 24 \cdot D_{n,6}$ [10]
35. $D_{n,10} = 120 \cdot D_{n,7}$ [13] $D_{n,4} + D_{n,2} = 7/3 \cdot D_{n,3}$ [5] $D_{n,5} - D_{n,3} = 11/4 \cdot D_{n,4}$ [7]
36. $D_{n,5} - 2 \cdot D_{n,4} = 3 \cdot D_{n,3}$ [∅] $D_{n,5} + 3 \cdot D_{n,4} = 35 \cdot D_{n,3}$ [8] $D_{n,2} + D_{n,5} = 337/96 \cdot (D_{n,4} + 5 \cdot D_{n,3})$ [10]
37. $D_{n,3} + 5 \cdot D_{n-1,4} = 1005/28 \cdot D_{n+1,2}$ [7] $D_{n+1,7} - 5 \cdot D_{n+2,6} + 70 \cdot D_{n,5} = 0$ [9]

Permutazioni semplici e ripetute

Abbiamo già osservato che alcuni può anche significare tutti, come facciamo per esempio quando vogliamo costruire gli anagrammi di una certa parola.

Esempio 6

Quanti sono gli anagrammi, anche privi di senso, della parola ROSA? Il problema equivale a scegliere tutte le 4 lettere e a ordinarle in modo diverso per ottenere parole diverse. Ovviamente otterremo $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ diverse parole, come mostrato in figura.



Definizione 3

Dato un insieme A di n elementi e un numero naturale k, chiamiamo **permutazioni di *n* oggetti**, il numero di gruppi che possono formarsi con tutti gli elementi di A, in modo che ogni gruppo differisca dagli altri solo per l'ordine in cui si presentano gli elementi.

Notazione 2

Le permutazioni semplici si indicano con P_n, quelle con ripetizione con $P_{a,b, \ldots, k}$.

Al prodotto di tutti i numeri interi consecutivi da 1 fino a n, si associa un nome e un simbolo.

Definizione 4

Il prodotto dei primi n numeri interi consecutivi si chiama **fattoriale di *n***.

Notazione 3

Il fattoriale di n si indica con $n!$.

A questo punto è ovvio il seguente risultato.

Teorema 3

Il numero di permutazioni semplici di n oggetti è $n!$.

Cosa accade se imponiamo che qualcuna delle scelte possa ripetersi?

Esempio 7

Quanti sono gli anagrammi della parola CORO? Sono 24 come quelli della parola ROSA? No, perché mentre per ROSA scambiando fra loro la seconda e la quarta lettera avremo la parola diversa RASO, facendo lo stesso con CORO, otterremo ancora CORO. Quindi la domanda che dobbiamo porci è: quanti dei 24 anagrammi di CORO sono uguali fra loro? Ovviamente sono tanti quanti i modi di scambiare le lettere uguali, cioè 2. Quindi avremo solo 24/2 = 12 diversi anagrammi di CORO.

Generalizzando il precedente esempio otteniamo il seguente risultato.

Teorema 4

Il numero di permutazioni di n oggetti, ognuno ripetuto k_i volte, con $1 \le i \le h$ è $\dfrac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_h)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_h!}$

Dimostrazione

Basta tenere conto del fatto che fra le $n! = (k_1 + k_2 + \ldots + k_h)!$ permutazioni possibili ve ne sono $k_1!$ che rappresentano lo stesso simbolo, quando scambiamo fra loro i k_1 simboli uguali fra loro, poi ve ne sono altri $k_2!$ che rappresentano ancora la stessa sequenza e così via, fino a $k_h!$. Quindi dobbiamo dividere il tutto per il prodotto di tutte le sequenze di simboli uguali.

Per comprendere meglio la dimostrazione precedente consideriamo un altro esempio.

Esempio 8

Quanti sono gli anagrammi della parola MAMMA? I 5! = 120 anagrammi che possiamo ottenere scambiando fra loro tutte le 5 lettere, sono in realtà formate da 3! = 6 che rappresentano le stesse parole perché sono ottenute scambiando fra loro le lettere M, per esempio vi sono 6 diverse MAMMA. Per capirci meglio indichiamo le tre lettere con 3 simboli diversi M, m e *m*. Allora le parole MAm*m*A, MA*m*mA, mAM*m*A, mA*m*MA, *m*AMmA e *m*AmMA, sono 6 diverse permutazioni che però rappresentano la stessa parola. Quindi i 120 anagrammi di partenza adesso sono diventati solo 120/6 = 20. Allo stesso modo possiamo scambiare fra loro le A, ottenendo altre coppie di parole che sono uguali. Per esempio indicando con A e a, le permutazioni MAMMa e MaMMA sono in effetti la stessa parola. Quindi in totale abbiamo 20/2 = 10 diversi anagrammi, che sono i seguenti: AAMMM, AMAMM, AMMAM, AMMMA, MAAMM, MAMAM, MAMMA, MMAAM, MMAMA, MMMAA.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Quanti sono gli anagrammi della parola COMBINATORICA, anche prive di senso? Abbiamo 13 lettere non tutte distinte, quindi il problema riguarda le permutazioni con ripetizione di 13 elementi, in cui 4 lettere (A, C, I, O) si ripetono due volte. Sono perciò $\dfrac{13!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = 389\,188\,800$

Quante di queste iniziano con la lettera C? Ciò equivale a contare gli anagrammi della parola OMBINATORICA, che sono $\dfrac{12!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 59\,875\,200$. Quante iniziano per M? Stavolta dobbiamo contare gli anagrammi di COBINATORICA, che sono $\dfrac{12!}{2! \cdot 2! \cdot 2! 2!} = 29\;937\;200$

Quando si parla di anagrammi questi possono essere anche privi di senso nella lingua italiana

Livello 1

1. Quanti sono gli anagrammi di AMORE? Quanti iniziano per A? Quanti iniziano per A e finiscono per E? [120; 24; 6]

2. Quanti sono gli anagrammi di MATEMATICA? Quanti iniziano per M? Quanti iniziano e finiscono per M? Quanti iniziano per M e non finiscono per M? [151200; 30240; 3360; 26880]
3. Marzia ha saputo che il suo professore assegna sempre dei test con 12 domande con 4 risposte possibili, indicate con A, B, C, D in modo che le risposte esatte siano suddivise esattamente fra le 4 opzioni. Quante sono le possibili sequenze di 12 risposte che soddisfano questi requisiti? [19958400]
4. Con riferimento al quesito precedente, quante diventano le sequenze se sappiamo che la prima risposta è uguale all'ultima? E se invece prima e ultima sono diverse? [806400; 19152000]
5. Quanti numeri di 5 cifre dispari tutte diverse possiamo costruire? [120]
6. Quanti numeri di 5 cifre pari tutte diverse (0 lo consideriamo pari) possiamo costruire? [96]
7. In quanti modi 6 persone possono sedersi in fila su sei posti? E se si siedono attorno a un tavolo, la risposta cambia? Si tenga conto che quello che conta non è la sedia in cui si è seduti, ma la successione delle persone sedute. [720; Sì: 120]
8. 7 interruttori attivano macchine diverse, in quanti modi possono esservene 3 accese e 4 spente? [35]
9. Il codice ASCII viene utilizzato per codificare lettere, numeri e simboli, usando il codice binario che prevede solo i simboli 0 e 1. Ogni elemento del codice è una sequenza di 8 cifre scelte fra 0 e 1. Quanti diversi simboli possiamo codificare? [256]
10. Se avessimo bisogno di codificare 1000 simboli da quante cifre 0 o 1, minimo, dovrebbe essere formato ogni simbolo? [10]
11. 7 sedie sono poste in riga per essere occupate da 2 professori e 5 studenti. In quanti modi possono sistemarsi le 7 persone in modo che gli insegnanti siano seduti agli estremi? [240]
12. Anna, Bice, Carla, Dario, Elio e Franco vanno in vacanza ed affittano 3 stanze doppie. In quanti modi possiamo sistemarli nelle stanze in modo che Anna stia con Dario e Carla non stia con Elio? [12]

Livello 2

13. 9 sedie sono poste in riga per essere occupate da 3 professori e 6 studenti. In quanti modi possono sedersi i 9 in modo che gli studenti siano seduti tutti uno accanto all'altro? [17280]
14. In quanti modi 3 maschi e 4 femmine possono sedersi in una fila da 7 in modo che agli estremi della file siano sedute persone dello stesso sesso? Quante di sesso diverso? [2160; 2880]
15. Con le cifre 1, 2, 3, 4 e 5, possiamo formare 120 diversi numeri di 5 cifre distinte. Se ordiniamo questi numeri dal più piccolo al più grande, quale sarà il 75°? [41325]
16. Quanti numeri di 4 cifre hanno la somma delle cifre pari a 5? [35]
17. La famosa partita Italia Germania dei mondiali 1970 finì 4 a 3 per l'Italia. Se non sappiamo la sequenza corretta dei gol, quante sono le diverse possibilità? [35]
18. Con riferimento al quesito precedente se conosciamo solo il risultato, ma non sappiamo chi ha fatto 4 reti e chi 3, quante sono le sequenze? [70]
19. Consideriamo la parola MITO, quanti dei suoi anagrammi non contengono nessuna delle lettere scritta nello stesso posto di MITO (cioè IMOT va bene, IMTO no)? [9]
20. Tre coppie di coniugi vanno a teatro e prenotano un'intera fila di sei posti. In quanti diversi modi possono sedersi se ciascun marito è seduto accanto alla rispettiva moglie? [12]
21. Con riferimento al precedente quesito, le 6 persone si siedono come vogliono, in modo però che due di essi, Amedeo e Marta, non stiano seduti accanto. Quanti sono i modi possibili? [480]
22. Sempre con riferimento al precedente quesito, stavolta Amedeo sta seduto alla destra di Marta, non importa se accanto o no ad ella. Quanti sono i modi? [360]
23. Un codice segreto è formato da 12 simboli, a 3 a 3 uguali rispettivamente a ♣♦♥♠. Quanti codici presentano primo e ultimo simbolo uguali? Quanti li hanno diversi? [67200; 19891200]

Livello 3

24. Con riferimento al precedente quesito, quanti di essi sono scritti in modo che i 4 simboli occupino i primi 4, i secondi 4 e gli ultimi 4 posti? E quanti dei precedenti non hanno simboli consecutivi uguali? [13824; 7776]
25. 8 sedie sono poste in riga per essere occupate da 3 italiani e 5 francesi. In quanti modi possono sistemarsi le 8 persone in modo che almeno uno degli italiani sia seduto agli estremi? [25920]
26. Un codice segreto è formato da 8 simboli diversi scelti fra lettere dell'alfabeto italiano e cifre. Quanti possiamo formarne imponendo che vi siano massimo 4 vocali e minimo 4 cifre? [66071376000]
27. Scriviamo tutti gli anagrammi della parola Matematica nell'ordine dei vocabolari. Quale parola occupa il 2014° posto? Quale posto occupa la parola Cemaatimat? [Aacmiamett; 51285°]
28. Un quesito di Henry Dudeney. Consideriamo il seguente triangolo di lettere, in quanti modi diversi

possiamo leggere la parola ABRACADABRA? [1024]

A
B B
R R R
A A A A
C C C C C
A A A A A A
D D D D D D D
A A A A A A A A
B B B B B B B B B
R R R R R R R R R R
A A A A A A A A A A A

Lavoriamo insieme

Con quanti zeri finisce 3479!? Essendo 3479! un prodotto di 3479 numeri interi, gli zeri finali dipendono da quanti fattori 10 esso contiene. Cioè da quanti 2 e da quanti 5 contiene, e poiché i 5 sono meno dei 2, basta contare quanti 5 contiene. Il più grande multiplo di 5 contenuto in 3479 è 695 · 5 = 3475. Quindi abbiamo 695 fattori 5. Qualcuno di questi però contiene più fattori 5, per esempio i multipli di 25, che sono 139 (dato che 25 · 139 = 3475); poi i multipli di 125 che sono 27 (poiché 125 · 27 = 3375); quindi i multipli di 625, che sono 5 (dato che 5 · 625 = 3125); infine 1 multiplo di 3125. Quindi in totale l'esponente del fattore 5 è 695 + 139 + 27 + 5 + 1 = 867, che sono proprio il numero degli zeri finali di 3479!.

Livello 2

Determinare con quanti zeri finiscono i seguenti fattoriali

29. 15! [3] 20! [4] 25! [6] 125! [31] 1235! [306] 2013! [501]
30. Per quanti valori di n, n! finisce con 5 zeri? E con 6 zeri? [Nessuno; 5]
31. Determinare la cifra delle unità del numero 1! + 2! + 3! +…+ 10! [3]
32. Determinare la cifra delle unità del numero 1! – 2! + 3! – 4! + … – 10! [9]

Lavoriamo insieme

Vogliamo semplificare la seguente somma: $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+...+\frac{999}{1000!}$. Scriviamo nel seguente modo:

$$\frac{2-1}{2!}+\frac{3-1}{3!}+\frac{4-1}{4!}+...+\frac{1000-1}{1000!}=\frac{2}{2!}-\frac{1}{2!}+\frac{3}{3!}-\frac{1}{3!}+\frac{4}{4!}-\frac{1}{4!}+...+\frac{1000}{1000!}-\frac{1}{1000!}=$$

$$=\frac{1}{1!}-\cancel{\frac{1}{2!}}+\cancel{\frac{1}{2!}}-\cancel{\frac{1}{3!}}+\cancel{\frac{1}{3!}}-\cancel{\frac{1}{4!}}+...+\cancel{\frac{1}{999!}}-\frac{1}{1000!}=1-\frac{1}{1000!}$$

Livello 3

33. 2001 divide 2002! poiché 2002! = 2000! × 2001 × 2002. Qual è il più grande numero intero k, tale che 2001^k divide 2002!? [71]
34. n! finisce con 100 zeri, qual è il minimo valore che può assumere n? [405]
35. Con quanti zeri finisce 5^n? $\left[\frac{5^n-1}{4}\right]$
36. Provare che la cifra delle unità del numero 1! + 2! + 3! +…+ n! è 3 per ogni $n > 4$.
37. Provare che la cifra delle unità del numero 1! – 2! + 3! – 4! + … + $(-1)^n \cdot n!$ è 9 per $n > 4$.
38. Semplificare la seguente somma: $\frac{2}{2!}+\frac{4}{3!}+\frac{6}{4!}+...+\frac{998}{500!}$. $\left[2-\frac{2}{500!}\right]$
39. Semplificare il seguente prodotto: $\frac{1}{2!}\cdot\frac{2}{3!}\cdot\frac{3}{4!}\cdot...\cdot\frac{99}{100!}$. $\left[\frac{1}{2!\cdot3!\cdot4!\cdot...\cdot98!\cdot100!}\right]$

Combinazioni semplici e ripetute

A questo punto rimane da considerare un ultimo tipo di raggruppamento, quello in cui l'ordine non importa, come nel caso delle estrazioni del lotto, in cui importa solo determinare i numeri estratti, non l'ordine in cui lo sono.

Definizione 5

Dato un insieme A di n elementi e un numero naturale k, chiamiamo **combinazioni di n oggetti di classe k**, il numero di gruppi di k elementi che possono formarsi con gli elementi di A, in modo che ogni gruppo differisca dagli altri solo per uno o più elementi.

Notazione 4

Le combinazioni semplici si indicano con $C_{n,k}$, o più comunemente con $\binom{n}{k}$.

Le combinazioni con ripetizione con il simbolo $C'_{n,k}$

Vediamo un esempio.

Esempio 9

Quante sono le diverse estrazioni in una certa ruota al gioco del lotto? Si tratta di scegliere 5 numeri fra 90. Saremmo perciò tentati di dire che sono $D_{90,5} = 90 \cdot 89 \cdot 87 \cdot 88 \cdot 86$. Solo che in questo caso l'ordine non è importante, la cinquina (1, 2, 3, 4, 5) e la cinquina (1, 3, 2, 5, 4) sono considerare uguali ai fini del gioco. Ciò significa che ogni cinquina si può ripetere in 5! modi formalmente diversi ma effettivamente uguali. Quindi il numero cercato è $\binom{90}{5} = \frac{D_{90,5}}{5!} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 43\ 949\ 268$.

Generalizzando la procedura dell'esempio si dimostra il seguente risultato.

Teorema 5

Il numero di combinazioni semplici di n oggetti è

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{D_{n.k}}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

L'ultimo termine dell'uguaglianza è facilmente giustificabile.

Esempio 10

Il numeratore di $\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$ è diverso da 90! per la mancanza del prodotto dei primi 85 numeri interi consecutivi, cioè di 85!. Allora se moltiplichiamo numeratore e denominatore per 85! possiamo scrivere l'espressione nel seguente modo equivalente: $\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 85!}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 85!} = \frac{90!}{5! \cdot 85!}$.

La precedente forma di scrivere l'espressione delle combinazioni semplici porta a enunciare il seguente risultato.

Teorema 6

Si ha: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Dimostrazione Per il teorema 5 abbiamo $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot [n-(n-k)]!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$.

In effetti potevamo anche dire più semplicemente che scegliere k elementi fra n è lo stesso che scegliere i rimanenti $n - k$.

Che significato possiamo dare al simbolo $\binom{n}{0}$? Che significa *non* scegliere elementi? In quanti modi possiamo *non* scegliere elementi? Tenuto conto del teorema precedente $\binom{n}{0} = \binom{n}{n}$ e in questo caso scegliere tutti gli elementi si può e ciò si fa ovviamente in un modo solo.

Definizione 6

Si ha $\binom{n}{0} = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Le combinazioni semplici si ritrovano nello sviluppo della potenza di un binomio.

Esempio 11

Sviluppiamo $(a + b)^4$ senza utilizzare la regola legata al cosiddetto triangolo di Tartaglia, che permette di determinare i coefficienti dello sviluppo. Scriviamo quindi $(a + b)^4 = (a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b)$. Eseguendo la moltiplicazione senza usare le potenze troveremo dei monomi che si distinguono fra loro solo dal numero di volte in cui compare ciascuna delle lettere a e b. Andiamo infatti dai monomi che contengono 4 a e nessun b, a quelli che contengono 3 a e 1 b e così via fino a 0 a e 4b. Quindi per contare quanti di questi monomi ci sono per ogni tipo, in modo da raggrupparli (cioè *aaab* e *abaa*, per esempio), dobbiamo usare proprio le combinazioni semplici. Infatti per esempio contare quanti monomi sono simili ad *aaab*, equivale a stabilire in quanti modo possiamo distribuire la lettera b su 4 posti, in modo che l'ordine non conti, e questi sono proprio $\binom{4}{1}$. Quindi non è difficile capire che possiamo scrivere:

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0} \cdot a^4 + \binom{4}{1} \cdot a^3 b + \binom{4}{2} \cdot a^2 b^2 + \binom{4}{3} \cdot ab^3 + \binom{4}{4} \cdot b^4.$$

Ragionando come nell'esempio precedente possiamo dimostrare il seguente risultato.

Teorema 7 (del binomio di Newton)

Si ha: $(a+b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} b + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} \cdot ab^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} b^k$.

Definizione 7

Le combinazioni di n oggetti di classe k vengono anche chiamate **coefficienti binomiali**.

Quindi possiamo riscrivere anche il triangolo di Tartaglia in funzione dei coefficienti binomiali, abbiamo però bisogno di dare un significato anche al simbolo $\binom{0}{0}$, che per estensione della definizione 6, viene anch'esso posto uguale a 1.

$$\begin{array}{llllll} 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{array} = \begin{array}{llllll} \binom{0}{0} \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\ \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\ \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\ \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \end{array}$$

In questo triangolo abbiamo ovviamente la simmetria stabilita dal Teorema 6, ma anche la regola che permette di determinare ogni termine di una riga, diverso da quelli estremi, mediante la somma di due termini della riga precedente.

Esempio 12

Considerando il triangolo di Tartaglia abbiamo, per esempio, $\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$.

Il risultato precedente si può generalizzare.

Teorema 8 (Formula di Stifel)

Si ha: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Dimostrazione

Per il teorema 6 abbiamo:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot\left[n-1-(k-1)\right]!} + \frac{(n-1)!}{k!\cdot(n-1-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!\cdot(n-1-k)!}$$

Per capire come effettuare il minimo comune denominatore, consideriamo un caso particolare, per esempio per $n = 10$ e $k = 7$: $\frac{9!}{6!\cdot 3!} + \frac{9!}{7!\cdot 2!} = \frac{9!}{6!\cdot 2!\cdot} + \frac{9!}{6!\cdot 7\cdot 2!}$, a questo punto è facile capire che il minimo comune denominatore è 7! · 3! E si ha: $\frac{9!}{6!\cdot 3!} + \frac{9!}{7!\cdot 2!} = \frac{9!\cdot 7 + 9!\cdot 3}{7!\cdot 3!} = \frac{9!\cdot 10}{7!\cdot 3!} = \frac{10!}{7!\cdot 3!}$. A questo punto diventa più comprensibile il procedimento generale che mostriamo adesso.

$$\frac{(n-1)!\cdot k + (n-1)!\cdot(n-k)}{(k)!\cdot(n-k)!} = \frac{(n-1)!\cdot(k+n-k)}{(k)!\cdot(n-k)!} = \frac{(n-1)!\cdot n}{(k)!\cdot(n-k)!} = \frac{n!\cdot}{(k)!\cdot(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Che è la tesi.

I protagonisti

Michael Stifel nacque nel 1487 a Esslingen, in Germania. Nel 1511 fu ordinato monaco nel monastero Agostiniano di Esslingen. Già nel 1522 fu però espulso perché non condivideva il fatto che anche i poveri dovessero dare le elemosine. Si trasferì quindi nella casa di Lutero. Divenne pastore luterano nella cittadina di Lochau, ma anche qui dovette dimettersi a causa di una sua falsa previsione sulla fine del mondo.

Dopo varie traversie, nel 1559 ottenne un posto di lettore di aritmetica e geometria presso l'Università di Jena. Qui inventò i logaritmi indipendentemente da Napier con un metodo del tutto diverso. La sua più famosa opera è *Arithmetica integra*, pubblicata nel 1544. In quest'opera usa fra i primi i coefficienti binomiali e i simboli +, -, √. Mediante una complicata risistemazione delle lettere LEO DECIMVS provò che il papa Leone X era il numero 666, cioè il numero della bestia. Morì a Jena il 19 Aprile 1567.

Mediante le combinazioni possiamo risolvere un interessante problema aritmetico.

Esempio 13

Quanti divisori ha 12? Scomponiamo il 12 ottenendo $2^2 \cdot 3$. Ora ci chiediamo cosa è un divisore di 12? Un numero che contiene solo fattori presenti in 12, cioè un numero del tipo $2^a \cdot 3^b$, in cui a può essere un qualunque numero intero compreso tra 0 e 2, e b un qualunque intero compreso tra 0 e 1. Quindi per scrivere un divisore di 12 dobbiamo scegliere opportunamente a e b, poiché ci sono 3 scelte per a e 2 per b, in totale i divisori sono $\binom{2}{1} \times \binom{3}{2} = 2 \times 3 = 6$.

Sono: ($a = b = 0$), 2 ($a = 1$, $b = 0$), 4 ($a = 2$, $b = 0$), 3 ($a = 0$, $b = 1$), 6 ($a = b = 1$), 12 ($a = 2$, $b = 1$)

Quanto visto nel precedente esempio può generalizzarsi nel seguente risultato.

Teorema 9

Sia $N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_h^{\alpha_h}$, in cui i p_i sono numeri primi, ha $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots (\alpha_h + 1)$ divisori.

Dimostrazione

Ogni divisore di N è del tipo $p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_h^{\beta_h}$, in cui gli esponenti possono assumere tutti i valori interi da 0 a α_h e quindi ci sono $\alpha_1 + 1$ scelte per p_1, $\alpha_2 + 1$ scelte per p_2, …, $\alpha_h + 1$ scelte per p_h. Cioè quello che volevamo provare.

Concludiamo con un importante risultato, che presentiamo con un esempio.

Esempio 14

Consideriamo il numero 1234, le cui cifre sappiamo possono permutarsi in 24 modi. Alcune di queste hanno le cifre che non occupano alcuna delle posizioni relative a esse, come 2143, mentre altri invece hanno almeno una cifra corrispondente alla propria posizione, come 1342, in cui 1 sta nella posizione 1. Per semplicità una cifra che occupa la posizione relativa al proprio valore la chiamiamo **punto fisso**. Se volessimo sapere quante delle 24 permutazioni hanno almeno un punto fisso, come dobbiamo fare? Ovviamente le 24 permutazioni sono suddivise in 4 permutazioni da 6 elementi, in cui ogni cifra è un punto fisso (4 iniziano per 1, 4 hanno il 2 nella posizione 2 e così via). Ma altrettanto ovviamente alcune di queste hanno più di un punto fisso e perciò dobbiamo contare una sola volta. Per esempio 1234 fa parte di tutti e quattro gli insiemi, dato che ha tutti i punti fissi.

Per risolvere il quesito posto nel precedente esempio, enunciamo il seguente risultato.

Teorema 10 (Principio di inclusione-esclusione)

Dati n insiemi finiti, la loro unione ha un numero di elementi dato dalla seguente regola: sommiamo gli elementi degli insiemi, togliamo gli elementi di tutte le intersezioni a due a due, aggiungiamo gli elementi di tutte le intersezioni a tre a tre e così via.

Dimostrazione

Consideriamo solo il caso di tre insiemi, che può facilmente generalizzarsi.

Intanto la regola possiamo scriverla in questo modo:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

Prendere gli elementi dell'unione significa ovviamente prenderli una sola volta, ecco perché dobbiamo togliere poi gli elementi comuni a ogni coppia di insiemi. Solo che in questo modo abbiamo eliminato del tutto gli elementi comuni a tutti gli insiemi, che perciò dobbiamo aggiungere.

Riprendiamo l'esempio e risolviamolo usando il principio di inclusione – esclusione.

Esempio 15

Gli insiemi da considerare sono A = {1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432} con 1 punto fisso; B = {1234, 1243, 3214, 3241, 4213, 4231}, con 2 fisso; C = {1234, 1432, 2134, 2431, 4132, 4231} con 3 fisso; infine D = {1234, 1324, 2134, 2314, 3124, 3214} con 4 fisso. Osserviamo che vi sono elementi che si ripetono, in particolare $A \cap B$ = {1234, 1243}, $A \cap C$ = {1234, 1234}, $A \cap D$ = {1234, 1324}, $B \cap C$ = {1234, 4231}, $B \cap D$ = {1234, 3214}, $C \cap D$ = {1234, 2134}. Quindi dai 24 elementi dei singoli insiemi dobbiamo togliere quelli già contati. In questo modo però 1234 che avevamo contato 4 volte nella prima somma, adesso lo abbiamo eliminato 6 volte, quindi dobbiamo "recuperare" questi elementi, dobbiamo perciò aggiungere gli elementi degli insiemi $A \cap B \cap C = A \cap B \cap D = A \cap C \cap D = B \cap C \cap D$ = {1234}, così però abbiamo contato 1234 una volta in più, dobbiamo quindi toglierlo, cioè dobbiamo eliminare gli elementi dell'insieme $A \cap B \cap C \cap D$ = {1234}. Infine le permutazioni cercate sono in numero di

$$6 + 6 + 6 + 6 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2 + 1 + 1 + 1 + 1 - 1 = 15$$

e sono: 1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, 3214, 3241, 4213, 4231, 2134, 2431, 4132, 2314, 3124.

Non ci resta che considerare le combinazioni ripetute.

Esempio 16

Da un insieme di 5 oggetti possiamo prenderne 3, indipendentemente dall'ordine in $\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot \cancel{4}^{2} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 10$ diversi modi. Cosa accade se invece accettiamo che possiamo ripetere alcuni dei simboli, per esempio ognuno per un massimo di 2 volte? È come se in un sacchetto mettiamo i 5 oggetti e facciamo 2 estrazioni, in modo però che la prima volta ci limitiamo a registrare l'oggetto estratto, quindi lo rimettiamo nel sacchetto. In questo modo possiamo fare un totale di 5 × 5 = 25 estrazioni. Però siccome l'ordine non conta, dobbiamo eliminare le coppie di elementi uguali in ordine diverso, quanti sono? Intanto le coppie di elementi uguali quelle le possiamo ottenere in un solo modo e sono ovviamente 5, quindi le coppie di oggetti diversi sono 25 – 5 = 20, che valgono però per metà dato che a due a due contengono gli stessi elementi in diverso ordine. Quindi le combinazioni con ripetizione di 5 oggetti ognuno dei quali si può ripetere massimo 2 volte sono 10 + 5 = 15. Questo numero si può anche scrivere come $\binom{5+2-1}{2} = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$.

Ragionando come nell'esempio possiamo dimostrare il seguente risultato.

Teorema 11

Le combinazioni di n oggetti, ognuno dei quali ripetuto fino a massimo di k volte sono $C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$.

Esempio 17

In quanti modi possiamo scrivere il numero 15 come somma di tre numeri interi non negativi? Potremmo scrivere 1 + 12 + 2 = 1 + 8 + 7 = 0 + 0 + 15. Ed altri modi. Ovviamente in questo caso l'ordine non è importante, dato che per esempio 1 + 12 + 2 = 1 + 12 + 2 sono la stessa sequenza. Abbiamo quindi a che fare con combinazioni. E sono ripetute, dato che 15 = a + b + c, e ognuno dei simboli può assumere un valore da 0 a 15. Quindi il numero richiesto è $C'_{15,3} = \binom{15+3-1}{3} = \binom{17}{3} = \frac{17 \cdot 16 \cdot 15}{6} = 17 \cdot 8 \cdot 5 = 680$.

Vogliamo trovare adesso un risultato che riguarda gli sviluppi delle potenze di polinomi.

Esempio 18

Vogliamo sviluppare il cubo del quadrinomio $(a + b + c + d)^3$, che equivale al prodotto dei tre quadrinomi

$(a + b + c + d) \cdot (a + b + c + d) \cdot (a + b + c + d)$, che ovviamente è formato da 64 monomi, alcuni dei quali simili fra loro. Da un punto di vista combinatorio il problema equivale a scrivere tutte le terne, anche ripetute in cui i tre simboli vengono scelti tra quattro, cioè numericamente sono le disposizioni con ripetizione di 4 oggetti di classe 3, che sono appunto $4^3 = 64$. Ma, a causa della validità della proprietà commutativa avremo che per esempio *abb* e *bba* rappresentino gli stessi monomi. Ciò significa che i monomi sviluppo del cubo del quadrinomio sono dati dal numero delle combinazioni con ripetizione di 4 elementi a tre a tre, e quindi sono $\binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2} = 20$. Rimane però il problema di determinare i coefficienti degli sviluppi. In questo caso dobbiamo contare quanti monomi sono simili fra loro. Ma ciò riguarda le permutazioni con ripetizione, dato che dobbiamo contare tutti gli anagrammi delle "parole" di tre lettere, scelte tra quattro, ciascuna delle quali può ripetersi da 0 a 3 volte. Così per esempio il monomio *abb* si ripeterà $\frac{3!}{1!\cdot 2!} = \frac{6}{2} = 3$ volte. E così via per tutti gli altri.

In vista dell'esempio precedenti poniamo una notazione ed enunciamo un risultato.

Notazione 5

Le permutazioni con ripetizione si indicano con $\binom{n_1+n_2+\ldots+n_k}{n_1 n_2 \ldots n_k} = \frac{(n_1+n_2+\ldots+n_k)!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}$ e si chiamano anche **coefficienti multinomiali**.

Teorema 12 (del polinomio di Leibniz)

Si ha: $(a_1+a_2+\ldots+a_k)^n = \sum_{m_1+m_2+\ldots+m_k=n} \binom{m_1+m_2+\ldots+m_k}{m_1 m_2 \ldots m_k} \cdot a_1^{m_1}\cdot a_2^{m2}\cdot\ldots\cdot a_k^{m_k}$, dove la somma è fatta in modo che gli addendi siano tutte le possibilità di ottenere n.

Dimostrazione Omessa

Esempio 19

Sviluppiamo $(a + b + c + d)^3$ con la regola del teorema precedente

$$(a+b+c+d)^3 = \binom{3}{3000}\cdot a^3 + \binom{3}{0300}\cdot b^3 + \binom{3}{0030}\cdot c^3 + \binom{3}{0003}\cdot d^3 +$$

$$+\binom{3}{2100}\cdot a^2b + \binom{3}{2010}\cdot a^2c + \binom{3}{2001}\cdot a^2d + \binom{3}{0210}\cdot b^2c + \binom{3}{0201}\cdot b^2d + \binom{3}{0021}\cdot c^2d +$$

$$+\binom{3}{1200}\cdot ab^2 + \binom{3}{1020}\cdot ac^2 + \binom{3}{1002}\cdot ad^2 + \binom{3}{0120}\cdot bc^2 + \binom{3}{0102}\cdot bd^2 + \binom{3}{0012}\cdot cd^2 +$$

$$+\binom{3}{1110}\cdot abc + \binom{3}{1101}\cdot abd + \binom{3}{1011}\cdot acd + \binom{3}{0111}\cdot bcd =$$

$$a^3+b^3+c^3+d^3+3a^2b+3a^2c+3a^2d+3b^2c+3b^2d+3c^2d+3ab^2+3ac^2+3ad^2+3bc^2+3bd^2+$$

$$+3cd^2+6abc+6abd+6acd+6bcd$$

L'angolo storico

I problemi combinatorici hanno sempre interessato i matematici, sin dagli albori, ma il primo testo che ha cercato di sistematizzare il tutto matematicamente è stato *Dissertatio de arte combinatoria* scritto da Gottfried Leibniz nel 1666. Nello stesso periodo Pascal studia le proprietà del triangolo che in Italia va sotto il nome di Tartaglia, nel seguito molti altri matematici si occupano di questi problemi, in particolare ricordiamo Abraham de Moivre (1667 – 1754), che enuncia il principio di inclusione-esclusione. In seguito la scienza si sviluppa soprattutto con le sue importanti applicazioni ad altri settori matematici e no (teoria dei grafi, teoria dei codici, criptazione, …). Attualmente è indispensabile nei problemi di sicurezza.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Durante una festa furono scambiate un totale di 36 strette di mano. Se ognuno dei partecipanti ha stretto la mano a tutti gli altri una volta sola, quanti erano i partecipanti? Il problema equivale a considerare tutte le coppie non ordinate che si possono estrarre da un insieme di n elementi (le persone). Abbiamo cioè a che fare con le combinazioni semplici di n elementi di classe 2. Dobbiamo quindi risolvere l'equazione $\binom{n}{2}=36 \Rightarrow \frac{n\cdot(n-1)}{2}=36 \Rightarrow n\cdot(n-1)=72$. Piuttosto che risolvere l'equazione è facile osservare che due numeri naturali consecutivi il cui prodotto è 72 sono 8 e 9. Pertanto le persone erano 9. Infatti, ciascuno ha stretto 8 mani, per un totale di 72 strette che ovviamente devono essere dimezzate perché la stretta di mano fra A e B è la stessa che quella fra B e A.

Livello 1

1. Durante un party furono scambiate un totale di 105 strette di mano. Se ognuno dei partecipanti ha stretto la mano a tutti gli altri una volta sola, quanti erano i partecipanti? [15]
2. Quante terne diverse si possono giocare al lotto? [117480]
3. Quante rette passano per 5 punti di un piano a tre a tre non allineati? [10]
4. Quante rette distinte passano per dodici punti posti nel piano in modo che non ve siano tre allineati? [66]
5. In quanti diversi modi possiamo dare le prime 3 carte a uno dei giocatori nel gioco della briscola, usando quindi 40 carte? [9880]
6. In quanti diversi modi possiamo dare le prime 5 carte a uno dei giocatori nel gioco del poker, usando 32 carte? [201376]
7. In quanti diversi modi possiamo dare le prime 13 carte a uno dei giocatori nel gioco del ramino, usando 52 carte? [635013559600]
8. Sei persone hanno un palco a teatro con solo quattro sedie: in quanti modi diversi possono sistemarsi le persone, 4 sedute e due in piedi? Ovviamente non è importante in quale sedia si siede ciascuna delle persone, ma solo se è seduta o in piedi. [15]
9. Con riferimento al precedente quesito, sempre con 4 sole sedie, se i possibili modi sono 70, quante sono le persone? [8]
10. Con riferimento al precedente quesito, quante sedie dovremmo avere a disposizione, se vogliamo che i possibili modi per sistemare un totale di 10 persone siano 210? [6]
11. In un'urna sono contenute 10 palle bianche, 12 rosse e 15 verdi. Le palle sono tutte indistinguibili fra di loro. In quanti diversi modi possiamo estrarre 6 palline, a due a due di ciascuno dei tre colori, nel caso in cui le palline estratte non siano reinserite nell'urna? [311850]
12. Avendo a disposizione 5 tipi di salumi, 4 di formaggi, 6 di verdure determinare quanti diversi tramezzini possono crearsi contenenti ciascuno 1 salume, 2 formaggi e 3 verdure. [600]
13. Per laurearsi in una certa disciplina si devono fare 20 esami, 10 obbligatori, 2 a scelta fra 5 materie di tipo matematico, 3 a scelta fra 6 di tipo giuridico, 4 a scelta fra 8 di tipo economico e 1 lingua scelta fra 5. Determinare quanti sono i diversi piani di studio. [70000]
14. In quante estrazioni di due numeri della tombola, la somma degli estratti è 60? [29]
15. Da un mazzo di 40 carte ne scegliamo 4, quante scelte sono formate solo da figure? [495]
16. Lanciamo una moneta regolare per 10 volte di seguito in quanti diversi modi possiamo ottenere esattamente 3 volte testa? [120]
17. Giorgia ha un orologio, un bracciale, una collana e un anello che conserva in modo casuale in due scatoline di diverso colore. In quanti modi può farlo? [22]
18. Quanti numeri interi di quattro cifre *abcd* verificano le seguenti proprietà: *a* è pari; *b* è divisibile per 5; *c* è primo; *d* è dispari? (0 è divisibile di ogni numero intero) [160]

Lavoriamo insieme

Quante sono le possibili combinazioni di punteggi lanciando 3 dadi?
Lanciando 3 dadi possiamo avere un punteggio complessivo che va da un minimo di 3 (1 + 1 + 1), a un mas-

simo di 18 (6 + 6 + 6). In pratica a ognuno dei 3 dadi, indistinguibili, dobbiamo assegnare un numero che può andare da 1 a 6. Ovviamente possiamo anche avere numeri che si ripetono, abbiamo perciò a che fare con le combinazioni di 6 oggetti, ognuno dei quali si può ripetere fino a 3 volte. Quindi sono $\binom{6+3-1}{3} = \binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 56$ modi.

Livello 2

19. Vogliamo mettere 10 biglie in 3 scatole, in modo che ogni scatola possa contenere da 0 a 10 biglie. In quanti modi possiamo farlo? [66]
20. Quante sono le soluzioni intere non negative dell'equazione $x + y + z + t = 10$? [286]
21. Da un mazzo di carte napoletane da 40 scegliamo a caso 3 carte, quante sono le diverse scelte che non contengono neanche un asso? [7140]
22. Da un mazzo di carte napoletane da 40 scegliamo a caso 3 carte, quante sono le diverse scelte che contengono solo un asso? [840]
23. Da un mazzo di carte napoletane da 40 scegliamo a caso 3 carte, quante sono le diverse scelte che contengono almeno un asso? [2740]
24. A una festa intervengono 10 mamme con i loro rispettivi primogeniti. Sapendo che ogni mamma stringe la mano a tutti gli intervenuti tranne il proprio figlio e non vi sono strette di mano tra i bambini, quante strette di mano vengono complessivamente scambiate? [135]
25. Dati n punti nel piano a tre a tre non allineati, quante rette passano per i dati punti? $\left[\binom{n}{3}\right]$
26. A è un insieme di 5 elementi che ha $2^5 = 32$ sottoinsiemi. Quanti di questi sottoinsiemi hanno 3 elementi? [10]
27. Una pizzeria dichiara di fare più di 1000 pizze diverse, usando 10 ingredienti diversi. Ogni pizza è diversa dalle altre se contiene almeno un ingrediente diverso. Ogni pizza contiene almeno un ingrediente. La dichiarazione è corretta? Giustificare la risposta. [Sì, sono 1023]
28. Lanciamo una moneta regolare per 10 volte di seguito in quanti diversi modi possiamo ottenere almeno 3 volte testa? (Conviene considerare l'evento complementare: ottenere meno di 3 teste) [968]
29. $xy + x^2 + xz$ è un polinomio omogeneo di secondo grado in tre variabili. Quanti termini ha un polinomio omogeneo di secondo grado in 3 variabili completo? [6]
30. Da un mazzo di 40 carte ne scegliamo 4, quante scelte hanno lo stesso seme? [840]
31. Da un mazzo di 40 carte ne scegliamo 4, quante scelte hanno i 4 semi? [400]
32. Quanti monomi compongono lo sviluppo della quinta potenza di un quadrinomio? [56]
33. Un gioco è detto equo se la vincita è inversamente proporzionale al rischio che si corre. Così nella testa e croce, poiché si ha un evento vincente su due, il gioco è equo se si punta 1 e si incassa 2, cioè si vince 1. Nel gioco dei dadi su un singolo lancio, se si punta 1 si deve incassare 6, e così via. Nel lotto, puntando sull'ambo, ossia giocando due numeri, se si vince si incassa 250 volte la posta. Il gioco è equo? E se non lo è, quanto dovrebbe incassarsi? [No, 400,5]
34. Con riferimento al precedente quesito, quante volte la posta dovrebbe incassarsi al lotto per un terno, se il gioco fosse equo? [11748]
35. Per laurearsi in una disciplina scientifica si devono fare 20 esami, 12 obbligatori, almeno 2 a scelta fra 4 materie di tipo matematico, esattamente 2 a scelta fra 5 di tipo fisico, le rimanenti a scelta fra 10 altre materie. Determinare quanti sono i diversi piani di studio. [17850]
36. Avendo a disposizione 6 tipi di salumi, 3 di formaggi, 4 di verdure determinare quanti diversi tramezzini possono crearsi contenenti ciascuno al massimo 2 salumi, esattamente 2 formaggi e al minimo 2 verdure. [726]
37. Quanti dei numeri naturali di 3 cifre hanno le cifre disposte in ordine crescente? E quante in ordine decrescente? [84; 120]

Livello 3

38. Sviluppare $(a + b + c)^4$.
39. Determinare il coefficiente di a^3b^2c nello sviluppo di $(a + b + c + d)^6$. [60]
40. Il coefficiente di a^3b^2c nello sviluppo di di $(a + b + c + x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^6$, dipende dagli x_i? Tutti gli x_i rappresentano monomi diversi a coefficiente unitario. Giustificare la risposta. [No]

41. Nel gioco del bridge si distribuiscono tutte e 52 carte ai 4 giocatori, 13 ciascuno. Quindi le mani differenti sono $\binom{52}{13}$. Quanti sono i diversi modi in cui un mazzo di carte può essere distribuito fra i 4 giocatori? $\left[\binom{52}{13}\cdot\binom{39}{13}\cdot\binom{26}{13}\right]$

Lavoriamo insieme

Consideriamo lo sviluppo del binomio $(a + 2b)^6$, quanto vale la somma di tutti i suoi coefficienti numerici? Sappiamo che lo sviluppo si ottiene con il binomio di Newton, in cui i coefficienti si ottengono moltiplicando i coefficienti binomiali per le relative potenze dei coefficienti dei monomi, in questo caso:

$$2^0\cdot\binom{6}{0}+2^1\cdot\binom{6}{1}+2^2\cdot\binom{6}{2}+2^3\cdot\binom{6}{3}+2^4\cdot\binom{6}{4}+2^5\cdot\binom{6}{5}+2^6\cdot\binom{6}{6}=$$
$$=1+2\cdot 6+4\cdot 15+8\cdot 20+16\cdot 15+32\cdot 6+64=729$$

Livello 2

42. Quanto vale la somma di tutti i coefficienti numerici di $(a + b)^6$? [64]
43. Quanto vale la somma di tutti i coefficienti numerici di $(x – 2y)^{18}$? [1]
44. Costruiamo il triangolo di Tartaglia-Pascal, fermandoci alla decima riga, quanti 1 abbiamo scritto? E quanti numeri diversi da 1? [19; 36]
45. Costruiamo il triangolo di Tartaglia-Pascal, fermandoci alla n -esima riga, quanti 1 abbiamo scritto? E quanti numeri diversi da 1? $\left[2n-1;\dfrac{n^2-3n+2}{2}\right]$

Lavoriamo insieme

Determinare $\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}$.

Piuttosto che effettuare tutte le somme, osserviamo che la detta somma, grazie al Teorema 7, altri non è che lo sviluppo di $(1+1)^5=\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}\cdot 1^k\cdot 1^{5-k}$ e perciò vale $2^5 = 32$.

Calcolare il valore delle seguenti somme

Livello 2

46. $\binom{7}{0}+\binom{7}{1}+\ldots+\binom{7}{6}+\binom{7}{7}$ [128] $\binom{12}{0}-\binom{12}{1}+\ldots-\binom{12}{11}+\binom{12}{12}$ [0]
47. $\binom{15}{3}+\binom{15}{4}+\ldots+\binom{15}{14}+\binom{15}{15}$ [32647] $\binom{11}{4}-\binom{11}{5}+\ldots+\binom{11}{10}-\binom{11}{11}$ [120]
48. $\binom{11}{0}-\binom{10}{0}+\binom{11}{1}-\binom{10}{1}+\ldots+\binom{11}{10}-\binom{10}{10}$ [1023] $\binom{7}{0}+\binom{5}{0}+\binom{7}{1}+\binom{5}{1}+\ldots+\binom{7}{4}+\binom{5}{4}$ [130]
49. $\binom{5}{0}+2\cdot\binom{5}{1}+4\cdot\binom{5}{2}+8\cdot\binom{5}{3}+16\cdot\binom{5}{4}+32\cdot\binom{5}{5}$ Sugg: Considerarlo come sviluppo di un particolare binomio di Newton [243]
50. $\binom{4}{0}+3\cdot\binom{4}{1}+9\cdot\binom{4}{2}+27\cdot\binom{4}{3}+81\cdot\binom{4}{4}$ [256]

Livello 3

51. $\binom{6}{0}^2+\binom{6}{1}^2+\binom{6}{2}^2+\binom{6}{3}^2+\binom{6}{4}^2+\binom{6}{5}^2+\binom{6}{6}^2$ [924]

52. $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$ [2^n] $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\binom{n}{n-1}+(-1)^n\cdot\binom{n}{n}$ [0]

53. $\binom{n}{0}+m\cdot\binom{n}{1}+m^2\cdot\binom{n}{2}+m^3\cdot\binom{n}{3}+\ldots+m^n\cdot\binom{n}{n}$ [$(1 + m)^n$]

54. Provare la validità della seguente identità $\binom{n}{k+1}=\frac{n-k}{k+1}\cdot\binom{n}{k}$.

55. I numeri di Fibonacci si ottengono con la regola, $F_1 = F_2 = 1$; $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$. Verificare che si ottengono anche mediante i coefficienti binomiali, come mostrato di seguito.

$$F_1=\binom{0}{0}, F_2=\binom{1}{0}, F_3=\binom{2}{0}+\binom{1}{1}, F_4=\binom{3}{0}+\binom{2}{1}, F_5=\binom{4}{0}+\binom{3}{1}+\binom{2}{2},$$

$$F_6=\binom{5}{0}+\binom{4}{1}+\binom{3}{2}, F_6=\binom{6}{0}+\binom{5}{1}+\binom{4}{2}+\binom{3}{3},\ldots$$

56. A è un insieme di n elementi che ha 2^n sottoinsiemi. Quanti di questi sottoinsiemi hanno $k < n$ elementi? $\left[\binom{n}{k}\right]$

57. Quanti termini ha un polinomio omogeneo di grado n in k variabili completo, ossia con tutti i monomi possibili? $\left[\binom{n+k-1}{n}\right]$

58. Calcolare $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots+\binom{n}{n}$, per n pari. [2^{n-1}]

59. Calcolare $\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots+\binom{n}{n-1}$, per n pari. [2^{n-1}]

60. Verificare la seguente identità $\frac{n-2k-1}{k+1}\cdot\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}-2\cdot\binom{n}{k}$, $n > k$.

Lavoriamo insieme

Risolvere l'equazione $\binom{n-1}{3}+\binom{n-1}{4}+\binom{n}{5}+\binom{n+1}{6}=\binom{11}{5}$. Non conviene sviluppare i singoli coefficienti, perché otterremmo un'equazione molto complicata. Usiamo invece la formula di Stifel per accorpare a due a due i coefficienti:

$$\left[\binom{n-1}{3}+\binom{n-1}{4}\right]+\binom{n}{5}+\binom{n+1}{6}=\binom{11}{5}\Rightarrow\left[\binom{n}{4}+\binom{n}{5}\right]+\binom{n+1}{6}=\binom{11}{5}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\binom{n+1}{5}+\binom{n+1}{6}\right]=\binom{11}{5}\Rightarrow\binom{n+2}{6}=\binom{11}{5}\Rightarrow\binom{n+2}{6}=\binom{11}{6}\Rightarrow n+2=11\Rightarrow n=9$$

Risolvere le seguenti equazioni nell'insieme dei numeri naturali

Livello 2

61. $\binom{n}{2}=21$ [6] $\binom{n}{3}=10$ [5] $\binom{n}{4}=330$ [11] $\binom{n}{3}=164$ [∅] $\binom{n}{4}=1365$ [15]

62. $\binom{n}{n-1}=10$ [11] $\binom{n}{4}+\binom{n}{5}=6$ [5] $\binom{n}{7}+\binom{n}{8}=\binom{10}{2}$ [9] $\binom{n}{5}+\binom{n}{6}=\binom{8}{5}$ [∅]

63. $\binom{n}{3}+\binom{n}{4}+\binom{n+1}{5}=\binom{18}{5}$ [16] $\binom{n-1}{8}+\binom{n}{7}+\binom{n-1}{7}=\binom{13}{5}$ [12]

64. $\binom{n-2}{3}+\binom{n-2}{4}+\binom{n-1}{5}+\binom{n}{6}=\binom{31}{6}$ [30] $\binom{2n+1}{8}+\binom{2n+2}{9}+\binom{2n}{6}+\binom{2n}{7}=\binom{21}{10}$ [∅]

Livello 3

Nei seguenti esercizi si suggerisce di scomporre in fattori primi il secondo membro

65. $\binom{7}{n}=35$ [$3 \vee 4$] $\binom{11}{n}=165$ [$3 \vee 8$] $\binom{8}{n}=56$ [∅]

66. $\binom{12}{n+1}=792$ [$4 \vee 6$] $\binom{15}{2n-1}=6435$ [3] $\binom{23}{2n}=1771$ [10]

L'angolo di Derive

In Derive vi sono due comandi predefiniti per il calcolo combinatorio.

```
#1:   [PERM(5, 3), PERM(5, 5), PERM(5, 6), COMB(5, 2), COMB(5, 5), COMB(5, 6)]
#2:                                    [60, 120, 0, 10, 1, 0]
```

#3: $\left[\text{PERM}\left(\frac{5}{2}, 3\right), \text{PERM}\left(5, \frac{5}{2}\right), \text{COMB}\left(\frac{5}{2}, 2\right), \text{COMB}\left(5, \frac{5}{2}\right)\right]$

#4: $\left[\frac{15}{8}, \frac{64}{\sqrt{\pi}}, \frac{15}{8}, \frac{512}{15\cdot\pi}\right]$

PERM(m, n) calcola le disposizioni semplici di m oggetti a gruppi di n
COMB(m, n) calcola le combinazioni semplici di m oggetti a gruppi di n
Notiamo che il calcolo avviene anche per coefficient non interi. Derive applica formule che non abbiamo trattato. Ovviamente vi è anche il calcolo del fattoriale anche di numeri molto grandi, date le capacità di calcolo di Derive.

```
2014!

5725534635578132510642258177083298976251029836645529181535918014529460166996131020284 05~
   16211855765436548360053196824283749279879773455998919164870522708484952035978565283 57~
   37052897770114369055491646706486323552662297017242920308482964222831857452610854012 31~
   67232424435465599297527505687752035829447665993985044915162476831677771143132397096 00~
   16801708905452626565212327165871856448417823432331011994617638757698403799263166803 72~
   89033103555662696382797680234315453419970495907530355455545642624657109399809782179 76~
   22979307264270859688515833061837908941526718332045987433117135619781751042865224610 37~
   30907205167328357425284490221146092538826172353791746432387362980268483660688776873 43~
   29499987966164332186104361527947732158359401827112489257497154363234705932810453894 51~
   42459387762407740200714278143539754139467403353511472201595539074631689133634276777 05~
   23467158614229624269612207186137105751942531495511340780426435201375998775220117103 90~
   55003772618514939722321454687828997658873940250836480567638950400927498796443082596 70~
   00367177788225733301999954995372141088467640818498454299505178344337055053122119423 84~
```

Proponiamo solo alcune cifre del numero che ne ha un totale di 5782, come si capisce approssimando il numero e scrivendolo in notazione esponenziale. $5.725534635\cdot 10^{5781}$

L'angolo di Microsoft Mathematics

Anche in questo software vi sono comandi predefiniti per il calcolo combinatorio.

1	Input	combination(5, 2)
	Output	10
2	Input	combination({1, 2, 3, 6, 7}, 3)
	Output	{0, 0, 1, 20, 35}
3	Input	permutation(5, 3)
	Output	60
4	Input	permutation({3, 5, 8, 10}, 5)
	Output	{0, 120, 6720, 30240}

I secondi comandi calcolano le combinazioni o le permutazioni del numero di elementi scritti all'interno dell'insieme di classe il numero scritto fuori dalle parentesi graffe.

Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi

1. (Liceo scientifico 2002/03) Considerati i primi n numeri naturali a partire da 1: 1, 2, 3, ..., $n-1$, n, moltiplicarli combinandoli due a due in tutti i modi possibili. La somma dei prodotti ottenuti risulta uguale a: A) $\frac{1}{4} \cdot n^2 \cdot (n+1)^2$; B) $1/3 \cdot n \cdot (n^2-1)$; C) $1/24 \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (3n+1)$; D) $1/24 \cdot n \cdot (n^2-1) \cdot (3n+2)$. Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata. [D]
2. (Liceo scientifico 2002/03) Si consideri una data estrazione in una determinata Ruota del Lotto. Calcolare quante sono le possibili cinquine che contengono i numeri 1 e 90. [109736]
3. (Liceo scientifico PNI 2002/2003) Quante partite di calcio della serie A vengono disputate complessivamente (andata e ritorno) nel campionato italiano a 18 squadre? [306]
4. (Liceo scientifico 2003/2004) Considerate gli insiemi $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{a, b, c\}$; quante sono le applicazioni (le funzioni) di A in B? [81]
5. (Liceo scientifico 2005/2006) Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di $(a+b)^n$ è uguale a 2^n per ogni $n \in \mathbb{N}$.
6. (Liceo scientifico 2006/2007) Si risolva l'equazione $4 \cdot \binom{n}{4} = 15 \cdot \binom{n-2}{3}$. [6, 10]
7. (Liceo scientifico 2007/2008) Se $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}$ con $n > 3$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n? [7]
8. (Liceo scientifico 2008/2009) Si dimostri l'identità $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}; n, k \in \mathbb{N}, n > k$.
9. (Liceo scientifico 2010/2011) Il numero delle combinazioni di n oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3. si trovi n. [7]
10. (Liceo scientifico 2011/2012) Siano dati nello spazio n punti $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$. Quanti sono i segmenti che li congiungono a due a due? Quanti i triangoli che hanno per vertici questi punti (supposto che nessuna terna sia allineata)? Quanti i tetraedri (supposto che nessuna quaterna sia complanare)? $\left[\binom{n}{2}; \binom{n}{3}; \binom{n}{4}\right]$
11. (Liceo scientifico 2012/2013) Con le cifre da 1 a 7 è possibile formare 7! = 5040 numeri corrispondenti alle permutazioni delle 7 cifre. Ad esempio i numeri 1234567 e 3546712 corrispondono a due di queste permutazioni. Se i 5040 numeri ottenuti dalle permutazioni si dispongono in ordine crescente qual è il numero che occupa la settima posizione e quale quello che occupa la 721-esima posizione? [1235467; 2134567]
12. (Liceo scientifico PNI 2012/2013) Qual è il numero che occupa la 5036-esima posizione e quale quello che occupa la 1441-esima posizione? [7654132; 3124567]

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi.

1. Dimostrare che ciascuno degli insiemi $A_n = \{k \in \mathbb{N}: n! + 1 \le k \le n! + n\}$ non ha numeri primi.
2. Di fattoriali che finiscono con 6 zeri, o con 7 zeri o con 8 zeri, ve ne sono 5. Possiamo dire che di fattoriali che finiscono con n zeri ve ne sono sempre esattamente 5? Giustificare la risposta. [No. Per ogni n, di numeri il cui fattoriale ha n zeri ve ne sono 0 oppure 5]
3. Con riferimento al precedente quesito, per quali valori di n, non esistono fattoriali che finiscono con n zeri?

   [Numeri del tipo $\left(\frac{5^n-1}{4} - 1, \frac{5^n-1}{4} - 2, \ldots, \frac{5^n-1}{4} - n + 1\right)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}}$, per esempio 5, 29, 30, 153, 154, 155, …]

4. Quante delle permutazioni della successione di cifre 123…n, non hanno punti fissi? $\left[n!\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right]$

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

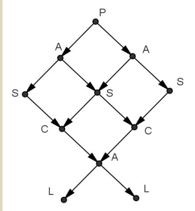
Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.
A = Abacus AHSME = Annual High School Mathematics Examination AMC = American Mathematical Contest
B = Giochi della Bocconi C = Canadian Mathematics Competition
HSMC = A&M University High School Mathematics Contest K = Kangaroo RICE = Rice University Mathematics Tournament.

Lavoriamo insieme

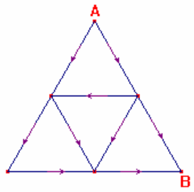
Vediamo un'applicazione del principio dei piccioni, usando un quesito assegnato all'Abacus International del Marzo 2005.
Su una spiaggia possono affittarsi: 8 pedalò, 10 canoe e 6 tavole da surf. Un giorno 6 di questi oggetti sono stati affittati. Stabilire, per ognuna delle seguenti affermazioni relativa agli oggetti non affittati, quali sono vere, quali false e per quali non si può decidere se sono vere o false.
a) Non ci sono più tavole da surf. Può essere vera perché potrebbero essere state affittate tutte e sei, ma potrebbe anche non esserlo, se uno dei 6 oggetti affittati non è una tavola da surf.
b) E' possibile affittare ciascuno dei 3 oggetti. Ancora una volta può essere vero o falso, perché abbiamo visto in a) che potrebbero essere state affittate solo le 6 tavole da surf che perciò non sarebbero più disponibili.
c) C'è almeno una tavola da surf disponibile. Come in precedenza e per gli stessi motivi, l'affermazione può essere vera o falsa.
d) C'è almeno un pedalò disponibile. Stavolta l'affermazione è vera perché i pedalò sono più dei 6 oggetti affittati.
e) Non ci sono più pedalò. Per la stessa motivazione del punto precedente l'affermazione è sicuramente falsa, ce ne sono almeno 2.
f) Ci sono al massimo due canoe disponibili. Questa è falsa, perché anche se sono state affittate solo canoe ne rimangono almeno 4.

1. (AHSME 1959) Un club ha x membri i quali sono suddivisi in 4 comitati in accordo con le seguenti regole: a) Ogni membro appartiene esattamente a due comitati. b) Ogni coppia di comitati ha un solo membro in comune. Relativamente a x quale delle seguenti affermazioni è vera? Giustificare la risposta. A) non può essere determinato B) ha un unico valore compreso tra 8 e 16 C) può assumere due distinti valori compresi tra 8 e 16 D) ha un unico valore compreso tra 4 e 8 E) può assumere due distinti valori compresi tra 4 e 8 [D)]
2. (AHSME 1961) $695 = a_1 + a_2 \cdot 2! + a_3 \cdot 3! + \ldots + a_n \cdot n!$, $a_k \in \mathbb{N}$, $0 \le a_k \le k$, cioè è scritto in base fattoriale. Determinare a_4. [3]
3. (AHSME 1961) Espandiamo $\left(\frac{a}{\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{a^2}\right)^6$, quanto vale il terzo termine? [15/x]
4. (AHSME 1962) Espandiamo $\left(1-\frac{1}{a}\right)^6$, quanto vale la somma degli ultimi tre coefficienti? [10]
5. (AHSME 1963) Espandiamo $\left(a-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^7$, quanto vale il coefficiente di $a^{-1/2}$? [–21]
6. (AHSME 1965) Quanto vale la somma di tutti i coefficienti numerici dell'espansione $(x^2 - 2xy + y^2)^7$? [0]
7. (AHSME 1965) Il numero 15! finisce con k zeri se espresso in base 12 e con h zeri in base 10. Quanto vale $k + h$? [8]

Lavoriamo insieme

Il seguente quesito è stato assegnato ai Canadian Mathematics Competition del 2004. Quanti diversi percorsi, nel diagramma seguente, formano la parola PASCAL? 

Osserviamo che ogni cammino che parte dalla P finisce in una delle due L e forma la parola "PASCAL", quindi basta contare quanti cammini vanno dalla P a una delle due L. È semplice vedere che ognuna delle 2 C può essere raggiunta in 3 modi, poi la A successiva in 6 modi, e perciò ciascuna delle L in 6 modi, per un totale di 12

8. (AHSME 1978) In un torneo di tennis a due sono iscritti n uomini e $2n$ donne. Ogni giocatore gioca esattamente una partita con ogni altro. Sapendo che il rapporto tra il numero dipartite vinte dalle donne rispetto a quelle vinte dagli uomini è 7/5, determinare n. [3]
9. (AHSME 1985) Consideriamo la parola CONTEST, quanti dei suoi anagrammi hanno le prime due lettere formate da vocali? [120]
10. (AHSME 1986) Consideriamo tutte le permutazioni della parola AHSME ordinate alfabeticamente, quale lettera occupa l'ultima posizione della 86-esima parola? [E]
11. (AHSME 1986) In figura 

è mostrata la mappa stradale di un villaggio residenziale, tutte le strade sono a senso unico e hanno la stessa lunghezza, le frecce ne indicano i versi di percorrenza. In quanti diversi modi riusciamo ad andare da A a B? Due percorsi sono considerati diversi se hanno diversa lunghezza complessiva o se hanno diversi ordini di percorrenza [6]
12. (AHSME 1988) Un bambino ha 96 costruzioni, per ciascuna costruzione distinguiamo il materiale di cui è fatta, la dimensione, il colore e la forma. Sappiamo che vi sono 2 materiali: plastica, legno; 3 misure: piccola, media, grande; 4 colori: blu, rosso, verde, giallo; 4 forme: cerchio, esagono, quadrato, triangolo. Quante delle costruzioni hanno esattamente due caratteristiche diverse dalla costruzione "plastica, media, rossa, circolare"? [29]
13. (AHSME 1989) Calcolare $\sum_{k=0}^{49}(-1)^k \cdot \binom{99}{2k}$. Sugg: considerare lo sviluppo di $(1 + i)^{99}$. [2^{-49}]
14. (AHSME 1993) Nel piano cartesiano ortogonale consideriamo tutti i triangoli i cui vertici hanno entrambe le coordinate intere e comprese tra 1 e 4. Quanti sono tali triangoli? Sugg: eliminare da tutte le possibili terne quelle che giacciono sulla stessa retta. [516]
15. (AHSME 1993) Scegliamo dieci punti sul semiasse positivo delle ascisse e cinque punti sul semiasse positivo delle ordinate. Congiungiamo ciascun punto scelto sull'asse x con tutti quelli scelti sull'asse y, qual è il massimo numero di intersezioni di questi 50 segmenti che giacciono all'interno del primo quadrante? [450]
16. (AHSME 1994) 9 sedie sono poste in riga per essere occupate da 3 professori e 6 studenti. In quanti modi possono sistemarsi le 9 persone in modo che ogni insegnante sia seduto fra due studenti? [60]
17. (AHSME 1995) Quanti numeri di 4 cifre, in base 10, N = $abcd$, soddisfano tutte le seguenti condizioni? (i) $4000 \le N < 6000$; (ii) N è multiplo di 5; (iii) $3 \le b < c \le 6$. (A) 10 (B) 18 (C) 24 (D) 36 (E) 48 [C]
18. (AHSME 1995) Per quanti insiemi di 3 numeri naturali $\{a, b, c\}$ $a \cdot b \cdot c = 2310$? [40]
19. (AHSME 1996) Quanti segmenti hanno entrambi gli estremi sui vertici di un dato cubo? [28]
20. (AHSME 1997) Un numerò crescente, come 34689, è un intero positivo le cui cifre sono disposte in ordine crescente. Ci sono $\binom{9}{5} = 126$ numeri crescenti di 5 cifre. Quando questi numeri sono ordinati dal più piccolo al più grande il 97-esimo numero non contiene quale delle seguenti cifre?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8 [B]

21. (C1997) Usando tutte le cifre 1, 2, 3, 4, ciascuna una volta, si possono formare 24 differenti numeri di 4 cifre. Se ordiniamo questi 24 numeri dal più piccolo al più grande, che posizione occupa il 3142? [14]

22. (AHSME 1998) Per ogni intero positivo n, sia $a_n = \frac{(n+9)!}{(n-1)!}$, k denoti il più piccolo intero positivo per cui la cifra non nulla più a destra di a_k sia dispari. La cifra nulla più a destra di a_k è? [9]

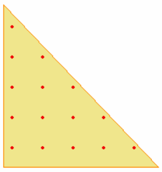
23. (A1998) In una scatola ci sono alcune palle rosse ed alcune verdi. Sappiamo che dobbiamo estrarre almeno 7 palle per avere la sicurezza di estrarre, senza guardare, una palla rossa, mentre ne dobbiamo estrarre almeno 13 per avere la sicurezza di estrarre due palle di colori diversi. Quante palle rosse e quante verdi ci sono nella scatola? [6; 12]

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente quesito assegnato nel 2008 agli HSMC. Se 2008^k divide 2007! mentre 2008^{k+1} non lo divide, quanto vale k? Scomponiamo 2008 in fattori primi, ottenendo $2^3 \cdot 251$. Ora $2007 = 251 \cdot 7 + 250$. Quindi in 2007! troviamo 257 solo 7 volte, quindi 2008^7 è un divisore di 2007!, mentre 2008^8 no. Quindi $k = 7$.

24. (AHSME 1998) Un numero telefonico di 7 cifre $d_1d_2d_3d_4d_5d_6d_7$ lo diciamo memorabile se la sequenza $d_1d_2d_3$ è esattamente la stessa di una almeno delle due sequenze $d_4d_5d_6$ o $d_5d_6d_7$. Supposto che ogni cifra possa assumere I valori interi da 0 a 9, determinare il numero di diversi numeri telefonici memorabili. [19990]

25. (AHSME 1998) Calcolare $1/log_2(100!) + 1/log_3(100!) + 1/log_4(100!) + \ldots + 1/log_{100}(100!)$ [1]

26. (AMC 2000) Ci sono 5 pioli gialli, 4 rossi, 3 verdi, 2 blu e 1 arancione su una tavola triangolare. In quanti modi possiamo sistemare i pioli, in modi che nessuna riga (orizzontale) o colonna (verticale) contenga due pioli dello stesso colore?  [$5! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!$]

27. (AMC 2000) 8 triangoli equilateri isometrici, ciascuno di un diverso colore vengono usati per costruire un ottaedro regolare. In quanti modi diversi possiamo costruire l'ottaedro? (Due ottaedri colorati sono diversi se uno di essi non può essere ruotato in modo da essere uguale all'altro.) [1680]

28. (AMC 2001) Pat vuole comprare 4 ciambelle scegliendo fra le seguenti: glassata, cioccolata e zuccherata. Quante diverse scelte può fare? [15]

29. (AMC 2001) Dato l'ennagono regolare di vertici $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9$, quanti distinti triangoli equilateri possiamo costruire scegliendo almeno due dei 9 vertici? [66]

30. (AMC 2001) Un ragno ha un calzino e una scarpa per ciascuna delle sue otto zampe. In quanti diversi ordini il ragno può mettere calzini e scarpe supposto che su ogni zampa il calzino deve sempre essere messo prima della scarpa? [$16!/2^8$]

31. (K2001) Venti caramelle sono distribuite tra alcuni kangourou in modo che ogni kangourou riceva almeno una caramella e che mai due kangourou abbiano un numero uguale di caramelle. Quanti kangourou al massimo sono presenti alla distribuzione delle caramelle? [5]

32. (A2002) Ad una festa partecipano 13 coppie. Ogni uomo stringe la mano a tutti i partecipanti tranne che alla propria moglie, le donne solo agli uomini. Quante strette di mano vengono effettuate? [156]

33. (B2003) Nel frigorifero dei gelati ci sono 60 ghiaccioli di 5 gusti diversi, una dozzina per ogni gusto. Qual è il numero minimo di ghiaccioli che si devono prendere (senza guardare …) per essere sicuri di averne presi due dello stesso gusto? [6]

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente quesito assegnato nel 2008 al South Carolina Mathematical Contest.

Quanto fa la somma $\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+\frac{5}{3!+4!+5!}+\ldots+\frac{2007}{2005!+2006!+2007!}$?

Osserviamo che possiamo scrivere: $\frac{3}{1!+2!+3!}=\frac{1}{1!}\cdot\frac{3}{1+2+3\cdot 2};\frac{4}{2!+3!+4!}=\frac{1}{2!}\cdot\frac{4}{1+3+4\cdot 3}$ e, più in generale $\frac{n}{(n-2)!+(n-1)!+n!}=\frac{1}{(n-2)!}\cdot\frac{n}{1+(n-1)+n\cdot(n-1)}=\frac{1}{(n-2)!}\cdot\frac{n}{\cancel{n}+n^2-\cancel{n}}=\frac{1}{(n-2)!}\cdot\frac{1}{n}$. Ma possiamo ancora meglio semplificare: $\frac{1}{(n-2)!}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{n-1}{n}=\frac{1}{(n-1)!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}$.

Quindi: $\left(\frac{1}{2!}-\cancel{\frac{1}{3!}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3!}}-\cancel{\frac{1}{4!}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4!}}-\cancel{\frac{1}{5!}}\right)+...+\left(\cancel{\frac{1}{2006!}}-\frac{1}{2007!}\right)=\frac{1}{2!}-\frac{1}{2007!}$.

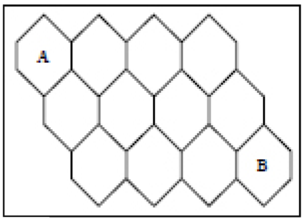
34. (A2004) 5 persone vogliono giocare a bridge, un gioco in cui una coppia gioca contro un'altra. Quante partite devono fare affinché ogni possibile coppia giochi contro ciascuna delle altre? [15]
35. (HSMC 2004) Determinare il valore di *n* per cui si ha: $n!=\sum_{k=1}^{15}k$. [5]
36. (HSMC 2004) Mary digita un numero di 6 cifre ma la tastiera non funziona bene e non scrive i due 1, così il numero scritto è 2002. Quanti diversi numeri di 6 cifre ha potuto digitare? [15]
37. (C2005) In un sacchetto ci sono 8 palline gialle, 7 rosse e 5 nere. Senza guardare, Igor toglie N palline dal sacchetto ed è sicuro che comunque ha preso le palline nel sacchetto, sono rimaste almeno 4 palline di un colore e 3 palline di un altro colore. Qual è il massimo valore che può avere N? [7]
38. (A2006) Quanti numeri interi di 3 cifre hanno per somma delle cifre un numero dispari? [450]
39. (HSMC 2006) Qual è il più piccolo intero positivo *n* per cui *n*! finisce con 4 zeri? [20]
40. (HSMC2006) Una successione è definita da $a_n = sin\left(\frac{n!\cdot\pi}{2006}\right)$, qual è il primo valore di *n* per cui si hanno valori non nulli. [58]
41. (Rice 2006) Calcolare $\sum_{k=10}^{2006}\binom{k}{10}$. $\left[\binom{2007}{11}\right]$
42. (Rice 2006) Un punto reticolo è un punto del piano cartesiano le cui coordinate sono entrambe numeri interi. Dato un insieme di 100 distinti punti reticolo, determinare il minimo numero di segmenti *AB* per cui *A*, *B* e il loro punto medio sono tutti punti reticolo distinti. [1200]
43. (Rice 2006) Ordinare in forma crescente I numeri $\left(10^{100}\right)^{10},10^{\left(10^{10}\right)},10^6!,(100!)^{10}$.
$\left[\left(10^{100}\right)^{10},(100!)^{10},10^6!,10^{\left(10^{10}\right)}\right]$
44. (A2007) Heidi lancia tre dadi (dello stesso colore, indistinguibili) e ne somma i punteggi. Se registra solo i punteggi pari e maggiori di 8, quanti diversi casi può registrare? [19]
45. (HSMC 2007) Determinare il resto della divisione di $(0! + 1! + ... + 64!)^2$ per 5. [1]
46. (Rice 2007) Quante parole di 5 lettere si possono formare con le lettere S, I e T, se per parola si intende una qualsiasi sequenza di lettere che non contiene tre consonanti consecutive? [123]
47. (Rice 2007) Daniel conta il numero di modi di formare un numero naturale usando le cifre 1, 2, 2, 3 e 4 (ogni cifra al più una volta). Edward conta il numero di modi per formare con le lettere della parola "BANANAS" una parola, anche priva di senso, di 6 lettere. Fernando conta il numero di modi per distribuire nove caramelle identiche a 3 bambini. Determinare la somma dei tre numeri così ottenuti. [645]
48. (ARML 2008) Sia S una successione crescente di numeri di 4 cifre distinte, scelti dall'insieme {1, 3, 5, 7, 9}. Determinare il termine di posto 96 di S. [7953]
49. (Rice 2008) Quanto fa la somma dei fattori primi di 20!? [77]
50. (Rice 2008) Sia N il numero di anagrammi della parola di 34 lettere SUPERCALIFRAGILISTICEXPIALIDOCIOUS. Quanti divisori ha N? [3225600]
51. (Rice 2008) Un'espressione è creata scrivendo a caso 5 simboli scelti fra le 9 cifre non nulle e i quattro simboli delle operazioni aritmetiche elementari. Quante espressioni matematicamente valide possono così ottenersi, senza usare la moltiplicazione implicita? [150093]

Questions in English

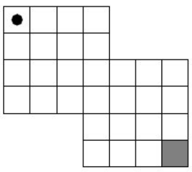
Working together

This is a question assigned at HSMC in 2007
Determine the remainder when $(1! + 2! + \ldots + 64!)^2$ is divided by 4.
Since 4!, 5!, 6!, 7!, …, 64! are all divisible by 4, it suffices to find the remainder when $(1! + 2! + 3!)^2$ is divided by 4. But $(1! + 2! + 3!)^2 = (1 + 2 + 6)^2 = 92 = 81$. Thus the remainder is 1.

52. (HSMC 2000) Given 10 noncollinear points in a plane, how many different lines can be drawn if each line passes through exactly 2 points? [45]
53. (HSMC 2000) The final race in a swimming event involves 8 swimmers. Three of the swimmers are from one country and the other five are from different countries. Each is to be given a lane assignment between 1 and 8 for the race. Aside from the obvious rule that no two swimmers can be assigned to the same lane, there are two other restrictions. The first is that no two swimmers from the same country can be in adjacent lanes. The second is that the two outside lanes cannot be occupied by swimmers from the same country. With these rules, how many different lane assignments are possible for this race? [11520]
54. (HSMC 2001) Hasse wants to buy four donuts from a dealer with an ample supply of three types of donuts: glazed, chocolate and powdered. How many different selections are possible? [15]
55. (HSMC 2001) A palindrome is a number whose value is unchanged when its digits are reversed. How many palindromes are there which are greater than 10 and less than 800? [79]
56. (HSMC 2002) In the hexagonal grid, you may step from your current hexagon to any adjacent hexagon. How many 5-step paths are there from A to B? [10]



57. (HSMC 2002) The number $\frac{1001!-998!}{999!}$ can be written in the form *a*/*b*, where *a* and *b* are positive integers that are relatively prime. What is the units digit of *a*? [9]
58. (HSMC 2004) The 120 permutations of AHSME are arranged in dictionary order, as if each were an ordinary five-letter word. Find the 85-th word in the list. [MHAES]
59. (HSMC 2007) Each car of a five-car train must be painted a solid colour. The only colour choices are red, blue and yellow. If each of these colours must be used for at least one car, in how many ways can this train be painted? [150]
60. (HSMC 2007) Determine the remainder when $(0! + 1! + ... + 64!)^2$ is divided by 5. [1]
61. (HSMC 2008) Two subsets of the set S = {*a*, *b*, *c*, *d*, *e*} are to be chosen so that their union is S and their intersection contains exactly two elements. In how many ways can this be done, assuming that the order in which the subsets are chosen is irrelevant? [40]
62. (HSMC 2008) So that ZIP codes may be machine readable, the Postal Service encodes them as a group of five bars, some tall, some short, in groups of five. In how many distinct ways can two tall and three short bars be arranged? [10]
63. (SC 2008) A game piece is placed on the upper left square of a game board with 30 squares as shown. By a sequence of 11 moves, each from a given square to an adjoining square either to the right or down, the piece is to go from the upper left square to the bottom right shaded square. How many 11-



move sequences are possible? [300]

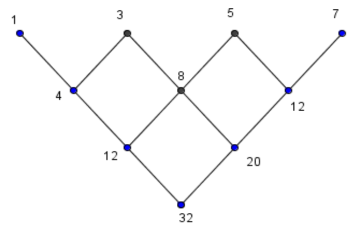
64. (Rice 2009) In the game Pokeymawn, players pick a team of 6 different Pokeymawn creatures. There

are 25 distinct Pokeymawn creatures, and each one belongs to exactly one of four categories: 7 Pokeymawn are plant-type, 6 Pokeymawn are bug-type, 4 Pokeymawn are rock-type, and 8 Pokeymawn are bovine-type. However, some Pokeymawn do not get along with each other when placed on the same team: bug-type Pokeymawn will eat plant-type Pokeymawn, plant-type Pokeymawn will eat rock-type Pokeymawn, and bovine-type Pokeymawn will eat anything except other Bovines. How many ways are there to form a team of 6 different Pokeymawn such that none of the Pokeymawn on the team want to eat any of the other Pokeymawn? [245]

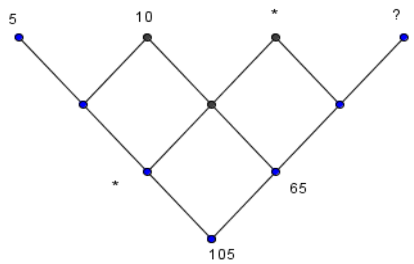
65. (Rice 2009) Four cards are drawn from a standard deck (52 cards) with suits indistinguishable (for example, A♠ is the same as A♣). How many distinct hands can one obtain? [1820]

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Accademia militare) Sia n un numero naturale e si indichi con il simbolo $n!$ (da leggersi: "fattoriale di n") il prodotto dei numeri naturali minori o al più uguali a n. Quale delle relazioni elencate è vera per ogni n?
A) $2(n!) = (2n)!$ B) $n! = (n \cdot (n - 1))!$ C) $n! = n \cdot (n + 1)$ D) $n! = (n^2 - n) \cdot (n - 2)!$
2. (Odontoiatria 1997) Disponendo di 7 lettere dell'alfabeto, tutte diverse, il numero di parole con 4 lettere che si possono formare potendo ripetere 2 o 3 o 4 volte la stessa lettera è:
A) 4^4 B) 4^7 C) 7^4 D) 7^7 E) 49
3. (Ingegneria 1999) Una scatola contiene 10 cubi. Ogni faccia di ciascun cubo è colorata di verde oppure di bianco oppure di rosso. In totale, 6 cubi hanno almeno una faccia verde, 7 hanno almeno una faccia bianca e 9 hanno almeno una faccia rossa; inoltre, nessuno dei 10 cubi ha tutte le facce dello stesso colore. Quanti cubi nella scatola hanno facce di tutti e tre i colori?
A) Otto B) Nove C) Due D) Nessuno E) Uno
4. (Architettura 2007) Gianni ha trovato un vecchio giornale enigmistico che riportava uno schema triangolare in cui ogni numero, dalla seconda riga in giù, era uguale alla somma dei due numeri situati sopra al numero stesso, esattamente come succede nella seguente figura:



Lo schema di Gianni era in gran parte illeggibile, si sono potuti riconoscere solo i 4 numeri indicati in quest'altra figura:



Sapreste aiutare Gianni a ricostruire lo schema originario? Indicate in particolare quale numero deve stare nella casella indicata con " ? ". A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) 35
5. (Economia Varie Università) In un vaso ci sono 60 palline di tre diversi colori: rosse, gialle e blu. Qual è il numero minimo di palline che occorre estrarre per essere sicuri di averne 3 di uno stesso colore?
A) 6 B) 7 C) 9 D) 12
6. (Facoltà scientifiche, Roma La Sapienza) Il codice per aprire un lucchetto è costituito da una sequenza di quattro cifre (da 0 a 9). Ho dimenticato il codice, ma mi ricordo che le cifre sono tutte distinte e che tra le prime tre cifre ci sono sicuramente i numeri 6 e 9. Quante sequenze di quattro numeri dovrei provare per essere certo di aprire il lucchetto? A) 100 B) 118 C) 336 D) 600
7. (Corso di laurea in Informatica, Udine 2009) Si considerino tutti gli anagrammi della parola 'FUN-

GHI', ovvero tutte le parole che si ottengono permutando le sei lettere. Tra esse, quante sono le parole che non cominciano per 'F'? A) 360 B) 600 C) 720 D) 120

8. (Corso di laurea in Informatica, Udine 2009) Durante una vacanza, sette amici prendono in affitto due automobili. Una di esse ha due posti, l'altra ne ha cinque. In quanti modi differenti possono distribuirsi i sette amici sulle due automobili? A) 21 B) 14 C) 28 D) 35
9. (Ingegneria, 2009) Il circolo canottieri Santerno è formato da sei rematori, tutti ugualmente bravi ed affiatati tra loro. Deve mandare una rappresentanza di quattro atleti al campionato regionale. In quanti diversi modi può essere formata una tale rappresentanza? A) 720 B) 5 C) 15 D) 4 E) 6
10. (Medicina 2013) I coniugi Bianchi hanno un figlio e una figlia e sono bisnonni. Ciascuno dei loro discendenti maschi ha due figli maschi e nessuna figlia femmina. Ciascuna delle loro discendenti femmine ha un figlio maschio e una figlia femmina (tutti i loro discendenti sono attualmente vivi). Quanti pronipoti maschi hanno i coniugi Bianchi? A) 7 B) 8 C) 10 D) 11 E) 14
11. (Scuola superiore di Catania) L'animatore di un villaggio turistico vuole organizzare un torneo di ramino che si svolga in 13 serate, in modo che ogni sera quattro giocatori disputino un incontro e che alla fine delle 13 serate ogni partecipante incontri una ed una sola volta tutti gli altri. Quanti giocatori possono iscriversi al torneo?
12. (Scuola superiore di Catania) Mario vuole telefonare a Giorgio, ma non ricorda il suo numero di telefono. Ricorda però che è un numero di sette cifre, tutte diverse, e in ordine crescente. Decide di provare tutti i numeri possibili, fino a quando risponde la famiglia di Giorgio, quanti numeri deve provare nel caso più sfortunato?
13. (Scuola superiore di Catania) Sia n un numero maggiore di 3000. dimostrare o confutare le seguenti asserzioni.
    A) $(n-1)!$ è divisibile per n B) $(n-2)!$ è divisibile per n C) $(n-3)!$ è divisibile per n
    D) $(n/2+1)!$ è divisibile per n (n pari) E) $(n/2)!-1$ è divisibile per n (n pari)
    F) $(n/2-1)!$ è divisibile per n (n pari) G) $(n/2-2)!$ è divisibile per n (n pari)
    H) $(n/2-3)!$ è divisibile per n (n pari)

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_2_3.htm

Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
D	C	D	C	B	C	B
8	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	
A	C	A	40	120	A), B), C): Falso se n è primo D) : Vero; E) : Falso sempre F), G), H): Falso se $n/2$ è primo	

8. Successioni di numeri reali

8.3 Progressioni numeriche

Prerequisiti

- I numeri naturali e le operazioni su di essi
- Concetto di applicazione
- Concetto di insieme infinito
- Insiemi numerabili

Obiettivi

- Comprendere il concetto di progressione
- Conoscere le più importanti proprietà delle progressioni
- Sapere applicare le formule delle progressioni a problemi pseudo–reali

Contenuti

- Progressioni aritmetiche
- Progressioni geometriche

Parole Chiave

Progressione – Ragione

Progressioni aritmetiche

"Sai sommare?" chiese la Regina Bianca. "Allora quanto fa uno più uno più uno più uno più uno più uno più uno più uno?"
"Non lo so", rispose Alice "Ho perso il conto"
Lewis Carroll, Attraverso lo specchio

Vogliamo adesso studiare dei particolari insiemi numerabili. Cominciamo a porre qualche definizione.

Definizione 1

Diciamo **successione numerica** un insieme ordinato di numeri reali.

Notazione 1

Una successione si indica con $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, o, se non vi è possibilità di equivoco, semplicemente con $\{a_n\}$. Il suo generico elemento che nell'insieme occupa la posizione numero n si indica con a_n.

Esempio 1

L'insieme $\left\{\frac{2n+7}{3n-1} : n \in \mathbb{N}\right\}$ è una successione, i cui primi elementi sono:

$$\left\{\frac{2\cdot1+7}{3\cdot1-1}=\frac{9}{2}, \frac{2\cdot2+7}{3\cdot2-1}=\frac{11}{5}, \frac{2\cdot3+7}{3\cdot3-1}=\frac{13}{8}, \dots\right\}$$

Fra le successioni ve ne sono alcune che meritano di essere evidenziate.

Definizione 2

Diciamo **progressione aritmetica** una successione numerica in cui la differenza tra due elementi consecutivi è costante. In simboli $a_{n+1} - a_n = d$, $\forall n \in \mathbb{N}$. La differenza costante d si chiama **ragione** della progressione.

Esempio 2

La successione $a_n = \{2n\}_{n\in\mathbb{N}}$, rappresenta i numeri pari. E poiché ogni numero pari è 2 unità più grande del precedente, questa è anche una progressione aritmetica di ragione 2. Infatti abbiamo:

$$a_{n+1} - a_n = 2 \cdot (n + 1) - 2 \cdot n = 2.$$

Invece la successione $a_n = \{n^2 + n + 3\}_{n\in\mathbb{N}}$ non è una progressione aritmetica perché

$$a_{n+1} - a_n = (n + 1)^2 + (n + 1) + 3 - (n^2 + n + 3) = 2n + 1.$$

Proprio per la loro stessa definizione possiamo ottenere semplici relazioni fra gli elementi di una stessa progressione aritmetica.

Esempio 3

Data la progressione aritmetica 4, 7, 10, 13, … di ragione 3, possiamo trovare facilmente il suo ventesimo termine senza bisogno di calcolare i precedenti 19. Infatti si ha: $4, 4 + 3, 4 + 2 \cdot 3, 4 + 3 \cdot 3, \dots$. Cioè in generale $a_n = 4 + (n - 1) \cdot 3$. Quindi $a_{20} = 4 + (20 - 1) \cdot 3 = 4 + 19 \cdot 3 = 61$.

Il precedente risultato permette di enunciare la seguente legge generale.

Teorema 1

Fra due distinti elementi di una stessa progressione aritmetica di ragione d, a_p e a_t, con $p > t$, vale la seguente relazione: $a_p = a_t + (p - t) \cdot d$.

Dimostrazione

Per la definizione di progressione aritmetica si ha: $a_p = a_{p-1} + d = a_{p-2} + d + d = \ldots = a_1 + (p-1)\cdot d$ (*) e anche $a_t = a_1 + (t-1)\cdot d$, ma allora avremo anche $a_1 = a_t - (t-1)\cdot d$, quindi sostituendo nella (*)

$$a_p = a_t - (t-1)\cdot d + (p-1)\cdot d = a_t + (p-1-t+1)\cdot d = a_t + (p-t)\cdot d$$

che è proprio la tesi.

Vediamo un'applicazione.

Esempio 4

- Data la progressione in cui il primo termine $a_1 = 7$ e la ragione d è 5, il suo 15° elemento, a_{15}, è, in base al teorema precedente: $a_{15} = 7 + (15-1)\cdot 5 = 77$.
- Nella progressione aritmetica in cui, $a_4 = 2$ e $d = 3$, $a_{12} = 2 + (12-4)\cdot 3 = 26$.

Vediamo un'altra questione.

Esempio 5

Di una progressione aritmetica conosciamo il primo elemento, 3, e il quindicesimo, 23, vogliamo determinare i rimanenti termini. Basta determinare la ragione, ma ciò si fa facilmente, tenendo conto del precedente risultato, infatti si ha: $a_{15} = a_1 + 14\cdot d \Leftrightarrow 23 = 3 + 14d \Rightarrow d = 20/14 = 10/7$. Trovata la ragione, facilmente si trovano i termini mancanti: $\left\{3, \frac{31}{7}, \frac{41}{7}, \frac{51}{7}, \ldots, \frac{141}{7}, \frac{151}{7}, 23\right\}$.

Anche il calcolo dei termini di una progressione aritmetica risulta facilitato.

Esempio 6

Vogliamo calcolare velocemente la somma dei primi 50 numeri interi consecutivi, che costituiscono una progressione aritmetica di ragione 1. Osserviamo che possiamo accoppiare i 50 numeri nel seguente modo:

$$(1 + 50) + (2 + 49) + (3 + 48) + \ldots + (25 + 26) = 51 + 51 + 51 + \ldots + 51.$$

Gli addendi sono tutti uguali e sono in numero di 25, quindi la somma cercata è $51 \cdot 25 = 1275$.

Tenuto conto del precedente esempio si ottiene il seguente risultato.

Teorema 2

La somma dei primi n numeri naturali è data da $1+2+\ldots+n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$.

Dimostrazione

Distinguiamo due casi. n pari, quindi $n = 2k$, allora possiamo accoppiare gli addendi nel seguente modo: $1 + 2 + \ldots + (2k-1) + 2k = (1 + 2k) + (3 + 2k - 1) + (3 + 2k - 2) + \ldots + (k + k + 1)$. Ottenendo così k addendi tutti uguali a $2k + 1$, quindi la somma è $k\cdot(2k + 1)$, ma $k = n/2$ e $2k + 1 = n + 1$, quindi la somma è $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$, che coincide con la tesi.

Se n é dispari, cioè $n = 2k + 1$, accoppieremo lasciando il termine centrale:

$$1 + 2 + \ldots + 2k + (2k + 1) = (1 + 2k + 1) + (3 + 2k) + (3 + 2k - 1) + \ldots + (k + k + 2) + (k + 1).$$

Stavolta abbiamo k addendi uguali a $2k + 2$, quindi la somma è $k\cdot(2k + 2) + (k + 1) = (k + 1)\cdot(2k + 1)$. dato che $n = 2k + 1$, $k + 1 = (n + 1)/2$ e perciò otteniamo ancora una volta la stessa somma.

Adesso enunciamo un risultato che riguarda la somma di alcuni termini consecutivi di una progressione aritmetica.

Teorema 3

In una progressione aritmetica di ragione d, la somma dei primi n elementi è:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = n \cdot \frac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Dimostrazione
Vogliamo calcolare $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, se ricaviamo tutti gli addendi, tranne il primo, mediante il primo, avremo: $a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + [a_1 + (n-1) \cdot d] = n \cdot a_1 + (1 + 2 + \ldots + n - 1) \cdot d$.
Sostituendo la somma in parentesi con il risultato del teorema 2 abbiamo:

$$n \cdot a_1 + \frac{(n-1) \cdot n}{2} \cdot d = n \cdot \left[a_1 + \frac{(n-1) \cdot d}{2} \right] = n \cdot \frac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2}$$

Cioè la prima tesi.
Del resto si ha: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$, quindi la precedente si può anche scrivere:

$$\frac{a_1 + (a_1 + (n-1) \cdot d)}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$, che è l'altra tesi.

Esempio 7
Data la progressione aritmetica di ragione 1/2, il cui quinto termine è 3/4, vogliamo determinare la somma dei termini che vanno dal terzo al decimo inclusi. La formula stabilita dal teorema precedente può applicarsi considerando a_5 come primo termine: $a_5 + a_6 + \ldots + a_{10} = 6 \cdot \frac{2a_5 + 5 \cdot d}{2} = 3 \cdot \left(2 \cdot \frac{3}{4} + 5 \cdot \frac{1}{2} \right) = 12$.
Per la somma voluta ci serve $a_3 + a_4 = 2a_3 + d = 2 \cdot (a_5 - 2d) + d = 2a_5 - 3d = 2 \cdot \frac{3}{4} - 3 \cdot \frac{1}{2} = 0$.
Quindi la somma rimane 12.

Verifiche

Dopo avere determinato quali fra le seguenti successioni sono progressioni aritmetiche, per quelle che lo sono calcolarne la ragione.

***Livello* 1**

1. $\{3n + 2\}$ [3] $\{7n - 1\}$ [7] $\{n^2 + 2\}$ [No] $\{1 - 5n\}$ [–5] $\{n^3 - 1\}$ [No] $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ [No]

***Livello* 2**

2. $\{sin(n)\}$ [No] $\{sin(n \cdot \pi)\}$ [0] $\{n + sin(n \cdot \pi)\}$ [1] $\{kn + m\}$ [k] $\{cos(n \cdot \pi)\}$ [No] $\{2n + (-1)^n \cdot cos(n \cdot \pi)\}$ [2]

Lavoriamo insieme

Filippo firma un contratto con il suo datore di lavoro nel quale si stabilisce che il suo stipendio iniziale è di 1000 euro mensili e ogni anno riceverà un aumento pari al 2% dello stipendio vigente. Quanto sarà il suo stipendio mensile dopo 10 anni, cioè l'undicesimo anno?
Abbiamo a che fare con una progressione aritmetica? Vediamo i primi termini di questa successione: {1000; 1020; 1040,40} non è una progressione aritmetica, poiché la differenza fra due termini successivi non è costante, 20 euro la prima differenza e 20,40 la seconda. Quindi possiamo rispondere alla domanda o elencando tutti gli stipendi o cercando una regola generale. Vediamo il secondo procedimento.
Si ha $\{1000; 1000 + 0{,}02 \cdot 1000 = 1000 \cdot (1{,}02) = 1020; 1020 + 0{,}02 \cdot 1020 = 1020 \cdot (1{,}02) = 1000 \cdot 1{,}02^2\}$, non è difficile capire che in generale, dopo n anni lo stipendio sarà $1000 \cdot 1{,}02^n$, quindi dopo 10 anni sarà diventato $1000 \cdot 1{,}02^{10} \approx 1218{,}99$.
Se invece l'aumento fosse stato sempre del 2% del primo stipendio avremmo avuto una progressione aritmetica, di ragione 20 e quindi dopo 10 anni avremmo avuto $1000 + 20 \cdot 10 = 1200$.

***Livello* 1**

3. Giada firma un contratto con il suo datore di lavoro nel quale si stabilisce che il suo stipendio iniziale è di 1200 euro mensili e ogni anno riceverà un aumento pari al 3% dello stipendio iniziale. Quanto sarà

il suo stipendio mensile dopo 20 anni, cioè il ventunesimo anno? [1920]

4. Con riferimento al precedente quesito, dopo quanti anni lo stipendio raggiungerebbe o supererebbe i 2000 euro la prima volta? Se raggiunge i 2000 euro dopo 15 anni, quanta percentuale di aumento si ha rispetto allo stipendio iniziale? [23; ≈ 4,45%]

Delle seguenti progressioni aritmetiche, sulla base dei dati, determinare quanto richiesto

5. $a_1 = 1, d = 4, a_{40} = ?$ [157] $a_{27} = 3/4, d = 2/3, a_{38} = ?$ [97/12] $a_6 = 4, a_{18} = 15, d = ?$ [11/12]
6. $a_1 = 15, a_{10} = 27, d = ?$ [4/3] $a_{17} = 2/3, a_4 = -1/2, d = ?$ [7/78] $a_{23} = -3/4, d = 5/6, a_{47} = ?$ [77/4]
7. $a_1 = 10, a_n = 21, d = 3, n = ?$ [∅] $a_1 = 37, a_n = 13, d = -24/11, n = ?$ [12]
8. $a_3 = 7, a_n = 24, d = 17/16, n = ?$ [19] $a_n = 14, a_{27} = 31, d = 17/12, n = ?$ [14]
9. $a_{13} = 10, a_n = 26, d = 1/3, n = ?$ [39] $a_{10} = 21, a_n = 40, d = 2/3, n = ?$ [∅]

Livello 2

10. I numeri $\{x - 1, x + 1, 2x + 3\}$ sono in progressione aritmetica determinare x. [0]
11. I numeri $\{2x - 1, 3x + 1, 4x\}$ sono in progressione aritmetica determinare x. [∅]
12. Devo partire da A per arrivare a B, che distano 186 km e ho un motorino che con un pieno fa 38 *Km*. Quanti distributori almeno, devono esserci sulla strada AB ed a che distanza minima devono essere posti l'uno dall'altro, perché io possa essere sicuro di raggiungere B? [4; 37]
13. Un cerchio la cui area misura x è interno ad un altro cerchio di area $x + y$. Se il raggio del cerchio più grande misura 3 cm, e se $(x, y, x + y)$ formano una progressione aritmetica, quanto misura il raggio del cerchio più piccolo? $\left[\sqrt{3}\ cm\right]$

Lavoriamo insieme

Calcolare la somma di tutti i numeri naturali compresi fra 75 e 789 e divisibili per 11.
I numeri divisibili per 11 costituiscono, ovviamente, una progressione aritmetica di ragione 11, quindi dobbiamo calcolare la somma degli elementi di tale progressione. Ora $a_1 = 77 = 7 \cdot 11$, e $a_{65} = 781 = 71 \cdot 11$.
Quindi dobbiamo calcolare: $S_{7,65} = \frac{(2 \cdot 77 + 64 \cdot 11) \cdot 65}{2} = 27\,885$

Livello 1

14. Calcolare la somma di tutti i numeri naturali compresi fra 15 e 684 e divisibili per 5. [46565]
15. Calcolare la somma di tutti i numeri naturali compresi fra 35 e 843 e divisibili per 3. [118665]
16. Calcolare la somma di tutti i numeri naturali compresi fra 34 e 874 e divisibili per 7. [54180]
17. Calcolare la somma di tutti i numeri naturali compresi fra 75 e 789 e divisibili per 11. [27885]
18. La somma dei naturali divisibili per 4 compresi fra n e 541 è 28656, determinare n. [$64 \le n \le 67$]
19. La somma dei naturali divisibili per 6, compresi fra 123 e n è 2520, determinare n. [$210 \le n \le 215$]
20. La somma dei naturali divisibili per 8 compresi fra 201 e n è 3848, determinare n. [∅]

Delle seguenti progressioni aritmetiche, sulla base dei dati, determinare quanto richiesto

Livello 2

21. $S_{15} = 41, a_1 = 7, d = ?$ [–64/105] $S_{23} = 17, a_1 = 2, d = ?$ [–29/253]
22. $S_{35} = 2140, a_1 = ?, d = 3$ [71/7] $S_{18} = 315, a_1 = ?, d = 1/2$ [53/4]
23. $S_n = 100, a_1 = 3, d = 2, n = ?$ [∅] $S_n = 1593/5, a_1 = 4, d = 3/5, n = ?$ [27]
24. $S_{20} = 248, a_1 = 2, a_{20} = ?$ [114/5] $S_{13} = 157, a_{13} = 5, a_1 = ?$ [249/13]
25. $S_n = 312, a_1 = 4, a_n = 21, n = ?$ [∅] $S_n = 503, a_1 = 7, a_n = 747/37, n = ?$ [37]

Lavoriamo insieme

La somma dei primi dieci termini di una progressione aritmetica è quattro volte la somma dei primi cinque termini. Se il primo termine è 3, quanto vale la ragione?
Abbiamo $\sum_{k=1}^{10} a_k = 10 \cdot \frac{2a_1 + 9 \cdot d}{2} = 10a_1 + 45d = 30 + 45d; \sum_{k=1}^{5} a_k = 5 \cdot \frac{2a_1 + 4 \cdot d}{2} = 5a_1 + 10d = 15 + 10d$, quindi si ha: $30 + 45d = 4 \cdot (15 + 10d) \Rightarrow 45d - 40d = 60 + 30 \Rightarrow 5d = 30 \Rightarrow d = 6$.

Livello 2

26. Determinare la somma dei primi n numeri naturali pari. $[n^2 + n]$
27. Determinare la somma dei primi n numeri naturali dispari. $[n^2]$
28. Determinare la somma dei primi n multipli di 4. $[2n^2 + 2n]$
29. Determinare la somma dei primi n multipli di h. $[h/2 \cdot (n^2 + n)]$
30. Consideriamo la somma S dei primi n numeri pari, qual è il minimo n per cui $S > 10^6$? [1000]
31. Di una progressione aritmetica conosciamo a_1, a_n e S. Determinare d.
32. Semplificare $\dfrac{2+4+6+...+2n}{1+3+5+...+(2n-1)}$. $\left[\dfrac{n+1}{n}\right]$
33. La somma dei primi $3n$ numeri naturali supera di 150 la somma dei primi n naturali. Quanto è n? [6]
34. $\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{6} a_k = 110, a_1 = 3, d = ?$ [2] $\sum_{k=3}^{8} a_k + 152 = \sum_{k=6}^{12} a_k, d = 5, a_1 = ?$ [3]

Date due progressioni aritmetiche, determinare, se esiste, un numero naturale *n*, per cui valogono le date uguaglianze

35. $(a_1 = 2, d = 3)$, $(b_1 = 5, d = 2)$, $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} b_k$ [7] $(a_1 = 14, d = 1/2)$, $(b_1 = 7, d = 3/4)$, $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} b_k$ [57]
36. $(a_1=8, d = 1/4)$, $(b_1=2, d = 1/3)$, $\sum_{k=1}^{n} a_k = 2\cdot\sum_{k=1}^{n} b_k$ [∅] $(a_1 =15, d = 1/4)$, $(b_1 =3, d = 1/2)$, $\sum_{k=1}^{n} a_k = 2\cdot\sum_{k=1}^{n} b_k$ [25]

Lavoriamo insieme

Date due progressioni aritmetiche $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$, si costruisca una nuova progressione aritmetica sommando le due progressioni termine a termine, $a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n$. Sapendo che $a_1 = 25$, $b_1 = 75$, $a_{100} + b_{100} = 100$, determinare la somma dei primi 100 termini della nuova progressione. Dobbiamo calcolare $(a_1+b_1)+...+(a_{100}+b_{100}) = \dfrac{(a_1+b_1)+(a_{100}+b_{100})}{2}\cdot 100 = \dfrac{25+75}{2}\cdot 100 = 5000$.

Livello 3

37. La somma di tre numeri in progressione aritmetica è 30, mentre la somma dei loro quadrati è 372, determinare i tre numeri. Sugg: considerare $(x - d, x, x + d)$. [{4, 10, 16}]
38. La somma di tre termini di una progressione aritmetica è 15/2, mentre la somma dei loro reciproci è 37/30, determinare i termini. [{2, 5/2, 3}]
39. Di una progressione aritmetica si sa che la somma dei primi 10 termini vale 100, mentre quella dei primi 100 termini vale 10. Quanto vale la somma dei primi 110 termini? [–110]
40. Data una progressione aritmetica decrescente con un numero pari, $2n$, di termini e di ragione d. Determinare la differenza fra la somma dei primi n termini e gli altri. $[n^2 \cdot d]$
41. Data una progressione aritmetica decrescente con un numero dispari, $2n - 1$, di termini e di ragione d. Determinare la somma di tutti i termini in funzione di a_n. $[(2n - 1) \cdot a_n]$
42. Data una progressione aritmetica decrescente con un numero pari, $2n$, di termini e di ragione d. Determinare la somma di tutti i termini in funzione della somma di due termini che occupano posizioni la cui somma è pari a $2n + 1$. $[n\cdot(a_1 + a_{2n}) = n\cdot(a_1 + a_{2n-1}) = \ldots = n\cdot(a_n + a_{n+1})]$
43. Provare che una successione $p(n)$ che verifica la seguente proprietà $p(n+1) = \dfrac{k\cdot p(n)+1}{k}$, con k numero reale non nullo è una progressione aritmetica. Quanto vale la ragione? $[k]$
44. Indichiamo con $p(n)$ una generica progressione aritmetica di 40 termini, il cui primo termine è n e la ragione è $2n - 1$, con $p\in \mathbb{N}$. Determinare la somma di tutti i 400 termini delle progressioni da $p(1)$ a $p(10)$. [80200]

Progressioni geometriche

Consideriamo un altro genere di successioni numeriche, affini alle progressioni aritmetiche.

Definizione 3

Diciamo **progressione geometrica** una successione numerica in cui il rapporto tra due elementi consecutivi è costante. In simboli $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, il rapporto costante q si chiama **ragione**.

Esempio 8

Le successive potenze di un numero, per esempio di 2, sono progressioni geometriche di ragione la base comune. Infatti la legge generale è $a_n = \{2^n\}$, quindi $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$.

Anche per le progressioni geometriche possiamo determinare semplici formule per determinare un elemento conoscendone un altro e la sua posizione.

Esempio 9

Data la progressione geometrica di ragione ½, il cui quinto elemento è 4, vogliamo trovare il suo decimo elemento. Cominciamo a costruire il quinto elemento a partire dal quarto: 4 · ½ = 2. Il sesto è 2 · ½ = 1. Ma è anche 4 · ½ · ½ = 4 · $(½)^2$. Quindi facilmente si ha che il settimo elemento, a partire dal quarto è 4 · $(½)^3$. E pertanto il decimo elemento sarà: 4 · $(½)^6$ = 1/16.

Generalizzando l'esempio precedente otteniamo il seguente risultato.

Teorema 4

Fra due distinti elementi a_p e a_t di una stessa geometrica di ragione q, si ha: $a_p = a_t \cdot q^{p-t}$.

Dimostrazione

Per esercizio sulla falsariga dell'esempio 9.

Vediamo una questione analoga a quella già vista per le progressioni aritmetiche.

Esempio 10

Di una progressione geometrica conosciamo il primo elemento, 2, e il decimo, 15, vogliamo determinare i rimanenti termini. Troviamo la ragione: $a_{10} = a_1 \cdot \sqrt[9]{q} \Rightarrow 15 = 2 \cdot \sqrt[9]{q} \Rightarrow q = \left(\frac{15}{2}\right)^9$. Quindi i termini mancanti sono: $\left\{2, \frac{15^9}{2^8}, \sqrt{\frac{15^9}{2^7}}, \frac{15^3}{4}, \ldots, \sqrt[7]{\frac{15^9}{4}}, \sqrt[8]{\frac{15^9}{2}}, 15\right\}$.

Anche per queste progressioni possiamo trovare semplici regole per il calcolo delle somme.

Esempio 11

Un'antica leggenda narra che l'inventore degli scacchi volesse essere ricompensato con 1 chicco di riso posto nella prima casella della scacchiera, con 2 nella seconda, 4 nella terza e così via sempre raddoppiano fino a 2^{63} chicchi nell'ultima. Già questo numero è enorme, vale circa 9 · 10^{18}, ma vogliamo calcolare quanti chicchi in realtà erano richiesti. Dobbiamo cioè sommare i primi 64 termini della progressione geometrica di ragione 2 e primo termine 1, ossia di S = 1 + 2 + 2^2 + … + 2^{62} + 2^{63}. Osserviamo che moltiplicando ciascun termine per 2 otteniamo il doppio della somma richiesta: 2S = 2 + 2^2 + … + 2^{63} + 2^{64}. Questa somma è molto simile alla precedente, differendo da essa solo per due addendi, pertanto se sottraiamo la prima dalla seconda troveremo facilmente la somma richiesta:

$$2S - S = (2 + 2^2 + \ldots + 2^{63} + 2^{64}) - (1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{62} + 2^{63}) \Rightarrow S = 2^{64} - 1 \approx 1{,}8 \cdot 10^{19}.$$

Che è effettivamente un numero di chicchi di riso enorme, che neanche il potentissimo re possedeva.

Con la stessa procedura mostrata nell'esempio precedente otteniamo il seguente risultato generale.

Teorema 5

La somma di k termini consecutivi di una progressione geometrica di ragione q, a partire da quello di posto p è: $S_{p,k} = \sum_{m=p}^{p+k} a_m = a_p \cdot \frac{q^{k+1}-1}{q-1}$.

Dimostrazione

Per esercizio sulla falsariga dell'esempio 11.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Un capitale di € 1500,00 è investito al tasso fisso di interesse annuo $i = 3\%$, in modo però che l'interesse maturato non venga liquidato ma venga aggiunto al capitale iniziale. Questo si chiama *regime di capitalizzazione composta*. Qual è la progressione con cui aumenta il capitale?

Al primo anno il capitale diventa € $(1500{,}00 + 1500{,}00 \cdot 0{,}03)$ = € $1500{,}00 \cdot 1{,}03$.

Al secondo anno il capitale diventa € $[1500{,}00 \cdot 1{,}03 + (1500{,}00 \cdot 1{,}03) \cdot 0{,}03]$ = € $1500{,}00 \cdot 1{,}03^2$.

Non è difficile capire che al terzo anno sarà € $1500{,}00 \cdot 1{,}03^3$ e , in generale, all'anno n, diventerà € $1500{,}00 \cdot 1{,}03^n$.

Quindi abbiamo a che fare proprio con una progressione geometrica di ragione 1,03 e di termine iniziale 1500,00.

Livello 1

1. Se in una progressione geometrica la ragione è negativa i suoi termini che segno hanno? [Alternato]
2. Con riferimento al problema del box Lavoriamo insieme, dopo 10 anni quanto varrà il capitale investito? [≈ € 2336,95]
3. Sempre con riferimento al problema del box Lavoriamo insieme, se il tasso di interesse fosse del 3,50%, quale sarebbe la risposta al precedente quesito? [≈ € 2513,02]
4. Un capitale di x euro è investito in regime di capitalizzazione composta per 12 anni, al tasso del 2,75%. Se il capitale finale maturato è di € 1661,74, quanto è x? [€ 1200,00]
5. Un capitale di 2000 euro è investito in regime di capitalizzazione composta per 20 anni, al tasso del x%. Se il capitale finale maturato è di € 4382,25, quanto è x? [4]
6. Dopo aver provato che i numeri $\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[6]{2}$ sono in progressione geometrica, determinare il quarto termine di tale progressione. [1]

Delle seguenti progressioni geometriche, sulla base dei dati, determinare quanto richiesto

7. $a_1 = 3$, $q = 1/3$, $a_5 = ?$ [1/27] $a_1 = 12$, $q = -3/4$, $a_6 = ?$ [–729/256]
8. $a_5 = 3/2$, $q = 1/2$, $a_{12} = ?$ [3/256] $a_7 = 3/2$, $q = -1/4$, $a_2 = ?$ [–1536]
9. $a_3 = 2/5$, $a_7 = 5/8$, $q = ?$ $\left[\pm\sqrt{5}/2\right]$ $a_3 = 2/5$, $a_7 = -5/8$, $q = ?$ [∅]
10. $a_1 = 2$, $a_{10} = 120$, $q = ?$ $\left[\sqrt[9]{60}\right]$ $a_1 = 32/27$, $a_n = 81/4$, $q = 3/2$, $n = ?$ [8]

Livello 2

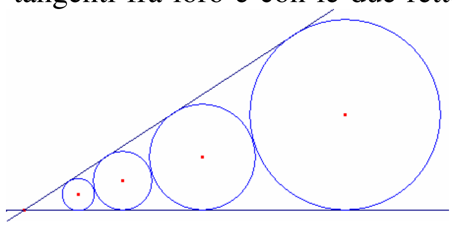
11. Affinché i termini di una progressione geometrica siano ordinati in modo crescente, quanto deve essere la ragione? [maggiore di 1]
12. Affinché i termini di una progressione geometrica siano ordinati in modo decrescente, quanto deve valere la ragione? [positiva e minore di 1]

13. Fra i numeri 8 e 5832 sono inseriti cinque numeri che con i precedenti formano una progressione geometrica, quanto vale il quinto di questi numeri? [±1944]

14. Dati i numeri 20, 50, 100 aggiungiamo a ciascuno di essi un uguale numero, ottenendo così una progressione geometrica. Quanto vale l'addendo costante? Quanto la ragione? [25; 5/3]

Livello 3

15. Provare che le circonferenze in figura, che sono tangenti fra loro e con le due rette, hanno i raggi in progressione geometrica.



16. Dimostrare che se il secondo termine di una progressione geometrica il cui primo termine è 1, è un quadrato o un cubo, allora tutti gli altri termini sono quadrati o cubi.

17. Dimostrare che se il secondo termine di una progressione geometrica il cui primo termine è 1, non è un quadrato, allora i soli quadrati della progressione possono essere quelli di posto dispari.

18. Dimostrare che se il secondo termine di una progressione geometrica il cui primo termine è 1, non è un cubo, allora i soli cubi della progressione possono essere quelli che occupano i posti 4, 7, 10, …

Lavoriamo insieme

In una progressione geometrica la differenza fra il quinto ed il quarto termine è 576 e la differenza fra il secondo ed il primo termine è 9. Quanto vale la somma dei primi cinque termini?

Le condizioni del problema equivalgono al sistema seguente: $\begin{cases} a_5 - a_4 = 576 \\ a_2 - a_1 = 9 \end{cases}$ Che ha 4 incognite, perciò riconduciamo tutto a due sole incognite: $\begin{cases} a_4 \cdot q - a_4 = 576 \\ a_1 \cdot q - a_1 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_4 \cdot (q-1) = 576 \\ a_1 \cdot (q-1) = 9 \end{cases} \Rightarrow \frac{a_4}{a_1} = \frac{576}{9} \Rightarrow \frac{a_4}{a_1} = 64$

D'altro canto sappiamo pure che $a_4 = a_1 \cdot q^3$, quindi avremo: $\frac{a_4}{a_1} = 64 \Rightarrow \frac{a_1 \cdot q^3}{a_1} = 64 \Rightarrow q^3 = 64 \Rightarrow q = 4$

Quindi $a_1 \cdot (q-1) = 9 \Rightarrow a_1 = \frac{9}{4-1} = 3$. Possiamo così calcolare la somma richiesta:

$$\sum_{k=1}^{5} a_k = a_1 \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1} = 3 \cdot \frac{4^5 - 1}{4 - 1} = 4^5 - 1 = 1023$$

Livello 2

Delle seguenti progressioni geometriche, sulla base dei dati, determinare quanto richiesto

19. $a_1 = -½$, $q = 2$, $S_8 = ?$ [–255/2] $a_1 = -½$, $q = -2$, $S_8 = ?$ [85/2] $a_5 = 2$, $q = 1/3$, $S_7 = ?$ [2186/9]

20. $a_4 = 3/2$, $q = -1/3$, $S_{10} = ?$ [–7381/243] $q = 3$, $S_4 = 80/9$, $a_1 = ?$ [2/9] $q = -½$, $S_7 = 12/5$, $a_1 = ?$ [768/215]

21. $a_1 = -½$, $q = -½$, $S_n = 171/512$, $n = ?$ [9] $a_1 = 2/3$, $q = 3/2$, $S_n = 665/48$, $n = ?$ [6]

22. $a_2 = 4$, $q = 1/2$, $S_n = 127/8$, $n = ?$ [6] $a_4 = 4/3$, $q = 1/3$, $S_n = 484/27$, $n = ?$ [∅]

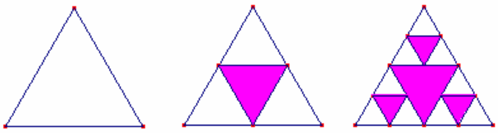
23. Determinare una formula per calcolare la somma delle prime n potenze di 2. [$2^{n+1} - 1$]

24. Determinare una formula per calcolare la somma delle prime n potenze di k. $\left[\frac{k^{n+1} - 1}{k - 1}\right]$

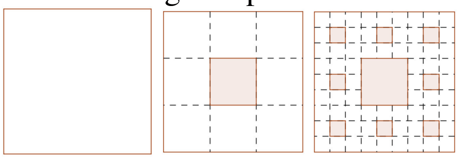
25. In una progressione geometrica formata da sei termini la somma fra i termini di posto dispari è 84 e quella fra i rimanenti termini è 168, determinare tutti i termini. [4, 8, 16, 32, 64, 128]

Livello 3

26. In una progressione geometrica la somma dei primi due termini è 5, mentre la somma dei primi sei termini è 665/81, quanto è la somma dei termini dal terzo al settimo? [1100/243 ∨ 844/243]

27. In figura  ci sono i primi tre passi di una costruzione, nota come triangolo di Sierpinski, ottenuta considerando un triangolo equilatero e successivamente dei triangoli equilateri i cui estremi sono punti medi dei lati precedenti. Dopo cinque passi quanta parte del triangolo originale è non colorata? [81/256]

28. In figura  ci sono i primi tre passi di una costruzione, nota come curva fiocco di neve di von Koch, ottenuta a partire da un segmento lungo una unità, che viene diviso in 3 parti uguali, quindi si elimina la parte centrale e si sostituisce con due segmenti che formano con il segmento eliminato un triangolo equilatero. Se continuiamo questa costruzione per altri 7 passi, quanto sarà lunga la spezzata finale? [$(4/3)^9$]

29. In figura  ci sono i primi tre passi di una costruzione, nota come tappeto di Sierpinski, ottenuta a partire da un quadrato, che viene diviso in 9 quadrati uguali e poi si elimina il quadrato centrale, e così via. Se continuiamo questa costruzione per un totale di 8 passi, quanta sarà l'area eliminata? [$2^{21}/3^{14}$]

Risolvere i seguenti problemi presenti in alcuni antichi testi matematici

30. (Zhang Qiujian Suan Jing) Un cavallo ha percorso 700 miglia in 7 giorni, dimezzando la sua velocità ogni giorno. Quanto ha percorso ogni giorno? [≈ 352,76 miglia]
31. (Fibonacci, 1202) Un uomo possiede inizialmente 100 denari e spende ogni giorno 1/10 di ciò che ha. Con quanto rimane dopo 12 giorni? [≈ 28,24 denari]
32. (Chuquet, 1484) Un uomo percorre 1, 3, 9, ... leghe in giorni successivi. Continuando a questo ritmo, quante leghe percorrerà in 5 giorni e mezzo? [242,5 leghe]
33. (Chuquet, 1484) Una botte contiene una quantità di vino pari a 9,5 barili. Il suo contenuto viene trasferito nei barili in modo tale che: il primo barile si riempie in 1 ora; il secondo barile si riempie in 2 ore; il terzo barile si riempie in 4 ore; e così via, raddoppiando ogni volta il tempo. Quanto tempo è necessario per svuotare la botte? [≈ 723,077 ore]
34. (Ozanam, 1778) Si parte con 210 persone. Ogni 25 anni, la popolazione triplica. Quante persone ci saranno dopo 225 anni? [1377 810]
35. (Ozanam, 1778) Si parte con una coppia: Adamo ed Eva. Supponiamo che la popolazione umana raddoppi ogni 20 anni. La bibbia ci dice che Adamo visse 900 anni. Quanti nipoti, pronipoti, etc. poté vedere Adamo quando aveva 500 anni, supposto che ebbe il primo figlio a 100 anni e che nessuno dei suoi discendenti fosse morto prima. [1048 576]

Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi

1. (Liceo scientifico PNI 1994/95) In un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy è dato il punto $A_0 \equiv (1, 0)$. Si costruisca il triangolo rettangolo OA_oA_1 avente il vertice A_1 sull'asse delle ordinate e sia α l'angolo $O\hat{A}_0A_1$. Si conduca per A_1 la perpendicolare alla retta A_oA_1 che incontra l'asse delle ascisse in A_2; si conduca per A_2 la perpendicolare alla retta A_1A_2 che incontra l'asse delle ordinate in A_3 e così via, ottenendo una spezzata $A_oA_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_n$ i cui vertici di indice dispari appartengono all'asse delle ordinate e quelli di indice pari all'asse delle ascisse. Il candidato dimostri che le lunghezze dei lati della spezzata sono in progressione geometrica e calcoli la lunghezza l_n della spezzata. $\left[l_n = \dfrac{1-\left[tan(\alpha)\right]^n}{cos(\alpha)-sin(\alpha)}\right]$
2. (Istituto magistrale PNI 1994/95) Su una semiretta di origine A_0 è dato il segmento $A_0 A_1$ di lunghezza 2. Si considerino i segmenti adiacenti A_1A_2, A_2A_3, …, $A_{n-1} A_n$ tali che il rapporto tra ogni segmento e il precedente sia k. Il candidato dimostri che le aree dei cerchi aventi per diametro i suddetti segmenti sono i termini di una progressione geometrica e calcoli l'area S_n della parte di piano delimitata dalla successione delle prime n circonferenze. $[\pi \cdot (k^n - 1)/(k - 1)]$

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi.

1. Definiamo differenze finite di ordine k di una successione a_n le seguenti quantità: $\Delta^1(a_n) = a_{n+1} - a_n$, $\Delta^2(a_n) = \Delta^1(a_{n+1}) - \Delta^1(a_n)$, ..., $\Delta^k(a_n) = \Delta^{\kappa-1}(a_{n+1}) - \Delta^{\kappa-1}(a_n)$. dimostrare che se a_n è un polinomio di grado k, allora tutte le differenze finite di ordine maggiore di k sono nulle.
2. Determinare la somma dei primi n numeri naturali sapendo che è un quadrato perfetto minore di 100. [Sono possibili tre soluzioni: 1, 8, 49]
3. Determinare il minimo n per cui la somma dei primi n numeri pari sia maggiore di k, con k numero intero fissato. $\left[n > \left\lceil \dfrac{-1+\sqrt{4k+1}}{2} \right\rceil\right]$
4. Determinare una regola determinare quanta parte del triangolo di Sierpinski (vedi esercizio 27) è non colorata dopo n passi. $[(3/4)^{n-1}]$
5. Determinare una regola per calcolare la lunghezza della curva fiocco di neve di von Koch (vedi esercizio 28), dopo n passi $[(4/3)^{n-1}]$
6. Determinare una regola determinare quanta parte del tappeto di Sierpinski (vedi esercizio 29) è eliminata, dopo n passi $[(8/6)^{n-1}]$
7. Dimostrare che un numero del tipo $2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$ è un numero perfetto se $(2^n - 1)$ è un numero primo. Ricordiamo che un numero si dice perfetto se è uguale alla somma di tutti i suoi divisori escluso il numero stesso. Per esempio $6 = 1 + 2 + 3$, $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.
AHSME = Annual High School Mathematics Examination HSMC = A&M University High School Mathematics Contest
RICE = Rice University Mathematics Tournament

Lavoriamo insieme

Consideriamo un quesito assegnato agli HSMC del 2006.
Sia S la somma dei primi n termini della progressione 8, 12, 16, . . . Sia T la somma dei primi n termini della progressione 17, 19, 21, . . . Supponiamo $n \neq 0$. Per quali valori di n si ha S = T ?
La prima progressione è formata dai multipli di 4 a partire da 4·2, così il termine n–esimo è $4\cdot(n + 1)$. Quindi

$$S = 8 + 12 + \ldots + 4n + 4(n + 1) = 4 \cdot [2 + 3 + \ldots + n + (n + 1)] = 4 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + n) + 4n =$$
$$= \cancel{4}^2 \cdot \frac{n\cdot(n+1)}{\cancel{2}} + 4n = 2n^2 + 6n.$$

La seconda progressione è formata dai dispari a partire da $17 = 2 \cdot 9 - 1$, così e il termine n–esimo è $2 \cdot (9 + n - 1) - 1 = 2 \cdot (n + 8) - 1$. Quindi

$$T = 17 + 19 + \ldots + [2(n + 8) - 1] = (2 \cdot 9 - 1) + (2 \cdot 10 - 1) + \ldots + [2 \cdot (n + 8) - 1] =$$
$$= 2 \cdot [9 + 10 + \ldots + (n + 8)] - n = 2 \cdot [1 + 2 + \ldots + (n + 8)] - 2 \cdot (1 + 2 + \ldots + 8) - n =$$
$$= \cancel{2} \cdot \frac{(n+8)\cdot(n+9)}{\cancel{2}} - \cancel{2} \cdot \frac{8\cdot 9}{\cancel{2}} - n = n^2 + 17n + 72 - 72 - n = n^2 + 16n$$

Allora S = T implica $2n^2 + 6n = n^2 + 16n \Rightarrow n^2 - 10n = 0 \Rightarrow n = 10$. Ovviamente la soluzione nulla non si accetta.

1. (AHSME 1958) Il primo termine di una successione di numeri naturali consecutivi è $k^2 + 1$, determinare la somma dei primi $2k + 1$ elementi di tale successione. [$k^3 + (k + 1)^3$]
2. (AHSME 1959) Diciamo progressione armonica una successione di numeri i cui reciproci sono in progressione aritmetica, per esempio {½, 1/3, ¼, …}. I primi tre termini di una progressione armonica sono 3, 4, 6. Determinare la somma dei primi quattro termini di tale progressione. [25]
3. (AHSME 1960) Data una progressione aritmetica di primo termine a e ragione d, sommiamo i suoi primi n termini, i suoi primi $2n$ termini e i suoi primi $3n$ termini. Indichiamo con s_1, s_2 e s_3 le tre somme. Quanto vale $s_3 - s_2 - s_1$? [$2n^2d$]
4. (AHSME 1961) La somma dei primi 50 termini di una progressione aritmetica è 200, la somma dei successivi 50 termini è 2700. Quanto vale a_1? [–20,5]
5. (AHSME 1962) Tutti gli angoli interni di un pentagono sono in progressione aritmetica, quale fra i seguenti valori misura certamente uno degli angoli? A) 108° B) 90° C) 72° D) 54° E) 36° [A]
6. (AHSME 1964) La somma di n termini di una progressione aritmetica di ragione 2 è $a_1 + \ldots + a_n = 53$, se a_1 è intero e $n > 1$, quali sono i possibili valori che può assumere n? [3, 9, 17, 51, 153]
7. (AHSME 1965) Comunque consideriamo n termini di una progressione aritmetica, la loro somma è $2n + 3n^2$. determinare quanto vale il termine di posto r. [$6r - 1$]
8. (AHSME 1966) Consideriamo le somme dei primi n termini delle progressioni {8, 12, 16, ...} e {17, 19, 21, ...}. Per quali valori di n le due somme sono uguali? [10]
9. (AHSME 1968) Gli angoli interni di un poligono convesso sono in progressione aritmetica di ragione 5°, se l'angolo maggiore è 160°, quanti lati ha il poligono? [9]
10. (AHSME 1973) Una progressione aritmetica ha un numero pari di termini, la somma dei termini di posto dispari è 24, quella di quelli di posto pari è 30. Sapendo che la differenza fra l'ultimo e il primo termine è 10,5, determinare quanti sono i termini. [8]
11. (AHSME 1976) Le misure degli angoli interni di un poligono convesso sono in progressione aritmetica. Se l'angolo più piccolo misura 100° ed il più grande 140°, quanti lati ha il poligono? Suggerimento: si ricordi che in un poligono convesso con n lati, la misura della somma degli angoli interni uguaglia quella di $n - 2$ angoli piatti. [6]
12. (AHSME 1978){x, a_1, a_2, y} e {x, b_1, b_2, y} sono due progressioni aritmetiche. Quanto vale $\frac{a_2 - a_1}{b_2 - b_1}$? [4/3]

13. (AHSME 1981) Un triangolo rettangolo ha i lati in progressione aritmetica, quale dei seguenti numeri può essere la misura di uno dei lati? A) 22 B) 58 C) 81 D) 91 E) 361 [C]
14. (AHSME 1982) $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}$, $n > 3$, sono in progressione aritmetica, determinare n. [7]
15. (AHSME 1987) a, x, b e $2x$ sono in progressione aritmetica, determinare a/b. [1/3]
16. (AHSME 1991) Gli angoli interni di un esagono convesso sono in progressione aritmetica, quale fra i seguenti numeri può rappresentare la misura dell'angolo maggiore? [D]
A) 165° B) 197° C) 170° D) 175° E) 179°
17. (AHSME 1993) In una progressione aritmetica si ha: $a_4 + a_7 + a_{10} = 17$ e $a_4 + a_5 + \ldots + a_{14} = 77$. Se $a_k = 13$, determinare k. [18]
18. (AHSME 1997) Quale dei seguenti interi può essere la somma di 100 numeri interi consecutivi?
(A) 1627384950 (B) 2345678910 (C) 3579111300 (D) 4692581470 (E) 5815937260 [(A)]
19. (HSMC 2006) La somma di 49 interi consecutivi è 74 . Qual è il primo di essi? [25]
20. (HSMC 2007) Determinare la somma dei primi 19 termini di una progressione aritmetica sapendo che $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224$. [1064]

Lavoriamo insieme

Consideriamo un quesito assegnato nel 2002 agli HSMC.
Tre numeri interi sono in progressione geometrica. Sappiamo che la loro somma è 21, mentre a somma dei loro reciproci è 7/12. quanto vale il maggiore di essi?
Indichiamo i tre numeri con x, $x \cdot r$, $x \cdot r^2$. i dati in nostro possesso si traducono nel seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x + x\cdot r + x\cdot r^2 = 21 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{x\cdot r} + \frac{1}{x\cdot r^2} = \frac{7}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\cdot\left(1+r+r^2\right) = 21 \\ \frac{1}{x}\cdot\left(1+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}\right) = \frac{7}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\cdot\left(1+r+r^2\right) = 21 \\ \frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1+r+r^2}{r^2}\right) = \frac{7}{12} \end{cases}$$

Moltiplichiamo termine a termine le due equazioni:

$$\cancel{x}\cdot\left(1+r+r^2\right)\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\cdot\left(\frac{1+r+r^2}{r^2}\right) = \cancel{21}^{7}\cdot\frac{7}{\cancel{12}_{4}} \Rightarrow \left(\frac{1+r+r^2}{r}\right)^2 = \frac{49}{4} \Rightarrow \left(\frac{1}{r}+1+r\right)^2 = \frac{49}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}+1+r = \pm\frac{7}{2} \Rightarrow 2r^2 + \left(2\mp 7\right)\cdot r + 2 = 0 \Rightarrow \prec \begin{matrix} 2r^2 - 5r + 2 = 0 \Rightarrow r = \frac{5\pm\sqrt{9}}{4} = \frac{5\pm 3}{4} = \prec \begin{matrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \\ 2r^2 + 9r + 2 = 0 \Rightarrow r = \frac{-9\pm\sqrt{72}}{4} \end{matrix}$$

La seconda equazione ha soluzioni non razionali, quindi non accettabili, poiché i termini della progressione sono interi. Quindi ci sono due progressioni, che in realtà sono la stessa progressione, ordinata in modo diverso. Cioè $x\cdot(1+2+4) = 21 \vee x\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) = 21 \Rightarrow x = 3 \vee x = 12$ e le progressioni sono: 3, 6, 12 o 12, 6, 3.
In ogni caso il massimo è 12.

21. (AHSME 1953) In una progressione geometrica di termini positivi, ogni termine è uguale alla somma dei due termini che lo seguono, quanto vale la ragione? $\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$
22. (AHSME 1955) Dimostrare che se l'equazione $ax^2 + 2bx + c = 0$ ha due soluzioni reali e coincidenti, allora a, b e c sono in progressione geometrica.
23. (AHSME 1955) Consideriamo una progressione geometrica il cui primo termine e la ragione non sono nulli e una progressione aritmetica il cui primo termine è 0. Costruiamo una nuova successione sommando termine a termine gli elementi delle dette progressioni. Quanto vale la somma dei primi dieci termini di questa nuova successione, sapendo che i suoi primi 3 termini sono {1, 1, 2}? [978]
24. (AHSME 1963) Tre numeri non nulli, $\{a, b, c\}$ formano una progressione aritmetica. Sapendo che $\{a + 1, b, c\}$ e $\{a, b, c + 2\}$ sono progressioni geometriche, determinare b. [12]

25. (AHSME 1971) Moltiplichiamo i primi n elementi della progressione $\{10^{1/11}, 10^{2/11}, ...\}$. Quanti dobbiamo moltiplicarne almeno affinché il prodotto superi 100000? [11]

26. (AHSME 1972) Trovare due numeri a e b in modo tale che $\{3, a, b\}$ sia una progressione geometrica, e $\{a, b, 9\}$ una progressione aritmetica. [4,5; 6,75]

27. (AHSME 1972) Sia P il prodotto dei primi n termini di una progressione geometrica, S la loro somma e S' la somma dei loro reciproci. Esprimere P in funzione di S, S' e n. $[(S \cdot S')^{n-2}]$

28. (AHSME 1973) a, b, c sono tre numeri in progressione geometrica, con $1 < a < b < c$, n è un numero naturale maggiore di 1. Consideriamo $log_a(n)$, $log_b(n)$, $log_c(n)$, quale delle seguenti affermazioni è corretta? Giustificare le risposte. [C]
A) formano una progressione geometrica B) formano una progressione aritmetica
C) i reciproci formano una progressione aritmetica D) il secondo termine è n–esima potenza del primo e il terzo è n–esima potenza del secondo.

29. (AHSME 1974) In una progressione geometrica $a_5 - a_4 = 576$ e $a_2 - a_1 = 9$. Quanto vale la somma dei primi cinque termini? [1023]

30. (AHSME 1977) Consideriamo una successione di numeri positivi, $\{a_n\}$ che verificano la seguente proprietà $a_{n+2} = a_n \cdot a_{n+1}$. Quando a_n è una progressione geometrica? [Solo se $a_1 = a_2 = 1$]

31. (AHSME 1981) In una progressione geometrica la somma dei primi due termini è 7, mentre la somma dei primi sei termini è 91, quanto vale la somma dei primi quattro termini? [28]

32. (AHSME 1994) x, y, z sono in progressione geometrica di ragione r; x, $2y$, $3z$ sono in progressione aritmetica. Quanto vale r? [1/3]

33. (Rice 2006) Il quinto termine di una progressione geometrica è 5!, il sesto è 6!. Qual è il quarto termine? [0,999999]

Questions in English

Working together

This is a question assigned at HSMC in 2001
If x, $2x + 2$, $3x + 3$, … are nonzero terms in a geometric progression (geometric sequence), what is the fourth term?

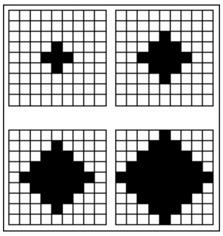
We know that $\frac{2x+2}{x} = \frac{3x+3}{2x+2} \Rightarrow \frac{2\cdot(x+1)}{x} = \frac{3\cdot(x+1)}{2\cdot(x+1)} \Rightarrow \frac{2\cdot(x+1)}{x} = \frac{3}{2}$. Hence the ratio is 3/2 and the fourth term is $3\cdot(x+1)\cdot\frac{3}{2} = \frac{9}{2}x + \frac{9}{2}$.

In effect we can be more precise $\frac{2\cdot(x+1)}{x} = \frac{3}{2} \Rightarrow 4x + 4 = 3x \Rightarrow x = -4$, so the terms are: –4, –6, –9, –27/2.

34. (HSMC 1999) The sum of n terms in an arithmetic progression is 153, and the common difference is 2. If the first term is an integer, and $n > 1$, then what is the number of all possible values for n? [5]

35. (AHSME 1999) Define a sequence of real numbers a_1, a_2, a_3, by $a_1 = 1$ and $a_{n+1}^3 = 99 \cdot a_n^3$ for all $n \geq 1$. Then a_{100} equals? $[99^{33}]$

36. (HSMC 1999) If $3 + 7 + 11 + … + 87 = 15k$, find k. [66]

37. (HSMC 2001) Consider the following sequence:  If this sequence continues, how many shaded squares will there be at stage 10? [221]

38. (HSMC 2002) What is the smallest positive integer $n > 1$ such that $1 + 2 + 3 + … + n$ is divisible by 9? [8]

Working together

This is a question assigned at HSMC in 2003.
The sum of the third and fourth terms in a sequence of consecutive integers is 47. What is the sum of the first five terms of the sequence?
Let $\{x, x + 1, x + 2, x + 3; \dots\}$ be a sequence of consecutive integers. Now

$$(x + 2) + (x + 3) = 47 \Rightarrow 2x + 5 = 47 \Rightarrow 2x = 42 \Rightarrow x = 21$$

and we have that $x + (x + 1) + (x + 2)+(x + 3)+(x + 4) = 5x + 10 = 5(21) + 10 = 115$.

39. (HSMC 2005) The sum of the sixth and the ninth terms of an arithmetic sequence is 20, and their product is 64. Find the tenth term if the first term is negative. [20]
40. (HSMC 2007) Find the sum of the first 19 terms of an arithmetic sequence $a_1, a_2, a_3, \dots$ if it is known that $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224$. [1064]
41. (HSMC 2006) Find all possible first terms of the geometric sequence if the sum and the product of its first three terms are equal to 63 and 1728 respectively. [3 o 48]
42. (HSMC 2006) Three numbers, with the third one being 12, form a geometric sequence. If the third number were 9, the numbers would form an arithmetic sequence. Find the first two numbers. (Find all possible answers.) [(3, 6) o (27, 18)]
43. (HSMC 2007) If the product of three numbers in geometric progression is 216 and their sum is 19, find the largest of the three numbers. [9]
44. (HSMC2008) The numbers $ln(a^3 \cdot b^7)$, $ln(a^5 \cdot b^{12})$, $ln(a^8 \cdot b^{15})$, are the first three terms of an arithmetic sequence whose 12th term is $ln(b^n)$,. What is n? [112]

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Odontoiatria 1997) In una progressione geometrica il primo elemento è 2 e il sesto è 0,0625. Il quinto valore della progressione è: A) 0,125 B) 0,0125 C) 0,5 D) 0,05 E) nessuno dei precedenti è corretto
2. (Odontoiatria 1998) Gli angoli di un triangolo sono in progressione aritmetica, e il maggiore e' il doppio del minore; i valori in gradi degli angoli sono:
A) 20, 30, 40 B) 40, 50, 80 C) 60, 90, 120 D) 40, 60, 80 E) 45, 70, 95.
3. (Scuola Superiore di Catania) Dimostrare che se tre numeri reali (diversi tra loro) formano una progressione aritmetica, allora quei tre numeri, nello stesso ordine, non possono formare una progressione geometrica. Trovare poi tre numeri reali relativi (diversi tra loro e da 0) in progressione aritmetica che, in un ordine diverso, formino una progressione geometrica.
4. (Corso di laurea in Informatica, Udine 2009) Fra le seguenti terne di numeri ce n'è una ed una sola formata da numeri in progressione geometrica.
A) ¼, 1/3, 4/15 B) ½, ¾, 9/16 C) 1/3, 1/5, 3/25 D) 1/5, 2/15, 3/20

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_2_3.htm

Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1	2	3	4
A	D	[$(-2a, a, 4a)$ pgr. aritm. $d = 3a$. $(a, -2a, 4a)$, pgr. geom. $q = -2$	C

8. Successioni di numeri reali

8.4 Il calcolo delle probabilità

Prerequisiti

- Enunciato logico.
- Insiemi, sottoinsiemi e operazioni su di essi.
- Rappresentazione di un insieme per elenco e mediante i diagrammi di Eulero – Venn.
- Sottoinsiemi di un insieme.
- Cardinalità di un insieme.
- Frazioni.
- Percentuali.
- Calcolo combinatorio

Obiettivi

- Valutare la possibilità di accadere degli eventi quotidiani.
- Calcolare le probabilità laplaciane di semplici eventi.
- Riconoscere eventi equiprobabili.
- Comprendere la nozione di evento aleatorio.
- Distinguere fra i diversi punti di vista probabilistici.
- Calcolare le probabilità frequentiste a partire da tabelle di dati.
- Risolvere semplici problemi di calcolo delle probabilità.
- Distinguere eventi compatibili da eventi incompatibili.
- Distinguere eventi indipendenti da eventi dipendenti.
- Comprendere il reale significato della legge dei grandi numeri.
- Conoscere e sapere usare le più diffuse distribuzioni di probabilità

Contenuti

- Concetto di evento aleatorio e diversi punti di vista della probabilità
- Probabilità frequentista
- Probabilità secondo Laplace di eventi semplici
- Probabilità dell'unione di eventi elementari
- Estrazioni con e senza rigenerazione
- Probabilità condizionata
- Eventi dipendenti ed eventi indipendenti
- Teorema di Bayes e Legge dei grandi numeri

Parole Chiave

Fenomeno – Evento aleatorio – Eventi compatibili – Eventi incompatibili

Richiamiamo le conoscenze

Le percentuali

Che significa calcolare il 30% di una quantità? Semplicemente dividere la quantità in 100 parti e di queste prenderne 30. Ovviamente significa anche moltiplicare la quantità per la frazione 30/100, cioè per la frazione 3/10. Così per esempio il 30% di € 1500 è € 1500 · 3/10 = € 150 · 3 = € 450.
Il ricorso alle percentuali è legato sostanzialmente al fatto che noi utilizziamo un sistema di numerazione posizionale *decimale* e quindi il dieci e le sue potenze sono numeri in qualche modo *privilegiati*, con i quali quindi abbiamo maggiore consuetudine.
Trasformare una frazione in percentuale quindi equivale a scriverla con denominatore 100. Ciò potrà essere fatto perciò soltanto se il suo denominatore contiene solo potenze di 2 e/o di 5. In tutti gli altri casi avremo solo dei valori approssimati.

Esempio A

I 3/8 di una quantità, in percentuale possono essere scritti trasformando prima il denominatore nella potenza di 10 più piccola possibile. Poiché 8 = 2^3 essa è 10^3, quindi $\frac{3}{8}=\frac{3\cdot 5^3}{2^3\cdot 5^3}=\frac{375}{1000}$. Adesso dividiamo tutto per 10, per ottenere appunto una frazione percentuale: $\frac{37,5}{100}=37,5\%$. Invece i 7/15 di una quantità non possono scriversi come una percentuale *esatta*, poiché 15 non è un divisore di alcuna potenza di 10. Poiché 100/15 ≈ 6,7 possiamo dire che 7/15 ≈ 7 · 6,7% ≈ 46,7%.

Esempio B

Un paio di pantaloni costano € 40,00 prima dei saldi. Se viene operato uno sconto del 15% quanto costano adesso i pantaloni? Basta moltiplicare il prezzo iniziale per 1 – 0,15 = 0,8, = 85%. ottenendo € 34,00.
Se invece sapessimo che un paio di pantaloni prima dei saldi costavano € 53,00 e dopo € 37,00 e volessimo sapere che sconto è stato applicato? Lo sconto assoluto è stato di € 16,00. Che percentuale è questa del prezzo iniziale? Cioè come si scrive in percentuale la frazione 16/53? Poiché 53 non contiene solo potenze di 2 e/o 5 (in effetti non ne contiene proprio nessuna), il risultato sarà approssimato: ≈ 30,19%.

Verifiche

Livello 1

Esprimere sotto forma percentuale le seguenti frazioni

1.	4/25	[16%]	11/4	[275%]	7/20	[35%]	23/125	[18,4%]
2.	12/50	[24%]	32/75	[≈ 42,7%]	17/18	[≈94,4%]	13/32	[40,625%]
3.	31/64	[48,4375%]	3/40	[7,5%]	24/19	[≈126,3%]	15/28	[≈ 53,6%]

4. Un oggetto di € 25,00 viene scontato del 17% qual è il suo prezzo scontato? [€ 20,75]
5. L'IVA è al 20% e su un certo oggetto vale € 5,30. Quanto costa l'oggetto al netto dell'IVA? [€ 26,50]
6. Quest'anno il prezzo netto dell'oggetto precedente non è aumentato, ma l'IVA è passata al 21%. Quanto costa l'oggetto oggi? [€ 32,07]
7. La Benzina il mese scorso costava mediamente € 1,753. Questo mese costa mediamente €1,778. Qual è stato l'aumento medio mensile? [≈ 1,4%]
8. Un oggetto ha un prezzo al pubblico di € 19,00. Al netto dell'IVA al 21% quanto costerebbe l'oggetto? [€ 15,01]

Livello 2

9. Un certo prodotto viene scontato prima del 10% e poi del 20%, ciò equivale a scontare il prodotto in unica soluzione di quanto? [28%]
10. Un certo prodotto viene scontato prima del 10% e poi di un certo valore *x* %, se ciò equivale a scontare il prezzo iniziale del 37%, quanto vale *x*? [30]
11. Le azioni di un certo titolo in borsa calano in un giorno del 4%, il giorno successivo di che percentuale

devono aumentare perché il valore sia quello del giorno prima? [≈ 4,17%]

12. Dati i numeri 4 e 7, in percentuale quanto 3 è più piccolo di 8? [62,5%]
13. Il prezzo della benzina a seguito della crisi petrolifera è aumentato del 12%, dopo qualche tempo, a seguito di una scelta dell'OPEC è diminuito del 12%. Che relazione c'è fra il prezzo prima della crisi e quello dopo la decisione dell'OPEC? [È diminuito del 1,44%]

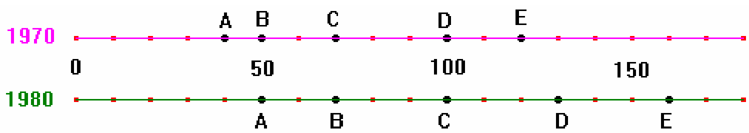
Livello **3**

14. Siano dati due numeri reali x e y, con $x < y$. In percentuale quanto x è minore di y? $\left[100 \cdot \frac{y-x}{y}\right]$
15. La popolazione di una certa città dal 1980 al 1990 è aumentata del p%, dal 1990 al 2000 è aumentata del q%. quale è stato l'aumento percentuale dal 1980 al 2000? $\left[\frac{100p+100q+pq}{100}\right]$
16. Un dato prodotto prima è aumentato del p%, poi è diminuito del p%. che relazione c'è fra il prezzo finale e quello iniziale? [È diminuito del $\left.\frac{p^2}{100}\%\right]$

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.
AHSME = Annual High School Mathematics Examination
AMC = American Mathematical Contest
HSMC = A&M University High School Mathematics Contest

1. (AHSME 1995)Se M è il 30% di Q, Q è il 20% di P, e N è il 50% di P, allora M/N è?
   A) 3/250 B) 3/25 C) 1 D) 6/5 E) 4/3 [B]
2. (AHSME 1997) Se a è il 50% più grande di c, e b è il 25% più grande di c, allora a quanto è più grande di b, in percentuale? A) 20% B) 25% C) 50% D) 100% E) 200% [A]
3. (AHSME 1998)Un oratore ha parlato per 60 minuti a una folta platea. Il 20% dei presenti ha ascoltato l'intero discorso, metà del resto ha sentito un terzo del discorso e l'altra metà i due terzi. Qual è il numero medio di minuti ascoltato dai presenti? A) 24 B) 27 C) 30 D) 33 E) 36 [D]
4. (AMC 2001) Nel luogo in cui abita Kristin si paga il p% per i primi \$28000 e il (p + 2)% per la parte che supera i \$28000. Kristin nota che lei ha pagato il (p + 0,25)% sul totale del suo imponibile. Quanto è questo imponibile? [\$ 32000]
5. (AHSME 1988) Nel seguente diagramma indichiamo le popolazioni di cinque città, espresse in migliaia di abitanti, nei due censimenti del 1970 e 1980. Quale delle città ha avuto un maggiore incremento percentuale nel decennio? C



6. (HSMC 2007) John prepara un drink mescolando succhi di mela, arancia e ananas. Per fare ciò usa 2,2 litri in più di succo di mela rispetto al doppio degli altri succhi insieme. La miscela risultante contiene il 70% di succo di mela. Quanti litri di drink ha preparato? [22]

Questions in English

7. (HSMC 2000) At Pigskins High School 20% of the boys and 80% of the girls attended a football game. If 45% of the student body is female, what percent of the school population attended the game?) [47%]
8. (HSMC 2000) A man has 2 investments: one paying a 6% annual interest and the other paying 5%. The 5% investment is \$680 more than half the 6% one. If the total return after one year is \$102, find the investment at 5%. [1080]
9. (HSMC 2000) The number N2 is 25% more than the number N1, the number N3 is 20% more than N2, and N4 is x% less than N3. For what value of x is N4 = N1? [33 + 1/3]
10. (HSMC 2002) Increasing x by y percent gives 12 whereas decreasing x by y percent gives 8. Find x. [10]

11. (HSMC 2002) A merchant gives a 20% discount on a coat, followed by a 30% discount, followed by a 10% discount. Each new discount is applied to the price of the coat after the previous discount. What single percent discount is equivalent to these three successive discounts? Express your answer as a decimal. [0,496]
12. (HSMC 2008) Sarah paid \$81 for a dress that had been discounted 25% and then marked down an additional 10%. Taking both discounts into consideration, determine the original price of the dress.) [\$120]
13. (HSMC 2005) Suppose that you own some stock in an Internet company. One day your stock goes up in value by a%, the next day it drops in value by b% and the third day it goes up in value by c%, where a, b and c are all positive integers. The result is that your stock is worth exactly the same as at the beginning of the first day. Find the smallest value of $a + b + c$. [86]
14. (HSMC 2005) In an election, there were two candidates. One of them received 65% of the votes and got 1500 votes more than his competitor. How many people voted? [5000]
15. (HSMC 2007) More than 93% of the students in a math class are girls, but there is at least one boy in the class. What is the smallest possible size of the class out of the following choices:
A) 13 B) 14 C) 15 D) 20 E) 21 [C]

Concetto di evento aleatorio e diversi punti di vista della Probabilità

L'eccitazione che un giocatore prova quando scommette è uguale a ciò che potrebbe vincere moltiplicato per la probabilità di ottenerlo. Blaise Pascal (1623-1662)

Nella vita di ogni giorno si ha spesso a che fare con questioni il cui accadere è legato al caso. Vediamo qualche esempio.

Esempio 1

Marco domani vorrebbe andare al mare, ma non vuole rischiare di rovinarsi la giornata, così prima di partire ascolta le previsioni del tempo. Il servizio meteorologico prevede una bella giornata di sole sulla spiaggia dove vuole recarsi Marco. Così l'indomani il giovane parte fiducioso. Purtroppo, appena dopo mezzogiorno, si alza un vento improvviso e, dopo qualche ora, un acquazzone costringe i bagnanti a una fuga precipitosa.

Chissà a quanti di noi sono successe disavventure come quelle del nostro Marco. In questi casi ci siamo affrettati a inveire contro l'ufficio meteorologico, accusando i suoi impiegati di incompetenza. Il problema reale è che le previsioni del tempo dipendono da moltissimi fattori, che fanno sì che anche le più accurate possano risultare false.
Vediamo altri esempi ancora più efficaci.

Esempio 2

Matteo si reca al casinò a giocare alla roulette. Poiché si sente molto furbo, decide di vedere un po' cosa accade prima di cominciare a puntare. Per ben 5 volte esce il rosso. Matteo a questo punto è quasi sicuro che adesso uscirà il nero, quindi punta una bella somma su tale colore. Purtroppo ancora una volta esce il rosso. Naturalmente adesso Matteo è proprio sicuro che uscirà il nero, così punta tutto ciò che ha. Non vi meraviglierete se vi dirò che Matteo è dovuto tornare a casa in autostop perché non gli erano rimasti neppure i soldi per il treno!

Il precedente esempio è abbastanza familiare. Quanti di noi non hanno fatto come Matteo, puntando su un certo numero del lotto che non esce da innumerevoli settimane o dilapidando piccole fortune per comprare centinaia di biglietti *gratta e vinci*, con la convinzione che "prima o poi dovremo vincere!".

Tutti questi fatti possono essere affrontati con l'aiuto della matematica, ed è ciò che ci apprestiamo a fare in questa unità didattica.
In pratica vogliamo studiare, con l'aiuto della matematica, ciò che non è matematico, ossia ciò che è legato al caso, il cui accadere quindi non è certo, ma è invece possibile. Noi però associamo a un certo fatto un numero che in qualche modo misuri quella che chiamiamo la sua *probabilità di succedere.*
Spesso nel linguaggio quotidiano usiamo la parola "probabilità", facendola anche precedere dai comparativi più e meno. Diciamo per esempio che è più probabile che una squadra di calcio di serie A batta una squadra di serie C; che è meno probabile che in agosto piova in Sicilia piuttosto che in Veneto; che è ugualmente probabile che lanciando un dado venga fuori un numero pari o un numero dispari e così via.
Adesso vediamo come sia possibile rendere più rigoroso tutto ciò.
Se un fatto ha più probabilità di accadere di un altro, vogliamo sapere di quanto è più probabile, ma soprattutto vogliamo che tutti associno a questo evento la stessa probabilità. Quel che vogliamo fare perciò è il **Calcolo delle Probabilità**. In pratica il Calcolo delle Probabilità si occupa di stabilire una "misura" numerica della possibilità di realizzarsi di un avvenimento (il lancio di un dado; l'estrazione di cinque numeri in una ruota al gioco del lotto; un incontro di calcio; il volo di un aereo da una località all'altra, ...), che può avere esiti diversi (esce il numero due o il cinque, esce il 13 ma non il 27, vince una squadra o l'altra, il volo arriva puntuale o in ritardo, ...).
Prima di vedere come associare a un dato avvenimento un numero che misuri la sua probabilità di accadere, dobbiamo stabilire come interpretarlo.

Il problema

Domenica vi sarà la partita fra la squadra degli Angeli neri e quella dei Diavoli bianchi; su quale delle due conviene puntare?

Possiamo interpretare il problema in almeno tre modi diversi. Vediamoli.

1. Diciamo che quello che può succedere è uno solo dei tre seguenti eventi . Se la partita si effettua e si conclude normalmente, vince la prima squadra, vince la seconda, o vi è un pareggio. In questo ordine di idee associamo a ciascuno dei tre possibili avvenimenti la probabilità 1/3 di accadere. Così non stiamo privilegiando nessuno dei tre fatti.
2. Consideriamo, come fanno spesso i giocatori delle schedine, quello che è successo fra le due squadre nei passati 10, 20, 100 incontri. Supponiamo per esempio che, nei passati 100 incontri, gli Angeli abbiano vinto 35 volte, i Diavoli 42 volte e i rimanenti incontri siano finiti in pareggio. In questo caso vi è la probabilità 35/100 = 7/20 che vincano gli Angeli, 42/100 = 21/50 che vincano i Diavoli e 23/100 che le squadre pareggino.
3. Infine vi è l'approccio delle agenzie di scommesse, che, dopo avere considerato una serie di fatti (la situazione attuale delle due squadre, a che posto sono in classifica, quale delle due formazioni gioca in casa, quale delle due risulta più in forma, se vi sono delle assenze importanti in una delle due squadre o in entrambe, se vi è una particolare rivalità e via dicendo) assegnano una loro probabilità all'evento. Cioè stabiliscono quanto sono disposti a rischiare in caso che perdano la scommessa. Per esempio se pagano € 10,00, quando noi puntiamo € 7,50, vuol dire che per l'agenzia la probabilità che l'evento si verifichi, è 7,5/10 = 75/100 = 3/4.

Ciascuno dei tre punti di vista precedenti rappresenta un importante concezione della probabilità.
Il primo viene detto **probabilità classica** o **secondo Laplace**, il secondo **concezione frequentista** e il terzo **concezione soggettivista**.
Quale delle tre è migliore, più efficace, misura meglio il rischio? Dipende dall'evento da studiare, così nel caso particolare, è sia la terza. Se però il fenomeno fosse stato l'estrazione di un certo numero al lotto, probabilmente sarebbe stato migliore il secondo punto di vista e se invece avessimo avuto a che fare con la vincita di un premio a una lotteria scolastica sarebbe stata preferibile la prima. Quindi non vi è una concezione della probabilità migliore delle altre.
Perché più semplici da inquadrare, noi preferiamo trattare solo le prime due. In entrambe consideriamo il concetto di fenomeno come ente primitivo.

L'antologia

Il problema di studiare gli eventi reali che non hanno un esito sempre certo, è stato considerato praticamente da sempre nella storia delle Matematiche, soprattutto in considerazione delle scommesse attorno ai giochi.

Galileo Galilei, *Sopra le scoperte dei dadi*, 1612

> *"Che nel gioco dei dadi alcuni punti sieno più vantaggiosi di altri, vi ha la sua ragione assai manifesta, la quale è, il poter quelli più facilmente e più frequentemente scoprirsi, che questi, il che dipende dal potersi formare con più sorte di numeri: onde il 3. e il 18. come punti, con tre numeri comporre, cioè questi con 6.6.6. e quelli con 1.1.1. e non altrimenti, più difficili sono a scoprirsi, che v.g.(1) il 6. o il 7., li quali in più maniere si compongono, cioè il 6. con 1.2.3. e con 2.2.2. e con 1.1.4. ed il 7. con 1.1.5., 1.2.4, 1.3.3., 2.2.3."*

Ossia è più facile che esca un 7 di un 6, lanciando tre dadi, dato che il 7 si può ottenere in 4 modi diversi e il 6 il tre modi.
Aggiunge poi.

> *"Tuttavia ancorché il 9. e il 12. in altrettante maniere si compongano in quante il 10. e l'11. perlochè d'equal uso devriano esser reputati; si vede non di meno, che la lunga osservazione ha fatto dai giocatori stimarsi più vantaggioso il 10. e l'11. che il 9. e il 12."*

cioè nonostante (apparentemente aggiungiamo noi), 9, 10, 11 e 12 hanno lo stesso numero di possibili combinazioni, l'esperienza di gioco mostra che 10 e 11 escono con maggiore frequenza. Galileo spiega l'arcano facendo vedere che in realtà il numero di modi possibili debba contarsi in modo opportuno. Lo vedremo meglio nel seguito.
Successivamente, nel 1654, il cavaliere di Méré, Antoine Gombaud (1610 – 1685), noto giocatore, pensò di porre a un suo amico, il grande matematico Blaise Pascal, alcuni quesiti sempre riguardanti il gioco dei dadi. Pascal scrisse a un altro grande matematico dell'epoca: Pierre de Fermat esponendo la questione.
Vediamo un esempio di tali problemi, considerando il seguente passo, estratto da una

Lettera spedita da Pascal a Fermat, mercoledì 29 luglio 1654.

> *"Ecco il modo in cui io saprò il valore di ciascuna delle possibilità che hanno due giocatori, quando, per esempio, si vince in 3 lanci e ciascuno ha scommesso 32 pistole [2]. Supponiamo che il primo di loro abbia già due punti e l'altro 1. Adesso devono effettuare un altro lancio, il cui risultato potrà essere uno dei seguenti. Se vince il primo, egli vincerà l'intera posta, cioè 64 pistole. Se invece vince l'altro, il punteggio diverrà 2 a 2, di conseguenza se essi si accorderanno per dividere la posta, ciascuno riavrà indietro le sue 32 pistole. Consideriamo allora, Signore, che se vince il primo avrà 64 pistole, se invece dovesse perdere, ne avrà 32. Se il gioco dovesse interrompersi prima di questo quarto lancio e la posta dovesse essere divisa, il primo dovrebbe dire "Io sono certo di avere 32 pistole, anche se questo lancio non mi sarà favorevole. Le altre 32 pistole può darsi che le vinca io come può essere che le vinca tu. Perciò queste 32 pistole le divideremo e le altre 32 saranno invece tutte mie". Così il primo dovrebbe avere 48 pistole e il secondo 16.*
>
> *Adesso supponiamo che il primo abbia 2 punti e il secondo nessuno e che si apprestino ad effettuare il terzo lancio. Se esso sarà favorevole al primo, egli vincerà 64 monete; se vince l'altro, il punteggio sarà 2 a 1, come nel caso precedente già trattato. Ma ho già mostrato che in quel caso il primo riceverebbe 48 pistole e il secondo 16. Perciò se il gioco dovesse interrompersi prima del terzo lancio, il primo potrebbe dire: "Se vinco, guadagnerò tutta la posta, 64 pistole, se perdo, 48 pistole saranno legittimamente mie. Perciò dammi 48 monete e le rimanenti 16 le divideremo metà ciascuno." Così il primo avrà 48 più 8 pistole, cioè 56.*
>
> *Ora supponiamo che il primo abbia solo un punto e l'altro nulla. Vedete, Signore, che se effettuiamo un lancio, e sarà favorevole al primo, egli avrà 2 punti e l'altro zero, se quindi il gioco dovesse interrompersi dopo il lancio gli andrebbero 56 monete. Se dovesse perdere saranno in parità e, interrompendo il gioco, avrebbero 32 monete a testa. Egli dovrebbe allora dire*

(1) *Verbi gratia*, cioè il nostro moderno *Per esempio*.
(2) La pistola era una moneta di uso comune in Francia, ai tempi di Pascal.

all'avversario: " Se non volete continuare a giocare, datemi le 32 monete di cui sono certo e dividiamo quel che resta sottraendo queste monete da 56; quel che prenderei, se il lancio fosse a mio favore, cioè 24 monete, le divideremo fra noi a metà. Così voi prenderete 12 pistole e io 32 più 12, cioè 44.

Nel 1657 l'olandese Christian Huygens, proprio traendo spunto dalla lettura della corrispondenza fra Fermat e Pascal, scrisse un articolo riguardante il gioco dei dadi. Nel 1713 fu pubblicato dallo svizzero Jacques Bernoulli l'*Ars conjectandi* (Arte di congetturare), in cui venivano riportate alcune formule utilizzate ancora oggi. Da allora molti altri eminenti matematici si sono occupati del calcolo delle probabilità che oggi viene considerata una delle più importanti discipline matematiche.
Nei paragrafi seguenti vogliamo considerare più in dettaglio queste questioni.

Verifiche

Stabilire quale fra i tre punti di vista probabilistici è più indicato nel trattamento dei seguenti fenomeni. Nelle risposte F = Frequentista, C = Classica, S = Soggettivista

Livello 1

1. Probabilità che nella prossima estrazione del lotto della ruota di Venezia esca il 12. [F o C]
2. Probabilità che il mio primogenito sia un maschio. [C o S]
3. Probabilità che la Ferrari vinca il prossimo Gran Premio automobilistico. [S]
4. Probabilità che il volo Milano – Roma delle 16:00 arrivi con meno di dieci minuti di ritardo. [F o S]
5. Probabilità di ottenere un voto sufficiente nel prossimo compito di matematica. [S]
6. Probabilità di ricevere una motocicletta in regalo per il prossimo compleanno. [S]
7. Probabilità che il prezzo della benzina non aumenti più del 10 % nel prossimo anno. [F o S]
8. Probabilità di fare 14 al totocalcio giocando 4 colonne diverse. [C]
9. Probabilità di vincere il premio più ricco al "gratta e vinci" acquistando 10 tessere. [C]
10. Probabilità di selezionare il numero di cellulare di un amico digitando delle cifre a caso. [C]
11. Probabilità di avere un incidente andando a sciare. [S]
12. Probabilità di incontrare una diva del cinema sull'aereo. [S]
13. Probabilità di trovare un biglietto da 100 euro facendo una passeggiata. [S]
14. Probabilità di avere un poker servito. [C]
15. Probabilità di ottenere 6 lanciando un dado regolare. [C]

La concezione frequentista

Non è certo che tutto sia incerto.
Blaise Pascal, *Pensees.* 1670.

Cominciamo subito con un esempio

Esempio 3

Nella tabella seguente è riportata la Popolazione residente in Italia al 21 Ottobre 2001, suddivisa per fasce geografiche (dati ISTAT).

Italia Nord-Occidentale	Italia Nord-Orientale	Italia Centrale	Italia Meridionale	Italia Insulare	Italia
14769	10569	10716	13786	6466	56306

Per determinare la probabilità frequentista che il 21/10/01, un residente italiano scelto a caso fosse dell'Italia Meridionale dobbiamo semplicemente calcolare la percentuale di residenti meridionali rispetto al totale, cioè 13786/56306 ≈ 24,5%. Quindi la seguente tabella delle frequenze ci fornisce informazioni sia sulla percentuale dei residenti italiani ripartiti geograficamente sia la percentuale frequentista che uno di essi scelto a caso appartenga a una data area geografica.

Italia Nord-Occidentale	Italia Nord-Orientale	Italia Centrale	Italia Meridionale	Italia Insulare	Italia
14769	10569	10716	13786	6466	56306
≈ 26,23%	≈18,77%	≈19,03%	≈24,48%	≈11,48%	100,00%

Ancora un esempio.

Esempio 4

Un'altra applicazione della concezione frequentista di probabilità è nei risultati provenienti da misurazioni effettuate in laboratori. Poiché anche gli strumenti più perfezionati sono sempre soggetti a errori, si usa la tecnica delle prove ripetute sempre nelle stesse condizioni. Così facendo, si ottengono dei dati sui quali si lavora in modo probabilistico, assegnando poi alla grandezza considerata, come valore misurato, quello più frequente.

Supponiamo, per esempio, di avere misurato per 120 volte la temperatura di un certo oggetto fisico, sforzandoci di ripetere l'esperimento esattamente nelle stesse condizioni, ottenendo i seguenti risultati. Stavolta la frequenza è data dal numero di volte in cui si è presentato il singolo evento. I valori percentuali sono ottenuti dividendo la frequenza singola per 120, totale delle misurazioni, e moltiplicando per 100. Questi ultimi valori sono espressi con 2 cifre decimali.

Temperatura	Frequenza	Percentuale
27,45	12	10%
27,46	15	12,5%
27,47	18	15%
27,48	25	20,83%
27,49	34	28,33%
27,50	12	10%
27,51	4	3,33%

Possiamo quindi dire che la probabilità che l'oggetto abbia una temperatura pari a 27,49° è circa del 28,33%, che abbia una temperatura compresa tra 27,46° e 27,50° è data dalla somma delle percentuali relative a tutte le temperature comprese tra le due, ed è circa del 86,67%.

Adesso possiamo definire cosa intendiamo per probabilità frequentista.

Definizione 1

Dato un fenomeno F che può avere un numero finito di diversi esiti: E_1, E_2, …, E_h e che viene ripetuto un numero N di volte nelle stesse condizioni, diciamo **probabilità frequentista** che il fenomeno F si presenti con un dato esito E_k il rapporto fra il numero delle prove in cui si è ottenuto E_k e il numero N delle prove.

Di seguito elenchiamo le critiche più comuni alla precedente definizione.

1. Chi ci assicura che il fenomeno venga ripetuto esattamente nelle stesse condizioni?
2. Chi ci assicura che gli esiti ottenuti non siano condizionati dal modo in cui stiamo effettuando l'esperimento?
3. Chi ci assicura che i valori da noi ottenuti possano essere "generalizzati", assegnandoli cioè a fenomeni analoghi che però si verificano in altri luoghi e sotto altre condizioni?

In pratica le tre obiezioni precedenti, che sono solo alcune di quelle possibili, possono essere concentrate nella seguente domanda: *Chi mi dice che sono così bravo da riuscire a ripetere un esperimento esattamente nello stesso modo ogni volta?*

Per esempio, se voglio utilizzare la probabilità frequentista per stabilire quali numeri usciranno la settimana prossima sulla ruota di Napoli, mi avvarrò delle tabelle dei risultati delle ultime 100, 200, 1000 estrazioni.
Ma esse sono state fatte tutte esattamente allo stesso modo? Anche se adesso le estrazioni sono automatizzate, siamo sicuri che le macchine e i loro software sono stati regolati tutti allo stesso modo? Che non vi sia un bug che le faccia funzionare in modo errato? Che le condizioni del tempo non le condizionano e così via? La risposta è sempre la stessa: in matematica o accettiamo un sistema assiomatico senza ulteriori discussioni o, se non ci convince, lo cambiamo con un altro. Dopo di che qualsiasi risultato otteniamo, purché correttamente ottenuto, lo accettiamo.

Verifiche

***Livello* 1**

1. Nella tabella seguente sono riportati i dati degli stranieri residenti in Italia secondo il censimento ISTAT 2001. Determinare le diverse probabilità frequentiste che uno straniero residente in Italia nel 2001, scelto a caso, appartenesse ad una delle date aree geografiche

Italia Nord Occidentale	367008
Italia Nord-Orientale	289011
Italia Centrale	224027
Italia Meridionale	75239
Italia Insulare	32078
Italia	**987363**

[37,17%; 29,27%; 22,69%; 7,62%; 3,25%]

2. Nel 1997 l'ISTAT ha calcolato che fra il totale dei maschi residenti in Italia, 4334989 avevano un'età compresa tra 0 e 14 anni, 20751462 un'età compresa tra 15 e 64 anni e 8353829 un'età superiore ai 65 anni. Qual è la probabilità che un maschio scelto a caso dall'elenco dell'anagrafe del 1997 risulti avere un'età inferiore ai 15 anni? [≈ 12,7%]
3. Nella tabella seguente, dati ISTAT, sono riportati il numero di ricoveri ospedalieri per malattie infettive regolarmente denunciati nel 1997 in Italia. Determinare la probabilità che un paziente ricoverato in un ospedale italiano per una malattia infettiva fosse affetto da a) TBC polmonare [≈ 10,35%] b) Epatite o salmonellosi [≈ 76,11%] c) Malattia infettiva diversa dall'AIDS [≈ 90,12%]

Infezione	Numero infettati
Epatite	13183
Salmonellosi non tifoidale	16020
AIDS	3790
TBC polmonare	3972
TBC extra polmonare	1402

4. Nella seguente tabella, dati ISTAT, sono riportati i dati relativi al censimento 200l della popolazione delle province del Piemonte, suddivise per sesso. Calcolare la probabilità che un cittadino scelto a caso fra i residenti del Piemonte in quel censimento
a) Fosse della provincia di Asti [≈ 4,98%] b) Fosse un maschio della provincia di Biella [≈ 4,43%] c) Fosse una femmina della provincia di Cuneo [≈ 13,12%] d) Non fosse della provincia di Torino [≈ 49,05%] e) Fosse un maschio [≈ 48,27%]

Capoluogo	Totale	Maschi	Femmine
Torino	2122704	1023748	1098956
Vercelli	176641	84997	91644
Biella	187041	89151	97890
Verbano-Cusio-Ossola	158999	76735	82264
Novara	344010	165379	178631
Cuneo	554992	272303	282689
Asti	207671	100464	107207
Alessandria	414384	198269	216115
Piemonte	**4166442**	**2011046**	**2155396**

5. Nella tabella seguente, dati ISTAT, sono riportati il numero di morti fra le donne, registrati in Italia nel 1996, suddivise per causa di morte. Determinare la probabilità che una donna morta in Italia nel 1996 sia morta per
a) malattia dell'apparato digerente [≈ 6,08%] b) un tumore [≈ 39,61%] c) una malattia [≈ 75,95%]

Causa di morte	Numero di morti
Malattie infettive	1262
Tumori escluso seno e utero	65690
Tumori seno e utero	14511
Malattie sistema circolatorio	129886
Malattie ischemiche	34427
Malattie apparato respiratorio	12682
Malattie apparato digerente	12304
Mal definite	4383
Cause violente	11316
Altre	33001

6. Nella tabella seguente, dati ISTAT, sono riportati il numero di impiegati nelle strutture ospedaliere pubbliche italiane nel 1997, suddivisi per qualifica. Determinare la probabilità che un impiegato a caso scelto fra quelli che prestavano servizio in un ospedale italiano nel 1997, fosse
a) un medico [≈ 17,51%] b) un tecnico o un amministrativo [≈ 28,17%]

Qualifica	Numero di impiegati
Medici	98637
Personale sanitario ausiliario	306045
Personale tecnico	124337
Personale amministrativo	34383

7. Nella tabella seguente, dati ISTAT, sono riportati il numero di diplomati e laureati nell'A.A. 1997/98 nelle università statali italiane, suddivisi per indirizzi di studio. Determinare la probabilità che uno studente scelto a caso fra quelli diplomati o laureati in una università statale italiana nell'A.A. 1997/98
a) avesse conseguito il titolo in un indirizzo scientifico [≈ 3,67%] b) fosse una femmina diplomata in educazione fisica [≈ 1,60%] c) fosse un maschio laureato in un indirizzo linguistico [≈ 1,15%] d) fosse una femmina laureata in lettere o un maschio in Ingegneria [≈ 16,80%] e) non fosse né un maschio laureato in Agraria, né una femmina laureata in Architettura [≈ 96,10%]

Indirizzo	Totale	Maschi	Femmine
Agrario	2636	1606	1030
Architettura	7234	3700	3534
Chimico–farmaceutico	4411	1704	2707
Economico–statistico	24306	12801	11505
Geo–biologico	5275	1982	3293
Giuridico	18632	8060	10572
Ingegneria	14806	12770	2036
Insegnamento	3838	379	3459
Letterario	12219	2830	9389
Linguistico	8106	679	7427
Medico	10685	4205	6480
Politico–sociale	10094	4212	5882
Psicologico	2678	482	2196
Scientifico	4836	2620	2216
Educazione fisica	2171	1007	1164
T O T A L E	131927	59037	72890

8. Nella tabella seguente, dati ISTAT, sono riportati il numero di controlli effettuati su alcune colture per stabilire quante di esse avevano residui dannosi di fitofarmaci. Determinare la probabilità che, scegliendo a caso fra quelle esaminate
a) un'arancia, risulti dannosa [≈ 0,35%] b) una verdura, sia dannosa [≈ 5,16%] c) una coltura, non sia dannosa [≈ 95,14%] d) una coltura fra quelle dannose, sia una fragola [≈ 10,90%] e) è più probabile scegliere una clementina o una qualsiasi coltura dannosa? [una coltura dannosa]

Coltura	Esaminati	Dannosi
Actinidie	70	3
Arance	284	1
Carciofi	257	3
Cavolfiori	69	2
Cavoli broccolo	107	0
Clementine	210	8
Fragole	409	23
Lattughe	654	44
Mele	60	2
Patate	144	1
Pere	101	2
Pesche	493	24
Pomodori	217	5
Radicchi	181	7
Sedani	205	20
Uve da tavola	877	66
TOTALE	4338	211

L'angolo di Derive

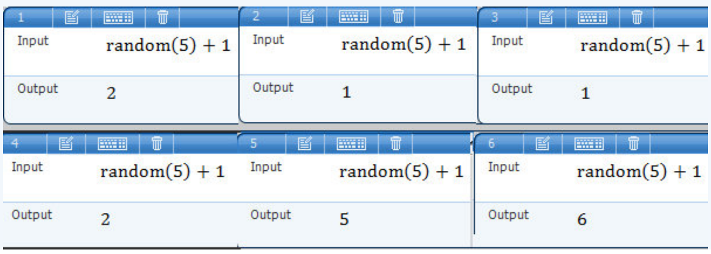
Con Derive possiamo simulare eventi facilmente ripetibili come il lancio di un dado, l'estrazione di una carta e via dicendo. Per far ciò si deve fare uso del comando **RANDOM(n)**
Se **n** è un numero intero positivo, genera un numero pseudo–casuale maggiore o uguale a zero e minore di **n**.
Così per esempio per simulare il lancio di un dado scriveremo **RANDOM(6) + 1**
L'aggiunta di 1 fa sì che si genereranno elementi a caso dell'insieme {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Se vogliamo simulare il lancio di un dado 100 volte scriviamo: **VECTOR(RANDOM(6) + 1,n,100)**
Fatto ciò, per determinare la probabilità frequentista dobbiamo contare quante volte si è ripetuta ciascuna delle cifre da 1 a 6. Per far ciò abbiamo bisogno di alcuni comandi utili a lavorare con i vettori. Il primo è **DIMENSION(vettore)** oppure **DIM(vettore)**, che determina quanti elementi ha un vettore. Abbiamo poi **ELEMENT(vettore, posizione)**, che permette di riferirsi all'elemento che occupa una certa posizione in un dato vettore. Per esempio **ELEMENT([1,0, 4, 4, 3], 2)** 0
Quel che dobbiamo fare è allora, intanto generare il vettore delle simulazioni, associandogli un nome. Per esempio **a:=VECTOR(RANDOM(6) + 1,n,100)**
Il risultato dipenderà dal momento in cui eseguiremo il comando. Poi dobbiamo contare quante volte si ripete il numero 1, quante volte il 2 e così via, quante volte il 6. Sfrutteremo il comando **SELECT**, scrivendo:
DIM(SELECT(ELEMENT(a, k) = 1, k, 1, DIM(a)))
per contare quante volte abbiamo generato 1; e altre cinque istruzioni simili alla precedente per gli altri punteggi. Oppure possiamo scrivere l'unico comando
VECTOR(DIM(SELECT(ELEMENT(a, k) = n, k, 1, DIM(a))), n, 1, 6)
che genera un vettore a 6 componenti, ognuno dei quali conta quante volte abbiamo generato 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Se infine vogliamo determinare la probabilità frequentista, dobbiamo dividere ciascuno dei predetti valori per la dimensione del vettore **a**, scrivendo
VECTOR(DIM(SELECT(ELEMENT(a, k) = n, k, 1, DIM(a)))/DIM(a), n, 1, 6)
Il calcolo lo effettueremo premendo il tasto ≈, se vogliamo valori decimali. Se generiamo 100 valori comunque le frequenze chiaramente coincidono con le relative percentuali.

Attività

1. Simulare il lancio di un dado 1000, 10 000 volte, notando che all'aumentare del numero di lanci le sei frequenze divengono sempre più vicine fra loro.
2. Simulare il lancio di una moneta regolare 1000, 10 000 volte, notando che all'aumentare del numero di lanci le due frequenze divengono sempre più vicine fra loro.
3. Simulare il lancio di un dado a 8 facce, 1000, 10 000 volte, notando che all'aumentare del numero di lanci le otto frequenze divengono sempre più vicine fra loro.

L'angolo di Microsoft Mathematics

Esiste il comando random(n) che genera un numero intero casuale nell'intervallo [0, n]. Quindi per simulare per esempio il lancio di un dado dobbiamo scrivere random(5) + 1. Purtroppo non vi è la possibilità di automatizzare il procedimento, quindi dobbiamo inserire più volte il comando per simulare più lanci.
Nella figura seguente abbiamo i risultati dell'esecuzione di 6 volte il comando. Ovviamente ripetendo l'esperimento difficilmente otterremmo la stessa sequenza di risultati. Osserviamo anche che abbiamo ottenuto due volte 1 e 2, una volta 5 e 6 e nessuna volta 3 o 4.



Probabilità secondo Laplace

Le Probabilità devono essere trattate in modo analogo alle misure delle grandezze fisiche; cioè non possono essere conosciute mai esattamente, ma solo entro certe approssimazioni.
Emil Borel (1871 – 1956)

Consideriamo adesso il secondo punto di vista della probabilità, cominciando con una definizione.

Definizione 2

Dato un fenomeno *F*, diciamo suo **spazio degli eventi** *E* l'insieme di tutti i possibili modi, diversi fra di loro, in cui *F* può presentarsi.

Esempio 5

- Se F è il fenomeno punteggio del lancio di un dado regolare (cioè a forma di cubo e con i punteggi da 1 a 6 posti sulle sue facce), non truccato (ossia non vi è nessun marchingegno che favorisca l'uscita di una faccia piuttosto di un'altra), il suo spazio degli eventi sarà l'insieme $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Se F è il fenomeno estrazione di un numero al gioco della tombola avremo invece $E = \{1, 2, 3, ..., 89, 90\}$.

La concezione alla base del concetto di probabilità classica anche detta secondo Laplace, è il fatto che ognuno dei modi in cui si può presentare il fenomeno deve essere considerato ugualmente possibile. Quindi non possiamo utilizzarla se, ad esempio, dobbiamo valutare la probabilità che si effettui il volo Milano Parigi delle ore 17:00 del 15 maggio prossimo. Infatti la probabilità che tale evento si verifichi è vicina a uno, in un giorno normale, e vicina a zero in un giorno di sciopero.

Definizione 3

Diciamo **evento aleatorio** o semplicemente **evento**, un sottoinsieme dello spazio degli eventi *E* di un fenomeno *F*.

Che cosa significa?

Aleatorio Dal latino *alea* che significa dado, è legato quindi alla nascita *storica* del calcolo delle probabilità.

Esempio 6

- L'evento uscita di un numero pari lanciando un dado è il sottoinsieme $\{2, 4, 6\}$ dello spazio degli eventi $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- L'evento "uscita di un numero pari o multiplo di 7" come primo numero sulla ruota di Napoli è il sottoinsieme $\{2, 4, 6, ..., 88, 90, 7, 21, ..., 77\}$.

Definizione 4

Diciamo numero dei **casi possibili** di un dato evento la cardinalità dello spazio di eventi *E* a cui esso appartiene; numero dei **casi favorevoli** al suo accadere, la propria cardinalità.

Esempio 7

- Nell'evento "uscita di croce nel lancio di una moneta non truccata", il numero dei casi possibili è 2 (esce Testa o Croce), quello dei casi favorevoli all'evento è 1 ({Croce}).
- Nell'evento "uscita di un numero pari nel lancio di un dado", il numero dei casi possibili è 6, quello dei casi favorevoli è 3.
- Nell'evento "uscita di un numero dispari maggiore di 37, come primo estratto sulla ruota di Venezia", i casi possibili sono 90, i casi favorevoli 27 (la cardinalità dell'insieme $\{39, 41, 43, \dots, 87, 89\}$).

Adesso siamo in grado di definire cosa intendiamo per probabilità secondo Laplace.

Definizione 5

Dato un evento il cui spazio degli eventi sia finito, diciamo sua **probabilità secondo Laplace** il rapporto fra il numero dei casi favorevoli al suo verificarsi e quello dei casi possibili, nell'ipotesi che tutti i casi abbiano la stessa possibilità di accadere.

Anche per questa definizione passiamo in rassegna alcune delle critiche più frequenti.

1. La definizione è circolare, dato che definiamo il concetto di probabile con quello meno chiaro di equipossibile.
2. La probabilità laplaciana di un evento è sempre un numero razionale compreso fra 0 e 1 e non un numero reale.
3. Qual è il modo corretto di stabilire quali fatti sono importanti perché si abbia un certo esito piuttosto che un altro?

A queste obiezioni potremmo rispondere che

1. supponiamo, in fiducia, che tutti gli esiti siano equipossibili (se la moneta non è truccata c'è la stessa possibilità che si abbia Testa o Croce).
2. in alcuni casi possiamo generalizzare la probabilità laplaciana in modo da ottenere probabilità non razionali;
3. siamo noi stessi a stabilire quali fatti influenzano gli esiti e a escludere quelli indipendenti (come il colore, il peso, l'immagine presente su una moneta). Questo fatto fa sì che questa concezione della probabilità venga anche chiamata *a priori*.

Ricordiamo che, in base alla definizione, vale 0 la probabilità dell'evento formato dall'insieme vuoto e 1 quella dell'evento cosiddetto universale, cioè quello che coincide con lo spazio degli eventi.

Esempio 8

Consideriamo il fenomeno "*lancio di un dado regolare*", il cui spazio degli eventi è $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- La probabilità dell'evento "*esce il punteggio* 2" è 1/6, poiché l'unico caso favorevole è {2}.
- La probabilità dell'evento "*esce un numero pari*" è 3/6 = ½, dato che i casi favorevoli sono {2, 4, 6}.
- La probabilità dell'evento " *esce un numero minore di* 8" è 6/6 = 1, infatti i casi favorevoli coincidono con quelli possibili.
- La probabilità dell'evento " *esce un numero maggiore di* 10" è 0/6 = 0, stavolta è l'insieme vuoto a rappresentare i casi favorevoli.

Adesso prendiamo in considerazione il fenomeno "*estrazione di una pallina da un'urna contenente* 10 *palline rosse,* 20 *bianche e* 30 *verdi*", il cui spazio degli eventi è formato da 10 + 20 + 30 = 60 palline.
- La probabilità dell'evento "*esce una pallina rossa*" è 10/60 = 1/6.
- La probabilità dell'evento "*esce una pallina bianca*" è 20/60 = 1/3.
- La probabilità dell'evento "*esce una pallina verde*" è 30/60 = ½.

Riferendoci all'ultimo esempio, notiamo che i tre eventi che abbiamo considerato esauriscono tutte le possibilità. Se estraiamo una pallina essa può avere uno solo dei tre colori detti; quindi, se sommiamo le tre probabilità, dovremmo avere la certezza. Infatti $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$.

Talvolta si preferisce parlare della probabilità di un evento in termini percentuali, cioè trasformando la frazione relativa in una equivalente con denominatore 100. In questo modo però non otterremo sempre frazioni con numeratore intero, dato che 100 è divisibile solo per 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100.

Esempio 9

Le probabilità $\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{3}{5},\frac{7}{10},\frac{11}{20},\frac{8}{25},\frac{47}{50}$, saranno trasformate facilmente in frazioni percentuali, moltiplicando numeratore e denominatore per il numero che fa divenire il denominatore uguale a 100.

$$\frac{1}{2}=\frac{50}{100},\frac{3}{4}=\frac{75}{100},\frac{3}{5}=\frac{60}{100},\frac{7}{10}=\frac{70}{100},\frac{11}{20}=\frac{55}{100},\frac{8}{25}=\frac{32}{100},\frac{47}{50}=\frac{94}{100}.$$

Ricordiamo che le precedenti frazioni possono anche indicarsi nel seguente modo:

50%, 75%, 60%, 70%, 55%, 32%, 94%

che si leggeranno semplicemente aggiungendo al nome del numero le parole "*per cento*".

Definizione 6

Si dice **evento certo** un evento che ha probabilità 1 di accadere;
evento probabilisticamente impossibile un evento che ha probabilità zero di accadere.

Esempio 10

Sono eventi certi:

- l'uscita di un numero intero inferiore a 7 nel lancio di un dado regolare;
- l'estrazione di una pallina verde da un'urna che contiene solo palline verdi;
- l'estrazione di una carta di seme rosso da un mazzo che contiene solo le carte di cuori.

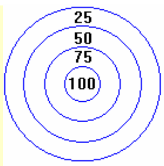
Nella definizione 6 abbiamo parlato di evento probabilisticamente impossibile e non semplicemente di evento impossibile. Ciò perché vogliamo distinguere gli eventi che hanno probabilità zero di accadere dagli eventi fisicamente impossibili. Infatti, dire che l'evento è probabilisticamente impossibile non equivale a dire che non è possibile che esso si manifesti. Vediamo qualche esempio.

Esempio 11

- Consideriamo l'evento "estrazione di una pallina rossa" da un'urna che contiene solo palline verdi. Questo fatto è fisicamente impossibile, quindi in questo caso il concetto di impossibilità probabilistica coincide con quello intuitivo che usiamo nel linguaggio ordinario.
- Consideriamo l'evento "nel lancio di una moneta regolare essa rimanga in piedi". Quanti sono i casi a essa favorevoli? Certamente zero, quindi anche la probabilità a esso associata è zero. Eppure questo evento non è fisicamente impossibile. Non vi è alcuna legge fisica che lo impedisca, così l'evento non è impossibile nel senso comune della parola, ma ha probabilità zero di verificarsi.
- L'evento uscita di una pallina rossa da un'urna che contiene $10^{10000} + 1$ palline, 10^{10000} delle quali sono nere non è probabilisticamente impossibile; infatti la probabilità che si verifichi anche se è un numero molto vicino a zero, non è esattamente zero.

La probabilità laplaciana così come è definita è un numero razionale ed è legata a due numeri interi, il numero dei casi possibili e quello dei casi favorevoli. Essa può quindi essere utilizzata solo quando abbiamo a che fare con insiemi finiti; talvolta, però, può essere utilizzata per risolvere problemi relativi a insiemi infiniti. Vediamo un esempio.

Esempio 12

Supponiamo di avere un bersaglio come quello in figura 

, sul quale lanciamo delle freccette. Supponiamo inoltre di avere la certezza che comunque lanciamo la freccetta, purché la lanciamo in direzione del bersaglio, questa lo colpirà, perché, per esempio, il bersaglio è una potente calamita e la freccetta ha la punta metallica. Vogliamo calcolare la probabilità di colpire il centro che è la zona in cui si fanno più punti. Possiamo usare la definizione laplaciana? Quanti sono i casi favorevoli a tale evento? Quanti quelli possibi-

li? In questo caso dovremmo contare quanti sono i punti che contiene il bersaglio e quanti di questi rientrano all'interno del centro, ma è ovvio che sono infiniti in entrambi i casi, quindi questo procedimento è privo di senso.
Come fare allora? Una maniera di valutare il numero dei punti del bersaglio è quella di considerare la sua area. Così, se la misura del raggio dell'intero bersaglio è 4 *cm* e quella del raggio della zona centrale è 1 *cm*, le due aree sono rispettivamente $16\pi\ cm^2$ e $\pi\ cm^2$. Possiamo allora dire che la probabilità di colpire il centro sarà uguale a $\frac{\pi}{16\pi} = \frac{1}{16} \approx 6\%$.

Spesso nel calcolo delle probabilità si fanno errori banali perché ci si lascia fuorviare dalle apparenze. Vediamo un esempio.

Esempio 13

In una scuola si effettua una lotteria, inserendo in un'urna 12 palline rosse e 6 gialle e, in un'altra urna, 20 palline rosse e 10 gialle. A turno si chiama ciascun alunno e gli si chiede di scegliere l'urna nella quale pescare una pallina. Chi sceglierà una pallina gialla vincerà un premio.
Rita viene chiamata per prima. Dopo aver pensato un po' decide di scegliere di pescare nella seconda urna, perché in essa vi sono più palline gialle che nella prima.
Rita ha avuto ragione nella sua scelta? Ragioniamo un attimo. La probabilità non è un numero assoluto, bensì un rapporto. Quel che conta quindi non è quante palline gialle vi sono in ciascuna urna, ma quante ve ne sono rispetto al totale. Così la probabilità di estrarre una pallina gialla dalla prima urna è $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$: quella di estrarla dalla seconda urna è $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$. Quindi in questo caso non vi è alcun vantaggio a scegliere un'urna piuttosto che un'altra.

Definizione 7

Diremo **equiprobabili** due eventi relativi che hanno la stessa probabilità di verificarsi.

I protagonisti

Jacques Bernoulli nacque a Basilea il 27 dicembre 1654. Nella sua famiglia una dozzina almeno dei componenti, in particolare si ricordano suo fratello Johann e suo zio Daniel, si occuparono di matematica, fisica, ingegneria, … con ottimi risultati. Si laureò in teologia nel 1676, ma poi si occupò di matematica. Fu il primo a usare il termine integrale nel 1690, inventò il calcolo delle variazioni e studiò diverse importanti curve, fra le quali la cosiddetta catenaria e la cicloide. Nell'*Ars conjectandi*, enunciò la famosa legge dei grandi numeri. Morì nella sua città natale il 16 agosto 1705.

Christiaan Huyghens nacque ad Aia in Olanda il 14 aprile 1629, studiò legge all'Università di Leida dal 1645 al 1647, poi dal 1647 al 1649 si trasferì al Collegio d'Orange a Breda, dove oltre a studiare legge si interessò di matematica. Successivamente si occupò di ottica e della costruzione di orologi. Importante il suo trattato *De ratiociniis in ludo aleae* (Sui ragionamenti nel giuoco dei dadi) del 1655 che può essere considerato come il primo relativo al calcolo delle probabilità. Morì nella sua città natale l'8 luglio 1695.

Pierre Simon Laplace nacque a Beaumont–en–Auge in Francia il 28 Marzo 1749. All'età di 16 anni fu ammesso all'Università di Caen per studiare teologia, ma si occupò prevalentemente di matematica. I suoi risultati furono così lusinghieri che all'età di 19 anni, su raccomandazione di D'Alembert, fu nominato professore di matematica alla Scuola Militare di Parigi. In quegli anni esaminò fra gli altri il giovane Napoleone Bonaparte. Durante la Rivoluzione Francese fu uno di quelli che lavorò alla sistemazione del Sistema metrico decimale. Durante l'impero napoleonico fu senatore, anche se per solo sei settimane. Nel 1817, durante la restaurazione borbonica, fu nominato marchese.
Si occupò di cosmologia; a questo avviso ricordiamo i suoi fondamentali trattati *Exposition du système du monde* del 1796 e soprattutto il *Traité de Mécanique Céleste*, in 5 volumi pubblicato nell'arco di 26 anni, dal 1799 al 1825. I suoi contributi alla teoria della probabilità sono contenuti in *Théorie analitique des probabilités* del 1812 e in *Essai philosophique des probabilités* del 1814. Morì a Parigi il 5 Marzo 1827.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Consideriamo il fenomeno "*estrazione di una carta da un mazzo di 40 carte da scopa*", il cui spazio degli eventi, è {asso di denari, due di denari, …, fante di bastoni, cavallo di bastoni, re di bastoni}, che ha 40 elementi.

- La probabilità dell'evento "*esce una figura*" è 12/40 = 3/10, dato che i casi favorevoli sono {fante di denari, cavallo di denari, re di denari, …, fante di bastoni, cavallo di bastoni, re di bastoni}, che ha 12 elementi.
- La probabilità dell'evento "*esce una carta di denari*" è 10/40 = ¼, poiché i casi favorevoli sono: {asso di denari, due di denari, …, re di denari}.
- La probabilità dell'evento "*esce il tre di bastoni*" è 1/40, infatti l'unico caso favorevole è [tre di bastoni}.

Livello 1

1. Estraiamo un numero a caso dall'insieme A = {100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1100, 1110, 1111}, con quale probabilità contiene più 1 che zero? [½]
2. Con riferimento al quesito precedente, con quale probabilità il numero estratto contiene un numero dispari di 1? [2/3]
3. Estraiamo un numero a caso dall'insieme B = {1, 2, 4, 8, 9, 12, 16, 25, 36}, con quale probabilità esso è un quadrato perfetto? [2/3]
4. Con riferimento al quesito precedente, con quale probabilità il numero estratto è una potenza di 2? [5/9]
5. Estraiamo un numero a caso dall'insieme C = {12, 123, 131, 132, 124, 125, 152}, con quale probabilità contiene più cifre dispari che cifre pari? Con quale più cifre pari che cifre dispari? [5/7; 1/7]
6. Con riferimento al quesito precedente, con quale probabilità il numero estratto ha cifre la cui somma è un numero pari? Il cui prodotto è dispari? [4/7; 1/7]
7. Dall'insieme D = {6, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32} estraiamo un numero a caso, con quale probabilità è divisibile per 4? Con quale probabilità è divisibile per 6? [7/8; 3/8]
8. Con riferimento al quesito precedente, con quale probabilità il numero estratto ha più di 6 divisori? Meno di 4 divisori? [1/8; 0]
9. In un'urna immettiamo 100 palline indistinguibili al tatto, così suddivise per colore: 50 bianche, 20 nere e 30 rosse. Estraiamo una pallina a caso con quale probabilità essa è di colore bianco? Nero? Rosso? [½; 1/5; 3/10]
10. Lanciamo un dado a 12 facce, su ciascuna delle quali è impresso uno dei primi 12 numeri naturali. Con quale probabilità uscirà fuori un numero divisibile per 4? [¼]
11. Lanciamo un dado a 20 facce, con quale probabilità uscirà un punteggio rappresentato da un numero primo? Con quale un numero multiplo di 5? [2/5; 1/5]
12. Da un mazzo di carte italiane da 40 estraiamo una carta, con quale probabilità ha un valore compreso tra 2 e 5? Con quale probabilità ha un valore compreso tra 3 e 6 ed è di bastoni? [2/5; 1/10]
13. Qual è la probabilità di estrarre una figura rossa da un mazzo di 52 carte da poker? [3/26]
14. Qual è la probabilità di ottenere un numero multiplo di 5 come primo estratto nella ruota di Napoli? Se non escono numeri multipli di 5 da 500 settimane come primi estratti nella ruota di Napoli, la precedente probabilità cambia? Giustificare la risposta. [1/5; no]
15. Nel gioco della briscola gli assi e i tre sono chiamati "carichi", le carte con punteggio 2, 4, 5, 6 e 7 si chiamano "lisci". Determinare la probabilità che estraendo a caso una carta da un mazzo regolare di 40, essa sia a) un carico; b) un liscio. [1/5; ½]
16. Nel gioco della briscola l'asso vale 11 punti, il tre 10 punti, il re 4 punti, il cavallo 3 punti, il fante o donna 2 punti. Qual è la probabilità di estrarre una carta da un mazzo regolare di 40, il cui valore sia maggiore o uguale a 3 punti? [2/5]
17. Sue Ellen deve pensare a un numero di 3 cifre multiplo di 7; con quale probabilità la sua amica Marianna riuscirà a indovinarlo al primo tentativo? [32/225]
18. Gianluca dice a Federica di essere nato in Gennaio in un giorno il cui valore numerico è pari ma non divisibile per 3; qual è la probabilità che Federica lo indovini al primo tentativo? Se Gianluca fosse nato in Aprile o in Febbraio sarebbe cambiato il precedente risultato? Giustificare la risposta. [1/10; No]

19. In un urna sono posti sei bigliettini con i seguenti nomi di donna: Anna, Barbara, Carla, Dafne, Erica, Federica. Determinare la probabilità che estraendo un bigliettino questo abbia scritto un nome che contenga a) la lettera a; b) solo un tipo di vocale; c) più vocali che consonanti; d) un numero di consonanti doppie del numero di vocali; e) tante vocali quante consonanti. [1; 1/3; 1/6; 0;1/3]
20. Un numero è scelto a caso nel seguente insieme: {0,25; 0,5; 0,75; 0,8; 1; 2; 2,2; 3; 4; 9,7}. Qual è la probabilità che il suo reciproco sia maggiore di 1? [2/5]
21. A una casa da gioco di Las Vegas chi lanciando due dadi, a forma di cubo, ottiene 7, riceverà la posta che ha puntato moltiplicata per il reciproco della probabilità che ha di effettuare quel lancio. Se Tom ha fatto 7 e ha ricevuto \$ 150, quanto aveva puntato? [\$ 25]
22. Da un mazzo di 52 carte da poker viene eliminato l'asso di picche, le carte sono mescolate e la carta superiore è eliminata senza guardarla. Qual è la probabilità che tale carta sia un asso? [3/51]
23. Gianluca deve telefonare alla sua ragazza Lucilla, che ha recentemente cambiato numero telefonico. Gianluca non è sicuro dell'ultima cifra di tale numero. Se la sua scheda telefonica è quasi esaurita e gli permette di effettuare solo due telefonate, qual è la probabilità che riesca a indovinare il numero di Lucilla? [1/5]

Lavoriamo insieme

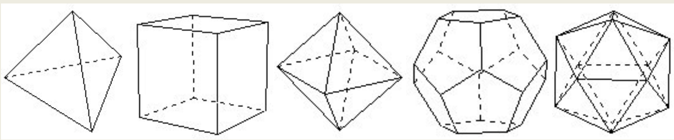
In un'urna vi sono alcune palline bianche, 20 rosse e 30 verdi, se la probabilità di estrarre una pallina bianca è 2/7, quante sono le palline bianche?
Dire che la probabilità di estrarre una pallina bianca è 2/7, equivale a dire che tutte le palline nell'urna le suddividiamo in 7 parti uguali e le bianche rappresentano 2 di questi gruppi, quindi le altre palline, che sono 20 + 30 = 50, rappresentano gli altri 5 gruppi. Ma allora ogni gruppo contiene 10 palline e le bianche sono 20.

Livello 2

24. In un'urna vi sono alcune palline bianche, 24 rosse e 40 verdi, se la probabilità di estrarre una pallina bianca è 13/17, quante sono le palline bianche? [208]
25. In un'urna vi sono alcune palline bianche, 25 rosse e 10 verdi, se la probabilità di estrarre una pallina rossa è 5/12, quante sono le palline bianche? [25]
26. In un'urna vi sono alcune palline bianche, 15 rosse e 20 verdi, se la probabilità di estrarre una pallina verde è 7/15, quante sono le palline bianche? [Impossibile]
27. La probabilità di ottenere un numero multiplo di 13 come primo estratto nella ruota di Napoli è la stessa di ottenere un numero multiplo di *k*. Quali valori può assumere *k*? [14; 15]
28. Con riferimento al precedente quesito, esistono numeri interi *k* per cui la probabilità di estrarre un multiplo di *k* coincida con la probabilità di estrarre un multiplo di 8? [No]
29. Con riferimento al precedente quesito, da un certo valore di *k* minore di 90, la probabilità di estrarre un multiplo di *k* non varia. Quanto vale *k* e qual è la detta probabilità? [46; 1/90]
30. Lanciamo una moneta regolare in aria per due volte successive. Qual è la probabilità che entrambe le volte otteniamo testa? [¼]
31. Lanciando due dadi otteniamo punteggi che vanno da 2 a 12. Per ciascun punteggio determinare la relativa probabilità di ottenerlo. [1/36; 1/18; 1/12; 1/9; 5/36; 1/6; 5/36; 1/9; 1/12; 1/18; 1/36]

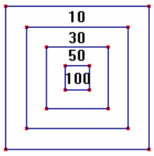
Intervallo matematico

Anche se i dadi più usati hanno forma di cubo, in altri giochi si usano anche dadi a 8, 12 o 20 facce. Ciò dipende dal fatto che deve essere garantita l'equipossibilità e nessuna faccia deve essere privilegiata e questo è possibile solo se i dadi sono poliedri regolari, ossia poliedri le cui facce sono tutte poligoni regolari dello stesso tipo e gli angoli diedri sono tutti fra loro isometrici. Si dimostra che di poliedri del genere ve ne sono solo 5 e sono quelli che andiamo adesso a illustrare.



Essi, nell'ordine, sono denominati: tetraedro, esaedro o cubo, ottaedro, dodecaedro, icosaedro.
Hanno rispettivamente, 4, 6, 8, 12 e 20 facce. Questi sono gli unici tipi di dadi che consentono giochi equi.

Livello 2

32. Determinare quanti sono i casi possibili ottenibili lanciando due dadi a forma del solido indicato. Quale punteggio è il più probabile? Quanto vale questa probabilità? a) Tetraedro [8; 5; ½] b) Ottaedro [64; 9; 1/8] c) Dodecaedro [144; 13; 1/12] d) Icosaedro [400; 21; 1/20]
33. Tenuto conto del precedente quesito, rispondere nel caso di un ipotetico dado a n facce. [n^2; $n + 1$; $1/n$]
34. In un gioco è richiesto il lancio di due dadi a forma di cubo. Magda ha solo un dado a forma di dodecaedro. Ella dice che non cambia nulla, perché in ogni caso due dadi a forma di cubo e un dado a forma di dodecaedro hanno sempre un totale di 12 facce. Secondo te ha ragione? Giustifica la risposta. [No, perché i casi possibili sono rispettivamente 36 e 144]
35. Quanti sono i casi possibili lanciando 3 dadi? E 4 dadi? E n dadi? [216; 1296; 6^n]
36. Uno dei primi problemi di probabilità fu presentato a Galileo da un giocatore di dadi, il quale aveva osservato che in un gioco dell'epoca, nel quale si lanciavano 3 dadi regolari a forma di cubo, i punteggi 10 e 11 si ottenevano più frequentemente dei punteggi 9 e 12. Calcolare le rispettive probabilità dei due eventi. [27/216; 25/216]
37. Giorgio ha acquistato tutti i biglietti di una lotteria che contengono la lettera G. Sapendo che un biglietto della lotteria è formato da due lettere scelte fra le 26 dell'alfabeto anglosassone e da un numero di 3 cifre, determinare la probabilità di Giorgio di vincere il premio. [≈ 7,5%]
38. Con riferimento al precedente quesito, se i numeri avessero 5 cifre cambierebbe la probabilità? Se le lettere fossero 4 cambierebbe la probabilità? Giustificare le risposte. [No; Sì]
39. In un'urna sono posti 100 bigliettini, ciascuno dei quali porta scritto uno dei diversi numeri naturali fra 1 e 100. Si estrae un bigliettino e ci viene detto che esso è un multiplo di n. Se sappiamo che la probabilità di effettuare una tale estrazione è 9/100, quanto vale n? [11]
40. In figura è rappresentato un bersaglio 

in cui ciascun settore ha un contorno di forma quadrata. Le dimensioni di ciascun contorno sono, in *cm,* rispettivamente 7, 5, 3 e 1. Si ipotizzi che ogni qualvolta si lancia una freccetta questa colpisca sempre il bersaglio. Determinare la probabilità di ottenere 50 punti lanciando una sola freccetta. Determinare poi la probabilità di ottenere 30 punti. [8/49; 16/49]
41. Con riferimento al problema precedente, se il punteggio di ciascun settore dovesse essere inversamente proporzionale alla probabilità di ottenerlo, lasciando inalterato il punteggio 10, quanto dovrebbero valere gli altri punteggi? [15; 30; 240]
42. Fra tutti i numeri naturali di tre cifre, si sceglie un numero a caso. Qual è la probabilità che sia una potenza di 2? Quale la probabilità che sia una potenza di 3? Quale che sia potenza di un numero primo? [1/450; 1/450; 7/900]
43. Lanciando due dadi a forma di esaedro, non truccati, qual è la probabilità di ottenere due numeri la cui somma rappresenti un numero primo? [1/3]
44. Due numeri primi vengono scelti a caso dai primi dieci numeri primi. Qual è la probabilità che la loro somma faccia 24? [1/15]
45. Un numero è scelto a caso fra i numeri primi minori di 100. Qual è la probabilità che esso contenga il 9 come una delle sue cifre? [6/25]
46. La probabilità che accada l'evento A è 2/3, quella che accada B è ¾, con quale probabilità p accadono sia A che B? [$5/12 \leq p \leq 2/3$]
47. Ciascuno dei 1347 studenti di una scuola riceve un tesserino identificativo numerato progressivamente da 1 a 1347. Jasmine è superstiziosa e crede che il 7 le porti sfortuna. Con quale probabilità Jasmine riceverà un tesserino non "sfortunato"? Quale fra le dieci cifre è quella con la quale si ha maggiore probabilità di non ricevere un tesserino che la contenga? E con quale fra le dieci cifre la probabilità è maggiore? [101/449; 8 o 9 ;1]

Lavoriamo insieme

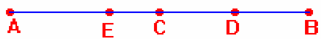
Prendo 100 bigliettini e su ognuno di essi scrivo uno dei diversi 100 numeri naturali. Poi prendo altri bigliettini e su ognuno di essi scrivo uno dei diversi numeri primi inferiori a 100. Ripeto più volte quest'ultima operazione, in modo però che ogni numero primo sia ripetuto lo stesso numero di volte. Fatto ciò inserisco

tutti i bigliettini in un’urna e ne estraggo uno. Dato che ho calcolato che la probabilità di estrarre un bigliettino con su scritto 7 è 1/40, quanti bigliettini ho scritto per ciascun numero primo?
Quanti sono i numeri primi inferiori a 100? Scriviamoli:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

Sono 25. Abbiamo già scritto i numeri primi nella prima trascrizione dei 100 numeri naturali. Se non inseriamo altri bigliettini la probabilità di ottenere 7, così come di qualsiasi altro numero compreso tra 1 e 100, è evidentemente 1/100. Inserendo un altro gruppo di biglietti con su scritti i numeri primi, avremo 125 bigliettini su due dei quali vi è scritto 7. Quindi la probabilità è salita a 2/125. Con un secondo gruppo di 25 numeri primi diviene 3/150 = 1/150. In generale inserendo x gruppi di 25 bigliettini, la probabilità di estrarre 7 è $(x + 1)/(100 + 25x)$, che deve essere uguale a 1/40, quindi deve essere $40x + 40 = 700 + 175x \Rightarrow x = 4$. Possiamo quindi concludere che abbiamo scritto un totale di 4 bigliettini per ogni numero primo.

Livello 2

48. Claudia e Tom giocano con due dadi a forma di cubo e hanno stabilito che chi per primo ottiene 7, riceverà un numero di caramelle uguale al numero di quelle che già possiede moltiplicato per il reciproco della probabilità che ha di effettuare quel lancio. Se Tom ha fatto 7 e ha ricevuto 150 caramelle, quante ne aveva? [25]
49. Riccardo ha scommesso con un amico che lanciando due dadi riesce a ottenere 8 al primo tentativo; per aumentare la sua probabilità di vincere aggiunge un puntino in una delle facce di uno solo dei due dadi. In quale faccia deve aggiungere il puntino? [Quella con 1]
50. In un’urna sono posti dei bigliettini con su scritti tutti i numeri naturali non superiori a 100. Sappiamo che vi è 1 bigliettino per ogni numero non superiore a 50, mentre vi sono tre bigliettini che portano scritto lo stesso numero se esso è superiore a 50. Determinare la probabilità che venga estratto un quadrato perfetto. [13/197]
51. Il segmento AB in figura è il doppio di AC, il triplo di AE e il quadruplo di DB. Scelto un punto a caso su AB, qual è la probabilità che appartenga anche a EC?  [1/6]

52. Giocando una sola colonna al totocalcio, gli eventi “fare 14” e “fare zero”, sono equiprobabili? Giustificare la risposta. [No]
53. Consideriamo i numeri usciti in una certa estrazione sulla ruota di Milano. Quale fra i seguenti eventi è più probabile: escono i numeri 1, 2, 3, 4, 5 oppure 13, 41, 25, 78, 61? Giustificare la risposta. [Sono equiprobabili]
54. Consideriamo il gioco della roulette e i punteggi usciti in tre giocate successive. Quale fra i seguenti eventi è più probabile: escono i numeri 13, 14, 15 oppure 13, 12, 11 o ancora 13, 13, 13? Giustificare la risposta. [Sono equiprobabili]
55. In un’urna che contiene 100 palline numerate da 1 a 100, se ne estrae una. Determinare la probabilità che la pallina estratta abbia un’etichetta il cui numero sia multiplo di 13. Determinare nello stesso fenomeno eventi equiprobabili al precedente. [7%]
56. Si lancia un dado e si valuta il punteggio ottenuto. Determinare quale fra i seguenti eventi relativi al punteggio ottenuto sono equiprobabili all’evento “punteggio pari”. Punteggio a) dispari; b) multiplo di 3; c) primo; d) il cui quadrato è maggiore di 13; e) il cui quadrato contiene la cifra 6. [a), c), d)]
57. Lanciamo due dadi regolari a forma di cubo e valutiamo i punteggi ottenuti. Quale punteggio è equiprobabile a 6? [15]
58. Il signor Gianni ha giocato i numeri 13, 41 e 72 come terno secco, sono però usciti i numeri 13, 41 e 71. Allora il signor Gianni dice di non avere vinto per un punto. Ha ragione a dire così? Giustificare la risposta. [No]
59. Lanciando una moneta 6 volte è più probabile ottenere la sequenza TCTCTC oppure TTTCCC? Giustificare la risposta. [Sono equiprobabili]
60. Da un mazzo di 52 carte da poker estraiamo una carta. Quale fra i seguenti eventi è equiprobabile all’evento “la carta ha un valore superiore al 7”? La carta a) è una figura; b) è di seme rosso; c) ha un punteggio pari; d) ha un punteggio la somma delle cui cifre è multipla di 3; e) ha un punteggio il cui quadrato contiene una sola volta la cifra 1. [e]
61. Consideriamo gli insiemi X = {5, 6, 7, 8}, Y = { 4, 5, 7, 9, 11}, W = {0, 3, 5, 7, 8} e Z = {0, 2, 4, 6}. Determinare la probabilità che scegliendo due insiemi a caso: la loro unione abbia un numero pari di elementi; [2/3] la loro differenza in almeno uno dei due sensi, abbia 3 elementi; [5/6] la loro interse-

zione abbia 1 elemento [½] la loro differenza simmetrica abbia un numero dispari di elementi. [2/3]

62. Data la funzione f: $A = \{-1, -2, -3, -4, -5\} \to B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ definita dalla legge $f(x) = -x$. Determinare la probabilità che scelto un elemento a caso in A esso appartenga al dominio di f. Determinare la probabilità che scelto un elemento a caso in B esso appartenga al codominio di f. [3/5; ½]
63. Due panini al prosciutto e due al salame vengono foderati di carta stagnola e messi in un sacchetto. Qual è la probabilità che prendendo due panini a caso, siano entrambi imbottiti allo stesso modo? [½]
64. Lanciamo 3 dadi. Con che probabilità si ottiene un punteggio a) pari [½] b) divisibile per 5. [43/216]
65. In un sacchetto sono poste 5 bacchettine di legno, che misurano, in *cm,* rispettivamente 1, 2, 3, 4 e 5. Tiziana estrae a caso tre bacchettine; qual è la probabilità che con esse si possa costruire un triangolo? Suggerimento: tenere conto della disuguaglianza triangolare) [2/5]
66. La questione è la stessa dell'esercizio precedente, ma le bacchette misurano, in *cm* 3, 3, 4, 5 e 5. Qual è la probabilità che Tiziana formi un triangolo a) isoscele; b) equilatero; c) rettangolo; d) rettangolo e isoscele. [3/5; 0; 2/5; 0]

Lavoriamo insieme

Per salire su un aereo 123 passeggeri si mettono in fila. Il primo di essi ha perduto il suo talloncino del check-in, quindi si siede su un posto a caso. Gli altri hanno invece il loro talloncino, quindi si sistemano nel loro posto se libero, se no in un posto a caso. Con quale probabilità l'ultimo dei passeggeri si siederà nel posto assegnato dal talloncino?
Il problema sembra molto complicato, in realtà non è così. Infatti supponiamo che il primo si sieda sulla prima poltrona. Ci sono due possibilità: o ha trovato il suo posto o è seduto nel posto di un altro. Nel primo caso tutti siederanno al proprio posto, quindi anche l'ultimo. Nel secondo invece, a un certo momento il passeggero del posto 1 dovrà scegliere un altro posto, se è quello del primo, di nuovo tutti, tranne questi due saranno al loro posto. Diversamente sceglierà un altro posto. A questo punto non è difficile capire che l'ultimo ha due possibilità o trova il proprio posto libero o trova libero il posto del primo, quindi la probabilità cercata è del 50%.

Livello 3

67. Dato uno spazio di eventi finito, è sempre possibile trovare un evento la cui probabilità di accadere è 1/2? Giustificare la risposta. [No, se la cardinalità dello spazio è dispari]
68. Usando le cifre da 1 a 3, due bambini scrivono ciascuno un numero di tre cifre. Determinare la probabilità che a) abbiano scritto lo stesso numero; b) esattamente una cifra sia stata scritta nella stessa posizione; c) almeno una cifra sia scritta nella stessa posizione; d) due cifre siano scritte esattamente nella stessa posizione. [1/27; 12/27; 19/27; 6/27]
69. Un punto è scelto a caso all'interno di un quadrato. Qual è la probabilità che il triangolo formato dal punto e dagli estremi di un lato del quadrato sia un triangolo acutangolo? [1]
70. Esprimere in formula la probabilità che di due eventi A e B se ne verifichi a) esattamente uno; b) al massimo uno. [$P(A) + P(B) - 2\,P(A \cap B)$; $1 - P(A \cap B)$]
71. Tagliamo una cordicella a caso, qual è la probabilità che i due pezzi siano tali che il più lungo sia il triplo del più corto? [½]
72. Con riferimento al problema precedente, qual è la probabilità che il pezzo più lungo sia n volte il più corto? [$1/(n + 1)$]
73. Una bacchetta di 2,5 *m* si rompe in due parti, qual è la probabilità che sommando le misure dei due pezzi rotti e arrotondandone il valore all'intero più vicino si ottenga 3? Per esempio se i due pezzi misurano 0,43 e 2,07, sommeremo 0 + 2 = 2. [2/5]
74. In un grosso scatolone sono contenuti calzini rossi e calzini blu in numero non superiore a 1991. Scegliendo due calzini a caso la probabilità che siano entrambi rossi o entrambi blu è 50%, quanti calzini rossi vi sono, al massimo, nello scatolone? [990]
75. Scriviamo le lettere della parola PRESTO su sei bigliettini, che estraiamo casualmente uno alla volta, formando così una nuova parola. Con quale probabilità tale parola inizia e finisce per vocale? [1/15]
76. Esprimere in formula la probabilità che di tre eventi A, B e C se ne verifichi a) esattamente uno [$P(A) + P(B) + P(C) - 2\,P(A\cap B) - 2\,P(B\cap C) - 2\,P(A\cap C) + 3\,P(A\cap B\cap C)$] b) esattamente due [$P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) - P(B\cap C) - P(A\cap C) + P(A\cap B\cap C)$] c) almeno 1. [$1 - P(A) - P(B) - P(C) + P(A\cap B) + P(B\cap C) + P(A\cap C) - P(A\cap B\cap C)$]

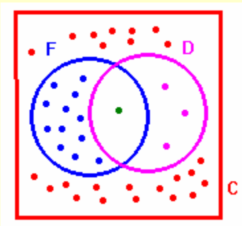
Probabilità dell'unione di eventi elementari

Ogni cosa esistente nell'Universo è il frutto del caso e della necessità. *Democrito*

Fin qui abbiamo considerato solo l'accadere di un singolo evento; adesso vogliamo trattare invece dell'accadere di eventi formati dall'unione di due o più di essi.

Esempio 14

Da un mazzo di 40 carte da scopa si estragga una carta, qual è la probabilità che essa sia una figura o una carta di denari?
Come si vede stiamo considerando non un singolo evento, ma due. Il primo si riferisce all'estrazione di una figura, il secondo a quello di una carta di denari. Cominciamo con il calcolare le probabilità dei singoli eventi. Nel primo caso essa è 12/40 = 3/10, nel secondo è 10/40 = ¼.
Cosa dobbiamo fare di questi due numeri? Per risolvere la questione ci viene in aiuto l'insiemistica. Nella figura seguente rappresentiamo in un diagramma di Eulero – Venn, l'insieme F delle figure e l'insieme *D* delle carte di denari, all'interno dello spazio ambiente, rappresentato dal rettangolo, dell'insieme *C* delle carte.



Osserviamo che determinare il numero di casi favorevoli equivale a trovare la cardinalità di F ∪ *D*. Possiamo dire che |F ∪ *D*| = |F| + |*D*|? No, perché in questo modo conteremmo per due volte l'elemento intersezione, cioè la donna di denari. Quindi la corretta legge da applicare è: |F ∪ *D*| = |F| + |*D*| – |F ∩ *D*|. Pertanto i casi favorevoli sono 10 + 4 – 1 = 13: la probabilità cercata è perciò 13/40.

Tenuto conto dell'esempio precedente possiamo enunciare il seguente risultato.

Teorema 1

La probabilità dell'evento unione di due eventi *A* e *B* è data da: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

È chiaro che nell'ipotesi in cui $A \cap B = \varnothing$ allora la formula precedente diviene più semplicemente

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Vogliamo distinguere le due formule, usando una opportuna terminologia.

Definizione 8

Diciamo che due eventi *A* e *B* appartenenti allo stesso spazio degli eventi *E*, sono **compatibili** se $P(A \cap B) \neq \varnothing$. Due eventi non compatibili li diciamo **incompatibili**.

Esempio 15

I seguenti sono esempi di eventi compatibili:

- "Nel lancio di un dado esce un punteggio multiplo di 3 o un numero primo". Infatti il punteggio 3 rappresenta sia un multiplo di 3 sia un numero primo. Tenuto conto che vi sono due multipli di 3 e tre numeri primi, la probabilità è perciò $\frac{2+3-1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$;
- "Nell'estrazione di una carta da un mazzo di 52 da poker esce un asso o una carta di quadri". L'asso di quadri è l'elemento comune. La probabilità è perciò $\frac{4+13-1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$;
- "Alla roulette esce un numero pari o un numero le cui cifre hanno per somma 4". In questo caso gli elementi comuni sono 4 e 22 (gli altri due casi favorevoli al secondo evento: 13 e 31, non sono da considerarsi, perché non sono pari). Tenuto conto che i possibili punteggi sono 37, da 0 a 36, la probabilità è

$\frac{19+4-2}{37}=\frac{21}{37}$;

- "Al totocalcio esce una colonna che contiene cinque vittorie in casa o sei pareggi". Può uscire una colonna con cinque 1, sei X e due 2; oppure sei 1, sei X e un 2; o ancora cinque 1 e otto X, e così via. Non calcoliamo la probabilità perché lo studente non ha le necessarie conoscenze matematiche.

Sono invece esempi di eventi incompatibili i seguenti:

- "Nel lancio di due dadi esce un punteggio multiplo di 4 o un numero primo". Non vi sono multipli di 4 che sono numeri primi. La probabilità è $\frac{2+5+1}{36}+\frac{1+2+4+6+2}{36}=\frac{8}{36}+\frac{15}{36}=\frac{23}{36}$;
- "Nell'estrazione di una carta da un mazzo di 52 da poker esce un asso o un due". Non vi sono carte il cui punteggio valga contemporaneamente uno e due. La probabilità è $\frac{4}{52}+\frac{4}{52}=\frac{8}{52}=\frac{2}{13}$;
- "In una estrazione della tombola il primo estratto è un numero da 1 a 5 o da 20 a 25";
- "Al totocalcio esce una colonna che contiene sette vittorie in casa o nove pareggi". Se escono sette 1, vi sono solo altri sei diversi risultati.

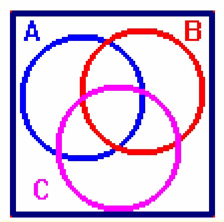
Si possono considerare anche eventi unione di più di due eventi; in generale basta considerare la relativa rappresentazione insiemistica tenendo conto di quante volte compare lo stesso evento.

Esempio 16

Determinare la probabilità che da un'urna contenente 2000 biglie numerate da 1 a 2000, se ne estragga una il cui numero verifichi una almeno delle seguenti tre proprietà:

- sia un numero divisibile per 4,
- sia un numero divisibile per 3 minore di 953,
- sia un numero divisibile per 6 compreso fra 540 e 780.

In generale la rappresentazione grafica delle 2000 biglie è la seguente.



In essa A rappresenta l'insieme dei numeri divisibili per 4, B l'insieme dei numeri divisibili per 3 e minori di 953 e C l'insieme dei numeri divisibili per 6 compresi fra 540 e 1082. Dobbiamo determinare $P(A \cup B \cup C)$.
Noi diciamo che la formula da applicare è la seguente:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Ciò perché gli elementi di $A \cap B$, di $B \cap C$ e $A \cap C$ vengono contati due volte e devono perciò essere sottratti dal totale; in questo modo però vengono a mancare gli elementi di $A \cap B \cap C$, che devono quindi essere aggiunti. Andiamo adesso a calcolare le cardinalità dei predetti insiemi.

- I numeri divisibili per 4 da 1 a 2000 vanno da $4 \cdot 1$ a $4 \cdot 500$, sono perciò 500.
- I numeri divisibili per 3 minori di 953 vanno da $3 \cdot 1$ a $3 \cdot 317 = 951$, perciò sono 317.
- Allo stesso modo C è formato dai numeri da $6 \cdot 90 = 540$ a $6 \cdot 180 = 1080$, quindi ha 91 elementi.
- In $A \cap B$ sono contenuti i numeri divisibili sia per 4 che per 3, quindi per 12, minori di 953. Essi sono i numeri da $12 \cdot 1$ a $12 \cdot 79 = 948$, perciò $|A \cap B| = 79$.
- In $A \cap C$ vi sono i numeri divisibili per 12 compresi tra 540 e 1082, cioè i numeri da $12 \cdot 45 = 540$ a $12 \cdot 90 = 1080$, quindi $|A \cap C| = 90 - 45 + 1 = 46$.
- In $B \cap C$ vi sono i numeri divisibili per 6 compresi tra 540 e 952 e vanno da $6 \cdot 90 = 540$ a $6 \cdot 158 = 948$. Ne abbiamo 69.
- Infine in $A \cap B \cap C$ vi sono i numeri divisibili sia per 3 che per 4, cioè per 12, compresi fra 540 e 780, cioè i numeri da $12 \cdot 45 = 540$ a $12 \cdot 65 = 780$, sono un totale di $65 - 45 + 1 = 21$. La probabilità cercata è perciò: $P(A \cup B \cup C) = \frac{500+317+91-79-46-69+21}{2000} = \frac{735}{2000} = 0{,}3675$.

In effetti vale il seguente risultato, simile a quello dello stesso nome enunciato nell'unità sul calcolo combinatorio:

Teorema 2 (di inclusione-esclusione)

La probabilità dell'evento unione di n eventi si ottiene sommando le probabilità dei singoli eventi, sottraendo le probabilità di tutti gli eventi intersezione a due a due, aggiungendo le probabilità degli eventi intersezione a tre a tre, sottraendo le probabilità di tutti gli eventi intersezione a quattro a quattro, e così via, alternando somme e sottrazioni, fino all'evento intersezione di tutti gli n eventi.

Evidenziamo particolari eventi incompatibili.

Definizione 9

Diciamo evento **complementare** di un dato evento A, definito in uno spazio di eventi E, l'evento B, anch'esso definito in E, tale che $A \cup B = E$ e $A \cap B = \varnothing$.

Notazione 1

Dato un evento A indichiamo il suo **evento complementare** con $\mathbf{A^c}$.

Dal teorema 1, segue immediatamente il seguente risultato.

Corollario 1

Vale la seguente formula: $P(A^c) = 1 - P(A)$

Dimostrazione.

Dato che $E = A \cup A^c$ e che $A \cap A^c = \varnothing$, la legge del teorema 1. diviene:

$P(E) = P(A) + P(A^c)$ cioè $1 = P(A) + P(A^c)$ ricavando rispetto a $P(A^c)$, otteniamo la tesi.

Consideriamo qualche esempio.

Esempio 17

Una casalinga trova nel frigorifero sei uova, è certa che due di essi siano guasti, perché li ha comprati il mese scorso, ma non ricorda quali, dato che anche le uova più fresche le ha riposte accanto alle altre. Che probabilità ha di prendere due uova entrambe buone? In questo caso è più semplice calcolare la probabilità dell'evento complementare, cioè che ella estragga almeno un uovo marcio. Supponiamo che le uova siano numerate da 1 a 6. Per calcolare i casi possibili dobbiamo calcolare in quanti modi possiamo scegliere due oggetti diversi fra 6 tenendo conto che la scelta dipende anche dall'ordine. Quindi dobbiamo calcolare le disposizioni di 6 oggetti di classe 2, che sono $6 \cdot 5 = 30$. Adesso supponiamo che le uova marce siano quelle il cui numero è 1 e 2 (per il nostro studio non è importante la scelta dei numeri delle uova marce). In quanti modi possiamo prendere le uova in modo che uno dei due almeno sia marcio? Stavolta dobbiamo supporre di avere già scelto un uovo marcio, che si fa in 2 modi, e poi dobbiamo scegliere il secondo fra i 5 oggetti rimanenti, che si fa in 5 modi. Poiché l'ordine conta abbiamo un totale di 20 casi. Però alcuni li abbiamo contati due volte, cioè 12 e 21. Quindi alla fine i casi favorevoli sono diciotto. Perciò la probabilità che almeno un uovo sia marcio è $(10 + 10 - 2)/30 = 3/5$. A questo punto la probabilità che nessuna delle uova scelte sia marcia è la complementare, cioè $2/5$.

L'esempio precedente si inquadra in un problema più generale.

Definizione 10

Dato un insieme contenente alcuni oggetti che verificano una data proprietà P e i rimanenti oggetti che non la verificano, estraiamo a caso k oggetti dall'insieme, diciamo che abbiamo ottenuto ***h* successi** (con $h \le k$) se esattamente h degli estratti verificano la proprietà P.

Esempio 18

Nell'esempio precedente la proprietà era "*essere un uovo buono*" e noi abbiamo determinato la probabilità di ottenere 2 successi su due estrazioni.

Vale il seguente risultato.

Teorema 3

Dato un insieme con n elementi, $m \le n$ dei quali verificano la proprietà P, allora la probabilità che scelti a caso $h \le m$ degli n elementi esattamente $k \le h$ di questi verifichino la proprietà P è $\dfrac{\binom{m}{k}\cdot\binom{n-m}{h-k}}{\binom{n}{h}}$

Dimostrazione

Consideriamo prima un caso particolare. Supponiamo di avere 20 palline numerate in un'urna, 8 delle quali bianche e le rimanenti 12 di altri colori. Estraiamo 5 palline e vogliamo determinare la probabilità che esattamente 3 di queste siano bianche. La formula che dobbiamo dimostrare è perciò $\dfrac{\binom{8}{3}\cdot\binom{12}{2}}{\binom{20}{5}}$.

Infatti il numero dei casi possibili è ovviamente $\binom{20}{5}$, dato che dobbiamo contare tutti i modi in cui possiamo scegliere 5 oggetti da 20, senza che risulti influente l'ordine di scelta. Per quanto riguarda i casi favorevoli, fra le cinquine scelte a noi interessano quelle del tipo BBBNN (dove B indica Bianco e N non bianco). Ovviamente le 3 palline bianche si scelgono dalle 8 totali in $\binom{8}{3}$ modi e per ognuna di queste scelte vi sono $\binom{12}{2}$ modi di scegliere le 2 palline non bianche dalle 12 totali. La dimostrazione generale si ottiene facilmente da questo caso.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Determiniamo la probabilità che, lanciando 2 dadi a forma di cubico, non truccati, si ottenga un punteggio multiplo di 3 o di 6. Poiché i multipli di 6 sono anche multipli di 3 il secondo evento è contenuto nel primo, quindi $P(\text{A} \cup B) = P(\text{A})$, dove A è "punteggio uguale a 3, 6, 9, 12". Questi 4 eventi sono tutti incompatibili, quindi basta sommare le rispettive probabilità.
$P(3) = 2/36$ (gli eventi sono 1 + 2 e 2 + 1), $P(6) = 5/36$ (1 + 5, 2 + 4, …, 5 + 1), $P(9) = 4/36$ (3 + 6, 4+ 5, 5 + 4, 6 + 3), $P(12) = 1/36$ (6+6). Quindi la probabilità cercata è (2 +5+4+1)/36 = 12/36 = 1/3.

***Livello* 1**

1. Siano due eventi A e B, appartenenti allo stesso spazio degli eventi, con $P(A) = 2/7$ e $P(B) = 17/21$, è richiesto il calcolo di $P(A \cup B)$. Perché senza conoscere nei dettagli gli eventi A e B, possiamo dire che gli eventi sono compatibili? Giustificare la risposta.
2. Se due eventi hanno probabilità 2/5 e 1/5, possiamo dire che sono incompatibili? Giustificare la risposta. [No]
3. Se due eventi hanno probabilità 2/5 e 3/5, possiamo dire che sono complementari? Giustificare la risposta. [No]

4. Lanciando due dadi non truccati qual è la probabilità di ottenere un numero pari o uno multiplo di 3? [2/3]
5. Lanciando due dadi non truccati qual è la probabilità di ottenere un punteggio le cui cifre sono una doppia dell'altra o un numero divisibile per 6? [1/6]
6. Dall'insieme dei primi 10 numeri primi scegliamo a caso un elemento. Qual è la probabilità che una delle sue cifre sia 3 o 5? Che una delle sue cifre sia il 3 o la sua cifra delle decine sia 1? [2/5; 3/5]
7. Determinare la probabilità che estraendo 1 carta da un mazzo di 52 carte da poker, essa sia una figura o una carta di quadri. [11/26]
8. Determinare la probabilità che estraendo 1 carta da un mazzo di 52 carte da poker, essa sia una carta di quadri o una carta il cui punteggio è superiore a 7. [31/52]
9. Determinare la probabilità che scegliendo a caso un numero fra i primi 50 numeri naturali esso sia pari o multiplo di 5. [3/5]
10. Determinare la probabilità che scegliendo a caso un numero fra i primi 100 numeri naturali esso sia pari o primo. [½]
11. Scegliamo a caso due distinti numeri dall'insieme dei primi dieci numeri primi, con quale probabilità la loro somma è 24? [1/15]
12. Da un mazzo di carte italiane da 40 estraiamo una carta, quali fra i seguenti eventi sono compatibili con l'evento la carta estratta è una figura di spade? A. la carta estratta è una figura. B. la carta estratta è una carta di denari. C. la carta estratta ha un valore numerico compreso tra 3 e 7. D. la carta estratta ha un valore numerico superiore a 5. E. la carta estratta è una donna. [A, D, E]
13. Lanciamo un dado a forma di icosaedro, solido regolare con 20 facce, quali fra i seguenti eventi sono compatibili con l'evento esce un punteggio divisibile per 4? A. esce un punteggio dispari. B. esce un punteggio primo. C. esce un punteggio multiplo di 3. D. esce un punteggio multiplo di 5. E. non esce un punteggio le cui cifre hanno per somma 3. [C, D, E]
14. In un campeggio vi sono 200 persone, 120 sono italiane, le altre straniere. 50 degli italiani e 60 degli stranieri sono donne. Scelto un ospite a caso fra ai presenti, con quale probabilità è una donna o non è di nazionalità italiana? Con quale probabilità è di nazionalità italiana o un maschio? [13/20; 7/10]
15. Abbiamo colorato alcune bandierine completamente verdi, altre completamente rosse e altre rosse e verdi. Se la probabilità di estrarre una bandiera completamente rossa è 0,48 e quella di estrarre una bandiera rossoverde è 0,24, con quale probabilità estraiamo una bandiera completamente verde? [0,18]

Lavoriamo insieme

In un'urna sono poste 3000 palline, numerate da 1 a 3000. Si eliminano tutte quelle che contengono i numeri da 1 a 137 e i numeri da 2735 a 3000. Si estrae una pallina; determinare la probabilità che essa abbia un numero che sia multiplo di 2 o multiplo di 3 o multiplo di 5.

Ricordiamo che stiamo calcolando la probabilità dell'unione di 3 eventi a due a due compatibili. Indichiamo i tre eventi con A, B e C. dobbiamo determinare

$$P(A) + P(B) + P(C) – P(A \cap B) – P(A \cap C) – P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Nell'urna sono rimaste le palline con numeri da 138 a 2734, che sono 2734 – 138 + 1 = 2597. Quante di queste sono pari? La metà più uno, poiché iniziamo e finiamo con un numero pari, cioè $P(A) = \frac{1299}{2597}$.

Quanti sono i multipli di 3? Il più piccolo è 138 = 3 · 46, il più grande è 2733 = 3 · 911. Quindi:

$$P(B) = \frac{911-46+1}{2597} = \frac{866}{2597}.$$

I multipli di 5 vanno da 140 = 5 · 28 a 2730 = 5 · 546, sono quindi 546 – 28 + 1 = 519. $P(C) = \frac{519}{2597}$.

Un numero multiplo di 2 e di 3 sarà multiplo di 6, pertanto consideriamo i numeri da 138 = 6 · 23 fino a 2730 = 6 · 455.

Allo stesso modo i multipli di 2 e 5 sono multipli di 10, vanno perciò da 140 = 10 · 14 a 2730 = 10 · 273.

Infine i multipli di 3 e 5 sono multipli di 15.

Consideriamo i numeri da 150 = 15 · 10 a 2730 = 15 · 182. Abbiamo perciò

$$P(A \cap B) = \frac{455-23+1}{2597} = \frac{433}{2597}; P(A \cap C) = \frac{273-14+1}{2597} = \frac{260}{2597}; P(B \cap C) = \frac{182-10+1}{2597} = \frac{173}{2597}$$

Concludiamo con i multipli di 2, 3 e 5, cioè con i multipli di $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, che vanno da $150 = 30 \cdot 5$ a $2730 = 30 \cdot 91$, e sono $91 - 5 + 1 = 87$. La probabilità cercata è allora pari a

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{1299 + 866 + 519 - 433 - 260 - 173 + 87}{2597} = \frac{1905}{2597} \approx 73\% .$$

Livello 2

16. Il 25% di ragazzi di una classe conosce il russo e il 40% il tedesco. Sapendo che la probabilità di scegliere uno studente a caso che parli russo o tedesco è 50%, quale percentuale di ragazzi parla entrambe le lingue? [15%]
17. Determinare la probabilità che, da un'urna contenente 2000 biglie numerate da 1 a 2000, se ne estragga una il cui numero verifichi una almeno delle seguenti tre proprietà: a) sia un numero divisibile per 5; b) sia un numero divisibile per 8 maggiore di 956; c) sia un numero divisibile per 7 compreso fra 547 e 1256. [581/2000]
18. Determinare la probabilità che, da un'urna contenente 1750 biglie numerate da 1 a 1750, se ne estragga una il cui numero verifichi una almeno delle seguenti tre proprietà: a) sia un numero divisibile per 4; b) sia un numero divisibile per 6 minore di 1324; c) sia un numero divisibile per 9 compreso fra 123 e 1507. [629/1750]
19. Determinare la probabilità che da un'urna contenente 2000 biglie numerate da 1 a 2000, se ne estragga una il cui numero verifichi una sola delle seguenti tre proprietà: a) sia un numero divisibile per 3; b) sia un numero divisibile per 6 maggiore di 831; c) sia un numero divisibile per 9 compreso fra 248 e 1487. [3/20]
20. Determinare la probabilità che scegliendo un numero di 3 cifre esso risulti divisibile per 3 o con la cifra delle unità uguale a 2 o con la cifra delle decine uguale a 7. [207/50]
21. I ragazzi di un triennio di una stessa sezione sono 75. Si sa che 48 di essi giocano a basket, 45 a calcio, 58 a tennis, 28 a basket e calcio, 37 a calcio e tennis, 40 a basket e tennis e 25 a tutti e tre gli sport. Qual è la probabilità che scegliendo a caso uno degli studenti, esso pratichi uno solo o nessuno dei tre sport? [4/15]
22. Lanciamo 3 dadi e i punteggi ottenuti li scriviamo uno accanto all'altro a formare un numero di 3 cifre. Qual è la probabilità che tale numero sia divisibile per 3 o un multiplo di 5? [89/216]
23. In un'urna sono poste 3000 palline, numerate da 1 a 3000. Si eliminano tutte quelle che contengono i numeri da 1 a 242 e i numeri da 2912 a 3000. Si estrae quindi una pallina, determinare la probabilità che essa abbia un numero che sia multiplo di uno almeno fra i numeri 4, 6 o 10. [979/2669]
24. In un'urna sono poste 3000 palline, numerate da 1 a 3000. Si eliminano tutte quelle che contengono i numeri da 123 a 314 e i numeri da 1241 a 2310. Si estrae quindi una pallina, determinare la probabilità che essa abbia un numero che sia multiplo di 8 o multiplo di 12 o multiplo di 18. [169/869]
25. Determinare la probabilità che da un'urna contenente 2000 biglie numerate se ne estragga una il cui numero verifichi esattamente due delle seguenti tre proprietà: sia un numero divisibile per 6; sia un numero divisibile per 7 minore di 856; sia un numero divisibile per 9 compreso fra 125 e 458. [9/500]
26. Siano date le funzioni $f : x \to -x$ e $g: x \to -2x + 1$, entrambe definite da M = {–1, –2, –3, –4, –5} a N = {3, 4, 5, 6, 7, 8}. Determinare la probabilità che a) scelto un elemento a caso in M esso appartenga al dominio di f o a quello di g; b) scelto un elemento a caso in N esso appartenga al codominio di f o a quello di g. [1; 2/3]

Livello 3

27. Stabilire la formula per calcolare $P(A \cup B \cup C \cup D)$.
[$P(A) + P(B) + P(C) + P(D) - P(A\cap B) - P(A\cap C) - P(A\cap D) - P(B\cap C) - P(B\cap D) - P(C\cap D) + P(A\cap B\cap C) + P(A\cap B\cap D) + P(A\cap C\cap D) + P(B\cap C\cap D) - P(A\cap B\cap C\cap D)$]
28. Determinare la probabilità che, scegliendo un numero di 3 cifre, esso risulti divisibile per 5 o con la cifra delle decine uguale a 1 o con la cifra delle centinaia uguale a 2 o con la somma delle cifre uguale a 8. [113/300]
29. Determinare la probabilità che estraendo il primo numero sulla ruota di Milano questo verifichi una almeno delle seguenti proprietà: a) sia multiplo di 3; b) abbia almeno una cifra uguale a 4; c) il prodotto delle sue cifre sia maggiore di 10; d) il suo quadrato sia minore di 50. [7/18]
30. Consideriamo gli insiemi A = {1, 2, 3}, B = {1, 4, 5, 6}, C = {2, 5} D = {0, 1, 3, 4} ed E = {0, 2, 3}. Determinare la probabilità che scegliendo due insiemi a caso la loro unione abbia sei elementi o la loro

intersezione sia vuota. [2/5]

31. Consideriamo gli insiemi $A = \{3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 4, 5, 6, 7\}$, $C = \{0, 1\}$ $D = \{1, 4, 6\}$. Determinare la probabilità che scegliendo due insiemi a caso la loro unione abbia sei elementi o la loro differenza simmetrica abbia tanti elementi quanto la loro unione o che la loro intersezione non sia vuota. [2/3]
32. Il cavaliere De Mere e il duca di Brianchon giocano a dadi, al cavaliere mancano due vittorie per aggiudicarsi l'intera posta, al duca bisognano tre vittorie. Qual è la probabilità che vinca il cavaliere? [11/16]

Lavoriamo insieme

Determiniamo la probabilità che, lanciando 7 monete non truccate, si ottengano esattamente 2 teste. Il numero dei casi possibili è $2^7 = 128$, tante quante le disposizioni con ripetizione dei due simboli T e C fino a un massimo di 7 volte.
I casi favorevoli sono invece tutte le permutazioni della "parola" TTCCCCC, cioè sono $\frac{7!}{2!\cdot 5!} = \frac{7\cdot \cancel{6}^{3}\cdot \cancel{5!}}{\cancel{2}\cdot \cancel{5!}} = 21$, quindi la probabilità cercata è 21/128.
Invece qual è la probabilità che si ottengano almeno 2 teste (cioè due teste o più di due)?
Per semplicità indichiamo con P_h la probabilità che escano esattamente h ($h = 0, 1, \ldots, 7$) teste. La probabilità cercata è una probabilità unione di eventi incompatibili ed è uguale a $P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7$.
Vi è un modo più semplice. Consiste nell'osservare che la detta probabilità può calcolarsi come l'evento complementare dell'evento *esce al più* 1 *testa*. Così la probabilità sarebbe semplicemente $1 - P_0 - P_1$
Per i casi favorevoli, nel caso di P_0, ossia nessuna testa, vi è un solo caso favorevole (CCCCCCC). Per P_1 invece ve ne sono 7 (il caso TCCCCCC e gli altri 6 che si ottengono da esso facendo "ruotare" il simbolo T nelle 7 diverse posizioni).
Infine la probabilità cercata è $1 - \frac{1}{2^7} - \frac{7}{2^7} = \frac{128-1-7}{128} = \frac{120}{128} = \frac{15}{16}$

Livello 3

33. Determinare la probabilità che lanciando 8 monete ci siano a) esattamente 3 teste; b) almeno 3 teste; c) al più 3 teste. [7/32; 219/256; 93/256]
34. Lanciamo 6 monete, se la probabilità di ottenere esattamente k teste è 15/64, quanto è k? [4]
35. Lanciamo n monete, se la probabilità di ottenere esattamente 6 teste è 99/512, quanto è n? [12]
36. Lanciamo 7 monete, se la probabilità di ottenere almeno k teste è 1/2, quanto è k? [4]

Per questi esercizi è opportuno l'uso di una calcolatrice o di un software tipo CAS

37. In un'urna vi sono 25 palline rosse e 15 di altri colori, estraiamo 8 palline a caso, con che probabilità sono a) tutte rosse; b) tutte non rosse; c) esattamente 5 di esse rosse. [115/8177; 1/11951; 11270/35853]
38. In un'urna vi sono 20 palline rosse e 10 di altri colori, estraiamo 5 palline a caso, con che probabilità sono a) la maggior parte rosse; b) la maggior parte non rosse. [6403/7917; 1514/7917]
39. In un'urna vi sono 100 palline numerate da 1 a 100. Estraiamo 5 palline a caso, con che probabilità sono a) tutte pari; b) almeno 2 pari; c) esattamente 2 pari. [1081/38412; 7864/9603;6125/19206]
40. In un'urna vi sono 2 palline rosse e 3 bianche, estraiamo 2 palline a caso, la probabilità di ottenerne solo una bianca è la stessa di ottenere solo la prima bianca? Se la risposta è negativa calcolare le due probabilità. [No; 3/5; 3/10]
41. Determinare la probabilità che lanciando 5 monete regolare si ottengano a) esattamente 3 teste; b) 3 teste nei primi 3 lanci e 2 croci negli altri due. [5/16; 1/32]

Estrazioni con e senza rigenerazione

Ottenere in un gioco onesto di dadi tre punteggi uguali, è un avvenimento naturale e così deve essere considerato; e anche se si ripete una seconda volta. Ma se accade una terza e quarta volta l'uomo prudente deve cominciare a sospettare.

Girolamo Cardano, De Vita Propria Liber.

Abbiamo parlato spesso di estrazioni di carte, di palline e così via; e abbiamo sempre considerato il fatto che gli oggetti estratti non venissero reinseriti di nuovo nell'urna, come per esempio si fa nel gioco del lotto. Vi sono però dei casi, come per esempio nel gioco della roulette, in cui invece ogni volta che si gioca si ripete sempre la stessa situazione, è come se estraessimo una pallina da un'urna che ne contiene 35 (da 0 a 34) e, dopo averne registrato il numero, la rimettessimo nell'urna per la successiva estrazione. Ovviamente ciò incide sul calcolo della probabilità di un evento che riguarda più estrazioni.

Esempio 19

Da un'urna contenente 20 palline bianche e 30 nere si estraggano due palline, qual è la probabilità che siano entrambe bianche?

La domanda posta non permette una sola soluzione, ciò appunto perché non abbiamo precisato se la prima pallina estratta debba essere solo annotata e poi rimessa nell'urna, concorrendo così anche alla seconda estrazione o debba essere invece eliminata dall'urna.

In ogni caso la probabilità che la prima pallina estratta sia bianca è 2/5, mentre per la seconda estrazione,

- se rimettiamo la pallina estratta per prima nell'urna anche la seconda pallina avrà probabilità 2/5 di essere bianca;
- se invece eliminiamo la pallina dall'urna, vi sono 49 palline da considerare, 19 delle quali sono bianche, quindi la probabilità è divenuta 19/49.

Poniamo alcune definizioni.

Definizione 11

Data l'estrazione di più di un oggetto da un'urna che contiene almeno due oggetti, diciamo che l'estrazione avviene **con rigenerazione** se ogni oggetto che si estrae viene registrato e poi rimesso nell'urna. Se invece gli oggetti estratti sono eliminati, diciamo che l'estrazione avviene **senza rigenerazione**.

Passiamo adesso alla risoluzione del problema.

Esempio 20

Dato che estraiamo due palline, stiamo considerando delle coppie (p_1, p_2), quindi dobbiamo contare quante sono le coppie diverse che possiamo estrarre dall'urna. Nel caso della rigenerazione abbiamo a che fare con disposizioni con ripetizione, quindi avremo un totale di 50^2 casi possibili e di 20^2 casi favorevoli. Nel caso della mancata rigenerazione invece abbiamo a che fare con disposizioni semplici, quindi avremo un totale di $50 \cdot 49$ casi possibili e di $20 \cdot 19$ casi favorevoli.

Quindi le probabilità cercate, nei diversi casi con e senza rigenerazione, sono $\frac{20 \cdot 20}{50 \cdot 50} = \frac{4}{25}$ e $\frac{20 \cdot 19}{50 \cdot 49} = \frac{38}{245}$.

Notiamo che la prima probabilità (6%) è leggermente superiore alla seconda (≈ 15.5 %).

Possiamo anche usare il calcolo combinatorio, scrivendo $\frac{D'_{20,2}}{D'_{50,2}}$ e $\frac{D_{20,2}}{D_{50,2}}$ rispettivamente.

Vale quindi il seguente risultato generale.

Teorema 4

La probabilità che estraendo k palline da un'urna che contiene n palline bianche e m nere (con $k \le n + m$), ve ne siano $h \le k$ bianche è $\frac{D'_{n,h} \cdot D'_{m,k-h}}{D'_{n+m,k}}$ o $\frac{D_{n,h} \cdot D_{m,k-h}}{D_{n+m,k}}$ a seconda che vi sia o no rigenerazione.

Vediamo un caso un po' più complesso.

Esempio 21

Supponiamo di voler considerare, sempre con i dati dell'esempio precedente, la probabilità di estrarre due palline di diverso colore.
Stavolta dobbiamo considerare, rimanendo inalterato il numero dei casi possibili, le coppie di elementi del tipo (b, n) oppure (n, b). Abbiamo quindi una probabilità unione di eventi incompatibili, pertanto dobbiamo sommare le singole probabilità. Quindi, nell'ipotesi di rigenerazione esse sono:

$$\frac{20 \cdot 30}{50^2} + \frac{30 \cdot 20}{50^2} = 2 \cdot \frac{6}{25} = \frac{12}{25}.$$

Invece, nel caso senza rigenerazione, sono: $\frac{20 \cdot 30}{50 \cdot 49} + \frac{30 \cdot 20}{50 \cdot 49} = 2 \cdot \frac{12}{49} = \frac{24}{49}$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Estraiamo 5 palline da un'urna che ne contiene 7 bianche e 3 nere. Qual è la probabilità che esattamente 3 delle palline estratte siano bianche?

Nell'ipotesi di estrazione con rigenerazione avremo: $\frac{D'_{7,3} \cdot D'_{3,2}}{D'_{10,5}} = \frac{7^3 \cdot 3^2}{10^5} = \frac{3087}{100000}$.

Senza rigenerazione invece è: $\frac{D_{7,3} \cdot D_{3,2}}{D_{10,5}} = \frac{\cancel{7 \cdot 6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}}{\cancel{10} \cdot \cancel{9}^{3} \cdot 8 \cdot \cancel{7 \cdot 6}} = \frac{1}{24}$

I precedenti valori devono essere moltiplicati per 10. Così le probabilità richieste valgono:
$\frac{3087}{10000} \approx 31\%$ e $\frac{5}{12} \approx 42\%$.

Negli esercizi seguenti se non è specificato altrimenti, devono considerarsi le diverse ipotesi con e senza rigenerazione.

Livello 1

1. Da un'urna con 23 palline, 15 bianche e 8 nere, si estraggono 2 palline. Determinare la probabilità che esse siano tutte nere. [64/529, 28/253]
2. Da un'urna con 40 palline, 25 bianche e 15 nere, si estraggono 3 palline. Determinare la probabilità che esse siano tutte bianche. [125/512, 115/494]
3. Da un'urna con 27 palline, 13 bianche e 14 nere, si estraggono 4 palline. Determinare la probabilità che esse siano tutte nere. [38416/531441, 77/1350]
4. Da un'urna con 15 palline, 3 bianche e 12 nere, si estraggono 5 palline. Determinare la probabilità che siano tutte bianche. [$1/5^5$; 0]
5. Da un'urna con 32 palline, 6 bianche e 26 nere, si estraggono 4 palline. Determinare la probabilità che fra di esse ve ne sia esattamente una bianca. [6591/16384, 390/899]
6. Da un'urna con 18 palline, 13 bianche e 5 nere, si estraggono 5 palline. Determinare la probabilità che fra di esse ve ne siano esattamente 3 bianche. [274625/944784, 715/2142]
7. Abbiamo 11 palline numerate da 1 a 11 all'interno di un'urna. Ne estraiamo 6 a caso senza reimmissione, con che probabilità la somma dei numeri ottenuti è dispari? [118/231]

Lavoriamo insieme

In un'urna vi sono 10 palline bianche e 15 rosse. Estraiamo quattro palline, con quale probabilità ve ne sono solo 2 bianche? Se le bianche sono le prime due la probabilità è $\frac{10^2 \cdot 15^2}{25^4} = \frac{36}{625}$ o $\frac{10 \cdot 9 \cdot 15 \cdot 14}{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22} = \frac{63}{1012}$ a seconda che vi sia o no rigenerazione. Però non è detto che le estratte bianche siano le prime due, quindi dobbiamo calcolare in quanti modi possono essere estratte le due bianche, il che, in ogni caso avviene in $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ modi, quindi le probabilità corrette sono: $\frac{36}{625} \cdot 6 = \frac{216}{625}$ o $\frac{63}{1012} \cdot 6 = \frac{189}{506}$.

Negli esercizi seguenti se non è specificato altrimenti, devono considerarsi le diverse ipotesi con e senza rigenerazione

Livello 2

8. Da un'urna con 5 palline bianche, 10 nere, 8 verdi e 6 gialle estraiamo con rigenerazione due palline. Con quale probabilità sono a) dello stesso colore; b) di diverso colore? [225/841; 616/841]
9. Da un'urna con 50 palline, 10 bianche, 20 rosse e 20 nere, si estraggono 3 palline. Determinare la probabilità che esse siano tutte dello stesso colore. [17/125, 6/49]
10. Da un'urna con 35 palline, 15 rosse, 7 verdi e 13 nere, si estraggono 3 palline. Determinare la probabilità che siano tutte di diverso colore. [234/1225, 39/560]
11. Da un'urna con 26 palline, 12 bianche e 14 nere, si estraggono 3 palline. Determinare la probabilità che fra di esse ve ne sia almeno una bianca. [1854/2197, 43/50]
12. In un'urna vi sono 12 biglie indistinguibili al tatto, metà bianche e metà nere. Se ne estraggono 3 senza rigenerazione. Determinare la probabilità che a) siano tutte bianche; b) siano tutte dello stesso colore; c) almeno 2 siano bianche; d) almeno 2 siano dello stesso colore. [1/11; 2/11; ½; 1]
13. In un'urna vi sono delle biglie indistinguibili al tatto, 3 sono bianche, 7 verdi e 4 rosse. Se ne estraggono 4 senza rigenerazione. Determinare la probabilità che a) siano tutte verdi; b) siano tutte dello stesso colore; c) esattamente 2 siano dello stesso colore. [5/13; 36/91; 876/91]
14. In un sacchetto sono messe 4 palline numerate, una riporta il numero 1, una il numero 6 e due il numero 9. Qual è la probabilità che, prendendo tre palline senza rigenerazione, il numero formato con i tre numeri estratti nell'ordine sia divisibile per 3? [¾]
15. In un'urna abbiamo 3 palline numerate da 1 a 3. Estraiamo le palline in successione, con che probabilità le palline vengono estratte nell'ordine 123? E nell'ordine 321? E in un ordine predefinito? [1/6; 1/6; 1/6]
16. Con riferimento al precedente quesito. Diciamo che si è verificato un accoppiamento se una delle palline viene estratta in un'estrazione che coincide con il numero che essa riporta, cioè la pallina numero 1 per prima o la numero 2 per seconda o la 3 per terza. Con che probabilità si verifica un solo accoppiamento? E solo 2 accoppiamenti? [½; 0]
17. Con riferimento al precedente quesito. Con che probabilità si verifica almeno un accoppiamento? E almeno due? [2/3; 1/6]
18. 20 pizze tutte con condimenti diversi devono essere consegnate a 20 diversi indirizzi, purtroppo a causa di un colpo di vento il fattorino perde il foglio con i corretti destinatari. Qual è la probabilità che esattamente 19 persone ricevano la pizza che hanno ordinato? [0]
19. Alessio ha comprato 1000 batterie per rivenderle. Nel deposito in cui le ha custodite vi è una infiltrazione di umidità, così 100 batterie vengono danneggiate. Alessio non si accorge di ciò pertanto mette in vendita ugualmente anche le batterie danneggiate, che risultano indistinguibili da quelle buone. Gianni va a comprare 4 batterie da Alessio per il suo giocattolo. Sapendo che questo giocattolo funziona solo se tutte le batterie sono perfettamente funzionanti, determinare la probabilità che il giocattolo di Gianni funzioni. [≈ 65%]

Lavoriamo insieme

Da un'urna con 10 palline bianche e 15 nere, estraiamo in successione tre palline, con quale probabilità almeno una delle tre palline è bianca? Dire almeno una bianca, significa che può accadere uno qualsiasi dei seguenti fatti: tutte bianche (una sola possibilità), due bianche e una rossa (tre possibilità a seconda che la pallina rossa venga estratta per prima, seconda o terza), una sola bianca e le altre rosse (Ancora tre possibilità). Tutti e sette i casi sono fra loro a due a due incompatibili, quindi dobbiamo sommare le sette probabilità. Tutte le tre palline bianche si ottengono con probabilità $\frac{10}{25}\cdot\frac{9}{24}\cdot\frac{8}{23}=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{8}{23}=\frac{6}{115}$, siamo infatti nell'ipotesi di non restituzione. I tre casi in cui si estraggono due palline bianche sono fra loro equiprobabili, basta quindi calcolare una probabilità e moltiplicare poi per 3. Perciò abbiamo: $3\cdot\frac{10}{25}\cdot\frac{9}{24}\cdot\frac{15}{23}=\frac{27}{92}$. Infine la probabilità di ottenere una sola pallina bianca è $3\cdot\frac{10}{25}\cdot\frac{15}{24}\cdot\frac{14}{23}=\frac{21}{46}$. Possiamo concludere che la probabilità di estrarre tre palline in modo che una almeno sia bianca è pari a $\frac{6}{115}+\frac{27}{92}+\frac{21}{46}=\frac{369}{460}\approx 80\%$.

Livello 3

20. Da un'urna con 20 palline bianche e 15 nere estraiamo tre palline. Con quale probabilità almeno una è nera? Considerare i casi con e senza restituzione. [279/343, 1081/1309]
21. Da un'urna con 24 palline bianche e 18 nere estraiamo quattro palline. Con quale probabilità al massimo due sono bianche? Considerare i casi con e senza restituzione. [513/2401, 2958/18655]
22. Da un'urna con 10 palline bianche, 12 rosse e 14 nere estraiamo tre palline. Con quale probabilità almeno una è bianca? Considerare i casi con e senza restituzione. [3635/5832, 227/357]
23. In un'urna vi sono delle biglie indistinguibili al tatto, 5 sono bianche, 8 verdi e 10 rosse. Se ne estraggono 3 senza rigenerazione. Determinare la probabilità che a) almeno 2 siano verdi; b) almeno 2 siano dello stesso colore. [68/253; 1371/1771]
24. Lanciamo una moneta regolare per 4 volte, con quale probabilità otteniamo a) almeno due volte testa; b) al massimo tre volte testa? [11/16; 15/16]
25. Da un mazzo di 40 carte da scopa estraiamo in successione 3 carte, con quale probabilità almeno una delle carte estratte è un asso? [421/2470]
26. Da un mazzo di 40 carte da scopa estraiamo in successione 4 carte, con quale probabilità almeno due delle carte estratte sono re? [2381/91390]
27. Da un mazzo di 52 carte da ramino estraiamo in successione 3 carte, con quale probabilità sono tutte dello stesso seme? Con quale almeno due sono di cuori? [22/425; 64/425]
28. Lanciamo un dado regolare a forma di cubo per tre volte di fila, con che probabilità otteniamo almeno un 6? [91/216]
29. Da un'urna con 12 palline bianche, 15 rosse e 18 nere estraiamo quattro palline con restituzione. Con quale probabilità ve ne sono a) almeno due dello stesso colore; b) esattamente due dello stesso colore; c) almeno due di colore diverso; d) esattamente due di colore diverso. [20627/16875; 14704/16875; 10952/16875; 35033/50625]
30. In un'urna immettiamo tre bigliettini su ciascuno dei quali è scritto uno dei numeri 1, 2, 3. Estraiamo per tre volte un biglietto con reimmissione registrando il valore scritto. Se la somma dei tre numeri estratti è 6, qual è la probabilità che abbiamo estratto sempre 2? [1/7]
31. In un'urna vi sono un totale di 50 palline di due diversi colori: bianco e nero. Effettuiamo l'estrazione senza rigenerazione di due palline. Se la probabilità di estrarre due palline bianche supera di 2/35 la probabilità di estrarre due palline di diverso colore, determinare quante sono le palline nere. Di quanto differiscono le due probabilità se l'estrazione avviene con rigenerazione? [15; 7/100]

Enigmi matematici

Consideriamo il cosiddetto paradosso dei compleanni. Si vuol sapere qual è il minimo numero di persone che dobbiamo riunire per avere una probabilità superiore al 50% che almeno due di essi compiano il compleanno nello stesso giorno.
Ricordiamo che un paradosso non è un evento impossibile, ma soltanto qualcosa che non ci aspettiamo, come per esempio scoprire che una bella donna di mestiere è camionista. Il problema è spesso frainteso, poiché la gente a cui viene posto di solito comincia a pensare quante persone conosce che compiono il compleanno nel loro stesso giorno. La richiesta non è questa, cioè quella di trovare due persone che compiono il compleanno in un dato giorno, ma in un giorno qualsiasi. Ovviamente se escludiamo il 29 febbraio come giorno, nel senso che anche quelli nati in questa data li consideriamo come nati il 28 febbraio, come banale applicazione del principio combinatorio dei cassetti, 366 persone danno la certezza, cioè probabilità 100%, che almeno

due di essi compiano il compleanno lo stesso giorno. Se inseriamo il 29 febbraio basta mettere 367 persone. Questo fatto suggerisce che per una probabilità superiore al 50% debbano esservi parecchie persone, in genere la risposta più gettonata è la metà di 366, cioè 183. Invece la risposta è un numero molto più piccolo: ecco quindi il paradosso. Il modo più semplice di risolvere il problema è quello di ricorrere all'evento complementare, ossia calcolare la probabilità dell'evento "non ci sono due persone che compiono il compleanno lo stesso giorno", quindi effettuiamo il complemento. Diciamo n il numero di persone presenti, con n ≥ 2. Interpretiamo il problema come quello di estrarre con ripetizione da un'urna con 365 palline numerate palline sempre di numero diverso. Se le palline sono 2, la probabilità che la seconda sia diversa dalla prima estratta è ovviamente 364/365, quindi la probabilità che due persone scelte a caso non abbiano lo stesso compleanno è 364/365, e la probabilità che lo abbiano è 1 – 364/365 ≈ 0,27%.
Se le persone sono 3, allora la probabilità diventa 1 – (364 · 363)/3652 ≈ 0,82%. Quindi in generale se le persone sono k la probabilità cercata è $1-\frac{364\cdot 363\cdot\ldots\cdot(365-k)}{365^k}$. Quindi si tratta di calcolare il primo valore di k per cui superiamo 0,5. Usando una calcolatrice o un CAS troviamo che ciò accade per n = 23, per cui la probabilità è circa 0,507. Quindi sono sufficienti 23 persone per avere il 50% di probabilità che due di essi compiano il compleanno lo stesso giorno.
Attività
Calcolare quante persone servono perché la probabilità sia rispettivamente almeno del 60%, 70%, 80%, 90%. [27; 30; 35; 41]

Probabilità condizionata

Facciamo ora una considerazione importante.
Nel caso di estrazione senza rigenerazione abbiamo calcolato il risultato della seconda estrazione supponendo che la prima estrazione fosse stata favorevole al nostro evento. Per esempio se estraiamo 2 palline da un'urna che ne contiene 50, 20 delle quali bianche, la probabilità che anche la seconda pallina estratta sia bianca dato che la prima lo era è 19/49, perché nell'urna sono rimaste 49 palline, 19 delle quali bianche. Quindi abbiamo aggiunto l'ipotesi che la prima estrazione abbia avuto successo.

Definizione 12

Dati due eventi *A* e *B*, diciamo probabilità di *A* **condizionata** dall'evento *B*, o anche **probabilità di *A* dato *B***, la probabilità che si verifichi *A* nell'ipotesi che si sia già verificato *B*.

Notazione 2

La probabilità di *A* dato *B* si indica con il simbolo $P(A|B)$.

Esempio 22

Estraiamo senza rigenerazione due palline da un'urna che ne contiene 10 bianche e 5 rosse. La probabilità di estrarre entrambe le palline bianche è $\frac{10\cdot 9}{15\cdot 14}=\frac{3}{7}\approx 43\%$.
Infatti il supporre che sia accaduto l'evento "prima pallina bianca", "condiziona" la seconda estrazione, lasciando nell'urna un totale di 14 palline, 9 delle quali bianche.

Modifichiamo l'esempio precedente.

Esempio 23

Con riferimento all'esempio precedente, supponiamo che una delle palline bianche contenga un piccolo difetto che la fa riconoscere facilmente al tatto, pertanto essa potrà essere estratta senz'altro per prima; varierà la probabilità precedente di estrarre entrambe le palline di colore bianco?
Certamente sì, infatti, la probabilità che la prima pallina estratta sia bianca è adesso divenuta 1, dato che

siamo in grado di riconoscerla al tatto, mentre la probabilità che la seconda estratta sia bianca, è rimasta 9/14, e adesso misura la probabilità dell'intero evento. Quindi la probabilità è passata da uno scarso 43% a un più consistente 64%; il problema si è ridotto a quello di determinare la probabilità di estrarre una pallina bianca, da un'urna che contiene 9 palline bianche e 5 nere.

Vediamo ancora un esempio.

Esempio 24

Riprendiamo l'esempio della casalinga e delle uova marce. Supponiamo adesso che la massaia riconosca un uovo come buono, perché è l'unico sul cui guscio è leggibile la data di scadenza o perché ha un colore diverso dagli altri o per altri motivi analoghi. Con questa condizione, la probabilità, com'era logico aspettarsi, è maggiore ed è precisamente 3/5.

Osserviamo che negli esempi precedenti la *probabilità di B dato A*, si poteva calcolare modificando l'evento, ossia prendendo come casi possibili quelli di A e come casi favorevoli quelli di B che stanno anche in A. Ciò equivale a considerare come numero dei casi favorevoli la cardinalità dell'evento intersezione degli eventi A e B e come numero degli eventi possibili la cardinalità di A.
Così nell'esempio 23., indicando con b_1, la pallina bianca riconoscibile al tatto, l'intersezione fra gli eventi: prima estratta b_1, cioè $A = \{(b_1, b_2), (b_1, b_3), \ldots, (b_1, r_1), (b_1, r_2), \ldots, (b_1, r_5)\}$ e seconda estratta bianca diversa da b_1, cioè $B = \{(b_1, b_2), \ldots, (b_1, b_{10}), (b_2, b_3), \ldots, (b_2, b_{10}), \ldots, (r_5, b_2), (r_5, b_3), \ldots, (r_5, b_{10})\}$era proprio l'insieme $A \cap B = \{(b_1, b_2), (b_1, b_3), \ldots, (b_1, b_{10})\}$, che ha appunto 9 elementi. Il numero dei casi possibili invece coincide con il numero di casi in cui si verifica il primo evento, quello dato, cioè $A = \{(b_1, b_2), (b_1, b_3), \ldots, (b_1, b_{10}), (b_1, r_1), \ldots, (b_1, r_5)\}$, che ha 14 elementi.
Possiamo quindi dire che vale il seguente risultato.

Teorema 5

Si ha $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Consideriamo il cosiddetto paradosso dei tre prigionieri. Due di tre prigionieri, indicati con A, B e C, sono stati condannati a morte. Qual è la probabilità che A non sia stato condannato a morte?
I casi possibili coincidono con le combinazioni di 3 oggetti (i prigionieri) di classe 2 (i condannati), cioè $C_{3,2} = 3$. I casi favorevoli sono solo 1, quello in cui sono condannati B e C. Pertanto la probabilità è 1/3. Adesso abbiamo il paradosso: cosa cambia per la probabilità precedente se sappiamo che B è stato condannato a morte? Apparentemente non dovrebbe cambiare nulla, dato che in ogni caso A sa già che uno degli altri due è sicuramente condannato a morte, in realtà invece cambia perché adesso sa chi dei due è stato condannato, quindi le sue informazioni sono aumentate, i casi possibili sono diminuiti, solo AB e BC possono accadere, quindi la probabilità, non essendo variati i casi favorevoli (BC), è aumentata al 50%.

***Livello* 1**

1. In una classe vi sono 15 maschi e 12 femmine, solo i maschi giocano a calcio. Qual è la probabilità che un maschio scelto a caso nella classe giochi a calcio? [1]
2. Se A è un sottoevento di B, quanto vale P(B|A)? Giustificare la risposta. [1]
3. Elisabetta ha due figli, con quale probabilità sono entrambi maschi? E se si sa che non sono entrambe femmine? [1/4; 1/3]
4. Lanciamo per 3 volte una moneta, con che probabilità otteniamo sempre la stessa faccia? E se sappiamo che la prima volta abbiamo ottenuto testa? [¼; ¼]
5. Lanciamo per 3 volte un dado regolare, con che probabilità otteniamo sempre lo stesso punteggio? E

se sappiamo che la prima volta abbiamo ottenuto un punteggio pari? [1/36; 1/36]

6. Dal sacchetto dei numeri della tombola estraiamo tre numeri senza rigenerazione, con che probabilità otteniamo tre numeri pari? E se sappiamo che la prima volta abbiamo ottenuto un punteggio minore di 20? [43/356; 387/3382]
7. Quattro carte sono disposte in fila una accanto all'altra con la faccia nascosta. Due delle carte sono di cuori, le altre di picche. Qual è la probabilità che due carte dello stesso seme siano messe una accanto all'altra? Quanto vale la precedente probabilità se sappiamo che la seconda carta è di cuori? [2/3; 2/3]
8. Vengono lanciate tre monete bicolori, da una parte bianche e dall'altra nere, determinare la probabilità che tutte e tre abbiano la faccia nera rivolta verso l'alto. E se sappiamo che una almeno delle tre cade con la faccia nera rivolta verso l'alto? [1/8; 1/7]
9. Determinare la probabilità di ottenere esattamente 3 volte testa, lanciando 5 monete regolari. Quanto diventa la probabilità precedente nell'ipotesi di sapere che si ottiene testa nei primi due lanci? E se invece sappiamo che nei primi tre lanci si sono ottenute esattamente due teste? [5/16; 1/4; 3/8]
10. Il fornaio ha dimenticato di togliere 50 panini del giorno precedente, prima di inserirne 250 freschi. Qual è la probabilità che il primo cliente acquisti 3 panini tutti freschi? E se sappiamo che il primo panino è certamente fresco? [≈ 58%; ≈ 69%]
11. Con riferimento al problema precedente qual è la probabilità che il primo cliente acquisti solo 2 panini freschi? E se il primo panino è certamente fresco? E se il primo panino è certamente di ieri? [≈ 35%; ≈ 28%; ≈ 70%]
12. In un'urna c'è una pallina che sappiamo essere bianca o nera, ma non siamo certi quale sia il suo colore effettivo. Inseriamo nell'urna una pallina bianca. A questo punto estraiamo una pallina e questa è bianca, con quale probabilità la pallina rimasta è bianca? [2/3]
13. Da un mazzo formato da 3 carte nere e 4 bianche estraiamo due carte; con quale probabilità le due carte sono nere, dato che la prima lo è certamente? [1/3]
14. Lanciamo tre dadi; con quale probabilità otteniamo il punteggio 12, dato che il primo dado è truccato e permette solo l'uscita dei punteggi 4 e 5 con uguale probabilità? [5/18]

Livello 2

15. Vi sono 4 urne: la prima contiene 7 palline verdi e 4 rosse, la seconda 4 verdi e 2 rosse, la terza 2 verdi e 5 rosse, l'ultima 1 verde e 2 rosse. Estraendo da ciascuna urna una pallina qual è la probabilità che le palline estratte siano tutte verdi? Quale la probabilità che la seconda pallina estratta sia verde, dato che delle 4 palline estratte, 3 sono verdi? Qual è la probabilità che 2 siano verdi, dato che la quarta estratta è verde? [4/99; 142/693; 100/231]
16. Disponiamo 8 carte, quattro rosse e quattro nere, in fila. Determinare la probabilità che a) vi siano almeno due carte dello stesso colore disposte una accanto all'altra; b) tutte le carte rosse siano una accanto all'altra. [1/35; 1/14]
17. Risolvere l'esercizio precedente supponendo che due carte nere siano riconoscibili dall'esterno, quindi si sa che sono state disposte al primo e ultimo posto. [1/15; 1/5]
18. In una scatola immettiamo delle monete secondo la seguente regola. Lanciamo una moneta in aria, se esce testa inseriamo 1 euro nella scatola, se esce croce mettiamo 5 euro. Determinare la probabilità che dopo quattro lanci, la scatola contenga a) 12 euro; b) 20 euro; c) 6 euro; d) 16 euro sapendo che nel primo lancio è uscita testa; e) 12 euro sapendo che nei due lanci dispari la moneta non ha avuto lo stesso esito. [3/8; 1/6; 0; 1/8; ½]
19. Lanciamo due dadi regolari a forma di cubo. Determinare la probabilità che si ottenga 7 dato che a) si ottiene un punteggio dispari; b) si ottiene un punteggio superiore a 6; c) il primo dado mostra un punteggio dispari; d) il secondo dado mostra un punteggio pari; e) il punteggio di uno dei due dadi è dispari; f) i dadi hanno lo stesso punteggio; g) i dadi hanno diversi punteggi. [3/8; 2/7; 1/6; 1/6; 2/9; 0; 1/5]
20. Di due eventi si sa che $P(A) = 1/3$, $P(B|A) = ½$. Possiamo dire che gli eventi A e B sono incompatibili? Giustificare la risposta. [No]
21. Sul tavolo vi sono tre carte di seme rosso e una di seme nero, Matteo sceglie a caso una carta e la tiene, Dorotea dopo di lui ne sceglie un'altra. Con quale probabilità Dorotea ha scelto la carta nera? [1/5]
22. Un giocatore di basket ha una media di successo nei tiri liberi di 0,75, considerando tale valore come la sua probabilità di fare canestro in un tiro libero, si determini con quale probabilità di fare canestro con un tiro libero nell'ipotesi che se dovesse sbagliare il primo avrebbe la possibilità di tirarne un altro? [3/16]

Livello 3

23. Dimostrare che $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$.
24. Dimostrare che $P(A|B) + P(A^C|B) = 1$. (A^C è l'evento complementare di A).
25. Dimostrare o mostrare un controesempio del fatto che non è vero che $P(A|B) + P(A|B^C) = 1$.
26. Dimostrare o mostrare un controesempio del fatto che non è vero che $P(A|B) + P(A^C|B^C) = 1$.
27. Lanciamo un dado regolare a forma di cubo per tre volte, determinare le diverse probabilità che la prima volta che otteniamo 6 è al primo, secondo, terzo lancio. [1/6; 5/36; 25/216]
28. Con riferimento al problema precedente determinare la probabilità che il 6 si ottenga per la prima volta al n – esimo lancio. [$5^{n-1}/6^n$]

Enigmi matematici

Consideriamo il seguente problema noto sotto il nome di paradosso dell'asso a sorpresa, enunciato dal matematico inglese Henry Whitehead nel 1939. Supponiamo di avere quattro carte, l'asso di picche, l'asso di cuori e due altre carte. Se si prendono due carte contemporaneamente, qual è la probabilità di avere entrambi gli assi?
Indichiamo con AC l'asso di cuori, con AP quello di picche, con C1 e C2 le altre due carte. I casi possibili, tutti ugualmente possibili, sono i seguenti 6: (AC, AP), (AC, C1), (AC, C2), (AP, C1), (AP, C2), (C1, C2)
Non abbiamo considerato gli altri sei casi che si ottengono dai precedenti scambiando di posto le carte, perché esse vengono prese contemporaneamente. Vi è un solo caso favorevole: (AP, AC). Quindi la probabilità cercata è 1/6.
Supponiamo ora che per qualche motivo uno degli assi, non sappiamo però quale, sia riconoscibile e venga perciò pescato certamente. Qual è allora la probabilità che anche la seconda carta estratta sia un asso?. Il caso favorevole è sempre uno, mentre quelli possibili sono diventati 5, dato che non potrà più capitare il caso (C1, C2); quindi la probabilità è adesso 1/5.
Adesso abbiamo il fatto paradossale. Supponiamo che la carta riconoscibile sia non un asso qualsiasi ma quello di cuori; la probabilità che sia estratto anche l'altro asso è variata? Intuitivamente pensiamo di no, invece i casi possibili sono divenuti 3, cioè i seguenti: (AC, C1), (AC, C2), (AC, AP). Quindi la probabilità adesso vale 1/3.

Eventi dipendenti ed eventi indipendenti

Ci siamo fatti l'idea che l'accadere di un evento condizioni sempre il valore numerico della probabilità di un altro evento a cui esso è legato; ma se abbiamo svolto gli esercizi in modo consapevole abbiamo visto che ciò non è sempre vero.

Esempio 25

Due carte rosse e due nere sono mescolate e disposte in una fila. Vogliamo determinare la probabilità che le carte siano disposte in modo che quelle di uguale colore siano fra loro adiacenti.
Indichiamo con R le carte rosse e con N quelle nere, senza bisogno di distinguerle fra di loro. I casi favorevoli al nostro evento sono evidentemente i seguenti due: RRNN e NNRR.
I casi possibili sono dati dal modo di disporre due delle carte di uguale colore nelle quattro posizioni disponibili, sono quindi i seguenti 6: RRNN, RNRN, RNNR, NRRN, NRNR, NNRR.
Infine la probabilità richiesta vale 2/6 = 1/3.
Adesso supponiamo di sapere che la carta messa sul tavolo per seconda è nera, dato che il suo bordo è segnato. Quanto vale adesso la probabilità?
I casi favorevoli sono adesso rappresentati solo da NNRR, ma anche i casi possibili sono diminuiti, diventando 3, dato che i casi in cui la seconda carta non è nera non possono più accadere. Quindi i casi possibili sono: RNRN, RNNR, NNRR. Quindi la probabilità è rimasta 1/3.

Nell'esempio precedente abbiamo visto che la conoscenza del fatto che una carta era nera non ha influenzato il valore della probabilità; in quel caso è accaduto $P(B|A) = P(B)$.
Ciò significa che l'evento A non ha influito sull'accadere dell'evento B, infatti ne ha lasciata invariata la probabilità.

Definizione 13

Diciamo che l'evento B è **stocasticamente indipendente** dall'evento A se $P(B|A) = P(B)$.

Abbiamo usato l'aggettivo stocastico (che deriva dal greco stochastikós, "congetturale") per distinguere il concetto di indipendenza per così dire *quotidiano* secondo il quale due eventi sono indipendenti se non hanno nulla in comune, da questo legato al calcolo delle probabilità.
Passiamo a un'altra questione.
Se B è indipendente da A, possiamo dire che anche A è indipendente da B?
La risposta è fornita dal seguente teorema.

Teorema 6

Si ha: $P(B|A) = P(B) \Rightarrow P(A|B) = P(A)$

Dimostrazione

Si ha: $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B \mid A) \cdot P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A) \Rightarrow P(A|B) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(B)} = \dfrac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$

Dalla dimostrazione precedente deriviamo un'altra definizione di eventi indipendenti.

Definizione 14

Due eventi A e B appartenenti allo stesso spazio degli eventi vengono detti **stocasticamente indipendenti** se $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Vediamo qualche esempio.

Esempio 26

Consideriamo gli eventi estrazione della prima pallina bianca ed estrazione della seconda pallina bianca da un'urna con 20 palline bianche e 10 nere. Essi sono fra loro indipendenti se l'estrazione avviene con rigenerazione. Infatti in una estrazione con rigenerazione la probabilità che la prima pallina estratta sia bianca è 2/5, così come è anche la probabilità che la seconda pallina estratta sia bianca. Pertanto, come abbiamo ipotizzato, gli eventi sono indipendenti, la probabilità che entrambe siano bianche è, $2/5 \cdot 2/5 = 4/25$.

Non dobbiamo confondere l'indipendenza di un evento da un altro con la loro incompatibilità, con il fatto cioè che i due eventi non possano accadere contemporaneamente.

Esempio 27

Lanciamo due monete e consideriamo gli eventi "uscita di una sola testa" e "uscita di entrambe le teste". I due eventi sono evidentemente incompatibili, non sono però fra loro indipendenti. Infatti l'evento intersezione dei due è evidentemente l'evento nullo, quindi vale zero la sua probabilità, mentre nessuno dei due eventi ha probabilità zero di accadere, pertanto non è verificata la definizione 14, che caratterizza gli eventi indipendenti.

Possiamo definire indipendenti due eventi quando il verificarsi dell'uno non influisce sul verificarsi dell'altro.

Esempio 28

Vediamo alcuni casi di eventi indipendenti e dipendenti.

- Se lancio una moneta e un dado, gli esiti dei due eventi sono indipendenti, infatti il sapere che è uscito testa o croce non ha alcuna influenza sull'uscita del punteggio del dado.
- Nell'estrazione del numero del biglietto vincente di una lotteria i cui numeri sono formati da 6 cifre e in cui ogni cifra viene estratta da una diversa urna, l'estrazione di ciascuna cifra è indipendente dall'uscita di tutte le altre.
- Nell'estrazione dei cinque numeri di una stessa ruota nel gioco del lotto, l'estrazione di ogni numero invece influenza l'uscita del successivo. Se il primo estratto è 12 nessuno degli altri quattro può essere 12, quindi i quattro eventi successivi alla prima estrazione sono tutti dipendenti dagli eventi che li hanno preceduti.
- In un campionato di calcio gli eventi "vince la squadra A" e "vince la squadra B" sono indipendenti se le squadre non giocano fra di loro. Se giocano fra di loro invece gli eventi sono dipendenti, infatti la vincita di A influirà sulla vincita di B che non potrà accadere.

Nella seguente definizione generalizziamo il concetto di eventi indipendenti, nel caso in cui gli eventi siano più di due.

Definizione 15

n eventi: $A_1, A_2, \ldots, A_n$ appartenenti allo stesso spazio degli eventi, si dicono **fra di loro indipendenti** se, per ogni possibile gruppo di due, di tre, di quattro, ..., di n eventi considerati, si ha sempre

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_i) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_i), \text{ con } 2 \le i \le n.$$

In particolare il problema dei successi è importante negli eventi ripetuti come il lancio ripetuto di una moneta o di un dado.

Definizione 16

Dato un evento diciamo **prove ripetute indipendenti di Bernoulli** il dato evento ripetuto n volte del quale si vuol determinare la probabilità che nelle n ripetizioni nell'evento si ottengano esattamente h successi.

Esempio 29

Il lancio ripetuto di una moneta o di un dado è un classico esempio di prove ripetute indipendenti di Bernoulli.

Vi è un interessante risultato relativo alle prove di Bernoulli.

Teorema 7

Dato un evento che ha probabilità p di accadere e $(1 - p)$ di non accadere, la probabilità che in n prove ripetute indipendenti l'evento si verifichi esattamente $k \le n$ volte è $\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$.

Dimostrazione

Se effettuiamo un solo esperimento la probabilità che si verifichi l'evento o volte, cioè non si verifichi è ovviamente $(1 - p)$; che si verifichi una volta è p. Quindi la formula è vera.

Se effettuiamo due esperimenti la probabilità che si verifichi 0 volte è $(1 - p)^2$, poiché gli eventi sono indipendenti; che si verifichi una volta è invece $2 \cdot p \cdot (1 - p)$ poiché l'evento può verificarsi la prima o la seconda volta; che si verifichi entrambe le volte è p^2.

Ma allora in generale la probabilità che si verifichi esattamente le prime $k \le n$ volte è $p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$, per trovare la probabilità che si verifichi invece k volte qualsiasi, dobbiamo moltiplicare per tutti i modi in cui possono verificarsi i k casi. Cioè nel modo di scegliere k elementi non ordinati da n, che sono appunto $\binom{n}{k}$.

Esempio 30

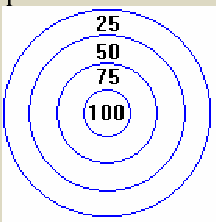
- La probabilità di ottenere esattamente 5 volte testa lanciando una moneta regolare 12 volte è

$\binom{12}{5} \cdot 0,5^5 \cdot 0,5^7 = \binom{12}{5} \cdot 0,5^{12} \approx 19,3\%$.

- La probabilità di ottenere esattamente 4 volte il punteggio 3 lanciando un dado regolare 6 volte è $\binom{6}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \approx 0,8\%$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Il bersaglio in figura ha un raggio di 7 cm, le circonferenze hanno tutte lo stesso centro e il diametro che diminuisce di 2 *cm* passando da una a quella di diametro immediatamente inferiore, la zona centrale ha un diametro di 1 *cm*. 

Se una freccetta è lanciata a caso è certo che colpirà il bersaglio. Qual è la probabilità di totalizzare 125 punti in due lanci successivi? 125 punti possono totalizzarsi sommando i punteggi 50 + 75, oppure 25 + 100. La probabilità che una freccetta colpisca i vari settori, da quello più esterno a quello più interno, è rispettivamente pari a: $\frac{49-25}{49} = \frac{24}{49}; \frac{25-9}{49} = \frac{16}{49}; \frac{9-1}{49} = \frac{8}{49}; \frac{1}{49}$. I due lanci sono indipendenti e i due eventi (50+75 e 25+100) sono incompatibili, quindi la probabilità cercata sarà

$2 \cdot (P[(50, 75)] + P[(25, 100)]) = 2 \cdot (P(50) \cdot P(75) + P(25) \cdot P(100)) = 2 \cdot \left(\frac{24}{49} \cdot \frac{16}{49} + \frac{8}{49} \cdot \frac{1}{49}\right) = \frac{16}{49} \approx 32\%$.

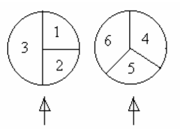
Livello 1

1. Qual è la probabilità che lanciando tre dadi non truccati non mostrino tutti e tre lo stesso numero? E la probabilità che mostrino tre numeri diversi? [35/36; 5/9]
2. Determinare la probabilità che lanciando un dado ed estraendo una pallina da un'urna che ne contiene dodici numerate da 1 a 12, si ottengano in entrambi i casi due numeri primi. [5/24]
3. Qual è la probabilità che nelle estrazioni del lotto in una certa ruota i primi due estratti siano 1 e 2, nell'ordine? E se non conta l'ordine? [1/8010; 1/4005]
4. Se alla roulette è uscito il rosso per 7 volte di fila, all'ottava giocata la probabilità che esca nero quanto vale? [18/37]
5. Scegliamo a caso due carte da un mazzo di carte italiane da 40, l'evento la prima carta estratta è un asso e l'evento la seconda carta estratta è un re sono indipendenti? [No]
6. Scegliamo una carta da un mazzo di carte italiane da 40, la registriamo e poi la rimettiamo nel mazzo. Con che probabilità ripetendo 4 volte l'operazione otteniamo sempre un asso? [0,01%]
7. Con riferimento al precedente esercizio, se estraiamo 4 carte successivamente, senza reimmetterle, quanto vale la probabilità? [≈ 0,001%]
8. Qual è la probabilità che scegliendo a caso 4 carte da un mazzo di carte italiane da 40 siano tutte di bastoni? E con reimmissione? [≈ 0,2%; 0,01%]
9. Qual è la probabilità che scegliendo a caso 3 carte da un mazzo di carte da ramino da 52 siano tutte rosse? E con reimmissione? [≈ 1,3%; 1/8]
10. Con che probabilità in tre giocate successive alla roulette esce un numero minore di 10? [0,1%]

Lavoriamo insieme

Con che probabilità alla roulette esce per 5 volte di fila un numero rosso? Alla roulette di solito vi sono 36 numeri, 18 rossi (i dispari) e 18 neri (i pari) e lo zero. In alcune versioni vi è anche il doppio zero, ovviamente né 0 né 00 sono considerati rosso o nero. Ogni lancio della pallina può considerarsi come una prova ripetuta indipendente bernoulliana, in cui la probabilità che esca rosso è 18/37 (o 18/38), pertanto la probabilità che su 5 lanci di pallina tutte e 5 le volte si ottenga rosso è $\binom{5}{5}\cdot\left(\frac{18}{37}\right)^5\cdot\left(\frac{19}{37}\right)^0 \approx 2,7\%$

Livello 2

11. Con riferimento al bersaglio del box lavoriamo insieme, qual è la probabilità, gettando tre freccette, di totalizzare 150 punti? [≈ 6,6%]
12. Qual è la probabilità di ottenere esattamente 4 volte testa, lanciando per 6 volte una moneta? [15/64]
13. Con riferimento all'esercizio precedente, qual è la probabilità di avere almeno 4 volte testa. [11/32]
14. Determinare la probabilità che lanciando 5 volte un dado regolare a forma di cubo, si ottenga esattamente 4 volte il punteggio 1. [25/7776]
15. Determinare la probabilità che lanciando 4 volte un dado regolare a forma di cubo, si ottenga esattamente 3 volte un punteggio inferiore a 3. [20/81]
16. Determinare la probabilità che lanciando per 10 volte una moneta regolare si ottengano più teste che croci. [193/512]
17. Lanciamo una moneta regolare per 3 volte, con quale probabilità otteniamo due volte testa e una volta croce? [3/8]
18. Lanciamo una moneta regolare per 5 volte, con quale probabilità otteniamo sempre testa? Con quale sempre croce? [1/32; 1/32]
19. Lanciamo un dado regolare a forma di cubo per tre volte di fila, con che probabilità otteniamo sempre 6? Con quale probabilità otteniamo sempre lo stesso numero? [1/216; 1/36]
20. Gianni lancia 2 monete regolari, Luca ne lancia tre. Qual è la probabilità che Luca ottenga più teste di *A*? [½]
21. In una certa nazione si è stabilito che è più probabile avere figlie femmine che maschi, in particolare la probabilità che un neonato sia femmina è del 53%, Con che probabilità una famiglia con due bambini abbia a) 2 maschi; b) 2 femmine; c) 1 femmina e 1 maschio. [≈ 22,1%; ≈ 28,1%; ≈ 49,8%]
22. Con riferimento al precedente quesito, se la probabilità che una famiglia con 2 bambini abbia un maschio e una femmina è del 49,7%, ed è sempre più probabile che un neonato sia femmina, con che probabilità un neonato è maschio? [≈ 46%]
23. Con riferimento ai precedenti quesiti, se la probabilità di avere una femmina è del 55%,con che probabilità una famiglia con 3 bambini ha: a) 3 maschi; b) 2 maschi e 1 femmina; c) 2 femmine e 1 maschio; d) 3 femmine. [≈ 9,1%; ≈ 33,4%; ≈ 40,8%; ≈ 16,6%]
24. Con riferimento al precedente quesito, con che probabilità la famiglia ha 2 maschi e 1 femmina se il primogenito è maschio? E se invece è femmina? [49,5%; 20,25%]
25. I due dischi in figura vengono ruotati 

e i numeri che si fermano sotto la freccia vengono sommati. Un dispositivo evita che la freccia si fermi esattamente al confine fra due zone. Qual è la probabilità che tale somma sia un numero pari? (nella prima figura le due parti piccole sono uguali fra loro e metà della grande; nella seconda le tre parti sono uguali). [5/12]

Livello 3

26. Provare che $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P[C|(A\cap B)]$.
27. Provare che $P[(A\cup B)|C] = P(A|C) + P(B|C) - P[(A\cap B)|C]$.
28. Il proprietario di una multisala ha stabilito che nell'ultimo anno il 5% degli spettatori che hanno comprato il biglietto non ha poi assistito allo spettacolo. Un giorno allora il proprietario vende 102 biglietti per una sala da 100, con che probabilità gli spettatori che effettivamente vanno al cinema trovano posto seduti? [≈ 95,6%]
29. Se il proprietario del quesito precedente si fosse accontentato di una probabilità del 90%, quanti biglietti avrebbe potuto vendere? [Sempre 102]
30. Sempre con riferimento al quesito del cinema, se vendendo 102 biglietti la probabilità sarebbe stata di circa l'81,4%, quanta percentuale di spettatori non si era presentata l'anno precedente? [≈ 3%]
31. Anna dice che domani uscirà con Paolo con il 55% di probabilità se piove e il 30% se non piove. Le previsioni del tempo danno una probabilità del 40% che domani piova. Qual è la probabilità che do-

mani Anna esca con Paolo? [40%]

32. Una moneta ha un difetto di fabbricazione che fa sì che la sua probabilità di ottenere testa lanciandola è di 2/3. Determinare la probabilità che lanciando 50 volte la moneta, si ottengano un numero pari di teste. [50%]
33. In un'urna sono poste 50 palline verdi e 50 blu, indistinguibili al tatto. Prendiamo due palline a caso, se sono entrambe verdi le mettiamo in un contenitore A, se entrambe blu in un contenitore B, diversamente in un contenitore C. Dopo avere estratto in questo modo tutte le palline dall'urna, con che probabilità in A e in B vi saranno lo stesso numero di palline? [1]

Teorema di Bayes

Concludiamo considerando il problema dell'estrazione di un campione da un altro campione.

Esempio 31

In una fabbrica di piatti di ceramica vi sono 2 forni in funzione. Considerando quel che è successo negli anni precedenti, si è calcolato che in media il 2% dei piatti prodotti giornalmente dal primo forno e il 3% di quelli prodotti dall'altro risultano difettosi. Supponiamo che ogni forno produca lo stesso numero di piatti e che alla fine della giornata essi vengano messi nello stesso magazzino risultando così indistinguibili. Qual è la probabilità che scegliendo a caso uno dei piatti dal magazzino, fra quelli prodotti in uno stesso giorno, questo risulti difettoso?
Per semplificare i conti non consideriamo espressioni letterali, ma supponiamo che nel magazzino vi siano 200 piatti, 100 dei quali prodotti dal primo forno e i rimanenti 100 dall'altro. Questa ipotesi non influenza il risultato, ma semplifica i calcoli.
Da un punto di vista frequentista, vuol dire che 2 + 3 = 5 piatti risulteranno difettosi.
Pertanto la probabilità richiesta è $\frac{5}{200} = \frac{1}{40} = 2.5\%$. Adesso vogliamo sapere invece qual è la probabilità che il piatto scelto sia difettoso e sia stato cotto nel primo forno. In questo caso i piatti difettosi prodotti dal primo forno sono solo 2, pertanto la probabilità cercata è $\frac{2}{200} = \frac{1}{100} = 1\%$.

Rendiamo un po' più complesso l'esempio precedente.

Esempio 32

Con riferimento all'esercizio precedente, supponiamo che i forni in funzione siano 3, ciascuno dei quali fornisce rispettivamente il 25%, il 30% e il 45% della produzione giornaliera. Indagini statistiche hanno appurato che la percentuale di piatti difettosi prodotti giornalmente da ciascun forno è rispettivamente del 2%, 4% e 1%. Supponiamo di prendere un piatto a caso fra tutti quelli prodotti in un certo giorno, se tale piatto è difettoso quali sono le probabilità che esso sia stato prodotto dal primo forno?
Per semplificare i conti supponiamo che ciascun forno produca rispettivamente e quotidianamente 2500, 3000 e 4500 piatti. Quindi di questi vi saranno rispettivamente 50, 120 e 45 piatti difettosi.
Perciò la probabilità che il piatto sia difettoso e prodotto dal primo forno sarà $\frac{50}{50+120+45} = \frac{50}{215} \approx 0.232$.

Adesso vediamo di interpretare in modo diverso il precedente problema.

Esempio 33

Indichiamo con A l'evento "piatto scelto difettoso", con B_1 l'evento "piatto prodotto dal primo forno", con B_2 l'evento "piatto prodotto dal secondo forno" e con B_3 l'evento "piatto prodotto dal terzo forno". Quel che vogliamo determinare praticamente è la probabilità $P(B_1|A)$, cioè la probabilità che il piatto sia stato prodotto dal primo forno, dato che è difettoso. Essa è diversa da $P(A|B_1)$, dalla probabilità cioè che il piatto è difettoso, dato che è stato prodotto dal primo forno.
Osserviamo che in questo caso $P(A) = P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) + P(B_3 \cap A)$, infatti un piatto difettoso deve essere prodotto da uno e uno solo dei tre forni. Quindi i tre eventi sono incompatibili. Abbiamo $P(B_1|A) =$

$\frac{P(A \cap B_1)}{P(A)}$, ma anche $P(A|B_1) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(B_1)}$, quindi $P(A \cap B_1) = P(B_1) \cdot P(A|B_1)$. Perciò $P(B_1|A) = \frac{P(A | B_1) \cdot P(B_1)}{P(A)}$. Ragionando in modo analogo otteniamo queste altre uguaglianze:

$$P(A \cap B_2) = P(B_2) \cdot P(A|B_2) \text{ e } P(A \cap B_3) = P(B_3) \cdot P(A|B_3)$$

Ciò vuol dire che $P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + P(B_3) \cdot P(A|B_3)$
Unendo tutti questi risultati, abbiamo trovato la seguente formula:

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1) \cdot P(A | B_1)}{P(B_1) \cdot P(A | B_1) + P(B_2) \cdot P(A | B_2) + P(B_3) \cdot P(A | B_3)}$$

Quindi applicandola con i valori numerici dell'esercizio, tenuto conto che
$P(B_1) = 0{,}25$; $P(B_2) = 0{,}3$; $P(B_3) = 0{,}45$; $P(A|B_1) = 0{,}02$; $P(A|B_2) = 0{,}04$; $P(A|B_3) = 0{,}01$.

Otteniamo $P(B_1|A) = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}02}{0{,}25 \cdot 0{,}02 + 0{,}3 \cdot 0{,}04 + 0{,}45 \cdot 0{,}01} = \frac{0{,}005}{0{,}0215} \approx 0.232$, che coincide con il valore trovato nell'esempio precedente. Applicando formule analoghe a quella qui stabilita otteniamo: $P(B_2|A) \approx 0{,}558$ e $P(B_3|A) \approx 0{,}209$.

Ripetendo il procedimento dell'esempio precedente, possiamo ottenere un risultato più generale per determinare la probabilità condizionata di un evento, dato un altro, nell'ipotesi che questo secondo evento possa accadere insieme a un certo numero di altri eventi.

Teorema 8 (di Bayes)

Dato un evento A e n eventi B_i ($1 \le i \le n$), tutti appartenenti allo stesso spazio degli eventi elementari, a due a due incompatibili e tali che $\sum_{i=1}^{n} P(B_i) = 1$, vale la seguente formula detta di Bayes:

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k) \cdot P(A | B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A | B_i)}.$$

Nel precedente teorema è un'ipotesi fondamentale il fatto che gli eventi si escludano a vicenda e che nel loro complesso diano la certezza. In questi casi si parla di probabilità a posteriori, a differenza di quelle che abbiamo finora considerato dette a priori. Infatti in generale noi assumiamo alcuni fatti generali come certi, tipo l'equipossibilità dei diversi casi, quindi supponiamo una verità *a priori*. Invece in questo caso la probabilità si basa sul verificarsi di un dato evento, quindi è *a posteriori*.

I protagonisti

Thomas Bayes nacque a Londra nel 1702 e morì a Tunbridge Wells nel 1761. Figlio di un pastore protestante, egli stesso divenne pastore della Cappella Presbiteriana di Tunbridge, un paesino a 35 miglia da Londra, nel 1720. Si occupò specialmente di calcolo delle probabilità e nel 1764, postumo, fu pubblicato il suo più importante trattato: *Essay toward solving a problem in the doctrine of chances*, in cui, fra le altre cose, enunciò l'importante teorema che adesso porta il suo nome.

Chiudiamo il paragrafo considerando una famosa legge enunciata da Jacques Bernoulli che lega la probabilità classica laplaciana a quella frequentista.

Legge dei grandi numeri.

All'aumentare del numero di ripetizioni indipendenti di una prova nelle stesse condizioni, il rapporto fra la frequenza dell'occorrenza di un evento e il numero di prove si avvicina sempre di più alla probabilità laplaciana dell'evento.

Cosa vuol dire la precedente legge? Abbiamo visto che la probabilità laplaciana di ottenere testa lanciando una moneta regolare è 50%; se noi lanciamo 100 volte una moneta nelle stesse condizioni, quindi servendoci

per esempio di uno strumento che ripeta il lancio con le stesse modalità, difficilmente otterremo 50 volte testa e 50 volte croce. Se aumentiamo il numero di lanci però la differenza fra le due frequenze tenderà a divenire sempre più piccola in rapporto al numero di lanci.
Così se, per esempio, in 100 lanci otteniamo 46 teste e 54 croci, vi è una differenza relativa dell'8%, ma se ripetiamo 1000 volte il numero di lanci, potremmo, per esempio, ottenere 512 teste e 488 croci. Anche se la differenza assoluta è aumentata, da 8 è passata a 24, quella relativa è diminuita dall'8% al 2.4%.
Spesso la legge dei grandi numeri viene male interpretata e viene fornita come giustificazione del fatto che "prima o poi" dovrà accadere un certo evento.
Infatti se alla roulette esce per sette volte di fila il rosso, la legge dei grandi numeri non dice che le successive sette volte dovrà uscire il nero, ma solo che, se la pallina viene lanciata altre mille volte, è alta la probabilità che il numero di volte che esce rosso sia abbastanza uguale al numero di volte che esce il nero.
Il problema è, che non sappiamo quantificare che significa "abbastanza" e soprattutto che non vi sarà una regolarità nelle estrazioni. Potranno esservi decine di uscite successive del rosso come diversi lanci alternati di rosso e nero.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Gli studenti di un istituto, nell'ambito del progetto di prevenzione AIDS, si sottopongono al test per stabilire se risultano HIV positivi. Quel che può accadere è uno dei seguenti quattro fatti:
1. uno studente risulta positivo ed è effettivamente malato;
2. uno studente risulta positivo ma non è effettivamente malato;
3. uno studente risulta negativo ed è effettivamente sano;
4. uno studente risulta negativo ma è effettivamente malato;

Naturalmente i quattro fatti non sono equipossibili. Supponiamo che lo 0,2% degli studenti del nostro campione siano effettivamente malati ma, di essi, solo il 99,8% risulti positivo al test. Analogamente supponiamo che lo 0,3% dei sani risulti positivo al test.
Vogliamo determinare con quale probabilità uno studente testato positivamente risulti effettivamente malato e con quale probabilità invece uno studente testato negativamente risulti effettivamente malato.
Per fissare le idee e poter lavorare con numeri interi, supponiamo che gli studenti siano molto numerosi: 1.000.000. Ciò significa che lo 0,2%, cioè 2000 di essi sono effettivamente malati.
Nel gruppo 1 vi sono coloro che sono malati e sono testati positivamente, cioè il 99,8% di questi 2000, ossia ci sono 1996 studenti.
Nel gruppo 2 ci sono i sani che vengono testati come malati, essi sono lo 0,3% dei sani, cioè di 998.000, sono perciò 2994.
Nel gruppo 3 ci sono i sani che vengono riconosciuti come tali, sono perciò 995.006.
Infine nel gruppo 4 ci sono i malati che risultano sani, sono quindi i 4 studenti malati non testati al punto 1.
Allora se un malato è riconosciuto come tale vuol dire che appartiene al gruppo 1, in cui vi sono 1996 individui; questi sono i casi favorevoli. Vuol dire però anche che risulta positivo al test, quindi appartiene al gruppo 1 o al gruppo 2, pertanto i casi possibili sono 1996 + 2994 = 4990. Quindi la probabilità che sia malato e venga riconosciuto come tale è 1996/4990 = 0,4 = 40%.
Se invece il paziente è testato negativamente appartiene ai gruppi 3 o 4, perciò i casi possibili sono 995.006. I casi favorevoli sono il numero di individui del gruppo 4, cioè 4. Quindi la probabilità di essere malato ma di risultare negativo al test HIV è appena di 4 su 995.006 che è circa lo 0,0004%.
Potevamo anche applicare il Teorema di Bayes, in cui con A indichiamo l'evento "x risulta positivo", con B_1 l'evento "x è malato" e con B_2 l'evento "x non è malato". Allora la probabilità che uno studente che risulta positivo sia effettivamente malato è:

$$P(B_1 \mid A) = \frac{P(A \mid B_1) \cdot P(B_1)}{P(A \mid B_1) \cdot P(B_1) + P(A \mid B_2) \cdot P(B_2)}.$$

Abbiamo: $P(A|B_1) = 0.998$; $P(B_1) = 0.002$; $P(A|B_2) = 0.003$, $P(B_2) = 0.998$. Supponiamo che lo 0,2% degli studenti del nostro campione siano effettivamente malati ma, di essi, solo il 99,8% risulti positivo al test.
Quindi : $P(B_1|A) = \frac{0.998 \cdot 0.002}{0.998 \cdot 0.002 + 0.003 \cdot 0.998} = 40\%$, che coincide con quanto trovato prima per altra via.

Livello 2

1. Supponiamo che esista un test per riconoscere se una persona è o no ammalata di diabete, il quale abbia una efficacia del 98%, cioè solo il 98% di coloro che risultano positivi al test sono effettivamente malati, mentre il 2% no. Se il 3% della popolazione sia effettivamente malato di diabete e Martina è stata giudicata positiva al test, con che probabilità è effettivamente malata? [≈ 60,2%]
2. In una classe vi sono il 30% di ragazze. Il 40% dei maschi ed il 60% delle femmine pratica almeno uno sport. Con quale probabilità, scelto a caso uno studente che pratica uno sport è maschio? Con che probabilità scelto a caso uno studente che non pratica alcuno sport è una femmina? [≈60,8%; ≈22,2%]
3. Negli U.S.A. viene usata talvolta la cosiddetta macchina della verità, per stabilire se un indagato mente o no. Sappiamo che la macchina ha un'affidabilità del 92% (cioè riconosce se un indagato mente o dice la verità nel 92% dei casi) e che il 63% degli indagati è colpevole. Con quale probabilità una persona riconosciuta colpevole con l'ausilio della macchina della verità lo è realmente? Con quale probabilità una persona riconosciuta innocente lo è veramente? [≈ 95,1%; ≈ 87,1%]
4. Un'urna contiene 10 palline bianche e 15 nere, una seconda urna contiene 8 bianche e 5 nere. Lanciamo una moneta regolare, se esce testa estraiamo una pallina dalla prima urna, se no dalla seconda. La pallina estratta è bianca, con quale probabilità è stata estratta dalla prima urna? Con quale dalla seconda? [13/33; 20/33]
5. Con riferimento al precedente quesito, stavolta l'urna la scegliamo lanciando un dado regolare, se esce un punteggio inferiore a 5 scegliamo la prima urna, se no la seconda. Quanto valgono adesso le probabilità? [13/23; 10/33]
6. In una fabbrica di lampadine vi sono due diversi impianti in funzione. Il primo produce il 25% del totale giornaliero, il secondo il 75%. La percentuale di lampadine difettose sul totale, provenienti dai tre impianti è 1% e 2%. Con quale probabilità una lampadina difettosa scelta a caso, è stata prodotta dal secondo impianto? [≈ 85,7%]
7. Nella tabella seguente sono riportati i dati Istat relativi al numero di giornali stampati in Italia e poi suddivisi per aree geografiche, nel 1997. Scelto un giornale scelto a caso, fra quelli pubblicati nel 1997, troviamo che è un quotidiano, determinare la probabilità che sia stato stampato nelle diverse aree geografiche. [≈ 19,9%; ≈ 8,9%; ≈ 7,9%; ≈ 6,1%]

Tipologia	Italia	Nord Ovest	Nord Est	Centro	Mezzogiorno
Quotidiani	2182636	710106	518242	508116	445254
Settimanali	810749	307618	197214	149026	157514

8. Nella tabella seguente sono riportati i dati Istat relativi al numero di famiglie italiane dei Censimenti 1991 e 2001, suddivise per numero medio di componenti. Scelta una famiglia a caso, troviamo che ha mediamente 3 componenti, determinare la probabilità che faccia parte del censimento 1991. Con che probabilità se la famiglia scelta fa parte di quelle del 2001, ha mediamente 4 componenti? [≈ 48,4%; ≈ 19%]

Numero Componenti	1	2	3	4	5	6 o più
1991	4099970	4920050	4410961	4228722	1576409	672891
2001	5427621	5905411	4706206	4136206	1265826	369406

Livello 3

9. Esprimere il Teorema di Bayes al caso in cui gli eventi B_i sono 3.

$$\left[P(B_1 \mid A) = \frac{P(A \mid B_1) \cdot P(B_1)}{P(A \mid B_1) \cdot P(B_1) + P(A \mid B_2) \cdot P(B_2) + P(A \mid B_3) \cdot P(B_3)} \right]$$

10. Un'industria produce lampadine utilizzando tre diversi impianti, ciascuno dei quali produce lo stesso numero di lampadine, che indichiamo con *A*, *B* e *C* Alla fine della giornata le lampadine vengono poste in uno stesso deposito e risultano indistinguibili. Le percentuali di lampadine difettose provenienti dai diversi impianti sono 2%, 4% e 1% rispettivamente. Determinare la probabilità che, scegliendo una lampadina a caso fra quelle prodotte a) sia difettosa e sia stata prodotta dall'impianto *B*; b) sia difettosa e non sia stata prodotta dall'impianto *A*; c) sia difettosa sia stata prodotta dall'impianto C. [≈57,1%; ≈71,4%; ≈14,3%]
11. Con riferimento al problema precedente, si supponga che le percentuali di lampadine difettose prodotte da ciascun impianto siano rispettivamente m_1, m_2 e m_3 (con $m_1 + m_2 + m_3 < 1$). Determinare la probabilità che una lampadina scelta a caso sia difettosa e sia stata prodotta dall'impianto *A*.

[$m_1/(m_1 + m_2 + m_3)$]

12. Con riferimento all'esercizio 10, si supponga che il tasso di produzione non sia uguale per tutti gli impianti, ma sia rispettivamente nelle seguenti proporzioni: metà per *A*, un terzo per *B* e un sesto per *C*. Restando inalterata la percentuale di lampadine difettose prodotte da ciascun impianto, determinare la probabilità che trovata una lampadina difettosa questa sia stata prodotta rispettivamente da uno dei tre impianti. [40%; ≈ 53,3%; ≈ 6,7%]
13. Rispondere al problema precedente nell'ipotesi che le percentuali di produzione di ciascun impianto siano p_1, p_2 e p_3 (con $p_1 + p_2 + p_3 = 1$) e le rispettive percentuali di lampadine difettose siano m_1, m_2 e m_3 (con $m_1 + m_2 + m_3 < 1$). [$m_1 \cdot p_1/(m_1 \cdot p_1 + m_2 \cdot p_2 + m_3 \cdot p_3)$]
14. Da un'indagine statistica svolta in una università statunitense si è stabilito che il 63% degli studenti è americano, il 24% europeo, il 3% africano e il resto asiatico. Le percentuali di studenti maschi per ciascuna delle precedenti aree geografiche sono rispettivamente del 47%, 62%, 84% e 64%. Con quale probabilità uno studente maschio scelto a caso fra quelli iscritti all'Università, proviene da ciascuno dei continenti? [≈ 55,4%; ≈ 27,9%; ≈ 4,8%; ≈ 12%]

L'angolo di Derive

Derive è particolarmente indicato per calcolare il numero di elementi di insiemi che verificano certe proprietà, per esempio i multipli di 11 ma non di 13 compresi tra 170 e 3214. In questo caso si usa il comando SELECT, per determinare gli elementi che verificano le date proprietà; e DIM per calcolare quanti elementi le verificano. Il loro funzionamento è illustrato di seguito proprio per questo esempio.

```
DIM(SELECT(MOD(n, 11) = 0 ∧ MOD(n, 13) ≠ 0, n, 170, 3214))

                                                        256
```

Ma anche per calcolare probabilità di prove indipendenti ripetute. Per esempio per calcolare la probabilità di ottenere almeno 5 volte testa lanciando 10 volte una moneta regolare

$$\sum_{k=5}^{10} \mathrm{COMB}(10,\ k)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10-k}$$

$$\frac{319}{512}$$

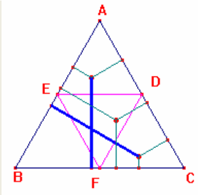
Enigmi matematici

La probabilità non è transitiva, nel senso che non sempre se P(A)>P(B) e P(B)>P(C) allora è anche P(A)>P(C). consideriamo il seguente esempio. Abbiamo 4 strani dadi, le cui facce hanno i seguenti punteggi: A: {0, 0, 4, 4, 4, 4} B: {3, 3, 3, 3, 3, 3} C: {2, 2, 2, 2, 6, 6} D: {1, 1, 1, 5, 5, 5}

Facciamo il seguente gioco fra due persone. Ciascuno sceglie uno dei dadi e lo lancia, vince chi ha il punteggio più alto. Se vengono scelti i dadi indicati con A e B, avremo che chi ha scelto A ha una probabilità di vincere sull'altro pari al numero di volte in cui in A esce il 4 e in B qualsiasi cosa, cioè 24/36 = 2/3. Con B e C, la probabilità che vinca B è data dal numero di volte che nel dado C non esca il 6 e in B qualsiasi cosa, cioè ancora 24/36 = 2/3. Infine con C e D, vince chi sceglie C tutte le volte in cui esce 6 in C e in D qualsiasi cosa (12 volte) oppure esce 2 in C e 5 in D (altre 12 volte), quindi ancora una volta la probabilità è 24/36 = 2/3. Quindi è più probabile che A vinca su B, che B vinca su C e che C vinca su D. Pensiamo perciò che, grazie alla transitività, sia anche più probabile che A vinca su D.

Ma A vince su D solo se in A esce il 4 e in D esce 1, il che accade in un totale di 12 casi, perciò la probabilità è solo di 12/36 = 1/3.

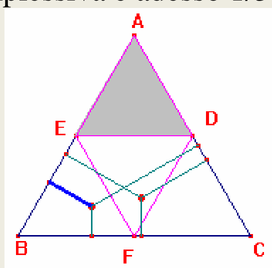
Con quale probabilità un bastoncino di spezza in tre pezzi che possono poi costituire i lati di un triangolo? La risposta dipende dal modo di spezzare il bastoncino. Infatti, supponiamo prima che spezzare il bastoncino equivalga a scegliere due punti su di esso in cui saranno prodotte le fratture. Allora la probabilità può trovar-



si considerando la seguente figura.

Abbiamo un triangolo equilatero, la cui altezza rappresenta il bastoncino da spezzare. Non è difficile mostrare che tale altezza è uguale alla somma dei segmenti di perpendicolare condotti da un qualsiasi punto interno al triangolo ai suoi lati. Ora, se il punto è scelto all'interno del triangolo equilatero *DEF*, formato unendo i punti medi dei lati, allora i tre sementi costituiranno un triangolo, perché è soddisfatta la disuguaglianza triangolare. Se invece il punto viene scelto all'esterno di tale triangolo, ciò non è più possibile, dato che uno dei tre lati (quello dal bordo ingrassato) è maggiore della somma degli altri due. Quindi la probabilità è data dal rapporto delle aree dei due triangoli equilateri. Poiché *DEF* è un quarto di *ABC*, anche la probabilità cercata è ¼.

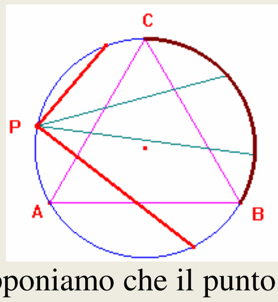
Se invece rompiamo prima il bastoncino in due parti e poi scelta a caso una delle due parti la rompiamo a caso, la risposta è diversa. Infatti, se dei primi due pezzi scegliamo il lato più corto per romperlo ulteriormente, evidentemente non possiamo costruire alcun triangolo. Se scegliamo il pezzo più lungo invece, supposto che il pezzo più corto è rappresentato dal segmento di perpendicolare che a noi appare verticale, nella figura precedente, una parte, quella grigia, risulta non utilizzabile, cioè il punto in cui spezzare il bastoncino più lungo non vi può appartenere. Ancora una volta la regione accettabile è il triangolo *DEF*, ma adesso rappresenta solo 1/3 della zona accessibile (il quadrilatero *BCDE*). Dato che il bastoncino più lungo si sceglie con una probabilità di ½, la probabilità complessiva è adesso 1/3 · ½ = 1/6.



Altro esempio è il cosiddetto paradosso di Bertrand.

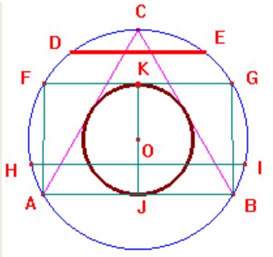
Consideriamo una circonferenza all’interno della quale inscriviamo un triangolo equilatero. Poi tracciamo una corda a caso, qual è la probabilità che tale corda abbia una misura non inferiore a quella del lato del triangolo equilatero? La risposta dipende dal modo di procedere.

Infatti, prima supponiamo che per tracciare la corda si fissi un punto sulla circonferenza e sia la scelta dell’altro estremo a determinare la misura della corda. Quindi la casualità della scelta della corda dipende dalla casualità della scelta del suo secondo estremo. Ci riferiamo alla seguente figura, in cui *ABC* è il triangolo equilatero e *P* è il punto scelto sulla circonferenza

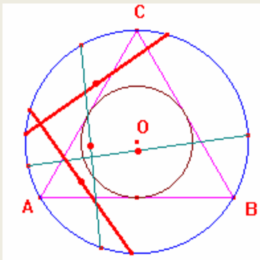


Per capire come affrontare il problema, supponiamo che il punto *P* coincida con uno dei vertici del triangolo equilatero, per esempio con *A*. Allora se come secondo estremo della corda scegliamo un punto che appartiene all’arco *Bc*, diverso da *C* e da *B*, la misura della corda sarà chiaramente sempre inferiore alla misura della corda *BC*. Quindi i casi favorevoli sono costituiti numericamente dai punti dell’arco *BC*, ma tali punti sono infiniti, quindi non ha senso. Consideriamo perciò la misura dell’arco, che è 1/3 della circonferenza. I casi possibili sono invece tutti i punti della circonferenza. Infine la probabilità cercata è 1/3.

Adesso cambiamo il punto di vista. Invece di fissare un estremo della corda fissiamo la sua direzione, ossia supponiamo per esempio che la corda sia tracciata a caso ma in modo da essere parallela al lato *AB* di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza. Lo illustriamo in figura.



In questo caso ci conviene considerare la circonferenza inscritta in *ABC*. La corda parallela ad *AB* e tangente alla circonferenza inscritta misura quanto *AB*, poiché il quadrilatero *ABGF* è un rettangolo. Allora è facile capire che solo se la corda congiunge due punti appartenenti agli archi *FA* e *BG* rispettivamente, ha misura non inferiore a *AB*. Dobbiamo quindi calcolare le misure degli archi *GF* e *AB*. Per rendere più semplice il procedimento, consideriamo la misura del segmento *KJ*. *L*'altezza *CJ* del triangolo viene divisa da *FG* nel rapporto $\frac{1}{3}$. Questo fatto è dovuto a quel che sappiamo sul baricentro *O* del triangolo *ABC* e al fatto che *KO* e *OH* sono raggi della stessa circonferenza. Allora possiamo considerare come la probabilità cercata, il rapporto fra la misura del segmento *KJ* (casi favorevoli) e la misura del diametro (casi possibili). In questo caso perciò la probabilità varrebbe ½.
Possiamo considerare ancora un'altra possibilità ossia che si consideri il punto medio della corda. In questo caso solo le code il cui punto medio è interno al cerchio inscritto nel triangolo risolvono il problema. Poiché l'area di questo cerchio è ¼ dell'area del cerchio grande, dato che il suo raggio è metà del raggio del cerchio maggiore, anche la probabilità cercata è ¼.



Quindi il fatto che il risultato non sia "assoluto" ma dipenda dal punto di vista appare paradossale, ciò è dovuto solo alla mancanza di chiarezza su ciò che si intende per "corda casuale".

Attività

1. Mostrare che ogni quaterna di dadi che si ottiene da quelli mostrati aggiungendo o moltiplicando tutte le facce per uno stesso numero, è non transitiva.
2. Mostrare che la quaterna di dadi A: {1, 6, 6, 6, 11, 11} B: {2, 5, 5, 5, 10, 10} C: {4, 4, 4, 8, 9, 9} D: {{3, 3, 7, 7, 7, 12} è non transitiva.

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi.

1. Dimostrare che il numero di eventi (inclusi quello impossibile e quello certo) che si possono formare su uno spazio di eventi con N elementi è pari a 2^N.
2. Dimostrare che se abbiamo un insieme N elementi e vogliamo suddividerlo in k sottoinsiemi ordinati e a due a due disgiunti, in modo che ciascuno di essi abbia h_1, h_2, …, h_k, elementi, con $h_1 + h_2 + \ldots + h_k =$ N, vi sono un totale di $\binom{N}{h_1}\cdot\binom{N-h_1}{h_2}\cdot\binom{N-h_1+h_2}{h_3}\cdot\ldots\cdot\binom{N-h_1-h_2-\ldots-h_{k-1}}{h_k}$ diversi modi di farlo.
3. Dimostrare che se in un'urna abbiamo N sfere numerate da 1 a N, la probabilità che estraendo in sequenza le palline a caso, vi siano esattamente $h <$ N accoppiamenti è $\frac{1}{h!}\cdot\sum_{k=0}^{N-h}\frac{(-1)^k}{k!}$.
4. Dimostrare che se in un'urna abbiamo N sfere numerate da 1 a N, la probabilità che estraendo in sequenza le palline a caso, vi sia almeno 1 accoppiamento è $\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^{k+1}}{k!}$.
5. CAS In una fabbrica si effettuano delle campionature di controllo, scegliendo a caso alcuni dei prodotti e verificando se sono difettosi; se almeno il 10% del campione verificato è difettoso tutta la produzio-

ne viene distrutta. Se su 1000 pezzi prodotti quelli difettosi sono 75 ed effettuiamo il controllo su 100 pezzi scelti a caso, con che probabilità distruggeremo tutta la produzione? [≈ 20,7%]

6. Lanciamo un dado regolare a forma di cubo per n volte, con quale probabilità la prima volta che otteniamo 6 è in un lancio multiplo di 3? Suggerimento: si ottiene una serie geometrica infinita. [25/91]
7. A, B e C sono ai vertici di un triangolo equilatero, ciascuno con in mano una pistola. A colpisce sempre il bersaglio, B colpisce con una probabilità dell'80%, C con una del 50%. A sorte ciascuno dei tre spara a uno degli altri due, ammettendo che ciascuno dei tre adotti la strategia a egli favorevole e che la gara finisce quando solo uno dei tre sopravvive, chi ha più probabilità di uscire vivo? [C]
8. Con riferimento al quesito precedente, determinare le probabilità di sopravvivenza dei tre. Suggerimento attenzione al fatto che per B e C si devono considerare infiniti casi. [A: 1/10; B: 8/45; C: 47/90]

Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi

1. (Liceo scientifico PNI 1992/93) Un imputato innocente deve essere giudicato da una giuria composta da tre giurati il cui verdetto finale è raggiunto a maggioranza. I tre giurati A, B e C assumono la loro decisione indipendentemente. A e B hanno probabilità p $(0 < p < 1)$ di decidere per l'assoluzione, mentre il giurato C decide in base al risultato ottenuto nel lancio di una moneta. a) Si calcoli la probabilità che l'imputato sia assolto. [p] b) Supponendo di sostituire il giurato C con un altro giurato D che ha probabilità $p' \neq p$ $(0 < p' < 1)$ di decidere per l'assoluzione, si verifichi che la probabilità di assoluzione per l'imputato è maggiore che nel caso precedente se e solo se $p' > ½$. [$p^2 + 2pp' \cdot (1 - p)$] c) Qualora gli imputati siano tre e siano giudicati, indipendentemente tra di loro, dalle giurie prima considerate, si esprima la probabilità dei seguenti eventi: E_1 = {la giuria composta da A, B, C ne assolve due su tre}, E_2 = {la giuria composta da A, B, D ne assolve tre su tre}; E_3 = {la giuria composta da A, B, D assolve almeno un imputato} [$p(E_1) = 3p^2 \cdot (1 - p)$, $p(E_2) = [p^2 + 2pp' \cdot (1 - p)]^3$, $p(E_3) = 1 - \{1 - [p^2 + 2pp' \cdot (1 - p)]\}^3$] d) In particolare per p = ¾ si determini il valore di p' (probabilità che il giurato D decida per l'assoluzione in modo che $P(E_1) = P(E_2)$. [p' = ½]
2. (Liceo scientifico suppletiva PNI 1992/93) Una macchina produce pezzi meccanici. Ogni pezzo prodotto ha una probabilità $0 < p < 1$ di essere funzionante e probabilità $q = 1 - p$ di essere difettoso.
a) Presi a caso k pezzi prodotti si esprima la probabilità dei seguenti eventi: E_1 = {tutti i k pezzi sono funzionanti}; E_2 = {uno solo dei k pezzi è difettoso}; E_3 = {almeno uno dei k pezzi è difettoso}. [$P(E_1) = p^k$; $P(E_2) = k \cdot p^{k-1} \cdot (1 - p)$; $P(E_3) = 1 - p^k$] b) Per ogni k si determini p in modo tale che $P(E_1) = P(E_2)$. [$k/(k + 1)$] c) Per p = 5/6 si calcoli la probabilità dell'evento: E_4 = {il primo pezzo difettoso è il decimo prodotto dal momento in cui la macchina entra in funzione}. [$5^9/6^{10}$]
d) Per p = 9/10 si calcoli la probabilità dell'evento: E_5 = {si ha al massimo un pezzo difettoso nei primi dieci prodotti} [$19 \cdot 9^9/10^{10}$]
3. (Liceo scientifico PNI 1995/96) Paolo e Giovanni sono due amici appassionati di tiro con l'arco: Paolo colpisce il centro del bersaglio nel 75% dei casi, Giovanni nell'80%. Decidono di fare una gara osservando le seguenti regole: lanceranno una moneta per decidere chi tirerà per primo: se esce testa sarà Paolo, se esce croce sarà Giovanni; tireranno a turno e vincerà chi per primo farà centro. Il candidato: a) calcoli la probabilità che Giovanni vinca al quinto tiro; [0,001] b) calcoli la probabilità che Paolo vinca al quarto tiro; [≈ 0,47] c) se in un certo tiro fissato, ad esempio il quindicesimo, si ottiene centro per la prima volta, calcoli la probabilità che a tirare sia stato Paolo. [≈ 0,48]
4. (Liceo scientifico PNI 2001/2002) Il seguente è uno dei celebri problemi del *Cavaliere di Mèrè* (1610 – 1685), amico di Blaise Pascal: "giocando a dadi è più probabile ottenere almeno una volta 1 con 4 lanci di un solo dado, oppure almeno un doppio 1 con 24 lanci di due dadi?"[≈ 51,8%; ≈ 49,1%]
5. (Liceo scientifico PNI 2001/2002) Assumendo che i risultati X, 1, 2, delle 13 partite del Totocalcio siano equiprobabili, calcolare la probabilità che tutte le partite, eccetto una, terminino in parità. [≈ 1,18%]
6. (Liceo scientifico PNI 2002/2003) Tre scatole A, B e C contengono lampade prodotte da una certa fabbrica di cui alcune difettose. A contiene 2000 lampade con il 5% di esse difettose, B ne contiene 500 con il 20% difettose e C ne contiene 1000 con il 10% difettose. Si sceglie una scatola a caso e si

estrae a caso una lampada. Quale è la probabilità che essa sia difettosa? [≈ 11,7%]

7. (Liceo scientifico PNI 2004/2005) Quale è la probabilità di ottenere 10 lanciando due dadi? Se i lanci vengono ripetuti quale è la probabilità di avere due 10 in sei lanci? E quale è la probabilità di avere almeno due 10 in sei lanci? [≈ 7,3%; ≈ 8,3%]
8. (Liceo scientifico PNI 2005/2006) Un tiratore spara ripetutamente ad un bersaglio; la probabilità di colpirlo è di 0,3 per ciascun tiro. Quanti tiri deve fare per avere probabilità maggiore o uguale di 0,99 di colpirlo almeno una volta? [13]
9. (Liceo scientifico PNI 2006/07) Si scelga a caso un punto P all'interno di un triangolo equilatero il cui lato ha lunghezza 3. Si determini la probabilità che la distanza di P da ogni vertice sia maggiore di 1. [≈ 60%]
10. (Liceo scientifico PNI 2007/08) Siano dati un cono equilatero e la sfera in esso inscritta. Si scelga a caso un punto all'interno del cono. Si determini la probabilità che tale punto risulti esterno alla sfera. [5/9]
11. (Liceo scientifico PNI 2007/08) In una classe composta da 12 maschi e 8 femmine, viene scelto a caso un gruppo di 8 studenti. Qual è la probabilità che, in tale gruppo, vi siano esattamente 4 studentesse? [≈ 27,5%]
12. (Liceo scientifico PNI 2008/09) Una moneta da 2 euro (il suo diametro è 25,75 *mm*) viene lanciata su un pavimento ricoperto con mattonelle quadrate di lato 10 *cm*. Quale è la probabilità che la moneta vada a finire internamente ad una mattonella? (cioè non tagli i lati dei quadrati). [≈ 55%]
13. (Liceo scientifico PNI 2010/2011) Un test di esame consta di dieci domande, per ciascuna delle quali si deve scegliere l'unica risposta corretta fra quattro alternative. Qual è la probabilità che, rispondendo a caso alle dieci domande, almeno due risposte risultino corrette? [≈ 75,6%]
14. (Liceo scientifico PNI 2011/2012) Una moneta da 1 euro (il suo diametro è 23,25 mm) viene lanciata su un pavimento ricoperto con mattonelle esagonali (regolari) di lato 10 cm. Quale è la probabilità che la moneta vada a finire internamente ad una mattonella (cioè non tagli i lati degli esagoni)? [≈ 78%]
15. (Liceo scientifico PNI 2011/2012) Un'azienda industriale possiede tre stabilimenti (A, B e C). Nello stabilimento A si produce la metà dei pezzi, e di questi il 10% sono difettosi. Nello stabilimento B si produce un terzo dei pezzi, e il 7% sono difettosi. Nello stabilimento C si producono i pezzi rimanenti, e il 5% sono difettosi. Sapendo che un pezzo è difettoso, con quale probabilità esso proviene dallo stabilimento A? [≈ 61%]
16. (Liceo scientifico PNI 2012/2013) In un gruppo di 10 persone il 60% ha occhi azzurri. Dal gruppo si selezionano a caso due persone. Qual è la probabilità che nessuna di esse abbia occhi azzurri? [2/15]

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.
AHSME = Annual High School Mathematics Examination
AMC = American Mathematical Contest
HSMC = A&M University High School Mathematics Contest
RICE = Rice University Mathematics Tournament

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere un quesito assegnato nel 2007 agli HSMC.
Lanciamo una moneta non truccata per 2007 volte. Indichiamo con p_1 la probabilità di ottenere un numero di teste doppio del numero di croci e con p_2 la probabilità di ottenere un numero di croci pari a 1338. Trovare p_1/p_2,

p_1 è la probabilità di ottenere, su 2007 lanci, 669 croci, quindi: $p_1 = \dfrac{\binom{2007}{669}}{2^{2007}}$. Mentre avremo: $p_2 = \dfrac{\binom{2007}{1338}}{2^{2007}}$. I due valori sono uguali perché $\binom{2007}{669} = \binom{2007}{2007-669} = \binom{2007}{1338}$. Quindi il rapporto richiesto è 1.

1. (AHSME 1970) Consideriamo l'insieme A dei numeri naturali di 5 cifre in cui la somma delle cifre è 43. con quale probabilità un numero scelto a caso da A è divisibile per 11? [1/5]
2. (AHSME 1973) Abbiamo due carte, una rossa da entrambi i lati e l'altra rossa da una parte e nera dall'altra. Scegliamo a caso una delle due carte e la poniamo sul tavolo, se la parte rivolta verso di noi è rossa, con quale probabilità è rossa anche l'altra parte? [2/3]
3. (AHSME 1974) Lanciamo un dado regolare a forma di cubo per 6 volte, con quale probabilità otteniamo per almeno cinque volte un punteggio non inferiore a 5? [13/729]
4. (AHSME 1976) Si consideri l'insieme dei punti che, nel piano cartesiano ortogonale, hanno entrambe le coordinate intere che in valore assoluto non superano 4. Se ne scelga uno a caso, qual è la probabilità che il punto scelto disti dall'origine non più di due unità? Suggerimento: si consideri la circonferenza con centro nell'origine e raggio 2 unità [13/81]
5. (AHSME 1977) Lanciamo tre dai regolari a forma di cubo per tre volte, con quale probabilità otteniamo tre numeri che possano essere messi in modo da costituire una progressione aritmetica di ragione 1? [1/9]
6. (AHSME 1979) Consideriamo l'insieme A delle coppie di numeri interi in valore assoluto non superiori a 6. Scelta una coppia (b, c) a caso da A, con quale probabilità l'equazione $x^2 + bx + c = 0$ non ha soluzioni reali? [111/121]
7. (AHSME 1986) Dall'insieme dei primi 10 numeri naturali scegliamo sei numeri a caso e li ordiniamo secondo grandezza, con che probabilità il secondo più piccolo è 3? [1/3]
8. (AHSME 1988) Dall'insieme dei primi 9 numeri naturali scegliamo due numeri a caso, anche uguali fra loro, e li sommiamo, fra le dieci cifre quale è più probabile che costituisca la cifra delle unità di tale somma? [0]
9. (AHSME 1990) Dall'insieme dei primi 100 numeri naturali scegliamo due numeri a caso, a e b, quindi formiamo il numero $3^a + 7^b$. Con quale probabilità la sua cifra delle unità è 8? [3/16]
10. (AHSME 1995) Se a, b e c sono 3 numeri, non necessariamente distinti, scelti a caso e con reimmissione dall'insieme {1, 2, 3, 4, 5}, determinare la probabilità che $ab + c$ sia pari. [59/125]
11. (AHSME 1996) 4 punti distinti, A, B, C, e D, sono scelti a caso da un insieme di 1996 punti posti a uguali distanze su una circonferenza. Con che probabilità la corda AB interseca la corda CD? [1/3]
12. (AHSME 1996) Un dado regolare a sei facce è lanciato 3 volte. Dato che la somma dei punteggi dei primi due lanci uguaglia il punteggio del terzo, determinare la probabilità che si sia ottenuto almeno un "2". [8/15]

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere un quesito assegnato nel 2008 agli HSMC.
Adriel colleziona palline blu e palline verdi. Le blu sono un numero dell'insieme {2, 5, 6, 7, 11, 13}. Se prendiamo a casa e contemporaneamente due palline dalla sua collezione, la probabilità che siano di diversi colori è 0,5. Quante sono le palline blu?
Indichiamo con b il numero delle palline blu e con v quello delle verdi, per un totale di $b + v$ palline. Il numero di modi in cui possiamo scegliere due palline a caso e contemporaneamente è $\binom{b+v}{2}$. Il numero di casi favorevoli, cioè i modi di scegliere due palline di diverso colore, è invece $b \cdot g$. Quindi la probabilità è

$$\frac{b\cdot v}{\binom{b+v}{2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{b\cdot v}{\frac{(b+v)\cdot(b+v-1)}{2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow 4\cdot b\cdot v=(b+v)\cdot(b+v-1)\Rightarrow ,$$

$$\Rightarrow b^2-2\cdot b\cdot v+v^2-b-v=0\Rightarrow v^2-(2\cdot b+1)\cdot v+b^2-b=0$$

Questa equazione, anche se in 2 incognite, si può considerare come una parametrica nell'incognita b, che è un numero naturale, quindi il discriminante deve essere un quadrato perfetto, cioè:

$$\Delta=(2b+1)^2-4\cdot(b^2-b)=4b^2+4b+1-4b^2+4b=8b+1$$

deve essere un quadrato perfetto. L'unico fra i valori che può assumere b per cui ciò accade è $b = 6$, nel qual caso $8b + 1 = 49$ e l'equazione diventa: $v^2-13\cdot v+30=0\Rightarrow v=\frac{13\pm 7}{2}=\prec\begin{matrix}10\\3\end{matrix}$. Quindi ci sono 6 palline blu e 3 o 10 verdi.

13. (AHSME 1996) Un'urna contiene palline di 4 colori: rosso, bianco, blu e verde. Quando estraiamo 4 palline senza restituzione, I seguenti eventi sono ugualmente probabili: a) l'estrazione di 4 palline rosse; b) l'estrazione di 1 pallina bianca e di 3 rosse; c) l'estrazione di 1 pallina Bianca, 1 blu e 2 rosse d) l'estrazione di 4 palline tutte di diverso colore. Quante sono al minimo le palline nell'urna?
A) 19 B) 21 C) 46 D) 69 E) più di 69 [B]
14. (AHSME 1999) Un tetraedro le cui facce sono tutte triangoli equilateri ha una sfera inscritta e una circoscritta. Per ciascuna delle 4 facce c'è una sfera tangente esternamente alla faccia nel suo centro e alla sfera circoscritta. Un punto P è scelto a caso all'interno della sfera circoscritta. Con che probabilità P è interno a una delle 5 sfere più piccole? [5/27]
15. (AMC 2000) Il professor Gamble compra un biglietto di una lotteria, il cui numero è formato da 6 numeri distinti, scelti tra 1 e 46 compresi. Egli sceglie il biglietto in modo che la somma dei logaritmi in base 10 dei 6 numeri sia un intero. Sapendo che anche il numero estratto verifica la stessa proprietà, con che probabilità il Professor Gamble ha scelto il biglietto vincente? [25%]
16. (AMC 2001) Un punto P è scelto a caso nell'interno di un pentagono di vertici $A \equiv (0, 2)$, $B \equiv (4, 0)$, $C \equiv (2\pi + 1, 0)$, $D \equiv (2\pi + 1, 4)$, $E \equiv (0, 4)$. Qual è la probabilità che $A\hat{P}B$ sia ottuso? [3/8]
17. (HSMC 2003) Due numeri distinti sono scelti a caso dai primi 6 naturali. Con che probabilità il più piccolo diviso per il più grande rappresenta un numero decimale limitato? [60%]
18. (HSMC 2003) Un numero è scelto a caso fra tutti i numeri interi di 4 cifre. con che probabilità il numero sarà divisibile per 2, 3, 4, e 5? [1/60]
19. (HSMC 2006) Si costruisca una griglia formata da 9 punti, su 3 righe e 3 colonne. Quindi si scelgano a caso 3 punti, con che probabilità essi saranno allineati? [2/21]
20. (Rice 2006) La Rice University e la Stanford University preparano domande e corrispondenti soluzioni per una gara di matematica. Il gruppo della Rice scrive 10 domande l'ora e commette un errore nel calcolo delle soluzioni il 10% delle volte. Il gruppo Stanford scrive 20 problemi l'ora e sbaglia le soluzioni il 20% delle volte. Ogni gruppo lavora 10 ore e poi manda i problemi a Smartie che li controlla. Però Smartie non è così brava, quindi solo il 75% dei problemi che pensa siano sbagliati lo sono realmente. Inoltre crede che abbiano soluzioni errate il 20% delle domande Rice e il 10% di quelle Stanford. Qual è la probabilità che Smartie ritenga errata la soluzione corretta di un problema? [1/25]
21. (Rice 2006) Un cliente va in un supermercato- la probabilità che compri (a) pane è 60%, (b) latte è 50% (c) pane e latte è 30%. Con che probabilità il cliente comprerà almeno uno fra latte e pane? [80%]

Lavoriamo insieme

Consideriamo un quesito assegnato nel 2003 agli HSMC.
5 cifre sono scelte a caso. Con che probabilità l'ultima cifra scelta è uguale a una delle prime 4?
Le cifre sono 10. Possiamo sceglierne 5 anche ripetute in $D^r_{10,5} = 10^5$ modi. Calcoliamo la probabilità cercata come la complementare del fatto che l'ultima prima sia diversa da tutte le altre. Scelte le prime 4, per ogni scelta la quinta la possiamo scegliere in $D^r_{9,4} = 9^4$ modi perché sia diversa da queste. Poiché la cifre sono 10, in effetti i casi favorevoli sono $10 \cdot 9^4$ e quindi la probabilità che l'ultima cifra sia diversa dalle precedenti è $\frac{10 \cdot 9^4}{10^5} = \left(\frac{9}{10}\right)^4 = 0{,}9^4 = 0{,}6561$. Quindi la probabilità che la cifra sia uguale a una delle precedenti è 1 – 0,6561 = 0,3439.

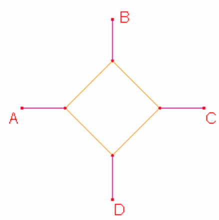
22. (Rice 2006) Il polinomio $-400x^5 + 26660x^4 - 3602x^3 + 1510x^2 - 18x - 90$ ha 5 radici razionali. Supponiamo che si tiri ad indovinare una di queste radici (tenuto conto del teorema che stabilisce che le radici razionali di un polinomio sono fra i divisori del rapporto fra il termine noto e il coefficiente direttore), con che probabilità si può determinare? [5/144]
23. (Rice 2006) Un aereo ha tre motori che funzionano indipendentemente. La probabilità che un motore si guasti è 1%. Con quale probabilità il volo si concluderà regolarmente se perché accada ciò basta almeno un motore funzionante? [99,9%]
24. (Rice 2006) Una compagnia assicurativa crede che la gente possa dividersi in 2 classi: quelli che sono "portati" per gli incidenti e quelli che non lo sono. Le loro statistiche mostrano che la gente della pri-

ma classe ha un incidente annuale con probabilità 40%, mentre questa probabilità è 20% per gli altri. Dato che il 30% della gente sono del primo tipo, con che probabilità un neo-assicurato avrà un incidente nel suo primo anno di assicurazione? [26%]

Lavoriamo insieme

Questo quesito è stato assegnato agli AHSME del 1996.
Un dado standard a sei face è lanciato tre volte. Sapendo che la somma dei primi due lanci è uguale al punteggio del terzo lancio, qual è la probabilità che si sia ottenuto almeno un "2"?
Ci sono i seguenti 15 modi in cui il terzo lancio possa essere somma dei primi due: (1,1,2) (2,1,3) (3, 1, 4) (4, 1, 5) (5, 1, 6) (1,2,3) (2,2,4) (3,2,5) (4,2,6) (1, 3, 4) (2,3,5) (3, 3, 6), (1, 4, 5) (2,4,6) (1, 5, 6) Poiché I tre lanci sono indipendenti, tutti i 15 esiti sono equiprobabili. Come si vede vi è almeno un "2" in 8 di questi eventi, quindi la probabilità richiesta è 8/15.

25. (Rice 2007) Mary mette una pallina rossa e una blu in una scatola e due rosse in un'altra scatola. Poi dimentica in quale scatola ha messo le palline, perciò estrae una pallina da una scatola e scopre che è rossa, con quale probabilità la pallina rimasta nella scatola è blu? [1/3]
26. (Rice 2007) La squadra Rice ha probabilità 1/3 di vincere una certa gara matematica. Se la Rice partecipa a 4 gare, con che probabilità vincerà almeno una volta? [65/81]
27. (Rice 2007) Tina scrive una lettera per ciascuna delle sue 4 amiche. Poi prepara e intesta una busta per ciascuna lettera, ma poi mette le lettere a caso nelle buste. Con che probabilità nessuna delle amiche riceverà la lettera a ella destinata? [3/8]

28. (HSMC 2007) Lanciamo una moneta regolare 2007 volte e registriamo la faccia ottenuta: testa o croce. Indichiamo con p_1 la probabilità che il numero di teste, alla fine dei lanci, sia il doppio del numero di croci e con p_2 la probabilità che il numero di croci sia 1338. Determinare p_1/p_2. [1]
29. (Rice 2007) Un numero x è scelto a caso nell'intervallo [0; 1], e un altro numero y in [−1; 1]. Determinare la probabilità che sia $x > y$. [¾]
30. (Rice 2007) Andy e Bob giocano a ping-pong. A un certo punto Andy ha 17 punti e Bob 18. In ogni giocata, Andy ha il 50% di probabilità di fare un punto. Vince chi arriva prima a 21 punti. Con che probabilità Andy vincerà? [11/32]
31. (HSMC 2007) Un esperimento consiste nello scegliere, con reimmissione, un intero a caso fra i numeri da 1 a 9 inclusi. Se indichiamo con M un multiplo di 3 e con N un numero non multiplo di 3, quale selle seguenti successioni ha più probabilità di essere scelta? [d]
a) MNNMN b) NMMN c) NMMNM d) NNMN
32. (Rice 2007) Scott ha bevuto troppo la scorsa sera, così esce dal dipartimento di matematica, posto in (0; 0) e si rivolge verso l'asse y. La sua casa si trova in (4; 5) ed egli vi si dirige passando solo per punti reticolo, ogni passo che fa lo porta su uno di tali punti. Sapendo che egli ogni passo lo fa o in direzione delle y positive o in quella delle x positive, determinare la probabilità che Scott passi per la casa di Paula, che si trova in (2; 3), supposto che tutti i percorsi possibili siano ugualmente probabili. Suggerimento: scrivere tutti i possibili percorsi per arrivare a casa, notando che otterremo il triangolo di Tartaglia. [10/21]
33. (Rice 2007) Se a e b sono scelti a caso e indipendentemente nell'intervallo [−1; 1], con che probabilità sarà $|a| + |b| < 1$? [50%]
34. (Rice 2008) Daphne si trova nel labirinto schematizzato 

Ella entra in A, e ad ogni bivio sceglie una direzione a caso (incluso tornare indietro). Una volta che Daphne raggiunge l'uscita non rientra. Con che probabilità uscirà da A? Sugg. Determinare le probabilità che esca da A provenendo da una delle 3 strade che portano ad A, quindi impostare un sistema. [7/15]
35. (Rice 2008) Negli antichi giochi Romani, i gladiatori combattevano contro i velociraptor. In una gara un velociraptor lottava contro n gladiatori. L'animale attaccava per primo un gladiatore, uccidendolo all'istante. Quindi attaccava un gladiatore alla volta, colpendo l'animale con probabilità 1/2. Se sono

necessari 10 colpi per uccidere un velociraptor, quanti gladiatori almeno devono combattere perché la probabilità di uccidere l'animale sia almeno pari a 1/2? Sugg. Determinare la media di attacchi. [21]

36. (Rice 2008) Due numeri sono scelti a caso nell'intervallo [0; 1]. Qual è la probabilità che essi differiscano più della loro media? [1/3]
37. (Rice 2008) Tre X, tre Y e tre Z sono messi a caso in una matrice 3 × 3. Qual è la probabilità che nessuna riga o colonna conterrà due lettere uguali? [1/280]
38. (Rice 2008) Lord Voldemort ogni giorno fa solo due cose: maledice Babbani e calcia cuccioli. Ogni Babbano che maledice ha il 50% di probabilità di morire, mentre ogni calcio a un cucciolo ha sempre successo. Ogni Babbano morto gli fornisce 3 unità di soddisfazione e ogni cucciolo colpito 2. Ogni volta che muoiono un numero pari di Babbani raddoppia la sua soddisfazione. Sapendo che ogni ora può o maledire un babbano o calciare un cucciolo, quanti Babbani dovrebbe maledire in un giorno per massimizzare la sua soddisfazione attesa? [24]
39. (Rice 2008) Terence Tao gioca a pietra-carta-forbici usando la seguente strategia: all'inizio mostra sempre pietra; ad ogni giocata successive mostra un segno diverso da quello della giocata precedente, scegliendo fra i due segni con probabilità 50%. Con che probabilità alla quinta giocata mostrerà pietra? [3/8]
40. (Rice 2008) Sei persone fanno il seguente gioco: prendono un cubo inizialmente bianco. Uno alla volta i giocatori segnano una X su una faccia bianca del cubo e lo lanciano come un dado. Vince il primo a cui esce una X (ovviamente il giocatore 1 ha probabilità 1/6 di vincere, il secondo, se non ha vinto il primo, 2/6 e così via). Con che probabilità vincerà il sesto? [5/324]
41. (Rice 2008) Supponiamo che ogni famiglia ha probabilità di avere uno, due o tre figli pari a ¼, ½ e ¼ rispettivamente. Supposto che tutti si sposano e avranno bambini, con che probabilità una coppia iniziale avrà esattamente quattro nipoti? [27/128]
42. (Rice 2008) Cody prepara la sua colazione guarnendo dei tacos con delle salse vendute in bottiglie da 88 mL. Ogni giorno mangia 3, 4 o 5 tacos con probabilità 1/6 , 1/3 e 1/2 rispettivamente. Per il primo taco, usa sempre 2 *ml* di salsa e per ogni taco aggiuntiva ne usa 1 *ml* in più rispetto al precedente. Se ha cominciato una nuova bottiglia, con che probabilità la svuoterà in 5 giorni? [79/288]
43. (Rice 2008) Un punto A si trova a 1000 piedi da un punto B. Una persona in A sceglie una direzione a caso e cammina per 1000 piedi in quella direzione. Con che probabilità arriverà a non più di 1000 piedi da B? [79/288]
44. (Rice 2008) Bill il mago ha tre carte A, B e C con su scritte dei numeri, precisamente: A: 2 3 5 7; B: 2 4 6 7; C: 2 3 6 1. Con queste fa il seguente gioco. Chiede ad un volontario di pensare un numero da 1 a 8, dicendogli solo in quali carte A, B o C si trova. In tal modo egli è sempre in grado di trovare il numero pensato. Un giorno Bill perde la carta C e non riesce a ricordare che numeri vi erano scritti. Così sceglie a caso 3 numeri diversi da 1 a 8 e li scrive su una carta. Che probabilità ha adesso Bill di indovinare qualsiasi numero pensi uno del pubblico? [8/35]

Questions in English

Working together

This question was assigned at AHSME in 1996.
Four distinct points, *A*, *B*, *C*, and *D*, are to be selected from 1996 points evenly spaced around a circle. All quadruples are equally likely to be chosen. What is the probability that the chord *AB* intersects the chord *CD*?
Because all quadruples are equally likely, we need only examine the six clockwise orderings of the points: *ACBD*, *ADBC*, *ABCD*, *ADCB*, *ABDC*, and *ACDB*. Only the first two of these equally likely orderings satisfy the intersection condition, so the probability is 2/6 = 1/3.

45. (AHSME 1997) Two six-sided dice are fair[3] in the sense that each face is equally likely to turn up. However, one of the dice has the 4 replaced by 3 and the other die has the 3 replaced by 4. When these dice are rolled, what is the probability that the sum is an odd[4] number? [5/9]

[3] Onesti, cioè non truccati

46. (AHSME 1999) Six points on a circle are given. Four of the chords joining pairs of the six points are selected at random. What is the probability that the four chords are the sides of a convex quadrilateral? [1/91]

47. (HSMC 1999) A basketball player is on the line to shoot a one-and-one free throw. (In a one-and-one situation, a second shot is allowed only if the first shot is successful.) If the player's free throw shooting average is 0.750, what is the probability that he will score exactly one basket? Express your answer as a common fraction. [3/16]

48. (HSMC 1999) Suppose a computer program generates random matrices of the form $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, where *a*, *b*, *c*, *d* are integers chosen at random from the set $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$. What is the probability that such a matrix would have a zero determinant? That is, what is the probability that $ad - bc = 0$? [219/16384]

Working together

This question was assigned at AHSME in 1995.

If *a*, *b* and *c* are three (not necessarily different) numbers chosen randomly and with replacement from the set {1, 2, 3, 4, 5}, the probability that ab + c is even is?

The quantity $ab + c$ will be even if *ab* and *c* are both even or both odd. Furthermore, *ab* will be odd only when both *a* and *b* are odd, since there are 3 even numbers in the set, and the events are independent, the probability of *ab* being odd is $\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$.

Thus the probability of *ab* being even is $1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$.

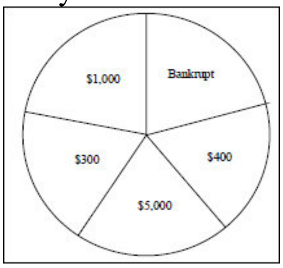
The probability of *c* being odd is $\frac{3}{5}$ and of being even is $\frac{2}{5}$.

Hence, the required probability is $\frac{9}{25}\cdot\frac{3}{5}+\frac{16}{25}\cdot\frac{2}{5}=\frac{27+32}{125}=\frac{59}{125}$.

49. (HSMC 2000) Five people are asked (individually) to choose a random integer in the interval [1; 20]. What is the probability that everyone chooses a different number? [2907/5000]

50. (HSMC 2001) The probability that Patty passes a driving test is p and the probability that she fails is $6p^2$. Find the value p. [1/3]

51. (HSMC 2001) On the game show Wheel of Fraction, you see the following spinner. Given that each region has the same area, what is the probability that you will earn exactly \$1700 in your first three spins? Express your answer as a common fraction. [6/125]



52. (HSMC 2002) Two standard six-faced dice are rolled. Jean wins if the product of the two numbers rolled is odd or a multiple of three, otherwise Allen wins. What is the probability that Jean wins? Express your answer as a common reduced fraction? [2/3]

53. (HSMC 2003) Two distinct numbers are chosen at random from the collection {1, 2, 3, 4, 5, 6}. What is the probability that the smaller number divided by the larger number is a terminating decimal? Express your answer as a common fraction. [60%]

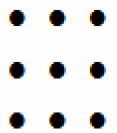
Working together

This is a question assigned at HSMC in 2003

[4] dispari

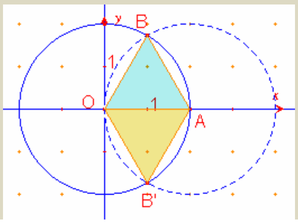
A box contains 3 fair[5] coins and 7 biased[6] coins. Whenever a fair coin is flipped, it comes up heads with probability 0,5. whenever a biased coin is flipped, it comes up heads with probability 0,6. a coin is randomly chosen from the box and then flipped. What is the probability that it will come up heads?
This is a question about conditional probabilities. Thus the probability that we have head is the sum between the probability that the coin is fair and head and the probability that it is biased and head. The events are independent, so $P(\text{heads}) = P(\text{fair}) \cdot P(\text{heads}|\text{fair}) + P(\text{biased}) \cdot P(\text{heads}|\text{biased})$
There are 3 fair coins over 10, $P(\text{fair}) = 3/10$; there are 7 biased coins over 10, $P(\text{biased}) = 7/10$.

$$P(\text{heads}) = 0{,}3 \cdot 0{,}5 + 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}15 + 0{,}42 = 0{,}57.$$

54. (HSMC 2003) What is the probability that four randomly selected points on the geoboard shown below are vertices of a square?  [1/21]
55. (HSMC 2004) A fair die is rolled three times. What is the probability that you get a larger number each time? [5/54]
56. (HSMC 2005) If 7 distinct fair 6-sided dice are rolled, what is the probability the sum will be 10? [≈ 0,03%]

Working together

This is a question assigned at HSMC in 2004.
Two points are chosen at random on the unit circle $x^2 + y^2 = 1$. What is the probability that the chord joining the two points has length at least 1?
Rotate the coordinate axes so that one point has coordinates A(1; 0). If points B and B' are on the circle 1 unit away from A, then OAB and OAB' are equilateral triangles. The probability of a point at least one unit from A is the ratio of the major arc between B and B' to the entire circle, which is $\frac{240}{360} = \frac{2}{3}$.

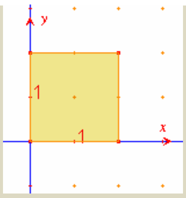


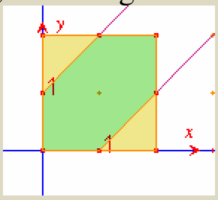
57. (HSMC 2005) If Ella rolls a standard six-sided die until she rolls the same number on consecutive rolls, what is the probability that her 10th roll is her last roll? [$5^8/6^9$]
58. (HSMC 2005) Two positive integers are chosen at random. What is the probability that their product is odd? Express your answer as a common fraction. [¼]
59. (HSMC 2006) Five balls are numbered 1 through 5 and placed in a bowl. Josh will randomly choose a ball from the bowl, look at its number and then put it back into the bowl. Then Josh will again randomly choose a ball from the bowl and look at its number. What is the probability that the product of the two numbers will be even and greater than 10? Express your answer as a common fraction. [1/5]

Working together

This is a question assigned at HSMC in 2003
Both x and y are positive numbers less than 2. Every positive number less than 2 is equally likely to be the value of x, and every positive number less than 2 is equally likely to be the value of y.
What is the probability that x and y differ by less than 1?

[5] Onesta, cioè non truccata
[6] truccata

Possible values of x and y come from the square pictured whose area is 4. 

The lines $x - y = 1$ and $y - x = 1$ give the boundary of the region of points $(x; y)$ with !$x - y$| < 1 (in green in the subsequent picture). 

The probability that $(x; y)$ belongs to S, i.e. that !$x - y$| < 1 is (Area of S)/4 = 3/4 .

60. (Rice 2009) Let a, b, c, and d be the numbers that show when four fair dice, numbered 1 through 6 are rolled. What is the probability that $|(a - 1)(b - 2)(c - 3)(d - 6)| = 1$? [1/324]
61. (Rice 2009) Frank alternates between clipping a weighted coin that has a 2/3 chance of landing heads and a 1/3 chance of landing tails and another weighted coin that has a 1/4 chance of landing heads and a 3/4 chance of landing tails. The first coin tossed is the "2/3 – 1/3" weighted coin. What is the probability that he sees two heads in a row before he sees two tails in a row? [13/33]

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Accademia navale) Qual è la probabilità di estrarre da un'urna con 40 palline, numerate da 1 a 40, una pallina di numero divisibile per 8 o minore di 20? A) 1/20 B) 11/20 C) 11/40 D) 2 E) 1
2. (Accademia navale) Nel gioco della tombola, qual è la probabilità che esca alla terza estrazione il numero 21, se non è già uscito nelle precedenti estrazioni? A)1/88 B) 1/90 C) 21/90 D) 1/21 E) 0
3. (Accademia navale) In un sacchetto sono disposte 10 palline gialle, 2 rosse e una verde. Quale delle seguenti affermazioni è falsa? A) La probabilità di estrarre una pallina blu dal sacchetto è zero B) La probabilità di estrarre una pallina gialla dal sacchetto è maggiore della probabilità di estrarne una degli altri due colori C) La probabilità di estrarre una pallina dal sacchetto è uno D) La probabilità di estrarre una pallina gialla dal sacchetto è 10 E) La probabilità di estrarre una pallina verde dal sacchetto è minore della probabilità di estrarne una gialla o rossa
4. (Accademia militare) Tutti gli studenti di una classe praticano almeno uno sport tra lo sci e il nuoto. Il 60% degli studenti sa sciare e l'80% sa nuotare. Quale percentuale di studenti sa sia sciare sia nuotare? A) 60% B) 48% C) 140% D) 40%
5. (Accademia militare) La probabilità che lanciando 3 volte un dado normale non truccato a 6 facce esca sempre un numero dispari è pari a: A) 1/8 B) 1/36 C) 1/18 D) 3/6
6. (Accademia militare) In un casinò, alla roulette, si sono già verificate tre uscite consecutive di numeri rossi. Supponendo di non considerare lo zero, qual è la probabilità che nel giro successivo esca ancora un numero rosso e qual è la probabilità che, una volta uscito, esca per altre tre volte consecutive?
A) 1/16; 1/128 B) ½; 1/8 C) 1/16; 1/8 D) ½; 1/16
7. (Accademia militare) Un'urna contiene 48 palline di uguali dimensioni ma di colore diverso. Sapendo che le palline possono essere soltanto rosse, bianche o blu e che la probabilità di estrarre una pallina blu è pari a 5/12, quante palline tra bianche e rosse sono contenute nell'urna?
A) 22 B) 20 C) 26 D) 28
8. (Economia Università di Trento) Un'urna contiene 25 palline bianche e 75 palline nere. Se viene estratta una pallina nera, essa viene rimessa nell'urna; se viene estratta una pallina bianca, questa viene tolta e ne viene aggiunta una nera. La probabilità di avere nell'urna 24 palline bianche e 76 nere dopo due estrazioni (ed eventuali inserzioni) è: A) 5/16 B) 7/16 C) 151/400 D) 149/400
9. (Odontoiatria 1997) Una coppia vuole avere due figli dello stesso sesso: quanti figli deve avere per essere sicura che almeno due siano dello stesso sesso?
A) 2 B) 3 C) 4 D) Non si può stabilire E) Più di 4

10. (Medicina 1997) Una scatola contiene 60 biglietti numerati da 1 a 60. Estraendo un biglietto a caso, qual e' la probabilità che il numero risulti maggiore di 57 oppure minore di 4?
A) 9/3600 B) 9/60 C) 1/10 D) 5/60 E) $\frac{50}{60 \cdot 59}$
11. (Medicina 1997) La probabilità che lanciando simultaneamente due dadi si ottengano due numeri la cui somma vale 11 è, rispetto alla probabilità che si ottengano due numeri la cui somma vale 10:
A) non paragonabile, perché si tratta di eventi diversi B) minore C) maggiore D) uguale E) circa doppia
12. (Ingegneria 2000) Un macchinario produce bulloni. Un bullone è ritenuto difettoso quando ha peso oppure dimensioni sbagliate. Il controllo di qualità mette in evidenza che il 5% dei bulloni prodotti ha almeno il peso sbagliato e che il 3% ha almeno le dimensioni sbagliate. Nell' ipotesi che il 2% dei bulloni prodotti abbia sia peso che dimensioni sbagliate, qual è la percentuale di bulloni difettosi che produce quel macchinario?
A) 4% B) 10% C) non si può rispondere con i dati a disposizione D) 6% E) 8%
13. (Odontoiatria 2001) Due dadi vengono lanciati contemporaneamente. Qual è la probabilità di ottenere un punteggio minore o uguale a 4? A) ½ B) 1/6 C) 1/12 D) 1/18 E) 1/9
14. (Odontoiatria 2002) Da un mazzo di 40 carte (10 cuori, 10 quadri, 10 fiori, 10 picche) se ne estraggono tre; qual è la probabilità che siano tre figure fra le dodici presenti, supponendo di non rimettere la carta estratta nel mazzo? A) 11/494 B) 33/1600 C) 36/1235 D) 9/10 E) 33/494
15. (Medicina 2002) In un vassoio ci sono 100 caramelle di cui 35 all'arancia, 33 alla menta e 32 al limone. Prendendo a caso una caramella dal vassoio, qual è la probabilità che non sia alla menta?
A) 0,33 B) 0,32 C) 0,65 D) 0,68 E) 0,67
16. (Odontoiatria 2002) Si ha un'urna contenente 8 palline bianche. Qual è il numero minimo di palline rosse che bisognerebbe aggiungere perché, estraendo due palline contemporaneamente, la probabilità che esse siano una bianca e una rossa sia 16/45? A) 2 B) 3 C) 5 D) 8 E) 10
17. (Veterinaria 2003) Da un mazzo di 40 carte (10 cuori, 10 quadri, 10 fiori, 10 picche) se ne estraggono tre; qual' è la probabilità che siano tre assi fra i quattro presenti, supponendo di non rimettere la carta estratta nel mazzo? A) 4/3705 B) 3/10 C) 1/120 D) 1/2470 E) 3/800
18. (Medicina 2003) Da un mazzo di 40 carte (10 cuori, 10 quadri, 10 fiori, 10 picche) se ne estraggono tre; qual è la probabilità che siano tutte e tre di fiori, supponendo di non rimettere la carta estratta nel mazzo? A) 3/247 B) 9/800 C) 25/1482 D) 7/10 E) 11/247
19. (Odontoiatria 2004) Una moneta è lanciata quattro volte. Qual è la probabilità di ottenere due croci e due teste sapendo che la prima volta si è ottenuto croce? A) ½ B) ¼ C) 3/8 D) 3/16 E) 5/16
20. (Medicina 2004) Si hanno due dadi uguali con le facce di colori diversi. Ciascun dado ha due facce azzurre, due facce marroni e due facce verdi. La probabilità p che dopo un lancio simultaneo dei due dadi si ottengano facce dello stesso colore è: A) 1/3 B) 2/3 C) $1/3 < p < ½$ D) $p < 1/6$ E) $p > 2/3$
21. (Medicina 2004) Qual è la probabilità che lanciando 6 volte una moneta escano esattamente 4 teste?
A) 15/64 B) 1/64 C) 15/16 D) 1/16 E) 5/32
22. (Veterinaria 2004) Una moneta è lanciata quattro volte. Qual è la probabilità p di ottenere quattro croci sapendo che le prime due volte si è ottenuto croce? A) ½ B) $½ < p < ¾$ C) $p < ¼$ D) 3/8 E) ¼
23. (Veterinaria 2005) Un'urna contiene 12 palline, alcune bianche e altre rosse. È possibile che vi siano anche palline verdi, ma non siamo sicuri. Sapendo che probabilità di estrarre a caso dall'urna una pallina bianca o rossa è rispettivamente ¾ e ¼. Indicare se vi sono palline verdi e, in caso affermativo, il loro numero
A) ce n'è 1 B) ce ne sono 2 C) ce ne sono 3 D) ce ne sono 4 E) non ce ne sono
24. (Scienze della formazione primaria, Università di Cagliari 2008-09) Su 10 lanci di dado il 6 esce 4 volte. Che probabilità c'è che il 6 esca pure all'undicesimo lancio?
A) 1 su 6 B) 4 su 6 C) 6 su 10 D) non è possibile stabilirlo a priori E) 10 su 6
25. (Scienze della formazione primaria, Università di Cagliari 2008-09) Estraendo un numero a caso dal sacchetto della tombola (che contiene tutti i numeri interi da 0 a 90), che probabilità c'è di pescare un numero che sia < di 30 o > di 60? A) 30/90 B) 31/90 C) 30/60 D) 60/90 E) 59/90
26. (Veterinaria 2008) Se si lancia un dado 5 volte con quale probabilità il "2" esce esattamente 3 volte?
A) $2 \cdot 5^3/6^5$ B) $5^2/6^5$ C) $1/6^3$ D) ½ E) $½ \cdot 5^2/6^2$
27. (Facoltà scientifiche, Roma La Sapienza 2009) Quando piove ho l'80% di probabilità di essere di buon umore. Quando non piove ho il 90% di probabilità di essere di buon umore. La probabilità che

domani piova è del 70%. Allora, che probabilità ho di essere di buon umore domani?

A) 83/100 B) 80/100 C) 63/100 D) 56/100

28. (Scuola superiore di Catania) Nell'estrazione del lotto dell'11/9/99 sulla ruota di Torino sono apparsi i numeri: 86, 44, 62, 34, 64 il cui massimo comune divisore è 2. Qual è la probabilità che, sulla stessa ruota, alla prossima estrazione compaiano 5 numeri il cui MCD sia 5?
29. (Scuola superiore di Catania) Da un mazzo di carte francesi (52 carte) sono state tolte le regine (Q) e tutte le carte di fiori. Calcolare la probabilità che estraendo una carta da tale mazzo modificato essa sia di cuori.
30. (Scuola superiore di Catania) Dal gioco della tombola sono stati eliminati tutti i numeri che contengono almeno una cifra pari a 8. calcolare la probabilità che alla prima estrazione venga estratto un numero minore o uguale a 30.
31. (Scuola Superiore di Catania) Nel classico gioco dell'oca c'è una pista suddivisa in caselle, contrassegnate dai numeri naturali positivi (in un certo senso lo 0 corrisponde al punto di partenza). Modifichiamo il gioco in modo che ogni giocatore, a turno, lancia una moneta equa e avanza di una casella se esce testa e di 2 se esce croce. Non sono previste caselle con comandi speciali (torna indietro, vai alla casella N, …). Qual è la probabilità che un giocatore passi per la casella 1? E per la 2? e per la 3? Dimostrare poi che per ogni $x > 2$, la probabilità di capitare nella casella x è la media aritmetica delle probabilità di capitare in ciascuna delle caselle precedenti. Se vi sono un totale di 20 caselle, qual è la casella in cui è più probabile finire? E quale quella in cui è meno probabile?
32. (Scuola Superiore di Catania) Ci sono due urne, esternamente uguali: la prima contiene 3 palline di cui una sola rossa, mentre la seconda contiene 5 palline, di cui una sola rossa. In un gioco, estraggo a sorte una pallina e vinco se è rossa. Mi vengono proposti due metodi per l'estrazione.
A) scelgo a caso una delle due urne e da questa estraggo una pallina. Metto insieme le palline di entrambe le urne e, dopo aver rimescolato tutte le palline, estraggo una pallina dall'urna così formata.
È più conveniente il metodo A o quello B? si consideri poi il caso più generale in cui le urne contengono n ed m palline, sempre una sola delle quali, in ciascuna urna, è rossa. Per quali valori di n ed m è più conveniente il metodo A e per quali il B) In quali casi i metodi sono equiprobabili?
33. (Scuola Superiore di Catania) Calcolare la probabilità $P1$ di ottenere almeno un 6 nel lancio di 6 dadi. Provare che è maggiore di ½. Generalizzare tale risultato scrivendo una formula per P_n, dove P_n è la probabilità di ottenere almeno n sei nel lancio di $6n$ dadi.
34. (Scuola Superiore di Catania) Gigi e Mario giocano a testa o croce e ognuno di loro lancia n volte una moneta. A) calcolare la probabilità che Gigi ha di ottenere k volte testa. B) calcolare la probabilità che Gigi e Mario ottengano lo stesso numero di teste. C) Quest'ultimo evento è più o meno probabile di ottenerne un numero diverso? D) Ammettiamo ora che Mario lanci la moneta una volta in più di Gigi, ma che in caso di parità la vittoria sia attribuita a Gigi. Chi dei due è avvantaggiato?
35. (Medicina 2013)Recenti studi hanno riportato che nel 2006 il numero di donne sottoposte all'esame per la diagnosi del tumore al seno risultate positive è aumentato del 13% rispetto al 2005. Nello stesso lasso di tempo, il numero di esami effettuati è aumentato del 10%. Se le donne sottoposte a tale esame fossero rappresentative dell'intera popolazione, quale tra le seguenti affermazioni sarebbe vera? A) L'aumento dell'incidenza del tumore al seno non può essere calcolato se non si conosce il numero effettivo di esami eseguiti B) Se una percentuale maggiore di popolazione venisse sottoposta a tale esame, il tasso di positività aumenterebbe sicuramente C) La percentuale di donne risultate positive all'esame per la diagnosi del tumore al seno nel 2006 è aumentata poco meno del 3% rispetto al 2005 D) Il 13% delle donne sottoposte all'esame per la diagnosi del tumore al seno nel 2006 è risultato positivo E) La percentuale dell'intera popolazione femminile risultata positiva all'esame per la diagnosi del tumore al seno nel 2006 è aumentata del 13% rispetto al 2005
36. (Medicina 2013) Alan lancia contemporaneamente due dadi non truccati con le facce numerate da 1 a 6. Qual è la probabilità che esca lo stesso numero su entrambi i dadi?
A) ½ B) 1/3 C) 1/36 D) 1/6 E) 1/18

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_2_3.htm

Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
C	A	D	D	A	B
7	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
D	C	B	C	B	D
13	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**
B	A	E	A	D	A
19	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
C	A	B	E	E	A
25	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
E	A	A	703/3662439	1/3	3/8
31	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**
½; ¾; 5/8; 2; 1	A; $P(\text{A}) > P(\text{B})$ se $m \neq n$; $P(\text{A}) = P(\text{B})$ se $m = n$	$P_1 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$ $P_n = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{6n}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{6n-k}$	$\binom{n}{k} \cdot \frac{1}{2^n}$; $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \cdot \frac{1}{2^{2n}}$; Meno; Gigi	C	D

8. Successioni di numeri reali

8.5 Successioni infinite e serie numeriche

Prerequisiti

- Numeri naturali
- Proprietà ed operazioni con i numeri naturali
- Insiemi numerabili

Obiettivi

- Riconoscere successioni numeriche e saperne studiare le proprietà
- Comprendere il concetto di limite di una successione
- Sapere calcolare semplici limiti di successioni
- Comprendere il concetto di serie numerica e sua regolarità
- Conoscere le principali serie geometriche
- Sapere determinare il carattere di semplici serie geometriche

Contenuti

- Richiamiamo le conoscenze: Disequazioni
- Proprietà delle successioni di numeri reali
- Successioni divergenti
- Successioni convergenti
- Operazioni aritmetiche con i limiti
- Successioni infinitesime e infinite
- Proprietà dei limiti di successione
- Le serie numeriche
- Serie a termini di segno costante

Parole Chiave

Carattere di una serie – Convergente – Divergente – Estremo inferiore e superiore – Infinitesimo – Infinito – Limite – Maggiorante – Minorante – Oscillante – Serie

Richiamiamo le conoscenze

Data la disequazione di II grado $ax^2 + bx + c > (\geq; <; \leq)\ 0$, in cui possiamo sempre supporre $a > 0$, diversamente cambiamo segno a tutti i coefficienti e verso alla disequazione, possono accadere i seguenti fatti.

- $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, in questo caso l'equazione associata $ax^2 + bx + c = 0$ ha le soluzioni reali $x_1 < x_2$ e vale il seguente schema

$ax^2+bx+c>0 \Leftrightarrow$ $x<x_1 \vee x>x_2$	$ax^2+bx+c\geq 0 \Leftrightarrow$ $x\leq x_1 \vee x\geq x_2$	$ax^2+bx+c<0 \Leftrightarrow$ $x_1<x<x_2$	$ax^2+bx+c\leq 0 \Leftrightarrow$ $x_1\leq x\leq x_2$

- $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, in questo caso l'equazione associata $ax^2 + bx + c = 0$ ha la soluzione reale doppia $x_1 = x_2$ e vale il seguente schema

$ax^2+bx+c>0 \Leftrightarrow$ $x\neq x_1$	$ax^2+bx+c\geq 0 \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}$	$ax^2+bx+c<0 \Leftrightarrow \varnothing$	$ax^2+bx+c\leq 0 \Leftrightarrow$ $x=x_1$

- $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, in questo caso l'equazione associata $ax^2 + bx + c = 0$ non ha soluzioni reali e vale il seguente schema

$ax^2+bx+c>0 \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}$	$ax^2+bx+c\geq 0 \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}$	$ax^2+bx+c<0 \Leftrightarrow \varnothing$	$ax^2+bx+c\leq 0 \Leftrightarrow \varnothing$

Esempio A

- La disequazione $-x^2 - 5x + 6 > 0$, si riscrive nella forma $x^2 + 5x - 6 < 0$. L'equazione $x^2 + 5x - 6 = 0$, ha le soluzioni reali $x_1 = 2 < 3 = x_2$. Pertanto, per lo schema precedente, la disequazione data ha soluzioni $2 < x < 3$.
- La disequazione $x^2 + 5x - 6 > 0$, ha soluzioni $x < 2 \vee x > 3$.
- La disequazione $x^2 - 4x + 4 > 0$, dato che l'equazione $x^2 - 4x + 4 = 0$, ha $\Delta = 16 - 16 = 0$, e perciò ha l'unica soluzione reale $x_1 = 2$, per lo schema precedente, ha soluzioni $x \neq 2$.
- La disequazione $x^2 - 4x + 4 \geq 0$ ha ogni numero reale per soluzione.
- La disequazione $x^2 - 4x + 4 < 0$ non ha soluzioni reali.
- La disequazione $x^2 - 4x + 4 \leq 0$ ha l'unica soluzione $x = 2$.
- La disequazione $x^2 - 4x + 5 > 0$, dato che l'equazione $x^2 - 4x + 5 = 0$, ha $\Delta = 16 - 20 < 0$, per lo schema precedente, ha ogni numero reale per soluzione.
- La disequazione $x^2 - 4x + 5 < 0$ non ha soluzioni reali.

Dobbiamo fare particolare attenzione alle disequazioni parametriche.

Esempio B

La disequazione $(1 + h)\, x^2 - x + 1 > 0$, è parametrica di parametro h. La sua equazione associata è anch'essa parametrica, il cui $\Delta = 1 - 4 - 4h = -3 - 4h$. Quindi esso è positivo solo se è $-3 - 4h > 0 \Rightarrow h < -¾$. Quindi per tali valori di h l'equazione ha le due soluzioni reali $x_1 = \frac{1-\sqrt{-3-4h}}{2\cdot(1+h)} < x_2 = \frac{1+\sqrt{-3-4h}}{2\cdot(1+h)}$. Possiamo dire allora che per $h < -¾$, le soluzioni della disequazione sono $x < \frac{1-\sqrt{-3-4h}}{2\cdot(1+h)} \vee x > \frac{1+\sqrt{-3-4h}}{2\cdot(1+h)}$? No, perché ciò è vero se il coefficiente di x^2 è positivo, cioè se $1 + h > 0 \Rightarrow h > -1$. Pertanto possiamo dire che se si ha: $-1 < h < -¾$, le soluzioni sono quelle scritte. Se invece è $h = -1$, la disequazione diventa di primo grado e non parametrica: $-x + 1 > 0 \Rightarrow x < 1$. Se poi è $h < -1$, il delta è ancora positivo ma il primo coefficiente è negativo, quindi le soluzioni sono: $\frac{1-\sqrt{-3-4h}}{2\cdot(1+h)} < x < \frac{1+\sqrt{-3-4h}}{2\cdot(1+h)}$. Se è $h = -$ ¾, si ha $\Delta = 0$, la disequazione diviene ¼ $x^2 - x + 1 > 0 \Leftrightarrow$ (½ $x - 1)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 2$. Infine se è $h > -$ ¾, si ha $\Delta < 0$, la disequazione ha il primo coefficiente positivo e perciò ha per soluzione tutti i numeri reali.

Consideriamo brevemente le disequazioni in valore assoluto, limitatamente a quelle che ci serviranno nell'unità.
Possiamo dire che la disequazione $|f(x)| > h$, con $f(x)$ espressione nell'incognita x e h numero reale, equivale alle singole disequazioni $f(x) > h \vee f(x) < -h$. Mentre la disequazione $|f(x)| < h$, equivale al sistema di disequazioni $\begin{cases} f(x) < h \\ f(x) > -h \end{cases}$.

Esempio C

- La disequazione $|x^2 - x| > 2$, equivale alle disequazioni $x^2 - x > 2 \vee x^2 - x < -2$. La prima disequazione ha soluzioni $x < -1 \vee x > 2$; la seconda disequazione non ha soluzioni reali. Quindi la disequazione di partenza ha soluzioni $x < -1 \vee x > 2$.
- La disequazione $|x^2 + 2x| < 1$, equivale al sistema
$$\begin{cases} x^2+2x<1 \\ x^2+2x>-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+2x-1<0 \\ x^2+2x+1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1-\sqrt{2}<x<-1+\sqrt{2} \\ x\neq -1 \end{cases} \Rightarrow -1-\sqrt{2}<x<-1+\sqrt{2} \wedge x \neq -1.$$

Verifiche

Risolvere le seguenti disequazioni al variare del parametro reale *h*

Livello 1

1. $(2 - h)\,x + 1 > 0$ $\left[\begin{cases} x>1/(h-2) & h<2 \\ \forall x\in\mathbb{R} & h=2 \\ x<1/(h-2) & h>2 \end{cases}\right]$ $4x + 3h < 0$ $[x < -\frac{3}{4}h]$

2. $(1 - h)\,x - 2 \leq 0$ $\left[\begin{cases} x\leq 2/(1-h) & h<1 \\ \forall x\in\mathbb{R} & h=1 \\ x\geq 2/(1-h) & h>1 \end{cases}\right]$ $(4 + 3h)\,x - h \geq 0$ $\left[\begin{cases} x\leq h/(4+3h) & h<-3/4 \\ \forall x\in\mathbb{R} & h=-3/4 \\ x\leq h/(4+3h) & h>-3/4 \end{cases}\right]$

3. $(1 + h^2)\,x + 1 < 0$ $[\varnothing]$ $(1 - h^2)\,x - 1 < 0$ $\left[\begin{cases} x<1/(1-h^2) & -1<h<1 \\ \forall x\in\mathbb{R} & h=\pm 1 \\ x>1/(1-h^2) & h<-1\vee h>1 \end{cases}\right]$

4. $hx + 2 - h \leq 0$ $\left[\begin{cases} x\geq (h-2)/h & h<0 \\ \varnothing & h=0 \\ x\leq (h-2)/h & h>0 \end{cases}\right]$ $(2 + h)\,x + h - 2 > 0$ $\left[\begin{cases} x>(2-h)/(2+h) & h<-2 \\ \varnothing & h=-2 \\ x<(2-h)/(2+h) & h>-2 \end{cases}\right]$

Risolvere le seguenti disequazioni al variare del parametro reale *h*

Livello 2

5. $(2 + h^2)x^2 + 2x - 3 > 0$ $\left[x<\frac{-1-\sqrt{3h^2+7}}{h^2+2} \vee x>\frac{-1+\sqrt{3h^2+7}}{h^2+2}\right]$

6. $hx^2 + x - 2 > 0$ $\left[\begin{cases} \emptyset & h \le -1/8 \\ \dfrac{-1-\sqrt{8h+1}}{2h} < x < \dfrac{-1+\sqrt{8h+1}}{2h} & -\dfrac{1}{8} < h < 0 \\ x > 2 & h = 0 \\ x < \dfrac{-1-\sqrt{8h+1}}{2h} \vee x > \dfrac{-1+\sqrt{8h+1}}{2h} & h > 0 \end{cases}\right]$ $(1 + h)\, x^2 - x > 0$ $\left[\begin{cases} \dfrac{1}{1+h} < x < 0 & h < -1 \\ x < 0 & h = -1 \\ x < 0 \vee x > \dfrac{1}{1+h} & h > -1 \end{cases}\right]$

7. $(1 - 2h)\, x^2 - 1 \le 0$ $\left[\begin{cases} \dfrac{-1}{\sqrt{1-2h}} \le x \le \dfrac{1}{\sqrt{1-2h}} & h < \dfrac{1}{2} \\ \forall x \in \mathbb{R} & h = 1/2 \\ \emptyset & h > 1/2 \end{cases}\right]$

8. $x^2 + hx - h + 3 > 0$ $\left[\begin{cases} x < \dfrac{-h-\sqrt{h^2+4h-12}}{2} \vee x > \dfrac{-h+\sqrt{h^2+4h-12}}{2} & h < -6 \vee h > 2 \\ x \ne -3 & h = -6 \\ x \ne -1 & h = 2 \\ \emptyset & -6 < h < 2 \end{cases}\right]$

9. $(1 + 3h)\, x^2 - x + h > 0$ $\left[\begin{cases} \emptyset & h \le -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1-\sqrt{-12h^2-4h+1}}{2\cdot(3h+1)} < x < \dfrac{1+\sqrt{-12h^2-4h+1}}{2\cdot(3h+1)} & -\dfrac{1}{2} < h < -\dfrac{1}{3} \\ x < -\dfrac{1}{3} & h = -\dfrac{1}{3} \\ x < \dfrac{1-\sqrt{-12h^2-4h+1}}{2\cdot(3h+1)} \vee x > \dfrac{1+\sqrt{-12h^2-4h+1}}{2\cdot(3h+1)} & -\dfrac{1}{3} < h < \dfrac{1}{6} \\ x = -\dfrac{1}{3} & h = \dfrac{1}{6} \\ \forall x \in \mathbb{R} & h > \dfrac{1}{6} \end{cases}\right]$

10. $(1 - h)\, x^2 - (1 + h)\, x - 2 \le 0$ $\left[\begin{cases} x < -1 \vee x > \dfrac{2}{1-h} & h < 1 \\ x \ge -1 & h = 1 \\ \dfrac{2}{1-h} < x < 1 & h > 1 \wedge h \ne 3 \\ \forall x \in \mathbb{R} & h = 3 \end{cases}\right]$

Risolvere le seguenti disequazioni in valore assoluto

Livello 1

11. $|x + 1| > 1$ $[x < -2 \vee x > 0]$ $|2x + 3| < 1$ $[-2 < x < -1]$ $|-3x - 2| \le 1$ $[-1 \le x \le -1/3]$

12. $|3x + 1| > 2$ $[x < -1 \vee x > 1/3]$ $|1 - 2x| < x$ $[1/3 < x \vee x < 1]$ $|4 - x| \le 1 + 2x$ $[x \ge 1]$

13. $|x^2 - 5x - 6| \le 0$ $[x = -1 \vee x = 6]$ $|x^2 + 1| > 0$ $|x^2 - 1| < 0$ $[\emptyset]$

Livello 2

14. $|x^2 + 1| > 2$ $[x < -1 \vee x > 1]$ $|4x^2 - 2x| < x^2 - 2$ $[\emptyset]$ $|x^2 - 4| < 2$ $\left[-\sqrt{6} < x < -\sqrt{2} \vee \sqrt{2} < x < \sqrt{6}\right]$

15. $|x^2 - x - 2| \le 1$ $\left[\dfrac{1-\sqrt{13}}{2} \le x \le \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \vee \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \le x \le \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right]$ $|x^2 + x + 1| > x$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

16. $|x^2 - 2x + 1| < 4x - 2$ $\left[3-\sqrt{6} < x < 3+\sqrt{6}\right]$ $|x^2 + 5x - 6| \le 6$ $\left[\frac{-5-\sqrt{73}}{2} \le x \le -5 \vee 0 \le x \le \frac{-5+\sqrt{73}}{2}\right]$

17. $|2x^2 + x - 1| < 2x^2$ $\left[\frac{-1-\sqrt{17}}{8} < x < \frac{-1+\sqrt{17}}{8} \vee x > 1\right]$ $|1 - x^2| \ge x^2 + x - 1$ $\left[x \le \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right]$

Proprietà delle successioni di numeri reali

Non vi è il più piccolo fra i piccoli né il più grande fra i grandi, ma qualcosa sempre di più e piccolo e qualcosa di più grande. Anassagora

Il problema

Abbiamo visto che le successioni di numeri naturali, tranne che siano formate da numeri scelti a caso, verificano delle proprietà (numeri dispari, multipli di 5, quadrati perfetti, …). Quello che ci interessa sapere è se hanno un comportamento *regolare*. Per esempio abbiamo visto che le progressioni geometriche di ragione 1/10 possono essere usate per rappresentare i numeri razionali periodici. Cioè la successione $\left\{1+\frac{1}{10^{n-1}}\right\}$, diciamo che "rappresenta" il numero periodico semplice $1,\bar{1}$. Ma non è un particolare elemento della successione a rappresentarlo, bensì la successione nella sua totalità. Vogliamo perciò stabilire per una generica successione se essa, nella sua totalità può rappresentare o no, un dato numero reale.

Per cercare di risolvere il precedente problema dobbiamo porre qualche definizione, dato che per esempio la successione dei quadrati perfetti difficilmente può rappresentare un numero reale, dato che i suoi elementi crescono senza alcuna limitazione. Quindi una prima proprietà che dobbiamo stabilire è il fatto che gli elementi della successione non possano crescere, o decrescere, in modo arbitrario. Si potrebbe erroneamente pensare che aumentando n anche il numero reale a esso associato aumenti, ciò non sempre è vero, come mostriamo nei successivi esempi.

Esempio 1

- Gli elementi della successione $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ sono tutti positivi, essendo i reciproci di numeri positivi e per lo stesso motivo sono anche tutti minori o uguali a 1.
- Per la successione $\left\{\frac{n+2}{n-5}, n \ne 5\right\}$, escludendo i primi 4 elementi che sono negativi, gli altri sono tutti maggiori di 1, dato che il numeratore è sempre maggiore del denominatore.
- Gli elementi di $\left\{\sqrt{5n-13}\right\}$, sono anch'essi tutti positivi, ma non è vero che sono tutti minori di un dato numero, dato che $\sqrt{5n-13}$ può assumere valori maggiori di qualsiasi numero fissato. Per esempio sono maggiori di 1000 se $\sqrt{5n-13} > 1000 \Rightarrow 5n - 13 > 10^6 \Rightarrow n > (10^6 + 13)/5$. Ma n è un naturale quindi dobbiamo prendere il primo naturale maggiore di $(10^6 + 13)/5$, cioè 200002. Quindi per tutti gli elementi a partire da quello di posto 200 003 in poi. Verifichiamo quanto detto: Per n = 200002 si ha: $\sqrt{5\cdot 200002-13} = \sqrt{99997} < \sqrt{10^6} = 1000$, per n = 200003: $\sqrt{5\cdot 200003-13} = \sqrt{1000002} > \sqrt{10^6} = 1000$.
- La successione $\left\{(-1)^n \cdot n^2\right\}$, assume valori arbitrariamente grandi e arbitrariamente piccoli, così per esempio nella successione ci sono elementi maggiori di un miliardo (10^9), come l'elemento ottenuto per n = 40000, per il quale si ha: $(-1)^{40000} \cdot 40000^2 = 1,6 \cdot 10^9 > 10^9$. Allo stesso modo ci sono per esempio elementi minori di meno un miliardo, come quello che si ottiene per n = 39999, $(-1)^{39999} \cdot 39999^2 = -159992001 < 10^9$.

Tenuto conto degli esempi precedenti, poniamo le seguenti definizioni.

Definizione 1

Una successione $\{a_n\}$ di numeri reali si dice **limitata superiormente** se esiste un numero reale S maggiore o uguale di tutti gli elementi della successione. In simboli: $a_n \leq S$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definizione 2

Una successione $\{a_n\}$ di numeri reali si dice **limitata inferiormente** se esiste un numero reale I minore o uguale di tutti gli elementi della successione. In simboli: $a_n \geq I$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definizione 3

Una successione $\{a_n\}$ di numeri reali si dice **limitata**, se è limitata sia inferiormente che superiormente, cioè se esistono due numeri reali I e S per cui si ha: $I \leq a_n \leq S$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Consideriamo le successioni degli esempi precedenti, per vedere se ve ne sono di limitate.

Esempio 2

- La successione $\{1/n\}$ è limitata dato che si ha: $0 < 1/n < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- La successione $\left\{\frac{n+2}{n-5}, n \neq 5\right\}$ è limitata, essendo $-6 \leq \frac{n+2}{n-5} \leq 8, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{5\}$.
- La successione $\left\{\sqrt{5n-13}\right\}$, è limitata inferiormente da zero, ma non è limitata superiormente, come abbiamo notato nell'esempio precedente.
- La successione $\{(-1)^n \cdot n^2\}$, sempre tenuto conto dell'esempio precedente, non è limitata né superiormente, né inferiormente, è cioè illimitata.

Se una successione è limitata ovviamente ha infiniti numeri maggiori dei suoi elementi e infiniti minori.

Definizione 4

Data una successione limitata superiormente ogni numero M maggiore di tutti gli elementi della successione su chiama **maggiorante della successione**.
Data una successione limitata inferiormente ogni numero m minore di tutti gli elementi della successione su chiama **minorante della successione**.

Esempio 3

Abbiamo già osservato che la successione $\{1/n\}$ è limitata e che si ha: $0 < 1/n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Quindi ogni numero maggiore o uguale ad 1 è un maggiorante, ogni numero minore o uguale a 0 un minorante.

L'insieme dei maggioranti ha ovviamente un elemento più piccolo, quello dei minoranti un elemento più grande.

Definizione 5

Data una successione limitata superiormente il minimo dei suoi maggioranti si chiama **estremo superiore della successione**. Se una successione è illimitata superiormente si dice che il suo estremo superiore è **+ ∞**.
Data una successione limitata inferiormente il massimo dei suoi minoranti si chiama **estremo inferiore della successione**. Se una successione è illimitata inferiormente si dice che il suo estremo inferiore è **– ∞**.

Notazione 1

L'estremo inferiore di una successione $\{a_n\}$ si indica con $inf(a_n)$.
L'estremo superiore di una successione $\{a_n\}$ si indica con $sup(a_n)$.

Esempio 4

Poiché non ci sono numeri maggiori di 0 più piccoli di *tutti* gli elementi della successione $\{1/n\}$, possiamo dire che 0 è l'estremo inferiore. E poiché non ci sono numeri minori di 1 più grandi di *tutti* gli elementi della successione possiamo dire che 1 è l'estremo superiore.

Per determinare in modo più *sicuro* estremo inferiore e superiore di una successione dimostriamo il seguente risultato.

Teorema 1

Data una successione limitata superiormente $\{a_n\}$, il suo estremo superiore S, verifica le seguenti proprietà

1. $a_n \leq S, \forall n \in \mathbb{N}$.
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists h \in \mathbb{N}: a_h > S - \varepsilon$

Dimostrazione

La proprietà 1 discende dal fatto che l'estremo superiore è un maggiorante. La seconda proprietà dice che S è proprio il più piccolo dei maggioranti, tanto è vero che se gli togliamo una quantità positiva, non importa quanto piccola, $S - \varepsilon$ non è più un maggiorante.

In modo analogo si prova un risultato per l'estremo inferiore.

Teorema 2

Data una successione limitata inferiormente $\{a_n\}$, il suo estremo inferiore I, verifica le seguenti proprietà

1. $a_n \geq I, \forall n \in \mathbb{N}$.
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists h \in \mathbb{N}: a_h < I + \varepsilon$

Dimostrazione per esercizio

Esempio 5

Proviamo che effettivamente $inf(1/n) = 0$ e $sup(1/n) = 1$. Le prime due proprietà le abbiamo già provate. Per l'inf, dobbiamo provare che la disequazione $1/n < \varepsilon$, ha soluzioni infinite, e infatti si ha $n > 1/\varepsilon$. Quindi, comunque un consideriamo un numero *leggermente* più grande di 0, questo non è più un minorante della successione, pertanto è proprio 0 il massimo dei minoranti, quindi l'inf.
Analogamente la disequazione $1/n > 1 - \varepsilon$, ha soluzione $n > 1/(1 - \varepsilon)$, quindi ogni numero *leggermente* inferiore a 1 non è un maggiorante, 1 è il sup.

A volte capita che l'estremo inferiore o quello superiore appartengano alla successione.

Definizione 6

Se l'estremo superiore di una successione limitata superiormente appartiene alla successione, si chiama **massimo della successione**.
Se l'estremo inferiore di una successione limitata inferiormente appartiene alla successione, si chiama **minimo della successione**.

Notazione 2

Il minimo di una successione $\{a_n\}$ si indica con $min(a_n)$.
Il massimo di una successione $\{a_n\}$ si indica con $max(a_n)$.

Esempio 6

Per $\{1/n\}$ 0 è estremo inferiore ma non è minimo, mentre 1 è massimo.

Chiudiamo con una definizione che ci sarà utile nel seguito.

Definizione 7

Diciamo che una successione **verifica definitivamente** una proprietà se la detta proprietà è vera per tutti gli elementi maggiori di un dato elemento, cioè se è vera $\forall\ n > h,\ h \in \mathbb{N}$.

Esempio 7

La successione $\{(3 - n)/n\}$ è formata, escludendo i primi 3 elementi (2, ½, 0) da elementi negaitiv, pertanto è una successione definitivamente negativa.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo stabilire se la successione $\left\{(-1)^n \cdot \frac{2n+3}{5n}\right\}$ è limitata inferiormente o superiormente. Osserviamo che i termini sono alternati, scriviamone alcuni: {–1, 7/10, –3/5, 11/20, –13/25, ½, …}. Per il momento lasciamo perdere il segno e consideriamo solo il valore assoluto: $\frac{2n+3}{5n} = \frac{2}{5} + \frac{3}{5n}$. Lo abbiamo scritto in modo da fare vedere che ogni elemento è data dalla somma fra 2/5 e un numero positivo, quindi tutti i termini positivi sono maggiori di 2/5. D'altro canto aumentando n la frazione $\frac{3}{5n}$ assume valori sempre più piccoli, quindi il suo massimo valore si ha per $n = 1$. Dato che i termini positivi si ottengono per valori pari di n, il più grande di essi è 2/5 + 3/10 = 8/10 = 4/5. Per i numeri negativi valgono considerazioni uguali, nel senso che sono tutti maggiori o uguali di –1 · (2/5 + 3/5) = –1. Quindi in ogni caso la successione è limitata sia inferiormente che superiormente.

Determinare se le seguenti successioni sono limitate, superiormente e/o inferiormente

Livello 1

18.	$\left\{\frac{n+3}{n}\right\}$	[Limitata]	$\left\{\frac{n^2+1}{n}\right\}$	[Lim. Inf.]	$\left\{\frac{n}{n^2+1}\right\}$	[Limitata]
19.	$\left\{\frac{2-n}{n+1}\right\}$	[Limitata]	$\left\{\frac{3-n^2}{n+2}\right\}$	[Lim. Sup.]	$\left\{\frac{n^2-1}{n^2+1}\right\}$	[Limitata]
20.	$\left\{\frac{n^2+3}{n^3-1}\right\}$	[Limitata]	$\left\{\frac{n^4+1}{1000n^3}\right\}$	[Lim. Inf.]	$\left\{log\left(\frac{n}{n+1}\right)\right\}$	[Limitata]

Livello 2

21.	$\left\{(-1)^n \cdot \left(n+\frac{1}{n}\right)\right\}$	[Limitata]	$\left\{(-1)^n \cdot \frac{n^2-1}{n}\right\}$	[Illimitata]	$\{(-1)^n \cdot cos(n)\}$	[Limitata]
22.	$\{(-1)^n \cdot tan(n)\}$	[Illimitata]	$\left\{\frac{n^2+(-1)^n \cdot n^2}{n}\right\}$	[Lim. Inf]	$\left\{\frac{n}{sin(n)}\right\}$	[Lim. Inf.]

Lavoriamo insieme

Vogliamo determinare inf e sup della successione $\left\{(-1)^n \cdot \frac{2n+3}{5n}\right\}$, che abbiamo già visto essere limitata. Abbiamo già osservato che tutti i termini positivi sono minori o uguali a 4/5, che è perciò il sup, anzi il massimo della successione. Analogamente i numeri negativi che sono tutti maggiori o uguali di –1, che è perciò l'inf, anzi il minimo.

Determinare inf e sup delle seguenti successioni dicendo se essi sono anche min o max

***Livello* 1**

23. $\left\{\frac{2n+3}{n+2}\right\}$ [*min* = 5/3; *sup* = 2] $\left\{\frac{n^2-1}{n}\right\}$ [*min* = 1; *sup* = +∞] $\left\{\frac{3n}{n^2+1}\right\}$ [*inf* = 0; *max* = 3/2]

24. $\left\{\frac{2+n}{n^2+1}\right\}$ [*inf* = 0; *max* = 3/2] $\{ln(n)\}$ [*min* = 0; *sup* = +∞] $\{sin(n)\}$ [*inf* = –1; *sup* = 1]

25. $\left\{\sqrt{\frac{n^2+3}{n^2+1}}\right\}$ [*inf* = 1; *sup* = $\sqrt{2}$] $\{2^n\}$ [*min* = 1; *sup* = +∞] $\{2^{-n}\}$ [*inf* = 0; *max* = ½]

***Livello* 2**

26. $\left\{(-1)^n \cdot \left(n+\frac{1}{n}\right)\right\}$ [*min* = –3/2; *max* = 5/2] $\{(-1)^n \cdot sin(n)\}$ [*inf* = –1; *sup* = 1]

27. $\{sin(n) + cos(n)\}$ [*inf* = 1 – $\sqrt{2}$; *sup* = $\sqrt{2}$] $\left\{\frac{n^2+(-1)^n \cdot n^2}{n}\right\}$ [*min* = 0; *sup* = +∞]

28. $\left\{\frac{\sqrt{n}+1}{n+\sqrt{n}}\right\}$ [*inf* = 0; *max* = 1] $\left\{\frac{n+(-1)^n \cdot n}{ln(n)}\right\}$ [*min* = 0; *sup* = +∞]

Successioni divergenti

Non c'è alcun numero "infinito": un'equazione del tipo n = ∞ è priva di significato; un numero non può essere uguale ad infinito, perché "uguale ad infinito" significa niente. Così il simbolo ∞ non ha alcun significato, tranne che nella frase "tende a ∞". *Godfrey H. Hardy*, *A course of pure mathematics*, 1908

Se consideriamo una successione illimitata solo superiormente o solo inferiormente questo fatto ci fa pensare che l'*andamento* della successione consista proprio nel tendere verso uno dei due tipi di infinito. Ma è proprio così? E che significa che l'*andamento* è di tendere verso l'infinito?

Esempio 8

Abbiamo visto che entrambe le successioni $\left\{\sqrt{5n-13}\right\}$ e $\{(-1)^n \cdot n^2\}$, sono illimitate superiormente, ma la seconda è illimitata anche inferiormente, quindi crediamo che le due successioni abbiano un comportamento diverso all'aumentare della posizione dei loro termini. Cioè aumentando la *n*, mentre nella prima successione otteniamo valori sempre più grandi senza alcuna limitazione superiore, lo stesso non succede per la seconda successione, dato che in essa i valori sono alternativamente positivi e negativi.

Tenuto conto del precedente esempio possiamo dire che la successione $\left\{\sqrt{5n-13}\right\}$ tende a più infinito, mentre la seconda successione non ha un andamento ben preciso. In ragione di ciò poniamo la seguente definizione.

Definizione 8

Una successione $\{a_n\}$ per la quale, comunque si fissi un numero positivo M, esiste un elemento a_k tale che tutti i numeri che lo seguono sono maggiori di M, si dice **divergente positivamente**.

Simbolicamente scriviamo: $\forall M > 0, \exists k\in \mathbb{N}: n > k \Rightarrow a_n > M$.

Notazione 3

Una successione divergente positivamente si indica con la scritta $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, e si legge *limite per n che tende a più infinito di* a_n *è più infinito*.

Esempio 9

Proviamo che effettivamente si ha: $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{5n-13} = +\infty$. Dobbiamo vedere quindi se, fissato un qualsiasi numero positivo M, si ha $\sqrt{5n-13} > M, \forall n > h$, con h un certo numero naturale che rappresenta la posizione del primo elemento della successione per il quale *tutti quelli che lo seguono* sono maggiori di M. Dobbiamo quindi risolvere la disequazione, che equivale a $5n - 13 > M^2$, perché stiamo lavorando nei numeri positivi. Si ha: $n > \frac{M^2+13}{5}$, quindi, detto h il primo numero naturale $h \ge \frac{M^2+13}{5}$ abbiamo provato quanto detto. così per esempio se avessimo fissato $M = 100$, avremmo avuto $h = \left\lfloor \frac{100^2+13}{5} \right\rfloor = 2002$, in cui il simbolo racchiuso fra $\lfloor\ \rfloor$, è il cosiddetto *massimo intero contenuto nel numero*. Quindi possiamo dire che a partire tutti gli elementi della successione a partire da quello di posto 2003 sono maggiori 100. Infatti per $n = 2002$ abbiamo: $\sqrt{5\cdot 2002-13} = \sqrt{9997} < \sqrt{10000} = 100$, mentre $\sqrt{5\cdot 2003-13} = \sqrt{10002} > \sqrt{10000} = 100$.

Dobbiamo fare attenzione a distinguere le successioni divergenti da quelle che invece contengono numeri *molto grandi*.

Esempio 10

Consideriamo la successione $\left\{\frac{10^{50}\cdot n+1}{n-1}\right\}$, i suoi elementi sono tutti dell'ordine di 10^{50}, quindi numeri *molto grandi*, ma la successione non è illimitata, infatti

$$\frac{10^{50}\cdot n+1}{n-1} = \frac{10^{50}\cdot n-10^{50}+10^{50}+1}{n-1} = \frac{10^{50}\cdot(n-1)+10^{50}+1}{n-1} =$$
$$= 10^{50} + \frac{10^{50}+1}{n-1} \le 10^{50}+10^{50}+1 = 2\cdot 10^{50}+1$$

E ovviamente una successione limitata superiormente non può essere divergente. Se volessimo verificarlo potremmo risolvere la disequazione $\frac{10^{50}\cdot n+1}{n-1} > M \Rightarrow 10^{50}\cdot n+1 > Mn - M \Rightarrow \left(10^{50}-M\right)\cdot n > -1-M$, se adesso operiamo senza considerare il segno di $10^{50} - M$, otterremo $n > \frac{-1-M}{10^{50}-M} = \frac{1+M}{M-10^{50}}$, che dovrebbe significare che il limite è infinito. Se però teniamo conto che quanto scritto è vero solo se $10^{50} - M > 0$, cioè se scegliamo $M < 10^{50}$, allora tutti gli elementi della successione a partire da quello di posto $\left\lfloor \frac{1+M}{M-10^{50}} \right\rfloor + 1$, sono maggiori di M, che significa tutti perché $M < 10^{50} \Rightarrow \frac{1+M}{M-10^{50}} < 0$. Ma se scegliessimo per esempio $M = 10^{50} + 1$, allora la disequazione diventa $(10^{50} - 10^{50} - 1) \cdot n > - 1 - 10^{50} + 1 \Rightarrow -n > - 10^{50} \Rightarrow n < 10^{50}$, cioè *solo* i termini della successione precedenti a quello di posto 10^{50} sono maggiori di $10^{50} + 1$, gli altri no.

Per esempio $\frac{10^{50}\cdot 10^{50}+1}{10^{50}-1}=\frac{10^{100}+1}{10^{50}-1}=\frac{10^{50}-1+2}{10^{50}-1}=\frac{\left(10^{50}-1\right)\cdot\left(10^{50}+1\right)+3}{10^{50}-1}=10^{50}+\frac{3}{10^{50}-1}<10^{50}+1$.

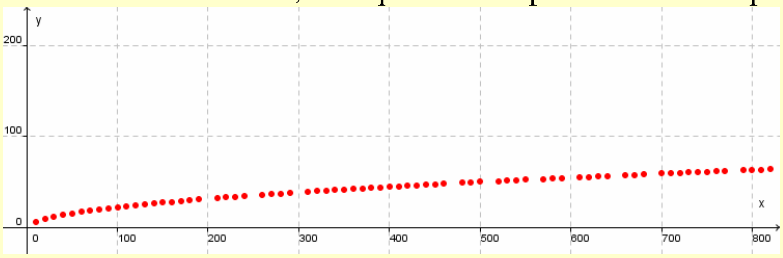
L'angolo storico

Il simbolo ∞ per indicare la nozione di infinito, soprattutto nel calcolo fu usato per primo da John Wallis nella sua opera *De sectionibus conicis* del 1655. L'ipotesi più accreditata è che Wallis abbia "deformato" un simbolo che gli antichi romani usavano per il numero 1000.
Invece il simbolo lim è stato usato per primo da Simon Lhuilier in una sua opera del 1786. Lhuilier scrisse semplicemente lim. q:Q. Il simbolo attuale si stabilizzò solo molti anni dopo. In particolare Weierstrass nel 1854 scrisse $\lim\limits_{n=\infty} p_n=\infty$.

Possiamo anche interpretare graficamente la divergenza di una successione.

Esempio 11

Tenuto conto di quanto detto negli esempi precedenti, scriveremo $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{5n-13}=+\infty$. Rappresentiamo graficamente alcuni elementi della successione, tutti quelli la cui posizione è multipla di 10, fino a 800.



Osserviamo che effettivamente all'aumentare di n gli elementi della successione assumono valori sempre maggiori, apparentemente senza alcun limite.

Tenuto conto della divergenza positiva, facilmente poniamo il concetto di divergenza negativa.

Definizione 9

Una successione $\{a_n\}$ per la quale, comunque si fissi un numero negativo M, esiste un elemento a_k tale che tutti i numeri che lo seguono sono minori di M, si dice **divergente negativamente**.

Simbolicamente scriviamo: $\forall M > 0, \exists k\in \mathbb{N}: n > k \Rightarrow a_n < -M$

Notazione 4

Una successione divergente negativamente si indica con la scritta $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=-\infty$, e si legge *limite per n che tende a più infinito di a_n è meno infinito*.

Esempio 12

Per fornire un esempio di successione divergente negativamente, basta cambiare il segno a tutti i termini di una successione divergente positivamente. Così avremo: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\sqrt{5n-13}\right)=-\infty$.

Non tutte le successioni non limitate né superiormente né inferiormente sono divergenti. Vale la seguente immediata proprietà:

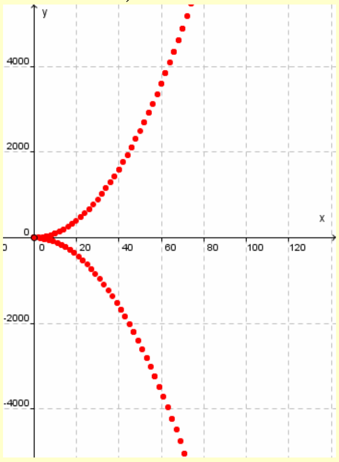
Teorema 3

Condizione necessaria affinché una successione sia divergente positivamente è che essa non sia limitata superiormente. Condizione necessaria affinché una successione sia divergente negativamente è che essa non sia limitata inferiormente.

La condizione non è certamente sufficiente.

Esempio 13

Abbiamo già detto che la successione $\{(-1)^n \cdot n^2\}$ è illimitata, eppure non è divergente né positivamente né negativamente, come può osservarsi anche dal grafico di alcuni suoi termini, tutti quelli la cui posizione è un multiplo di 5, fino a 790. Usiamo un sistema dimetrico, vista la notevole differenza di grandezza fra ascisse e ordinate.



Osserviamo che la successione ha un andamento continuamente oscillante.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Sapendo che $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2+3}{n+1} = +\infty$, determinare il primo numero naturale p per cui tutti gli elementi successivi sono maggiori di 12345.

Dobbiamo risolvere la disequazione $\frac{n^2+3}{n+1} > 12345 \Rightarrow n^2+3 > 12345n + 12345 \Rightarrow n^2 - 12345n - 12341 > 0$

Abbiamo potuto eliminare il denominatore poiché n è un numero naturale e quindi $n + 1$ è sempre positivo.

La soluzione della disequazione è $n < \frac{12345 - \sqrt{152448389}}{2} < 0 \vee n > \frac{12345 + \sqrt{152448389}}{2} \approx 12345{,}9$

Sempre tenendo conto che n è un numero naturale, la prima disequazione non è soluzione accettabile, la seconda deve essere riportata al primo numero naturale successivo a 12345,9 cioè a 12346. Quindi il numero p cercato è proprio 12346. Infatti avremo: $\frac{12345^2+3}{12345+1} \approx 12344 < 12345; \frac{12346^2+3}{12346+1} \approx 12345{,}0003 > 12345$

Tenuto conto del limite indicato determinare il primo numero naturale *p* a partire dal quale tutti gli elementi della successione verificano la richiesta

***Livello* 1**

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-2n^2}{n+2} = -\infty \Rightarrow \frac{1-2n^2}{n+2} < -5412$ [2708] $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4n^2+3}{3n-1} = +\infty \Rightarrow \frac{4n^2+3}{3n-1} > 7812$ [5857]
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n^2-1}{5n-3} = +\infty \Rightarrow \frac{3n^2-1}{5n-3} > 47589$ [76315] $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2+n}{n-1} = +\infty \Rightarrow \frac{n^2+n}{n-1} > 57948$ [57946]
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4n^2+n+5}{3n-2} = +\infty \Rightarrow \frac{4n^2+n+5}{3n-2} > 4578$ [3433] $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2-n^2}{5+2n} = -\infty \Rightarrow \frac{2-n^2}{5+2n} < -9876$ [19755]
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2-3n^2+n}{5n-1} = -\infty \Rightarrow \frac{2-3n^2+n}{5n-1} < -5479$ [9132] $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^2+n+1\right) = +\infty \Rightarrow n^2+n+1 > 2014$ [45]

Verificare la validità dei seguenti limiti

Livello 1

5. $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3+1}{n+1}=+\infty$ $\lim_{n\to+\infty} ln\left(n^2\right)=+\infty$ $\lim_{n\to+\infty} log_2\left(\frac{1}{n}\right)=-\infty$ $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n+1}}=+\infty$ $\lim_{n\to+\infty}\frac{1-2n^2}{n+2}=-\infty$

6. $\lim_{n\to+\infty}\frac{4n^2+3}{3n-1}=+\infty$ $\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^2-1}{5n-3}=+\infty$ $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+1}{n-1}=+\infty$ $\lim_{n\to+\infty}\frac{2-3n^2+n}{5n-1}=-\infty$ $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}=+\infty$

Verificare la NON validità dei seguenti limiti

Livello 2

7. $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+1}{n^3+1}=+\infty$ $\lim_{n\to+\infty}\frac{1000n^2+1}{n^2}=+\infty$ $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-10^5}{n}=-\infty$ $\lim_{n\to+\infty} sin\left(n^{2014}\right)=+\infty$ $\lim_{n\to+\infty} tan\left(\frac{n+1}{n-1}\right)=+\infty$

Giustificare la risposta ai seguenti quesiti

Livello 2

8. Se $\lim_{n\to+\infty} a_n=+\infty$, vuol dire che $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$? [No]
9. Se $\{a_n\}$ ha un milione di elementi negativi, è possibile che $\lim_{n\to+\infty} a_n=+\infty$? [Sì]
10. Se $\lim_{n\to+\infty} a_n=+\infty$, vuol dire che $\exists p\in\mathbb{N}$: $a_n > 1000$, $\forall n > p$. Possiamo concludere che si ha anche $a_n \leq 1000$, per $n \in \{1, 2, \ldots, p\}$? [No]
11. Determinare una condizione su $\{a_n\}$, affinché quanto affermato nell'esercizio precedente sia vero. [$a_{n+1} \geq a_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$]
12. Se $\lim_{n\to+\infty} a_n=-\infty$, vuol dire che $\exists p\in\mathbb{N}$: $a_n < -1000$, $\forall n > p$. Possiamo concludere che si ha anche $a_n \geq -1000$, per $n \in \{1, 2, \ldots, p\}$? [No]
13. Determinare una condizione su $\{a_n\}$, affinché quanto affermato nell'esercizio precedente sia vero. [$a_{n+1} \leq a_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$]

Livello 3

14. Se $\{a_n\}$ ha infiniti elementi negativi, è possibile che $\lim_{n\to+\infty} a_n=+\infty$? È sicuro che $\lim_{n\to+\infty} a_n=-\infty$? [No; No]
15. Se $\lim_{n\to+\infty}\left(a_n\right)^2=+\infty$ possiamo dire che $\lim_{n\to+\infty} a_n=+\infty$? [No]
16. Se $\lim_{n\to+\infty}\left(a_n\right)^3=-\infty$ possiamo dire che $\lim_{n\to+\infty} a_n=-\infty$? [Sì]

Successioni convergenti

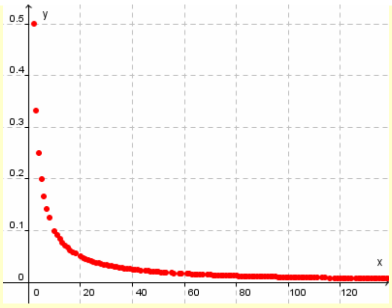
Una grandezza è detta essere il limite di un'altra grandezza, quando la seconda può avvicinare la prima entro una qualsiasi grandezza, comunque piccola, sebbene la seconda non possa mai superare la grandezza a cui si avvicina.

Jean Baptiste Le Rond D'Alembert, Voce *Limite* nell'*Encyclopédie* del 1754

Passiamo a considerare adesso le successioni limitate, che ovviamente non possono essere divergenti.

Esempio 14

- Considerando gli elementi della successione $\{1/n\}$, osserviamo che i suoi termini si avvicinano sempre più al numero 0, pur senza mai raggiungerlo. Per esempio $1/1000 = 0{,}001 < 1/100 = 0{,}1$. Il grafico di alcuni valori ci conforta nell'ipotesi. Per ragioni di opportunità l'unità di misura sulle ordinate è diversa

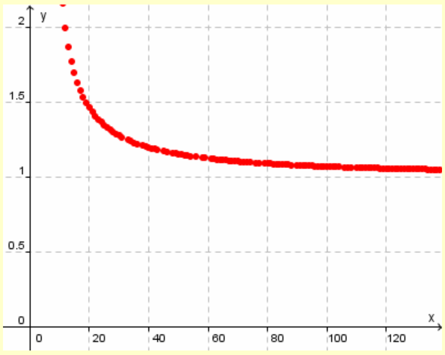


da quella sulle ascisse.

- Gli elementi della successione $\left\{\dfrac{n+2}{n-5}, n \neq 5\right\}$, invece si avvicinano sempre di più a 1.

n	12	145	289
$\dfrac{n+2}{n-5}$	$\dfrac{12+2}{12-5}=\dfrac{14}{7}=2$	$\dfrac{145+2}{145-5}=\dfrac{147}{140}=1,05$	$\approx 1,02$
1145	2378	5426	15378
$\approx 1,006$	$\approx 1,003$	$\approx 1,001$	$\approx 1,0004$

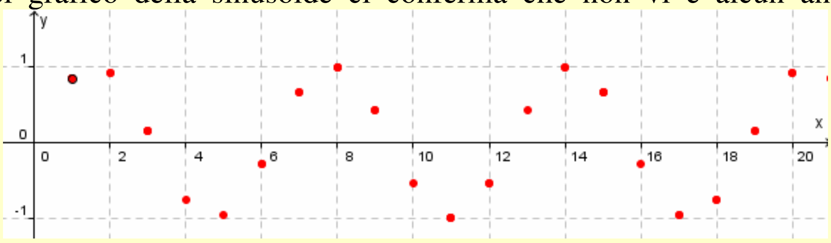
Non è difficile capire che la differenza fra il numeratore e il denominatore rimane sempre costante: $n + 2 - (n - 5) = 7$, ma il rapporto di due numeri che differiscono di 7, all'aumentare dei numeri si avvicina sempre più a 1. Infatti, crescendo i numeri, la differenza relativa tende ad essere considerata zero. Spieghiamoci meglio, quando $n = 5426$, la differenza 7 rappresenta, in percentuale, $7/5426 \approx 0,12\%$, se $n = 123456789$, invece il valore percentuale diventa $7/123456789 \approx 5,6 \cdot 10^{-6}$ %, che può considerarsi praticamente zero. Naturalmente aumentando ancora di più n, la differenza percentuale diminuisce ancora di più. Possiamo perciò dire che la successione si *avvicina* a 1. Come conferma il grafico seguente.



- Invece la successione $\{sin(n)\}$, non si avvicina a nessun numero particolare, pur essendo limitata. Abbiamo per esempio:

n	$Sin(n)$
1	$Sin(1) \approx 0,8414709848$
2	$Sin(2) \approx 0,9092974268$
3	$Sin(3) \approx 0,1411200080$
4	$Sin(4) \approx -0,7568024953$
5	$Sin(5) \approx -0,9589242746$

Del resto, la conoscenza del grafico della sinusoide ci conferma che non vi è alcun andamento di avvicinamento.



Abbiamo visto che anche per le successioni limitate possiamo distinguere quelle che hanno una "regolarità", dato che i loro elementi si "avvicinano" a un dato numero e quelle che invece hanno un andamento "oscillante". Dobbiamo però chiarire cosa intendiamo per "avvicinamento".

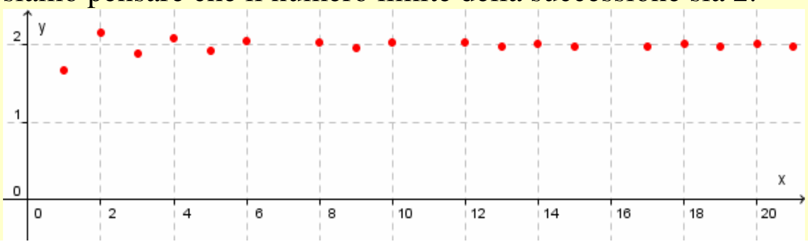
Esempio 15

Abbiamo detto che gli elementi della successione $\{1/n\}$, al crescere di n si avvicinano a zero, in effetti però potrebbero avvicinarsi a un numero positivo molto piccolo, come per esempio 10^{-28}, o ancora un altro numero. Come facciamo allora a stabilire qual è il numero "limite"? Dobbiamo chiarire cosa intendiamo con questa locuzione. Ogni elemento della data successione è maggiore di zero, mentre ci sono elementi che sono minori di 10^{-28} e in generale di qualsiasi numero positivo. Anzi, come nel caso delle successioni divergenti, una volta che troviamo un elemento minore di un numero fissato, tutti quelli che lo seguono sono minori di esso. Così per esempio: $1/n < 10^{-28} \Rightarrow n > 10^{28}$. Quindi tutti i numeri che occupano una posizione successiva a quella di posto 10^{28}, sono minori di 10^{-28}.

Prima di definire cosa intendiamo per limite di una successione limitata, consideriamo un altro esempio, dato che il precedente ci potrebbe fare pensare, erroneamente, che l'avvicinamento a un certo numero da parte degli elementi di una successione avvenga sempre passando da elementi più piccoli ad altri più grandi.

Esempio 16

Consideriamo la successione $\left\{\dfrac{6n+(-1)^n}{3n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ che è formata da elementi alternativamente maggiori e minori di 2: $\left\{\dfrac{6\cdot 1+(-1)^1}{3\cdot 1}, \dfrac{6\cdot 2+(-1)^2}{3\cdot 2}, \dfrac{6\cdot 3+(-1)^3}{3\cdot 3}, \dfrac{6\cdot 4+(-1)^4}{3\cdot 4}, \ldots\right\} = \left\{\dfrac{5}{3}, \dfrac{13}{6}, \dfrac{17}{9}, \dfrac{25}{12}, \ldots\right\}$, come ci suggerisce anche il grafico seguente, possiamo pensare che il numero limite della successione sia 2.



Quindi in effetti dire che il limite di una successione è un certo numero ℓ, vuol dire che comunque togliamo o aggiungiamo una quantità positiva ε a ℓ, troviamo un elemento della successione, tale che tutti quelli che lo seguono sono più vicini a ℓ, di quanto lo possano essere sia $\ell + \varepsilon$ che $\ell - \varepsilon$. Poniamo allora la seguente definizione.

Definizione 10

Una successione $\{a_n\}$ per la quale, comunque si fissi un numero positivo ε, esiste un numero reale ℓ e un suo elemento a_k, tale che tutti i numeri che seguono a_k siano minori di $\ell + \varepsilon$ e maggiori di $\ell - \varepsilon$, si dice **convergente al numero ℓ**. Simbolicamente scriviamo: $\forall\varepsilon>0, \exists k\in\mathbb{N}: n > k \Rightarrow \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$, l'ultima disuguaglianza può anche scriversi nella seguente forma compatta: $|a_n - \ell| < \varepsilon$.

Definizione 11

Una successione convergente o divergente si dice **successione regolare**.
Una successione non regolare si dice **oscillante** o anche **indeterminata**.

Notazione 5

Una successione convergente si indica con la scritta $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell$, e si legge *limite per n che tende a più infinito di a_n è il numero reale ℓ.*

Esempio 17

Vogliamo provare che $\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n+3}=\frac{1}{2}$, cioè che ∀ε>0, ∃k∈ℕ: $n > k \Rightarrow$ ½ – ε < $\frac{n+1}{2n+3}$ < ½ + ε. Risolviamo la disequazione come fosse un sistema: $\begin{cases}\frac{n+1}{2n+3}>\frac{1}{2}-\varepsilon\\ \frac{n+1}{2n+3}<\frac{1}{2}+\varepsilon\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cancel{2n}+2>\cancel{2n}+3-4n\varepsilon-6\varepsilon\\ \cancel{2n}+2<\cancel{2n}+3+4n\varepsilon+6\varepsilon\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4n\varepsilon>1-6\varepsilon\\ 4n\varepsilon>-1-6\varepsilon\end{cases}$, la seconda disequazione è sempre verificata, quindi deve essere $n>\frac{1-6\varepsilon}{4\varepsilon}$. Così per esempio se scegliessimo ε = 0,01 avremo: ½ – 0,01 < $\frac{n+1}{2n+3}$ < ½ + 0,01 ⇒ 0,49 < $\frac{n+1}{2n+3}$ < 0,51, per $n>\frac{1-0,06}{0,04}=23,5$, cioè per tutti gli elementi dal 24-mo in poi.

Anche per le successioni convergenti enunciamo un'ovvia condizione necessaria.

Teorema 4

Condizione necessaria affinché una successione sia convergente è che essa sia limitata.

Dimostrazione per esercizio

Come già notato con la successione $\{sin(n)\}$, che è una successione limitata, la condizione non è sufficiente. Abbiamo detto più volte che la condizione di convergenza da un punto di vista intuitivo equivale a dire che all'aumentare di n i termini, in valore assoluto, sono sempre più simili fra loro, cioè la loro differenza in valore assoluto è sempre più vicina a zero. Questo fatto intuitivo è confermato dal seguente teorema.

Teorema 5 (Criterio di Cauchy)

Si ha: $\lim_{n\to\infty}a_n=\ell \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(a_{n+1}-a_n\right)=0$.

Dimostrazione per esercizio

Esempio 18

Abbiamo parlato di valore assoluto della differenza di termini consecutivi perché non è detto che l'avvicinamento al limite sia sempre nello stesso verso. Per esempio la successione $\left\{\frac{6n+(-1)^n}{3n}\right\}$ che abbiamo visto convergere a 2, ma con elementi alternativamente maggiori e minori di 2, avrà la successione delle differenze dei valori assoluti formata alternativamente da numeri positivi e negativi, ma sempre più prossimi a zero.

Da ogni successione se ne possono ottenere infinite altre, semplicemente considerandone alcuni suoi sottoinsiemi infiniti.

Definizione 12

Ogni sottoinsieme ordinato e infinito di una successione $\{a_n\}$, si chiama sua **successione estratta**.

Con la dicitura sottoinsieme ordinato, intendiamo che il reciproco ordine fra gli elementi viene conservato. Così per esempio se estraiamo due elementi: a_n, a_m con $n < m$ (attenzione! ciò non significa per forza che sia $a_n < a_m$), se essi nella successione estratta saranno rispettivamente gli elementi a'_k, a'_h, si avrà $k < h$.

Esempio 19

Data la successione $\left\{\frac{6n+(-1)^n}{3n}\right\}$, possiamo considerare la successione estratta da essa semplicemente eliminando i primi 10 termini, cioè

$$\left\{\frac{6n+(-1)^n}{3n}\right\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{1,2,...,10\}}=\left\{\frac{6\cdot 11+(-1)^{11}}{3\cdot 11},\frac{6\cdot 12+(-1)^{12}}{3\cdot 12},\frac{6\cdot 13+(-1)^{13}}{3\cdot 13},\frac{6\cdot 14+(-1)^{14}}{3\cdot 14},...\right\}$$

Oppure considerando solo i termini di posto pari:

$$\left\{\frac{6n+(-1)^n}{3n}\right\}_{n\in\mathbb{N}_p}=\left\{\frac{6\cdot 2+(-1)^{2}}{3\cdot 2},\frac{6\cdot 4+(-1)^{4}}{3\cdot 4},\frac{6\cdot 6+(-1)^{6}}{3\cdot 6},\frac{6\cdot 8+(-1)^{8}}{3\cdot 8},...\right\}$$

e infinite altre.

La prima questione che vogliamo risolvere è: che rapporto vi è fra il limite di una successione regolare e quello di una sua estratta? La risposta appare abbastanza ovvia ed è enunciata di seguito.

Teorema 6

Ogni successione estratta da una successione regolare ha il suo stesso limite.

Dimostrazione

Supponiamo che la successione sia divergente positivamente, allora ogni suo sottoinsieme infinito continuerà a essere illimitato superiormente. Inoltre, dire che la successione diverge positivamente vuol dire che fissato un certo numero M vi è un numero k tale che si abbia $a_n > M$, $\forall\ n > k$.
Ma di elementi a_n con $n > k$ nella successione estratta ce ne sono infiniti e sono posti nello stesso ordine, quindi avremo anche $a'_n > M$, $\forall\ n > k'$, in cui abbiamo indicato con a'_n gli elementi della successione estratta e con k' un numero naturale, non minore di k, per il quale vale la detta proprietà. Ciò vuol dire che anche $\lim_{n\to\infty} a_n' = +\infty$. Dimostrazioni simili possono effettuarsi per gli altri tipi di regolarità della successione e li lasciamo per esercizio.

Chiariamo quanto detto con un esempio.

Esempio 20

Abbiamo già visto che la successione $\left\{\sqrt{5n-13}\right\}$ è divergente positivamente e che per M = 1000, si ha: $\sqrt{5n-13}>1000 \Rightarrow n>200002$, cioè k = 200003. Se adesso consideriamo la successione estratta considerando tutti i termini il cui indice è un multiplo di 4 (4, 8, 12, 16, …), avremo che $\begin{cases}\sqrt{5n-13}>1000\\ n=4,8,12,16,...\end{cases} \Rightarrow n\geq 200004$, dato che l'elemento di posto 200003 della successione di partenza non è stato estratto, il primo estratto che verifica la proprietà di essere maggiore di 1000 è perciò quello di posto 200004.

Non è vero però, in generale, che se una successione ha una o più sue estratte che hanno lo stesso limite allora la successione ha lo stesso limite.

Esempio 21

Dalla successione oscillante $\{(-1)^n \cdot n^2\}$ possiamo estrarre infinite successioni divergenti positivamente, basta scegliere un sottoinsieme infinito i cui elementi sono tutti positivi. Del resto possiamo anche estrarre infinite successioni divergenti negativamente.

Vale però la seguente proprietà.

Teorema 7

Se da una successione $\{a_n\}$ possiamo estrarre due o più successioni regolari aventi lo stesso limite, tali che la loro unione sia uguale ad $\{a_n\}$ o differisca da essa solo per un numero finito di termini, allora anche $\{a_n\}$ ha lo stesso limite delle estratte.

Esempio 22

Consideriamo la successione $\{a_n\}$ = {12, –4, 31, 45, 1, 5/3, 1, 9/7, 1, 13/11, …}, i cui elementi di posto dispari a partire dalla quinta posizione sono tutti uguali a 1, mentre quelli di posto pari a partire dalla sesta posizione, sono frazioni del tipo $\frac{k+1}{k-1}$. Possiamo estrarre da questa la successione formata tutta da 1 e la successione delle frazioni $\left\{\frac{5}{3},\frac{9}{7},\frac{13}{11},...\right\}$, che converge a 1 (come ci convinciamo facilmente). Dato che l'unione delle due successioni fornisce tutta la successione di partenza tranne i suoi primi 4 elementi, possiamo dire che anche $\{a_n\}$ converge a 1.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Sapendo che $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+3}{n+1}=1$, determinare il primo numero naturale p per cui tutti gli elementi successivi sono compresi tra 1 e 1,0001.

Dobbiamo risolvere la disequazione: $1<\frac{n+3}{n+1}<1{,}0001$. Poiché $n + 3 > n + 1$, la disuguaglianza sinistra è sempre vera. Risolviamo l'altra: $n + 3 < 1{,}0001n + 1{,}0001 \Rightarrow 0{,}0001n > 1{,}9999 \Rightarrow n > 19999$

Quindi tenendo conto che n è un numero naturale, il primo valore è 20000. Infatti avremo:

$$\frac{19999+3}{19999+1}=1{,}0001;\ \frac{20000+3}{20000+1}\approx 1{,}000099995<1{,}0001$$

Tenuto conto del limite indicato determinare il primo numero naturale *p* a partire dal quale tutti gli elementi della successione verificano la richiesta

Livello 1

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n}{n+2}=2\Rightarrow 1{,}999<\frac{2n}{n+2}<2$ [3999] $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4n+1}{4n+2}=1\Rightarrow 0{,}999<\frac{4n+1}{4n+2}<1$ [250]
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n-1}{4n-3}=\frac{1}{2}\Rightarrow 0{,}5<\frac{2n-1}{4n-3}<0{,}501$ [126] $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2+n}{n^2-1}=1\Rightarrow 1<\frac{n^2+n}{n^2-1}<1{,}0001$ [57946]
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n^2}{n^2-2}=2\Rightarrow 2<\frac{2n^2}{n^2-2}<2{,}001$ [64] $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n^2+1}=0\Rightarrow 0<\frac{n}{n^2+1}<0{,}00001$ [100001]
4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{1-n^2}=0\Rightarrow -0{,}00001<\frac{n}{1-n^2}<0$ [100001] $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2-1}{3n^2-2n-1}=\frac{1}{3}\Rightarrow 0{,}33<\frac{n}{n^2+1}<0{,}34$ [34]

Livello 2

5. Provare che non esiste alcun numero naturale p per il quale siano vere le seguenti disequazioni, per ogni $n \ge p$: $\frac{3n+1}{2n-1}>2{,}001$; $\frac{2n+1}{n}<1{,}999$; $\frac{n^2+1}{n-1}<100000$; $\frac{2n}{n+2}<2{,}001$; $\frac{2n-1}{4n-3}<0{,}499$

Lavoriamo insieme

Vogliamo provare che $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+3}{n+1}=1$, cioè che comunque consideriamo ε > 0, esiste un numero naturale h, per cui si ha: $1-\varepsilon<\frac{n+3}{n+1}<1+\varepsilon$, per tutti gli $n > h$. Risolviamo la disequazione sotto forma di sistema:

$$\begin{cases}\frac{n+3}{n+1}>1-\varepsilon\\ \frac{n+3}{n+1}<1+\varepsilon\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n+3>n+1-n\varepsilon-\varepsilon\\ n+3<n+1+n\varepsilon+\varepsilon\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}n\varepsilon>-2-\varepsilon\\ n\varepsilon>2-\varepsilon\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N}\\ n>\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}\end{cases}\Rightarrow n>\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}$$

Che è quanto volevamo provare, così per esempio se scegliessimo ε = 0,001, *h* sarebbe $\left\lfloor\frac{2-0,001}{0,001}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{1,999}{0,001}\right\rfloor=1999$, quindi tutti gli elementi successivi al 1999° stanno nell'intervallo [0,009; 1,001]

Verificare la validità dei seguenti limiti

Livello 1

6. $\lim_{n\to+\infty}\frac{3n+1}{n+2}=3$ $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{4n}{n+5}}=2$ $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}=1$ $\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n^2+1}=0$ $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}=0$

7. $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=0$ $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+2}=1$ $\lim_{n\to+\infty}\frac{3n+1}{4n+2}=\frac{3}{4}$ $\lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{4n-5}=\frac{1}{2}$ $\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2+n}{n^2-1}=2$

8. $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2-1}=1$ $\lim_{n\to+\infty}\frac{5n}{n^2+1}=0$ $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{1-n^2}=0$ $\lim_{n\to+\infty}\frac{4n^2+n+5}{n+2n^2-2}=2$ $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$

Livello 2

9. $\lim_{n\to+\infty}sin\left(\frac{1}{n+1}\right)=0$ $\lim_{n\to+\infty}sin^{-1}\left(\frac{n}{n+1}\right)=\frac{\pi}{2}$ $\lim_{n\to+\infty}tan^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)=\frac{\pi}{4}$ $\lim_{n\to+\infty}e^{-n}=0$ $\lim_{n\to+\infty}cos\left(\frac{1}{n}\right)=1$

10. Provare che $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+1}{n^2-1}\neq0$; $\lim_{n\to+\infty}\frac{3n+1}{2n}\neq1,49999$; $\lim_{n\to+\infty}sin\left(\frac{\pi n-1}{6n}\right)\neq1,5001$

Giustificare la risposta ai seguenti quesiti

11. Se $\{a_n\}$ ha un miliardo di elementi maggiori di 100, è possibile che $\lim_{n\to+\infty}a_n=-5$? [Sì]
12. Se $\lim_{n\to+\infty}a_n=1$ è possibile che sia $a_n > 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$? [Sì]
13. Se $\lim_{n\to+\infty}a_n=0$ è possibile che a_n abbia infiniti elementi positivi e infiniti negativi? [Sì]
14. Se $\lim_{n\to+\infty}a_n=2$ è possibile che a_n abbia infiniti elementi negativi? [No]
15. Se a_n ha infiniti elementi negativi è possibile che sia $\lim_{n\to+\infty}a_n=2$? [No]
16. Se a_n ha infiniti elementi negativi è possibile che sia $\lim_{n\to+\infty}a_n=0$? [Sì]

Livello 3

17. Consideriamo una funzione periodica, come *sin*(*x*), *cos*(*x*) e così via. Cosa possiamo dire della successione che si ottiene calcolando la funzione periodica solo per valori naturali, cioè *sin*(*n*), *cos*(*n*), …? [Sono tutte successioni oscillanti]
18. Quanto detto nell'esercizio precedente, è valido anche se una successione *contiene* nella sua definizione una funzione periodica, come per esempio $\{sin(n)/n\}$? [No, in questo caso possiamo ottenere successioni convergenti, divergenti o oscillanti]
19. Se $\{a_n\}$ ha tutti gli elementi maggiori di 2, è possibile che $\lim_{n\to+\infty}a_n=2$? Che $\lim_{n\to+\infty}a_n=1,99$ [Sì; No]

Operazioni aritmetiche con i limiti

Problema

Se conosciamo il limite di due successioni, possiamo calcolare il limite della ulteriore successione che si ottiene mediante procedimenti aritmetici dalle due? E se la risposta è affermativa, il risultato del limite della nuova successione può essere ottenuto anche senza conoscere nei dettagli le successioni?

Finora abbiamo solo enunciato il concetto di limite ma abbiamo solo verificato che un certo limite avesse un dato valore, non lo abbiamo calcolato. Adesso vogliamo imparare a calcolare i limiti. Per fare ciò dobbiamo stabilire anche come possiamo sfruttare risultati già noti, per esempio se sappiamo che una certa successione converge a 2 e un'altra a 3, la successione che otteniamo sommando le due successioni che comportamento ha? Procediamo con ordine, enunciando dei risultati apparentemente banali.

Teorema 8

Una successione costante $\{a\}$ converge al valore costante. Simbolicamente $\lim\limits_{n\to+\infty} a = a$.

Dimostrazione

Dobbiamo provare che comunque scegliamo $\varepsilon > 0$, si ha $|a - a| < \varepsilon$, il che è certamente vero per ogni numero naturale.

Passiamo adesso alle operazioni con i limiti. Prima spieghiamo che significa sommare, moltiplicare e così via, due successioni. Significa semplicemente costruire una successione i cui termini si ottengono sommando, moltiplicando eccetera i termini delle due successioni che occupano le stesse posizioni.

Esempio 23

Consideriamo le successioni $\left\{\dfrac{3n+2}{5n-3}\right\}$ e $\{2n - 1\}$, sommarle significa costruire la successione di termine generale $\left\{\dfrac{3n+2}{5n-3}+2n-1\right\}=\left\{\dfrac{3n+2+10n^2-5n-6n+3}{5n-3}\right\}=\left\{\dfrac{10n^2-8n+3}{5n-3}\right\}$.

Iniziamo a cercare di capire cosa accade sommando algebricamente due successioni regolari.

Teorema 9

Se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$, allora

$$\lim_{n\to+\infty}\left(a_n \pm b_n\right)=a+b;\ \lim_{n\to+\infty}\left(a_n\cdot b_n\right)=a\cdot b;\ \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\frac{a}{b},b\neq 0;\ \lim_{n\to+\infty}\left(a_n\right)^{b_n}=a^b,a>0$$

Dimostrazione

Proviamo solo il risultato sulla somma, lasciando gli altri per esercizio. Prima però osserviamo che per la divisione dobbiamo imporre che sia $b \neq 0$, perché il simbolo $a/0$ non ha significato, allo stesso modo per la potenza dobbiamo evitare di ottenere scritte prive di senso come $(-1)^{½}$.

Dire che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ equivale a dire che $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\ h \in \mathbb{N}$: $n > h \Rightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ (1) e dire che $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$ è lo stesso che dire $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\ k \in \mathbb{N}$: $n > k \Rightarrow b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon$ (2). Noi vogliamo invece provare che vale la seguente scritta: $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\ p \in \mathbb{N}$: $n > p \Rightarrow a + b - \varepsilon < a_n + b_n < a + b + \varepsilon$. Diciamo p il più grande fra i numeri h e k che discendono dalle ipotesi. Così facendo entrambe le scritte (1) e (2) sono entrambe vere, per lo stesso ε. Quindi sommandole termine a termine si ottiene

$$a - \varepsilon + b - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon + b + \varepsilon \Leftrightarrow a + b - 2\varepsilon < a_n < a + b + 2\varepsilon$$

Ma questa è la tesi perché fissare un generico ε è lo stesso che fissare il suo doppio.

Esempio 24

Sapendo che $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+2}{5n-3}=\frac{3}{5}$ e $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{11n^2-4n+3}{2-8n^2}=-\frac{11}{8}$, possiamo dire che si ha:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{5n-3}+\frac{11n^2-4n+3}{2-8n^2}\right)=\frac{3}{5}-\frac{11}{8}=\frac{24-55}{40}=-\frac{31}{40};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{5n-3}-\frac{11n^2-4n+3}{2-8n^2}\right)=\frac{3}{5}-\frac{-11}{8}=\frac{24+55}{40}=\frac{79}{40}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{5n-3}\cdot\frac{11n^2-4n+3}{2-8n^2}\right)=\frac{3}{5}\cdot\frac{-11}{8}=-\frac{33}{40}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{3n+2}{5n-3}}{\frac{11n^2-4n+3}{2-8n^2}}\right)=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{-11}{8}}=-\frac{24}{55};\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{5n-3}\right)^{\frac{11n^2-4n+3}{2-8n^2}}=\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{-11}{8}}=\sqrt[8]{\left(\frac{5}{3}\right)^{11}}$$

Non ha invece senso $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{11n^2-4n+3}{2-8n^2}\right)^{\frac{3n+2}{5n-3}}$.

Abbiamo lasciato però irrisolto il caso $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ con $b = 0$. Prima dobbiamo fare una precisazione. Una successione può convergere a zero essenzialmente in tre modi diversi.

Esempio 25

Abbiamo $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0;\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-1}{n}=0;\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$, come facilmente può dimostrarsi perché nel primo caso si ha $1/n < \varepsilon \Rightarrow n > 1/\varepsilon$; nel secondo caso $-1/n > -\varepsilon \Rightarrow n > 1/\varepsilon$; e nel terzo caso $|(-1)^n/n| < \varepsilon \Leftrightarrow 1/n < \varepsilon$.
La differenza fra i tre limiti è il modo di avvicinarsi a 0, nel primo caso ci avviciniamo per valori positivi, nel secondo per valori negativi e nel terzo per valori alternativamente positivi e negativi.

Tenuto conto dell'esempio precedente possiamo enunciare il seguente risultato.

Teorema 10

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0, a_n\ge 0, \forall n>p\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=+\infty; \lim_{n\to\infty}a_n=0, a_n\le 0, \forall n>p\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=-\infty$$

Dimostrazione

Proviamo solo il primo caso. L'ipotesi equivale a $\forall\varepsilon > 0, \exists\, h \in \mathbb{N}: n > h \Rightarrow -\varepsilon < a_n < \varepsilon$. Provare la tesi invece equivale a provare che $\forall M > 0, \exists\, k \in \mathbb{N}: n > k \Rightarrow 1/a_n > M$. Per dimostrarlo basta scegliere $\varepsilon = 1/M$, in questo caso possiamo scrivere $-1/M < a_n < 1/M, \forall n > h$. Poiché $a_n > 0, \forall n > p$, considerato il maggiore fra p e h che possiamo chiamare simbolicamente k, avremo $a_n < 1/M \Rightarrow 1/a_n < 1/M, \forall n > k$, che è proprio la tesi.

A questo punto possiamo dire che $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a\ne 0, \lim\limits_{n\to+\infty}b_n=0\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\infty$, in cui il segno dell'infinito dipende dal segno di a e dal modo in cui b_n si avvicina a zero. Rimane in ogni caso irrisolto il caso in cui anche a_n converge a zero.

Esempio 26

Sappiamo che $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0;\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0$, facilmente possiamo scrivere: $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot 2n=\lim_{n\to\infty}2=2$, ma ugualmente possiamo scrivere $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}=\frac{1}{2n}\cdot n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

Il precedente esempio ci ha mostrato un fatto finora mai visto, ossia che il risultato di una stessa espressione (in questo caso priva di senso) può avere due risultati diversi. Dobbiamo allora porre una nuova definizione.

Definizione 13

Date due successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ entrambi regolari, sia $\{c_n\}$ una successione ottenuta da esse mediante operazioni algebriche. Se $\lim_{n\to\infty}c_n$ dipende dalle singole successioni e non solo dai loro limiti, diremo che $\lim_{n\to\infty}c_n$ rappresenta una **forma indeterminata**.

Quindi possiamo dire che 0/0 è una forma indeterminata, il che non significa che non possiamo determinarla, ma solo che non possiamo dire il risultato se non conosciamo chi sono le successioni che l'hanno generata. Mentre invece il Teorema 9 afferma che non abbiamo bisogno di conoscere né le successioni né il valore del loro limite convergente per stabilire che se le sommiamo otteniamo ancora una successione convergente alla somma dei detti limiti incogniti.

Passiamo a considerare adesso il caso in cui una successione converge e l'altra diverge.

Teorema 11

Se $\lim_{n\to+\infty}a_n=a$ e $\lim_{n\to+\infty}b_n=\pm\infty$, allora

$$\lim_{n\to+\infty}\left(a_n\pm b_n\right)=\mp\infty;\ \lim_{n\to+\infty}\left(a_n\cdot b_n\right)=\begin{cases}\pm\infty & se\, a>0\\ \mp\infty & se\, a<0\end{cases};\ \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=0;\ \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)=\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(a_n\right)^{b_n}=\begin{cases}+\infty & se\left(a>1\wedge b_n\to+\infty\right)\vee\left(0<a<1\wedge b_n\to-\infty\right)\\ 0 & se\left(a>1\wedge b_n\to-\infty\right)\vee\left(0<a<1\wedge b_n\to+\infty\right)\end{cases};\ \lim_{n\to+\infty}\left(b_n\right)^{a_n}=\begin{cases}+\infty & se\left(a>0\wedge b_n\to+\infty\right)\\ 0 & se\left(a<0\wedge b_n\to-\infty\right)\end{cases}$$

Dimostrazione Per esercizio.

Esempio 27

- $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{2n-5}+n\right)=+\infty$, perché la seconda successione è divergente positivamente.
- $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{2n-5}\cdot n\right)=+\infty$, mentre $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-3}{4}\cdot n\right)=-\infty$
- $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{2n-5}\right)^n=+\infty$ mentre $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{2n-5}\right)^{-n}=0$ e $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$

Dal precedente teorema vengono fuori altre forme indeterminate: $0\cdot\infty$, 1^∞, ∞^0, non è invece indeterminata la forma $0/\infty$ che invece fornisce il risultato 0, così come $\infty/0=\infty$, il cui segno dipende non solo da quello dell'infinito, ma anche dal modo in cui si raggiunge lo zero.

Esempio 28

Sappiamo che $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0; \lim_{n\to\infty} n=+\infty$, facilmente possiamo scrivere: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot n=\lim_{n\to\infty}1=1$.

Mentre $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0; \lim_{n\to\infty} n^2=+\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot n^2=\lim_{n\to\infty} n=+\infty$.

Rimane adesso da considerare il fatto che entrambe le successioni siano divergenti.

Teorema 12

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n=\pm\infty$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n=\pm\infty$, allora

$$\lim_{n\to+\infty}\left(a_n+b_n\right)=\pm\infty; \lim_{n\to+\infty}\left(a_n\cdot b_n\right)=\infty; \lim_{n\to+\infty}\left(a_n\right)^{b_n}=\begin{cases}+\infty & se\left(a_n\to+\infty\wedge b_n\to+\infty\right)\\ 0 & se\left(a_n\to+\infty\wedge b_n\to-\infty\right)\end{cases}$$

Dimostrazione Per esercizio.

Abbiamo un'altra forma indeterminata: $+\infty-\infty$, non è invece indeterminata la forma $+\infty^{\pm\infty}$.

Esempio 29

Abbiamo $\lim_{n\to\infty}\left(n^3-2+\sqrt{n^2-n+1}\right)=+\infty$. Invece $\lim_{n\to\infty}\left(n^3-n^3\right)=0$ e $\lim_{n\to\infty}\left[n^3-\left(n^3-1\right)\right]=1$, che conferma il fatto che $+\infty-\infty$ è una forma indeterminata.

Successioni infinitesime e infinite

Se una quantità non negativa fosse così piccola di qualsiasi altra data quantità, allora certamente non potrebbe essere altri che zero. A quelli che chiedono cosa sia una quantità infinitamente piccola in matematica, rispondiamo che è effettivamente zero. Quindi non ci sono così tanti misteri nascosti in questo concetto, come si è soliti credere. Questi supposti misteri hanno reso il calcolo dell'infinitamente piccolo sospetto a molte persone. Quei dubbi che rimangono li rimuoveremo profondamente nelle pagine seguenti, in cui spiegheremo questo calcolo. *Leonhard Euler, Introductio in analysin infinitorum*, 1748

Per migliorare le nostre capacità di calcolare i limiti delle successioni, soprattutto delle forme indeterminate, confrontiamo fra loro due successioni divergenti o entrambe convergenti a zero.
Per comodità poniamo le seguenti definizioni.

Definizione 14

- Una successione convergente al numero zero si dice **successione infinitesima**.
- Una successione divergente si dice **successione infinita**.

Una conseguenza immediata della definizione di successione infinitesima è la seguente.

Corollario 1

Se si ha $|\ell| < \varepsilon$, $\forall\ \varepsilon > 0$ allora $\ell = 0$.

Non tutte le successioni infinite divergono allo stesso modo, così come non tutte le successioni infinitesime convergono a zero allo stesso modo.

Esempio 30

Non è difficile convincersi che entrambe le successioni $\{n^2\}$, $\{n^5\}$ sono divergenti positivamente. Altrettanto facilmente ci convinciamo però che la seconda successione cresce più rapidamente della prima, per esempio il millesimo elemento della prima successione è $(10^3)^2 = 10^6$, mentre quello della seconda è $(10^3)^5 = 10^{15} >>$

10^6 (il simbolo >> si legge *molto maggiore di*). Ciò significa che se sottraiamo termine a termine ciascun elemento della prima successione dal corrispondente della seconda otterremo una successione divergente negativamente: $\{1 - 1, 4 - 32, 9 - 243, 16 - 1024, \ldots, n^2 - n^5, \ldots\} = \{0, -28, -234, -1008, \ldots, n^2 - n^5, \ldots\}$
La loro somma sarà chiaramente ancora una successione divergente positivamente, ma con un "tasso di crescita" molto più rapido della prima successione e "simile" a quello della seconda.

$$\{1 + 1, 4 + 32, 9 + 243, 16 + 1024, \ldots, n^2 + n^5, \ldots\} = \{2, 36, 252, 1040, \ldots, n^2 + n^5, \ldots\}$$

Moltiplicando invece le due successioni termine a termine, avremo una successione divergente positivamente molto più rapidamente di entrambe le successioni:

$$\{1 \cdot 1, 4 \cdot 32, 9 \cdot 243, 16 \cdot 1024, \ldots, n^2 \cdot n^5, \ldots\} = \{1, 128, 2187, 16384, \ldots, n^7, \ldots\}$$

Infine la successione rapporto sarà una successione infinitesima se la prima successione sarà il numeratore:

$$\{1/1, 4/32, 9/243, 16/1024, \ldots, n^2/n^5, \ldots\} = \{1, 1/8, 1/27, 1/64, \ldots, n^{-3}, \ldots\}$$

e infinita se sarà il denominatore: $\{1/1, 32/4, 243/9, 1024/16, \ldots, n^5/n^2, \ldots\} = \{1, 8, 27, 64, \ldots, n^3, \ldots\}$.

In vista dei precedenti esempi poniamo le seguenti definizioni.

Definizione 15

Date due successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, entrambi divergenti, se

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, diciamo che **$\{a_n\}$ è un infinito di ordine inferiore a $\{b_n\}$** e **$\{b_n\}$ è un infinito di ordine superiore ad $\{a_n\}$**.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \neq 0$, diciamo che **$\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono infiniti dello stesso ordine**. In particolare se $\ell = 1$ si dicono **asintoticamente uguali**.
- non esiste $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$, diciamo che **$\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono infiniti non confrontabili**.

Date due successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, entrambe infinitesime, se

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, diciamo che **$\{a_n\}$ è un infinitesimo di ordine superiore a $\{b_n\}$** e **$\{b_n\}$ è un infinitesimo di ordine inferiore ad $\{a_n\}$**.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \neq 0$, diciamo che **$\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono infinitesimi dello stesso ordine**. In particolare se $\ell = 1$ si dicono **asintoticamente uguali**.
- non esiste $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$, diciamo che **$\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono infinitesimi non confrontabili**.

Esempio 31

Le successioni $\{1/n\}$ e $\{(-1)^n/n\}$ sono entrambe infinitesime, ma non sono confrontabili perché $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n / n}{1/n} = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$, che non esiste.

Il seguente risultato è di immediata comprensione e altrettanto immediata dimostrazione.

Teorema 13

Se n^k, n^h, con h e k numeri reali positivi, sono entrambi infiniti (o infinitesimi) allora fra i due è infinito (infinitesimo) superiore quello con l'esponente maggiore.
Dimostrazione per esercizio

Lo stabilire che un infinito è maggiore di un altro ci permette di calcolare più facilmente il limite della loro somma algebrica. Infatti, tenuto conto dell'esempio precedente, possiamo enunciare il seguente risultato. Per dimostrarlo dobbiamo prendere per buona una cosa che dimostreremo in seguito, ossia che se moltiplichiamo fra di loro due successioni divergenti otteniamo ancora una successione divergente. Così come che se aggiungiamo un numero a una successione divergente, la successione rimane divergente.

Teorema 14 (Principio di sostituzione degli infiniti)

Il limite della somma algebrica di due o più successioni divergenti è uguale al limite degli infiniti di ordine superiore presenti nella somma.

Dimostrazione

Supponiamo di voler calcolare $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n+b_n\right)$ con $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ e $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\infty$, cioè a_n infinito di ordine superiore a b_n. Possiamo anche scrivere: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n+b_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}+\frac{b_n}{b_n}\right)\cdot b_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}+1\right)\cdot b_n$

Dato che $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}+1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=+\infty, \lim\limits_{n\to\infty} b_n=+\infty$, avremo che anche $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}+1\right)\cdot b_n=+\infty$, che è quanto volevamo provare.

Il precedente risultato risolve la maggior parte delle forme indeterminate + ∞ – ∞.

Esempio 32

- Vogliamo calcolare il seguente limite $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^3-2n^4+n-1\right)$, che è la somma algebrica di tre successioni divergenti e una convergente (la successione costante –1). Dato che si ha:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{-2n^{\cancel{4}}}{\cancel{n^3}}=\lim_{n\to\infty}-2n=-\infty;\lim_{n\to\infty}\frac{-2n^{\cancel{4}\,3}}{\cancel{n}}=\lim_{n\to\infty}-2n^3=-\infty$$
il secondo infinito è superiore agli altri due, possiamo quindi sostituire alla loro somma solo esso. Evidentemente la presenza dell'addendo –1 è del tutto influente, possiamo quindi dire che si ha:
$$\lim_{n\to\infty}\left(n^3-2n^4+n-1\right)=\lim_{n\to\infty}\left(-2n^3\right)=-\infty$$
- Calcolare $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+2-3n}{4-5n^3+2n^2}$. Possiamo applicare il principio di sostituzione degli infiniti sia al numeratore, sia al denominatore $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+2-3n}{4-5n^3+2n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^3}}{-5\cancel{n^3}}=-\frac{1}{5}$.
- Calcolare $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{5n^3}+\sqrt[3]{4n^5}-n}{7\sqrt[7]{2n^2}-n+\sqrt[3]{3n^4}}$. Per applicare il principio di sostituzione degli infiniti, dobbiamo valutare gli esponenti dei singoli termini, scrivendo i radicali in notazione esponenziale
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{5}\cdot n^{\frac{3}{2}}+\sqrt[3]{4}\cdot n^{\frac{5}{3}}-n}{7\sqrt[7]{2}\cdot n^{\frac{2}{7}}-n+\sqrt[3]{3}\cdot n^{\frac{4}{3}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{4}\cdot n^{\frac{5}{3}}}{\sqrt[3]{3}\cdot n^{\frac{4}{3}}}=+\infty$$
- Calcolare $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-n+1}-\sqrt{4n^3+2}\right)$. Applichiamo il principio di sostituzione degli infiniti ai radicandi: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2-n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty} n=+\infty$ e $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\sqrt{4n^3+2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\sqrt{4n^3}\right)=-\infty$. Ma dato che $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-n+1}}{\sqrt{4n^3+2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{4n^3}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^2}{4n^3}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{4n}}=0$, vuol dire che il secondo infinito è maggiore del primo, pertanto possiamo scrivere: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-n+1}-\sqrt{4n^3+2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\sqrt{4n^3+2}\right)=-\infty$.

Facciamo attenzione ad applicare il principio di sostituzione degli infiniti in modo corretto.

Esempio 33

Calcolare $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{2n+2}-\sqrt{2n+5}}$, in questo caso l'applicazione del principio di sostituzione degli infiniti non ci aiuta perché otteniamo una forma indeterminata 0/0: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n}}{\sqrt{2n}-\sqrt{2n}}$. Quindi effettuiamo un altro procedimento, ossia razionalizziamo sia il numeratore che il denominatore:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{2n+2}-\sqrt{2n+5}\right)\cdot\left(\sqrt{2n+2}+\sqrt{2n+5}\right)}\cdot\frac{\sqrt{2n+2}+\sqrt{2n+5}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{2n+2-2n-5}\cdot\frac{\sqrt{2n}+\sqrt{2n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}$$

Come si vede adesso il secondo fattore trattato con il principio di sostituzione degli infiniti non provoca più una forma indeterminata, e il primo fattore si semplifica facilmente: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{-3}\cdot\frac{\cancel{2}\cdot\sqrt{2\cancel{n}}}{\cancel{2}\cdot\sqrt{\cancel{n}}}=\frac{-\sqrt{2}}{3}$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{2n}+\sqrt{3n}-1}{1+\sqrt{5n}-\sqrt[4]{n}}$. Possiamo applicare il principio di sostituzione degli infiniti, ma per fare ciò dobbiamo esprimere i radicali in forma esponenziale: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(2n)^{\frac{1}{3}}+(3n)^{\frac{1}{2}}-1}{1+(5n)^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{4}}}$. A questo punto si tratta di valutare solo gli esponenti, scegliendo i maggiori, in tal modo il limite è equivalente a

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(3n)^{\frac{1}{2}}}{(5n)^{\frac{1}{2}}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3\cancel{n}}{5\cancel{n}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Usando il principio di sostituzione degli infiniti calcolare i seguenti limiti di successioni

***Livello* 1**

1.	$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n^2+1}{3n-1}$	$[+\infty]$	$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4n+1}{5-n}$	$[-4]$	$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{7n^2-1+n^3}{5n^2+2n+1}$	$[+\infty]$
2.	$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4n^2+n-1}{7n-3n^2}$	$[-4/3]$	$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2-3}$	$[0]$	$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2-n}{n^2+n}$	$[1]$
3.	$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4n+\sqrt{2n}}{\sqrt{2n^3}-n}$	$[0]$	$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{4n}+\sqrt[3]{2n}}{n}$	$[0]$	$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n}{\sqrt{5n}+2}$	$[+\infty]$
4.	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{8n^2-n}{5n-1+3n^2}\right)^4$	$[(8/3)^4]$	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5n^2-1}{7n^3-n}\right)^3$	$[0]$	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5n^2-7}{8n^2-3n+1}\right)^4$	$[(5/8)^4]$
5.	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3n^2-1+2n}{4n-5}\right)^3$	$[+\infty]$	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3n^2+n^4}{4n^4-5}\right)^5$	$[0]$	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{2}n^2-1}{n^2+n-2}\right)^7$	$\left[8\cdot\sqrt{2}\right]$
6.	$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[5]{\frac{4n^4+n^2-3}{1+n^2-3n^5}}$	$[+\infty]$	$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[7]{\frac{4n^2+n-1}{n^2-n^3+2}}$	$[0]$	$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{4n^5+n-3}{n^3-2n^5+n}}$	$\left[\sqrt[3]{-2}\right]$
7.	$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[4]{\frac{5n^2+2}{n+4n^2+3}}$	$\left[\sqrt[4]{\frac{5}{4}}\right]$	$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[5]{\frac{n^3+2n-1}{4n-3n^3+1}}$	$\left[\sqrt[5]{-\frac{1}{3}}\right]$	$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[5]{\frac{2n^4-n-1}{n^5-3n^3+1}}$	$[0]$

Livello 2

8. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[4]{3n}-\sqrt{n}}{n+\sqrt{4n}-3\cdot\sqrt[3]{n}}$ [0] $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt{n}+5}{4-\sqrt{2n}+\sqrt[6]{3n^4}}$ $\left[\sqrt[6]{\dfrac{1}{3}}\right]$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[5]{4n^3}+\sqrt{2n}}{3-\sqrt{7n}-\sqrt[4]{n^3}}$ [0]

9. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[6]{n}+\sqrt{5n}+7}{n-\sqrt{4n}-\sqrt[4]{3n}}$ [0] $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[5]{n^3}-\sqrt{2n^5}-n}{n+\sqrt{2n^3}+\sqrt[4]{3n^{10}}}$ $\left[-\sqrt[4]{\dfrac{4}{3}}\right]$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt[4]{n}+\sqrt{5n^3}-2}{-3n+\sqrt{n}-\sqrt[4]{n}}$ [–∞]

10. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}+1}{\sqrt{3n^2+n}-5n}$ [0] $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3n+7}+\sqrt{4+5n}}{\sqrt{5n+2}+\sqrt{n+1}}$ [0]

Livello 3

11. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ [0] $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{1-(-1)^n\cdot n}$ [Oscillante] $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2}{1-(-1)^n\cdot n}$ [∞]

12. $\lim\limits_{n\to+\infty}sin\left(\dfrac{\pi}{2}\cdot n\right)$ [Oscillante] $\lim\limits_{n\to+\infty}sin(\pi\cdot n)$ [0] $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{sin(n)}{n}$ [0]

Lavoriamo insieme

Vogliamo calcolare $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{2n^2+n-1}\right)$. Se applichiamo il principio di sostituzione degli infiniti avremo: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2}-\sqrt{2n^2}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n-\sqrt{2}\cdot n\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\sqrt{2}\right)\cdot n=-\infty$.

Oppure avremmo potuto razionalizzare:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{2n^2+n-1}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{2n^2+n-1}\right)\cdot\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{2n^2+n-1}\right)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{2n^2+n-1}}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+1-\left(2n^2+n-1\right)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{2n^2+n-1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{-n^2-n+2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{2n^2+n-1}}$$

E sempre con il principio di sostituzione degli infiniti:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{-n^2}{\sqrt{n^2}+\sqrt{2n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{-n^2}{\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{-n}{1+\sqrt{2}}=-\infty$$

Calcolare i seguenti limiti di successioni:

Livello 1

13. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{3n^2+n+1}-\sqrt{n^2+2n-1}\right)$ [+∞] $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+7}\right)$ [0]

14. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{3n^2+n}-\sqrt{4n^2-1}\right)$ [–∞] $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{4n^2+3}-\sqrt{n^2+2n}\right)$ [+∞]

15. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2\cdot\sqrt{n^2+1}-3\cdot\sqrt{n^2-1}\right)$ [–∞] $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{5n^2+sin(n)}-\sqrt{n^2+2}\right)$ [+∞]

Livello 2

16. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2n^2+1}-2n}{\sqrt{3n^2+1}+n}$ $\left[\dfrac{\sqrt{6}-2\cdot\sqrt{3}-\sqrt{2}+2}{2}\right]$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2n^2+3n+1}-4n}{\sqrt{n^2+3}+5n}$ $\left[\dfrac{\sqrt{2}-4}{6}\right]$

17. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3n+2}-\sqrt{5+n}}{\sqrt{6n-1}-\sqrt{7n}}$ $\left[\sqrt{7}+\sqrt{6}-\sqrt{21}-3\cdot\sqrt{2}\right]$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{2+n}}{\sqrt{3n+5}-\sqrt{4n+8}}$ [+∞]

18. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+3n}-4n}{\sqrt{n^2+n-1}+n}$ [–3/2] $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+3n}-4n}{\sqrt{n^2+n-1}-n}$ [–∞]

19. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+3n}+4n}{\sqrt{n^2+n-1}+n}$ [5/2] $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+3n}+4n}{\sqrt{n^2+n-1}-n}$ [+∞]

Lavoriamo insieme

Determinare il valore del parametro k per il quale si ha $\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^3+4n-1}{2n-k\cdot n^3+2}=\frac{4}{3}$. Poiché

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^3+4n-1}{2n-k\cdot n^3+2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^3}{-k\cdot n^3}=-\frac{3}{k},\text{ deve essere } -\frac{3}{k}=\frac{4}{3}\Rightarrow k=-\frac{9}{4}.$$

Determinare il valore del parametro reale *k* per il quale si ha la validità delle uguaglianze seguenti

Livello 1

20. $\lim_{n\to+\infty}\frac{k\cdot n^4+n-3}{5n^4-n^2+1}=-\frac{1}{4}$ [–5/4] $\lim_{n\to+\infty}\frac{5n^2+2n-2}{k\cdot n^2+3n-2}=\frac{2}{3}$ [15/2]

21. $\lim_{n\to+\infty}\frac{k\cdot n^4+2n-1}{3n+k\cdot n^4+1}=\frac{5}{2}$ [$\varnothing$] $\lim_{n\to+\infty}\frac{-k\cdot n^3+n}{3n+5n^3+1}=\frac{7}{4}$ [–35/4]

22. $\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^5+n^2-3}{5n^4-k\cdot n^5+n}=\frac{5}{3}$ [–9/5] $\lim_{n\to+\infty}\frac{k\cdot n^3+2n^4-1}{2kn+3n^4}=\frac{2}{3}$ [$\forall k\in\mathbb{R}$]

23. $\lim_{n\to+\infty}\frac{(2k+1)\cdot n^2+3}{(3k-2)n^2+1}=\frac{5}{3}$ [13/9] $\lim_{n\to+\infty}\frac{(k^2-1)\cdot n^2+2}{(2k^2+1)\cdot n^2+3}=\frac{1}{4}$ $\left[\pm\frac{\sqrt{10}}{2}\right]$

24. $\lim_{n\to+\infty}\frac{(k^2+k-1)\cdot n^3+n}{(k^2-k+1)\cdot n^3-n^2}=2$ [$\varnothing$] $\lim_{n\to+\infty}\frac{(k^2+k-1)\cdot n^3+n}{(k^2-k+1)\cdot n^3-n^2}=1$ [1]

Studiare i seguenti limiti al valore del parametro reale *k*

Livello 2

25. $\lim_{n\to+\infty}\frac{(k+1)\cdot n^3+n^2}{(2k-1)\cdot n^4-1}$ $\left[\begin{cases}0 & k\neq\frac{1}{2}\\ -\infty & k=\frac{1}{2}\end{cases}\right]$ $\lim_{n\to+\infty}\frac{(2k-5)\cdot n^2+n-1}{(3k-1)\cdot n^2+n}$ $\left[\begin{cases}\frac{2k-5}{3k-1} & k\neq\frac{1}{3}\\ -\infty & k=\frac{1}{3}\end{cases}\right]$

26. $\lim_{n\to+\infty}\frac{(3k+1)\cdot n^2+1}{(2k-1)\cdot n^2+n+1}$ $\left[\begin{cases}\frac{3k+1}{2k-1} & k\neq\frac{1}{2}\\ +\infty & k=\frac{1}{2}\end{cases}\right]$ $\lim_{n\to+\infty}\frac{(k-1)\cdot n^2+n}{(k+1)\cdot n^2+2}$ $\left[\begin{cases}\frac{k-1}{k+1} & k\neq-1\\ -\infty & k=-1\end{cases}\right]$

27. $\lim_{n\to+\infty}\frac{(k^2-1)\cdot n^3+n^2}{(k+1)\cdot n^3-n^2}$ $\left[\begin{cases}k-1 & k\neq-1\\ -1 & k=-1\end{cases}\right]$ $\lim_{n\to+\infty}\frac{(k+2)\cdot n^3+k\cdot n^2}{(k-3)\cdot n^3+2n^2}$ $\left[\begin{cases}\frac{k+2}{k-3} & k\neq3\\ +\infty & k=3\end{cases}\right]$

Livello 3

28. $\lim_{n\to+\infty}\frac{(k-2)\cdot n^2+2n}{(k^2-4)\cdot n^2+3n-1}$ $\left[\begin{cases}\frac{2}{3} & k=2\\ -\infty & k=-2\\ \frac{1}{k+2} & k\neq\pm2\end{cases}\right]$ $\lim_{n\to+\infty}\frac{(k-1)\cdot n^3+k\cdot n^2-1}{(k+1)\cdot n^2-n}$ $\left[\begin{cases}+\infty & k\leq-1\vee k>1\\ \frac{1}{2} & k=1\\ -\infty & -1<k<1\end{cases}\right]$

29. $\lim_{n\to+\infty}\frac{(k+1)\cdot n^4+k\cdot n^3+n^2}{(2k+1)\cdot n^3-(k-1)\cdot n^2+n}$ $\left[\begin{cases}+\infty & k<-1\vee k\geq-1/2\\ 1 & k=-1\\ -\infty & -1<k<-1/2\end{cases}\right]$

Proprietà dei limiti di successione

Così i naturalisti osservano, una pulce ha pulci più piccole su di esse; e queste ne hanno di ancora più piccole che le mordono; e così procedendo ad infinitum.
Jonathan Swift, *Poetry a Rhapsody*

Adesso vogliamo considerare alcuni teoremi che ci risulteranno utili nello studio delle successioni. Il primo di essi appare banale, ma è invece di fondamentale importanza.

Teorema 15 (di unicità del limite)

Una successione regolare non può ammettere due limiti distinti.

Dimostrazione.

Dato che una successione convergente è limitata, mentre una divergente non lo è, è ovvio che se una successione converge non diverge e viceversa. Allo stesso modo se una successione diverge positivamente non può divergere negativamente e viceversa, sempre per il fatto che le due divergenze implicano illimitatezze della successione di diverso genere. Rimane quindi da provare solo il fatto che una successione convergente non può avere due distinti limiti.

Supponiamo allora che si abbia: $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell, \lim_{n\to\infty} a_n = m$, con $\ell \neq m$. Ciò significa che, fissato un certo numero positivo ε, si avrà $|a_n - \ell| < \varepsilon, \forall n > h$ e $|a_n - m| < \varepsilon, \forall n > k$, con h e k numeri naturali anche distinti. Se tali numeri sono diversi uno dei due sarà il maggiore, supponiamo sia h. Ciò significa allora che per $n > h$ si avrà $|a_n - \ell| < \varepsilon$ e $|a_n - m| < \varepsilon$, cioè $|a_n - \ell| + |a_n - m| < 2\varepsilon$. Ma possiamo anche scrivere: $|\ell - m| = |\ \ell - a_n + a_n - m| \leq |a_n - \ell| + |a_n - m| < 2\varepsilon$. Dato che 2ε è un numero qualsiasi vuol dire, per il Corollario 1, che $|\ell - m| = 0$, cioè $\ell = m$, che è proprio ciò che volevamo provare.

Enunciamo un altro risultato intuitivo.

Teorema 16 (di permanenza del segno)

Se una successione $\{a_n\}$ è divergente positivamente o convergente a un numero positivo, allora esiste un numero naturale h per cui si ha: $a_n > 0, \forall\ n > h$.

Se una successione $\{a_n\}$ è divergente negativamente o convergente a un numero negativo, allora esiste un numero naturale h per cui si ha: $a_n < 0, \forall\ n > h$.

Dimostrazione per esercizio.

Nei teoremi sulle operazioni con i limiti non abbiamo considerato il caso in cui una delle due successioni o entrambe siano oscillanti. Vi sono alcuni casi in cui possiamo calcolarne i limiti.

Esempio 34

- La successione $\{sin(n)\}$ è oscillante. Se la sommiamo a una successione infinita il risultato sarà ancora una successione infinita, dato che $\{sin(n)\}$ è limitata.
- Ciò non è vero se la moltiplichiamo per una successione infinita, dato che essa cambia segno infinite volte. Per esempio la successione $\{n^2 \cdot sin(n)\}$ è ancora oscillante, come si comprende considerando già i suoi primi dieci termini: {0,8414709848; 3,637189707; 1,270080072; –12,10883992; –23,97310686; –10,05895793; 32,19234333; 63,31892778; 33,38159730; –54,40211108}
- Se sommiamo invece una successione convergente e una oscillante ancora una volta non possiamo dire niente in generale, potendo avere una successione ancora oscillante, come per esempio per $\left\{(-1)^n + \frac{5n+1}{3n-2}\right\}$. Lo stesso può dirsi per il prodotto.

In effetti c'è un teorema che risolve alcuni casi di prodotti fra successioni, una delle quali infinitesima, ed è il seguente.

Teorema 17

Il prodotto di una successione infinitesima per una successione limitata è una successione infinitesima.

Dimostrazione

Per ipotesi si abbia $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ed $\exists\, L > 0$: $|b_n| < L$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Vogliamo dimostrare che si ha:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0\text{, cioè } \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, p \in \mathbb{N}: n > p \Rightarrow |a_n \cdot b_n| < \varepsilon$$

Ora dire che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ equivale a dire che $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, t \in \mathbb{N}: n > t \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$.

Ma allora per ogni $n > t$ abbiamo $|a_n \cdot b_n| < L \cdot \varepsilon$, vista l'arbitrarietà di ε, questa disuguaglianza equivale alla tesi.

Negli esempi precedenti abbiamo considerato successioni che assumevano valori via via più grandi, o più piccoli, ma anche successioni che avevano un andamento di tipo oscillante. Vogliamo studiare quelle dei primi due tipi.

Definizione 16

Una successione $\{a_n\}$, per la quale si ha

- $a_{n+1} > a_n\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ si dice **successione crescente;**
- $a_{n+1} < a_n\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ si dice **successione decrescente**;
- $a_{n+1} \geq a_n\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ si dice **successione non decrescente;**
- $a_{n+1} \leq a_n\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ si dice **successione non crescente;**
- Una successione di uno dei quattro tipi precedenti si chiama **successione monotòna.**

Esempio 35

- $\{n + 1\}$ è crescente, dato che naturalmente $n + 1 > n$ per ogni numero naturale.
- $\{1 - n^2\}$ è banalmente decrescente.
- $\{1; 1; 1; 1; 2; 3; 4; 5; \ldots\}$ è non decrescente.
- $\{10; 8; 8; 3; 1; 1; 0; 0; -1; -1; -2; -2; \ldots\}$ è non crescente.
- $\{n \cdot tan(n)\}$ non è monotòna, come si capisce facilmente calcolandone alcuni termini: {1,557407724; –2,185039863; –0,1425465430; 1,157821282; –3,380515006;–0,2910061913; 0,8714479827; –6,799711455; –0,4523156594; 0,6483608274},
- $\{7; 4; 1; -2; 5; 1; 4; 9; 16; 25; \ldots\}$ è definitivamente crescente.

Le successioni monotòne sono importanti perché hanno un comportamento particolare. Vale infatti il seguente teorema.

Teorema 18

Una successione definitivamente monotona è sempre regolare. In particolare se è

- limitata è convergente;
- illimitata superiormente è divergente positivamente;
- illimitata inferiormente è divergente negativamente.

Non dimostriamo il teorema, ma mediante esso studiamo un'importante successione.

Esempio 36

Abbiamo già considerato nell'unità sulle progressioni geometriche la capitalizzazione composta, in cui la cedola non viene liquidata, ma viene integrata nel capitale che così aumenta quindi l'anno successivo la cedola sarà maggiore. Costruiamo un tabella con l'andamento del capitale, nell'ipotesi di tasso pari al 3% del capitale:

Anni	Capitale
1	$C + 0.03C = (1+0.03)\cdot C$
2	$(1+0.03)\cdot C + 0.03\cdot(1+0.03)\cdot C = (1+0.03)\cdot(1+0.03)\cdot C = (1+0.03)^2\cdot C$
3	$(1+0.03)^2\cdot C + 0.03\cdot(1+0.03)^2\cdot C = (1+0.03)^2\cdot(1+0.03)\cdot C = (1+0.03)^3\cdot C$
....	....
n	$(1+0.03)^{n-1}\cdot C + 0.03\cdot(1+0.03)\cdot C = (1+0.03)^{n-1}\cdot(1+0.03)\cdot C = (1+0.03)^n\cdot C$

In generale possiamo considerare la successione, nel caso di generico tasso t, $(1 + t)^n \cdot C$.

Il caso più generale è quello di capitalizzazione composta a tasso variabile, in cui quindi t dipende con leggi più o meno complicate da n. In particolare scegliendo $t = 1/n$ e $C = 1$, avremo la seguente legge: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Per essa vale il seguente importante risultato.

Teorema 19

La successione $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ è crescente e limitata quindi è convergente. Il suo limite è un numero che si indica con il simbolo e, le cui prime cifre decimali sono 2,718281.

Dimostrazione Omessa

Il limite precedente è della forma 1^∞, che abbiamo visto essere una forma indeterminata. Applicandolo alla legge di capitalizzazione composta con tasso variabile notiamo un fatto a prima vista sorprendente, il guadagno così ottenuto, per una durata infinita del prestito, non è infinito, come può pensarsi, ma ha un limite superiore, che è appunto il numero e.

In effetti il teorema si può enunciare in forma più generale.

Teorema 20

Se $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ allora: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$.

Esempio 37

Vogliamo calcolare il seguente limite $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{3n^2+1}$. Per potere sfruttare il teorema precedente dobbiamo trasformare la successione limite: $\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{3n^2+1}{n^2}}$, adesso calcoliamo il limite all'interno delle parentesi quadre con il teorema precedente: $\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{3n^2+1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{3n^2+1}{n^2}} = e^3$.

Vi è anche un'altra interessante successione da studiare con l'ausilio del teorema sulle successioni monotone.

Esempio 38

- Consideriamo la successione $\{2^n\}$, questa è certamente illimitata superiormente, ma è anche crescente. Difatti facilmente si ha che $2^{n+1} = 2^n \cdot 2 > 2^n, \forall n \in \mathbb{N}$. Ciò significa, per il Teorema 18 che: $\lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty$.
- Sia la successione $\{1/3^n\}$ questa è ovviamente limitata, inferiormente dallo zero e superiormente da 1 poiché una potenza di una frazione propria è sempre una frazione propria, quindi è un numero minore di

1. Tale successione è anche decrescente. Abbiamo infatti: $3^{n+1} = 3^n \cdot 3 > 3^n \Rightarrow 1/3^{n+1} < 1/3^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Quindi, sempre per il Teorema 18, abbiamo: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$. In effetti potevamo dire molto più semplicemente che la data successione è reciproca di una successione infinita, pertanto è infinitesima.

- La successione $\{(-5)^n\}$ è invece ovviamente oscillante, assumendo infiniti valori maggiori di un qualsiasi numero positivo e infiniti valori minori un qualsiasi numero negativo.
- Infine la successione $\{(-¾)^n\}$, potendosi scrivere come prodotto delle due successioni $\{(¾)^n\}$, $\{(-1)^n\}$, la prima delle quali infinitesima (per quanto detto prima) e la seconda limitata, per il Teorema 17 è una successione infinitesima.

In effetti i quattro casi visti in precedenza possono essere generalizzati dal seguente risultato.

Teorema 21

Si ha: $\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } q \ge 1 \\ 0 & \text{se } |q| < 1 \\ \nexists & \text{se } q \le -1 \end{cases}$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Calcolare $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{5}{2n^4-n+1}\right)^{3n-2}$. Operiamo alcuni artifici, per ridurla nella forma a cui possiamo applicare il teorema 20:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n^4-n+1}{-5}}\right)^{3n-2} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2n^4-n+1}{-5}}\right)^{\frac{2n^4-n+1}{-5}}\right]^{(3n-2)\cdot\frac{-5}{2n^4-n+1}} = \lim_{n\to\infty} e^{(3n-2)\cdot\frac{-5}{2n^4-n+1}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{-15n}{2n^4}} = e^0 = 1$$

Usando, laddove necessario, il limite notevole $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$, calcolare i limiti

Livello 1

1. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$ [e] $\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)^{\frac{1}{n}}$ [1] $\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ [e]

2. $\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n-3}\right)^{n+2}$ [$+\infty$] $\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^n$ [$\sqrt{e}$] $\quad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ [$1/e$]

3. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$ [e^2] $\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$ [e^2] $\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$ [1]

4. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2+1}{2n^2-1}}$ [1] $\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{2n-1}$ [e] $\quad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3n+1}{4n-1}\right)^{5n}$ [0]

5. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ [$+\infty$] $\quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^n$ [e^2] $\quad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{4n}\right)^{5n}$ [$e^{-15/4}$]

6. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{5n+1}\right)^{\frac{3}{2}n-1}$ $[e^{3/5}]$ $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{5}{n^2+1}\right)^{n^2-1}$ $[e^{-5}]$ $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{n-2}\right)^{\sqrt{2}n}$ $[e^{2}]$

Livello 2

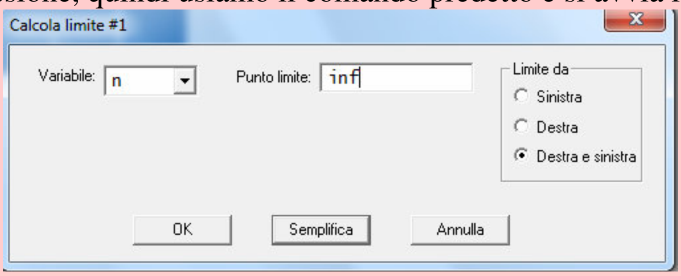
7. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n}$ $[e^{2}]$ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+n-1}{5n+3n^2-2}\right)^{4n+3}$ $[e^{-16/3}]$ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4+3n}{3n-7}\right)^{n+3}$ $[e^{11/3}]$

8. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-3}{2n+n^2}\right)^{5n+1}$ $[+\infty]$ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+n}{5-n^2}\right)^{4n+3}$ [Espressione priva di significato]

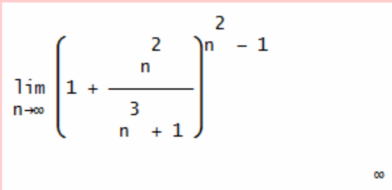
9. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n-3}{2n+2n^2}\right)^{5n+1}$ $[e^{-5/2}]$ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2-1}{4n^2-5n+2}\right)^{3n-1}$ $[e^{15/4}]$ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-1}{n^3+n^2-1}\right)^{3n+1}$ $[e^{-3}]$

L'angolo di Derive

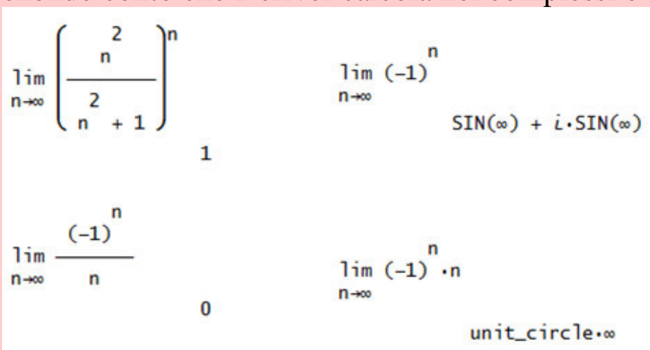
Per calcolare limiti di successioni possiamo usare il pulsante lim, oppure usare il menu **Calcola Limite**
Prima immettiamo la successione, quindi usiamo il comando predetto e si avvia la seguente finestra



nella quale la variabile è già proposta, mentre scriviamo nel **Punto limite** inf o usiamo il simbolo di infinito

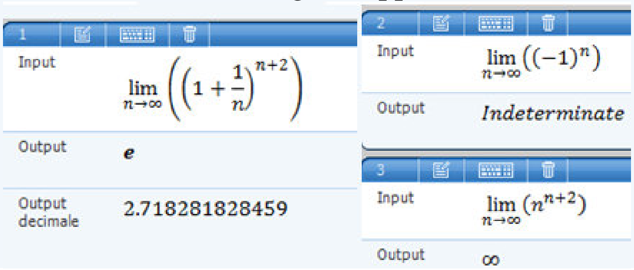


prelevandolo dalla tabella dei simboli di Derive. Ecco il risultato.
In questo modo possiamo calcolare i diversi limiti, tenendo conto che Deriver calcola nei complessi e quindi potrebbe scrivere strane risposte.



L'angolo di Microsoft Mathematics

Possiamo usare il pulsante presente nel menu **Calcolo**. Il calcolo in questo caso non avviene nei complessi, pertanto le successioni indeterminate vengono opportunamente calcolate.



Le Serie numeriche

Se tralasciamo i casi più semplici, non c'è in tutta la matematica una singola serie infinita la cui somma sia stata rigorosamente determinata. In altre parole le parti più importanti della matematica sono prive di fondamenta.
Niels Abel (1802 – 1829)

Il problema

Uno dei paradossi più celebri della storia è dovuto al filosofo Zenone, vissuto nel 500 a. C. ed è quello detto di Achille e la tartaruga e in termini moderni è così enunciato: Achille e la tartaruga fanno una gara di corsa, dato lo strapotere di Achille, detto *piè veloce*, questi lascia un certo margine di vantaggio alla tartaruga. Zenone afferma che così facendo egli non raggiungerà mai la tartaruga, poiché detta x la distanza iniziale che li separa, quando Achille avrà percorso questo x, la tartaruga avrà percorso un certo tratto y, non importa quanto piccolo. Percorrendo il tratto y la tartaruga avrà percorso un tratto z e così via all'infinito. Quindi non appena Achille raggiunge il precedente punto toccato dalla tartaruga questa sarà sempre un tratto più avanti, perciò taglierà il traguardo prima di Achille, non importa quanto sia il vantaggio che essa ha rispetto ad Achille in partenza. Possiamo risolvere matematicamente questo paradosso?

Per cercare di risolvere il paradosso di Zenone dobbiamo richiamare un risultato sulla somma della progressione geometrica di ragione q diversa da 1: $1+q+q^2+q^3+...+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}$.

Esempio 39

Per evitare inutili complicazioni supponiamo che il tratto da percorrere sia pari a 200 m e che la velocità di Achille sia 10 volte quella della tartaruga, mentre il vantaggio iniziale della tartaruga sia di 100 m. Supponiamo anche, senza che ciò modifichi il ragionamento, che in un secondo Achille percorra 10m e la tartaruga 1m. Nella tabella seguente confrontiamo lo spazio percorso da Achille e quello della tartaruga, in intervalli di tempo che aumentano ogni volta di un decimo del precedente:

Tempo in s	0	10	11	11,1	11,11
Spazio percorso da Achille in m	0	100	110	111	111,1
Spazio percorso dalla Tartaruga in m	100	110	111	111,1	111,11

Diciamo che un semplice calcolo ci fa capire che già prima del dodicesimo secondo Achille ha raggiunto la tartaruga, poiché ha percorso (12 · 10) m = 120 m contro i (100 + 12 · 1) m = 112 m della tartaruga. Ragionando nell'ordine di idee di Zenone lo spazio percorso dalla tartaruga, si otterrà con la seguente somma: $100 + 10 + 1 + 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3} + \ldots + + 10^{-n}$, in cui n è il numero di suddivisioni del tempo. Ma la precedente somma può anche scriversi:

$$100+10+\sum_{k=0}^{n}10^{-k}=100+10+\frac{1-10^{-n-1}}{1-10^{-1}}=110+\left(\frac{1-\frac{1}{10^{n+1}}}{1-\frac{1}{10}}\right)=110+\left(\frac{1-\frac{1}{10^{n+1}}}{\frac{9}{10}}\right)=110+\frac{10}{9}\cdot\left(1-\frac{1}{10^{n+1}}\right)$$

Se facciamo tendere all'infinito la suddivisione del tempo, cioè n, ovviamente la frazione in parentesi tende a zero e perciò la somma tende a (110+ 10/9) m, che naturalmente è uno spazio finito.

Quindi effettivamente il pensare, come fa Zenone, che sommando infiniti termini debba ottenersi una quantità infinita non è corretto.
Tenuto conto di quanto visto finora generalizziamo il concetto di somma infinita.

Definizione 17

- Diciamo **serie numerica** il limite della successione $\{a_1 + a_2 + \ldots + a_n\}$, che si chiama **successione dei resti parziali della serie**.
- Diremo **carattere** di una serie numerica il fatto che essa converga, diverga o oscilli.
- Se una serie converge il limite a cui converge lo chiameremo **somma della serie**.

Notazione 6

Una serie numerica si indica con il simbolo $\sum_{n\in N} a_n$, in cui N è un sottoinsieme infinito dell'insieme dei numeri naturali. In particolare se N è formato da tutti i numeri naturali esclusi al più i primi k di essi, indicheremo la serie con il simbolo $\sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n$.

Vediamo qualche esempio di serie numerica, cercando di vedere se e come possiamo calcolarne la somma.

Esempio 40

- Consideriamo la serie 2 + 4 + 6 + 8 + 12 + 14 +16 +18 + 22 + ..., formata dalla somma di tutti i numeri pari non divisibili per 10, indicando con N l'insieme {1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, ...} di tutti i numeri naturali non multipli di 5, la serie si indicherà con $\sum_{n\in N} 2n$ o con $\sum_{n=1}^{+\infty} 2n$.
- La serie 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + ..., formata da tutti i numeri dispari salvo i primi 5, la indicheremo con il simbolo: $\sum_{n=6}^{+\infty}(2n-1)$, ma anche con $\sum_{n=5}^{+\infty}(2n+1)$ e con altri simili.

Dato che abbiamo ricondotto tutto alle successioni, per le serie valgono le stesse terminologie, parleremo così di serie convergenti, divergenti, oscillanti.
In generale non è semplice stabilire se una serie converge e soprattutto quanto vale la sua somma, abbiamo già visto che ciò può farsi per un caso particolare.

Definizione 18

Chiamiamo **serie geometrica di ragione *q***, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$.

Come conseguenza di ciò che abbiamo detto finora possiamo enunciare il seguente risultato.

Teorema 22

Una serie geometrica di ragione q ha per somma $\frac{1}{1-q}$ se è $|q| < 1$; diverge positivamente se è $q \geq 1$; è indeterminata altrimenti.
Dimostrazione Segue dalla definizione 18 e dal Teorema 21.

Usando il precedente risultato possiamo determinare le note relazioni per trasformare un numero periodico in frazione.

Esempio 41

Consideriamo il numero $1,23\overline{456}$, per trasformarlo in frazione ci hanno insegnato la seguente regola: $1,23\overline{456} = \frac{123456-123}{99900}$ in cui i nove sono tanti quante le cifre del periodo e gli zeri tanti quante quelle dell'antiperiodo. Perché vale questa regola? Cerchiamo di capire.
Il dato numero può anche scriversi in questa forma:

$$1,23\overline{456} = 1 + 0,23 + 0,00456 + 0,00000456 + 0,00000000456 + \ldots$$

che, trasformando i numeri decimali limitati in frazioni diviene:

$$1,23\overline{456} = 1 + \frac{23}{100} + \frac{456}{10000} + \frac{456}{10000\,000} + \frac{456}{10000\,000000} + \ldots = 1 + \frac{23}{10^2} + \frac{456}{10^5} + \frac{456}{10^8} + \frac{456}{10^{11}} + \ldots$$

possiamo scrivere in modo ancora diverso la precedente espressione:

$$1,23\overline{456} = 1 + \frac{23}{10^2} + \frac{456}{10^5} \cdot \left(1 + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \ldots\right)$$

in questo modo all'interno delle parentesi abbiamo la somma infinita di una progressione geometrica di ragione $\frac{1}{10^3}$, che per quanto detto al tendere all'infinito del numero di termini tende a

$$\frac{1}{1-\frac{1}{10^3}} = \frac{1}{\frac{10^3-1}{10^3}} = \frac{10^3}{10^3-1}$$

Quindi avremo:

$$1,23\overline{456} = 1 + \frac{23}{10^2} + \frac{456}{\cancel{10^5}\,{}^2} \cdot \frac{\cancel{10^3}}{10^3-1} = 1 + \frac{23}{10^2} + \frac{456}{10^2 \cdot \left(10^3-1\right)} = \frac{10^2 \cdot \left(10^3-1\right) + 23 \cdot \left(10^3-1\right) + 456}{10^2 \cdot \left(10^3-1\right)} =$$

$$= \frac{10^5 - 10^2 + 23 \cdot 10^3 - 23 + 456}{100 \cdot 999} = \frac{\left(10000 + 23000 + 456\right) - \left(100 + 23\right)}{100 \cdot 999} = \frac{123456 - 123}{100 \cdot 999}$$

Come si vede abbiamo trovato la formula nota.

Vediamo un altro esempio di serie per la quale facilmente si può trovare la somma.

Esempio 42

Vogliamo trovare la somma della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)}$. Dobbiamo calcolare il limite della successione delle somme parziali, cioè $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}\right)$, ovviamente non possiamo applicare nessuna delle tecniche note per il calcolo dei limiti di successione. Osserviamo però che possiamo scrivere:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2-1}{1\cdot 2} + \frac{3-2}{2\cdot 3} + \frac{4-3}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{n+1-n}{n\cdot(n+1)}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{2}}{1\cdot\cancel{2}} - \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{\cancel{3}}{2\cdot\cancel{3}} - \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot 3} + \frac{\cancel{4}}{3\cdot\cancel{4}} - \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}\cdot 4} + \ldots + \frac{\cancel{n+1}}{n\cdot\cancel{(n+1)}} - \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\cdot(n+1)}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \ldots + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

quindi la predetta serie, detta di Mengoli, è convergente ed ha per somma 1.

Cominciamo a considerare qualche risultato valido per le serie numeriche.

Teorema 23

Eliminando o modificando un numero finito di elementi di una serie, il carattere di una serie non cambia.

Dimostrazione.

Eliminare o comunque modificare un numero finito di termini di una serie modifica la successione delle somme parziali $\{a_1 + a_2 + \ldots + a_n\}$. Da quel che sappiamo sulle successioni ciò non varia il comportamento della successione, tranne il fatto che se la successione convergeva a un dato numero adesso convergerà a un altro numero.

Esempio 43

- Consideriamo la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ che ha per somma $\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$. Eliminiamo i suoi primi 5 termini, la serie $\sum_{n=4}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$, continua a convergere ma non più a 3, bensì a 3 diminuito degli elementi che abbiamo eliminato, cioè a: $3-\left(1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}\right)=3-\frac{81+54+36+24+16}{81}=3-\frac{211}{81}=\frac{243-211}{81}=\frac{32}{81}$.

- Nella serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty}2^n$ sostituiamo i termini dal trentesimo al settantanovesimo con 0, la serie risultante è ancora divergente positivamente.
- Nella serie geometrica oscillante: $\sum_{n=0}^{+\infty}(-3)^n$, sostituiamo tutti i termini di posto dispari con il loro valore assoluto, la serie così ottenuta sarà $\sum_{n=0}^{+\infty}3^n$ che diverge positivamente. Come si vede quindi il Teorema 23 non è più valido se modifichiamo infiniti termini.

In generale non è facile determinare il carattere di una serie, e nell'ipotesi in cui si riesca a provare che una serie converge, non sempre si determina la somma. Vale però un teorema che alcune volte facilita la determinazione del carattere di una serie.

Teorema 24

Condizione necessaria affinché la serie di termine generale a_n converga è che la successione $\{a_n\}$ sia infinitesima.

Dimostrazione

Se la serie $\sum_{n\in N}a_n$ converge a un certo numero ℓ, vuol dire che si ha: $\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+a_3+..+a_n)=\ell$, ma per il criterio di Cauchy sulle successioni, ciò significa che si ha:

$$\lim_{n\to\infty}\left[(a_1+a_2+a_3+..+a_n+a_{n+1})-(a_1+a_2+a_3+..+a_n)\right]=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=0$$

che è quanto volevamo provare.

Il precedente teorema non è una condizione sufficiente.

Esempio 44

Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$, nota come **serie armonica**. Questa serie verifica l'ipotesi del teorema precedente, perché $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, eppure non converge. Infatti abbiamo:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\ldots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$$

la successione delle somme parziali non è limitata superiormente, non può quindi convergere.

Stiamo vedendo come risulta difficile stabilire il carattere di una serie.
Nel prossimo paragrafo considereremo particolari serie per le quali questo problema risulta meno ostico.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo determinare la seguente somma $\sum_{k=5}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^k$, che è parte di quella della serie geometrica $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^k=\frac{1}{1-\frac{3}{5}}=\frac{1}{\frac{2}{5}}=\frac{5}{2}$. Abbiamo perciò $\sum_{k=5}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^k=\frac{5}{2}-\sum_{k=0}^{4}\left(\frac{3}{5}\right)^k=\frac{243}{1250}$.

Determinare le seguenti somme

Livello 1

1. $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^k$ [$+\infty$] $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^k$ [4] $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^k$ [4/7]
2. $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\frac{4}{3}\right)^k$ [$\varnothing$] $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^k$ [6] $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^k$ [3/5]
3. $\sum_{k=4}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k$ [16/27] $\sum_{k=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{9}\right)^k$ [–1/10] $\sum_{k=3}^{+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^k$ [–1/36]
4. $\sum_{k=11}^{+\infty}\left(\frac{7}{3}\right)^k$ [$+\infty$] $\sum_{k=2}^{+\infty}\left(-\frac{1}{9}\right)^k$ [1/90] $\sum_{k=2}^{+\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^k$ [1/20]
5. $\sum_{k=4}^{+\infty}\left(\frac{5}{8}\right)^k$ [625/1536] $\sum_{k=1}^{+\infty}\left(-\frac{8}{9}\right)^k$ [–8/17] $\sum_{k=23}^{+\infty}\left(-\frac{8}{3}\right)^k$ [$\varnothing$]

Usando le serie geometriche costruire la frazione generatrice dei seguenti numeri periodici

6. $5,67\overline{89}$ [28111/4950] $5,6\overline{789}$ [18911/333] $5,\overline{6789}$ [18928/333]
7. $0,03\overline{33}$ [1/30] $0,0\overline{333}$ [1/30] $0,\overline{0333}$ [1/30]

Utilizzando la serie di Mengoli $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n\cdot(n+1)}=1$, calcolare le seguenti somme

8. $\sum_{n=5}^{+\infty}\frac{3}{2n\cdot(n+1)}$ [3/10] $\sum_{n=4}^{+\infty}\frac{5}{8n\cdot(n+1)}$ [5/32] $\sum_{n=7}^{+\infty}\frac{4}{7n\cdot(n+1)}$ [4/49]
9. $\sum_{n=8}^{+\infty}\frac{-7}{4n\cdot(n+1)}$ [–7/32] $\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{8}{15n\cdot(n+1)}$ [8/45] $\sum_{n=5}^{+\infty}\frac{-2}{3n\cdot(n+1)}$ [–2/15]

Livello 2

Determinare le seguenti somme

10. $\sum_{n=0}^{+\infty}sin^n(x)$ $\left[\frac{1}{1-sin(x)}\right]$ $\sum_{n=0}^{+\infty}cos^n(x)$ $\left[\frac{1}{2\cdot sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right]$ $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n sin^n(x)$ $\left[\frac{1}{1+sin(x)}\right]$ $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot cos^n(x)$ $\left[\frac{1}{2\cdot cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo sommare $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$. Scriviamo alcuni suoi termini:

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$$

vediamo se riusciamo a operare su questa serie come abbiamo fatto con quella di Mengoli, dato che anche in questo caso ciascun denominatore ha in comune un fattore con quello che lo segue. Lavoriamo sulla frazione generica:

$$\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2n+1-(2n-1)}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\cancel{2n+1}}{(2n-1)\cdot\cancel{(2n+1)}}-\frac{\cancel{2n-1}}{\cancel{(2n-1)}\cdot(2n+1)}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

Quindi: $\frac{1}{2}\cdot\left(1-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)+\ldots+\frac{1}{2}\cdot\left(\cancel{\frac{1}{2n-1}}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n+1}$. Quindi la somma della serie sarà uguale a $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$.

Determinare le seguenti somme

Livello 2

11. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4+\sqrt{2}}{4^{n+1}}$ $\left[\frac{4+\sqrt{2}}{3}\right]$ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3+(-1)^{n+1}}{2\cdot 7^n}$ [21/16] $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{5^n}$ [25/6]

12. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^{n+2}}{3^n}$ [12/5] $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n-2^n}{4^n}$ [$+\infty$] $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n-2^n}{8^n}$ [2/3]

13. $\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ [$+\infty$] $\sum_{n=1}^{+\infty}sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$ [$\varnothing$] $\sum_{n=1}^{+\infty}cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$ [0]

14. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3}{n\cdot(n+3)}$ [1/16] $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{5}{n\cdot(n+5)}$ [137/60] $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+2)\cdot(n+3)}$ [1/3]

15. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+5)\cdot(n+6)}$ [1/6] $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{8}{n\cdot(n+8)}$ [761/280] $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{(n+7)\cdot(n+8)}$ [¼]

16. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n-3)\cdot(2n+1)}$ [1/3] $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)\cdot(3n+2)}$ [1/6]

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-1)\cdot(4n+3)}$ [1/12] $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(6n-1)\cdot(6n+5)}$ [1/30]

18. $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\frac{1}{64}-\frac{1}{128}-\ldots$ [2/7]

19. Consideriamo una successione di cerchi i cui raggi sono gli elementi della successione $\left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{2^n},\ \ldots\right\}$. Determinare la somma delle aree degli infiniti cerchi. [4/3π]

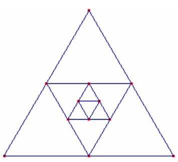
Livello 3

20. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$ [¼] $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}$ [1/18]

Determinare il minimo valore di *k* per cui si ha la validità delle seguenti disuguaglianze

21. $\sum_{n=k}^{+\infty}\left(\frac{5}{13}\right)^n<\frac{1}{256}$ [7] $\sum_{n=k}^{+\infty}\left(\frac{7}{12}\right)^n<\frac{1}{320}$ [13] $\sum_{n=k}^{+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n<\frac{1}{128}$ [6]

22. $\sum_{n=k}^{+\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^n<\frac{1}{426}$ [31] $\sum_{n=k}^{+\infty}\left(\frac{10}{13}\right)^n<\frac{1}{356}$ [28] $\sum_{n=k}^{+\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n<\frac{1}{512}$ [9]

23. In figura  ciascun triangolo è equilatero e ha i vertici nei punti medi del triangolo in cui è inscritto. Se il lato del triangolo maggiore è 1, e continuiamo questo processo all'infinito, determinare la somma dei perimetri degli infiniti triangoli così ottenuti. [6]

24. Con riferimento al precedente problema determinare la misura del lato del triangolo maggiore se la

somma è rispettivamente 24, 100, $\sqrt{17}$. $\left[4, \frac{50}{3}, \frac{\sqrt{17}}{3}\right]$

25. Data una serie geometrica di ragione r, consideriamo la serie ottenuta innalzando a una potenza intera m, possiamo dire che quest'ultima serie è anch'essa geometrica? Se la risposta è affermativa, qual è la ragione? [Sì, r^m]
26. Una serie geometrica di ragione r, con $r^2 < 1$, ha somma 2, la serie i cui termini sono i cubi di quelli della precedente ha somma 24. Determinare il primo termine della serie di partenza. [3]
27. Sommare $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10^n}$. Sugg: associare in modo opportuno gli addendi della serie. [10/81

Serie a termini di segno costante

Le serie divergenti sono invenzione del diavolo, ed è una vergogna basare su esse una dimostrazione qualunque. Usandole possiamo trarre qualsiasi conclusione vogliamo, ecco perché queste serie hanno prodotto così tanti errori e così tanti paradossi... *Niels Abel* (1802 – 1829)

Il problema della determinazione del carattere di una serie risulta facilitato per particolari serie.

Definizione 19

Una serie i cui termini sono tutti positivi (rispettivamente negativi) si chiama **serie a termini positivi (rispettivamente negativi)**. Una serie a termini positivi o negativi si dice **serie a termini di segno costante**.

Definizione 20

Una serie i cui termini, escluso al più un numero finito di essi, sono tutti positivi (rispettivamente negativi) si chiama **serie a termini definitivamente positivi (rispettivamente definitivamente negativi)**.
Una serie a termini definitivamente positivi o negativi si dice **serie definitivamente a termini di segno costante**.

Per queste serie vale il seguente fondamentale teorema.

Teorema 25

Una serie a termini definitivamente di segno costante è regolare.

Dimostrazione.

Consideriamo il caso di una serie a termini definitivamente positivi, ciò significa che:

$$\exists k \in \mathbb{N}: a_n > 0, \forall n > k$$

Ma allora la successione delle somme parziali sarà definitivamente crescente, infatti

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1} > a_1 + a_2 + \ldots + a_k$$

dato che $a_{k+1} > 0$. Quindi per il Teorema 18 la detta successione, quindi anche la serie, è regolare.

Il precedente teorema permette di stabilire facilmente se una serie a termini di segno costante è divergente.

Esempio 45

Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n}$, che è a termini positivi, quindi regolare. Essa però non verifica la condizione necessaria per la convergenza, infatti $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$, quindi la detta serie diverge positivamente.

Possiamo perciò enunciare il seguente risultato.

Teorema 26

Condizione necessaria e sufficiente affinché una serie a termini definitivamente dello stesso segno $\sum_{n\in N} a_n$ sia divergente è che la successione $\{a_n\}$ non sia infinitesima.

Un'altra proprietà importante per le serie a termini definitivamente dello stesso segno, consiste nel fatto che possiamo sfruttare la conoscenza del carattere di una di esse per stabilire quello di altre. Vediamo un esempio.

Esempio 46

- Sappiamo che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ è convergente. Consideriamo adesso una serie a termini positivi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, per cui si ha: $a_n \le \left(\frac{1}{3}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}$. Possiamo dire che anche questa seconda serie deve convergere, poiché se divergesse avremmo l'assurdità che la successione delle somme $\{a_1 + a_2 + \ldots + a_n\}$ che è illimitata superiormente, avrebbe i termini tutti non superiori ai corrispondenti termini della successione $\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$, che è invece limitata.
- Analogamente, consideriamo la serie armonica $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$, che è divergente. Se consideriamo una serie a termini positivi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, per cui si ha: $a_n \ge \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$. Possiamo dire che anche questa è divergente, perché stavolta dato che $\left\{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right\}$ è illimitata superiormente, anche $\{a_1 + a_2 + \ldots + a_n\}$ che ha elementi non inferiori alla precedente deve essere illimitata superiormente.

Tenuto conto del precedente esempio possiamo enunciare un importante risultato.

Teorema 27 (criterio del confronto)

Date due serie a termini di segno definitivamente costante, e si abbia $a_n \le b_n$, $\forall n \ge m$, allora

- Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge anche $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge
- Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge anche $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

Dimostrazione Sulla falsariga dell'esempio 46.

Esempio 47

- Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, abbastanza facilmente si osserva che si ha $n > \sqrt{n}, \forall n > 1$, quindi, essendo entrambe le espressioni positive avremo anche $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}, \forall n > 1$. Dato che $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n} = +\infty$, anche $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$.
- Consideriamo adesso $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$, abbiamo $n^2 > n, \forall n > 1 \Rightarrow \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}, \forall n > 1$, stavolta non possiamo dedurre

alcunché, poiché è la serie maggiorante a essere divergente.

Abbiamo visto nell'esempio precedente che non sempre è facile operare con le disuguaglianze risulta più semplice il seguente risultato, equivalente al precedente.

Teorema 28

Date due serie a termini di segno definitivamente costante allora

- se $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \neq 0$, allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hanno lo stesso carattere.
- se $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, allora se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge anche $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge; se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge anche $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Dimostrazione

- Dire che $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \neq 0$ significa che le successioni sono asintoticamente equivalenti, pertanto anche le successioni delle loro somme parziali avranno un comportamento simile all'infinito.
- Dire che $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ significa che $\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N}$: $a_n/b_n < \varepsilon$, $\forall n \geq k$, in particolare, scelto $\varepsilon = 1$, avremo: $a_n < b_n, \forall n \geq k$, quindi basta applicare il Teorema 27.

Esempio 48

Riconsideriamo la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Abbiamo visto che la cosiddetta serie di Mengoli, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)} = 1$. Si ha altresì $\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n \cdot (n+1)}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{n \cdot (n+1)} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$, quindi per il teorema precedente possiamo dire che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ ha lo stesso carattere della serie di Mengoli e quindi converge. Ovviamente non è detto che le due serie abbiamo la stessa somma. Del resto se sommiamo i primi 1000 addendi di $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ con un software otteniamo circa 1,64 che è maggiore di 1. In effetti si può dimostrare, ma è abbastanza complicato, che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Poniamo la seguente definizione.

Definizione 21

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$ si chiama **serie armonica generalizzata**.

La precedente serie è molto utile per determinare il carattere di altre serie, quindi è bene stabilirne il carattere al variare dell'esponente.

Teorema 29

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$ è divergente per $0 < \alpha \leq 1$ e convergente per $\alpha > 1$.

Dimostrazione

Se α ≤ 1 si ha anche $\frac{1}{n^\alpha} > \frac{1}{n}, \forall n > 1$ e quindi segue la divergenza dal teorema 28.

Se α > 1, invece possiamo tenere conto del fatto che si ha:

$$1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}+\ldots=1+\left(\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}\right)+\left(\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}+\frac{1}{6^\alpha}+\frac{1}{7^\alpha}\right)+\frac{1}{8^\alpha}+\ldots>$$

$$>1+\left(\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}\right)+\left(\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}\right)+\ldots>1+2\cdot\frac{1}{2^\alpha}+4\cdot\frac{1}{4^\alpha}+8\cdot\frac{1}{8^\alpha}+\ldots=$$

$$=1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}+\frac{1}{4^{\alpha-1}}+\frac{1}{8^{\alpha-1}}+\ldots=1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}+\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^2+\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^3+\ldots$$

Ma in questo modo abbiamo maggiorato la serie di partenza con una serie geometrica di ragione $\frac{1}{2^{\alpha-1}}$ e poiché α > 1, α – 1 > 0, quindi $\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$ e perciò la serie geometrica converge. Per il criterio del confronto converge anche $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}, \alpha > 1$.

Per le serie a termini di segno definitivamente costante vi è anche un altro criterio che può essere talvolta usato.

Teorema 30 (criterio del rapporto)

Sia una serie a termini di segno definitivamente positivo, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ allora se

- $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell > 1$ la serie diverge;
- $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell < 1$ la serie converge;
- $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ nulla può dirsi sul carattere della serie.

Vediamo qualche applicazione del precedente criterio.

Esempio 49

- Se applichiamo il criterio del rapporto alla serie armonica otteniamo $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$ e quindi nulla possiamo dire.
- Lo stesso accade se lo applichiamo alla serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$: $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$, confermando così che quando il limite è 1 nulla può dirsi, dato che prima la serie era divergente e adesso è convergente.
- Invece per la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$, avremo: $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n\cdot n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\cancel{2^n}\cdot\cancel{(n+1)}\cdot\cancel{n!}}{(n+1)^n\cdot\cancel{(n+1)}}\cdot\frac{n^n}{\cancel{2^n}\cdot\cancel{n!}} = \lim_{n\to\infty}2\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\cdot\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} 2\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} 2\cdot\frac{\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}} = 2\cdot e^{-1} < 1$$

quindi la serie converge.

In generale possiamo dire che il criterio del rapporto è utile per serie il cui termine generale contiene potenze a esponente dipendente da n o fattoriali, non è utile per frazioni algebriche, poiché in quest'ultimo caso il limite verrà sempre uno.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo stabilire il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{4n^2-n+1}$. La serie è a termini positivi, quindi o converge o diverge a più infinito, ma poiché $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{4n^2-n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{4n^2} = \frac{1}{4} \neq 0$, non è verificata la condizione necessaria per la convergenza, pertanto la serie diverge.

Fra le seguenti serie stabilire quali certamente divergono (nelle risposte NP = Non può dirsi)

Livello 1

1.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+n-1}{n^3-n+1}$	[NP]	$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	[+∞]	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2-1}$	[NP]
2.	$\sum_{n=1}^{\infty} sin^2(n)$	[+∞]	$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{\ln(n^2)}$	[NP]	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin^2(n)}{n}$	[NP]
3.	$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^3+(-1)^n}{n^4-(1)^n}$	[NP]	$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^n}{n}$	[+∞]	$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n^2+1}{n^2+n+1}}$	[+∞]

Lavoriamo insieme

Vogliamo stabilire il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3n^3-1}$. La serie è a termini positivi, e verifica la condizione necessaria per la convergenza: $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3} = 0$, pertanto non possiamo dire se converge o diverge. Però abbiamo anche che $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^3+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3}\cdot n = 1$, quindi possiamo applicare il criterio del confronto e affermare che $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3n^3-1}$ ha lo stesso carattere della serie armonica, pertanto diverge a più infinito.

Mediante il criterio del confronto determinare il carattere delle seguenti serie (nelle risposte S significa convergente)

Livello 1

4.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n\cdot\sqrt{n}+2}$	[+∞]	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\sqrt[3]{n}+n+1}$	[S]	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+1}{n+3}$	[+∞]

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2+n}$ [S] $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^3-1}$ [S] $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n-1}{3n^4-2n+1}$ [S]

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2^n}$ [S] $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n+1}$ [S] $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\log(n)}$ [+∞]

Livello 2

7. $\sum_{n=1}^{\infty} sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$ [S] $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{e^n}$ [S] $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)+1}{n^2+n-1}$ [S] $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ [+∞]

Lavoriamo insieme

Vogliamo stabilire il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$. Vista la presenza di una potenza conviene usare il criterio del rapporto: $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\cancel{3^n}}{(n+1)\cdot\cancel{n!}}\cdot\frac{\cancel{n!}}{\cancel{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1}=0<1$, pertanto la detta serie converge.

Mediante il criterio del rapporto determinare il carattere delle seguenti serie

Livello 2

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+2}}{n^n}$ [S] $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2n}}{n!}$ [+∞] $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 4^{2n-1}}{(2n)!}$ [S]

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{n+1}}$ [S] $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot(n-1)!}{(n+1)^n}$ [S] $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+2}}{(2n+1)!}$ [S]

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{3^n}$ [S] $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+(-1)^n}{4^n}$ [S] $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+(-1)^n}{(n+1)!}$ [S]

L'angolo di Derive

Derive calcola le somme di alcune serie numeriche, talvolta anche in modo esatto.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \qquad \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} \qquad \zeta(3)$$

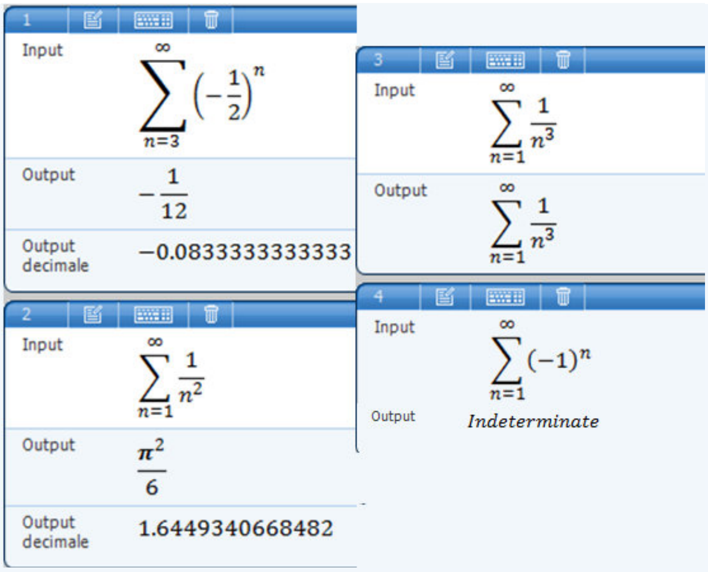
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \qquad \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \qquad \frac{SIN(\infty)}{2}-\frac{1}{2}$$

Per le serie armoniche convergenti con esponente pari il calcolo avviene senza problemi, per quelle con esponente dispari invece si usa la cosiddetta funione *zeta*, che non è altro che la stessa serie, che quindi non viene semplificata. Al solito, lavorando nei complessi le serie indeterminate hanno sempre un risultato, anche se non reale.

L’angolo di Microsoft Mathematics

Stavolta si usa il pulsante Σ. Ecco alcuni esempi.



La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi.

1. Data la successione $a_n = \begin{cases} k & se \quad n=1 \\ -\dfrac{1}{a_n+1} & se \quad n>1 \end{cases}$, verificare che essa è formata dalla generazione ciclica di 4 termini. $\left[a_n = \begin{cases} k & se \quad n=3h+1 \\ -\dfrac{1}{k+1} & se \quad n=3h+2 \\ -\dfrac{k+1}{k} & se \quad n=3h \end{cases} \right]$

2. Calcolare $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{a}{bn}\right)^{cn}$, al variare dei parametri in $\mathbb{R}$. $[e^{ac/b}]$

3. Determinare per quali valori reali di m vale la seguente uguaglianza per qualche valore reale di k: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left(k^2-1\right)\cdot n+1}{\left(2k^2-3\right)\cdot n+5}=m$. $[m \le 1/3 \vee m > ½]$

4. Provare che se $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ converge anche $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ converge.

5. Provare che se $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n, a_n \ge 0, \forall n \in \mathbb{N}$ converge anche $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n^2$ converge.

6. Sommare $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k-1)}$. $\left[\dfrac{1}{(k-1)!\cdot(k-1)}\right]$

7. Sommare $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(k\cdot n-1)\cdot(k\cdot n+k-1)}$. $\left[\dfrac{1}{k\cdot(k-1)}\right]$

Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi

1. (Istituto magistrale PNI 1994/95) Su una semiretta di origine A_0 è dato il segmento $A_0 A_1$ di lunghezza 2. Si considerino i segmenti adiacenti A_1A_2, A_2A_3, …, $A_{n-1} A_n$ tali che il rapporto tra ogni segmento e il precedente sia k. Il candidato: a) dimostri che le aree dei cerchi aventi per diametro i suddetti segmenti sono i termini di una progressione geometrica e calcoli l'area S_n della parte di piano delimitata dalla successione delle prime n circonferenze; $\left[\pi \cdot \frac{k^n-1}{k-1}\right]$ b) determini il limite di S_n al tendere di n all'infinito quando $k = ½$; $\left[\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{4}{3}\pi\right]$ c) determini, in generale, il limite di S_n al tendere di n all'infinito, distinguendo i casi: 1) $k < 1$ 2) $k \geq 1$. $\left[1) S(k) = \frac{\pi}{1-k^2}; 2) +\infty\right]$
2. (Liceo scientifico PNI 1994/95) In un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy è dato il punto $A_0 \equiv (1, 0)$. Si costruisca il triangolo rettangolo OA_oA_1 avente il vertice A_1 sull'asse delle ordinate e sia α l'angolo $O\hat{A}_0A_1$. Si conduca per A_1 la perpendicolare alla retta A_oA_1 che incontra l'asse delle ascisse in A_2; si conduca per A_2 la perpendicolare alla retta A_1A_2 che incontra l'asse delle ordinate in A_3 e così via, ottenendo una spezzata $A_oA_1A_2A_3$ ... $A_{n-1}A_n$ i cui vertici di indice dispari appartengono all'asse delle ordinate e quelli di indice pari all'asse delle ascisse. Il candidato: a) dimostri che le lunghezze dei lati della spezzata sono in progressione geometrica e calcoli la lunghezza l_n della spezzata; $\left[l_n = \frac{1-[tan(\alpha)]^n}{cos(\alpha)-sin(\alpha)}\right]$ b) determini il limite di l_n al tendere di n all'infinito, distinguendo i casi: 1) $\alpha < \frac{\pi}{4}$ 2) $\alpha \geq \frac{\pi}{4}$. $\left[1) \frac{1}{cos(\alpha)-sin(\alpha)}; 2) +\infty\right]$
3. (Liceo scientifico PNI 2001/2002) Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{n!}$ [0]

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.

AHSME = Annual High School Mathematics Examination
AMRL = American Regions Math League
AK = Arkansas State University
HCC = Houston Calculus Contest
HSMC = A&M University High School Mathematics Contest
RICE = Rice University Mathematics Tournament.
V = Vermont High School Prize Examination

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente quesito assegnato ai giochi matematici della Rice University nel 2009. Calcolare $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n$. Osserviamo che se moltiplichiamo tutti gli elementi della serie per 1/5 otteniamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{5^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1-1}{5^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{5^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n} - \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n} - \frac{1}{4}$$

Ma ovviamente $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$, quindi indicando con S la somma della serie avremo:

$$\frac{S}{5} = S - \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{4S}{5} = \frac{1}{4} \Rightarrow S = \frac{5}{16}$$

1. (AHSME 1952) Sapendo che $\sum_{n=1}^{\infty} a^n = 6, a_1 + a_2 = \frac{9}{2}$, determinare a_1. [3 oppure 9]
2. (AHSME 1964) Data la successione $a_n = \frac{5+3\cdot\sqrt{5}}{10}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-3\cdot\sqrt{5}}{10}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ dimostrare che si ha: $a_n = a_{n+1} - a_{n-1}$.
3. (AHSME 1970) Una serie geometrica di ragione r ha somma 15, la serie i cui termini sono i quadrati di quelli della precedente ha somma 45. Determinare il primo termine della serie di partenza. [5]
4. (AHSME 1975) Consideriamo l'insieme $A = \{1, 3, 2, \ldots\}$, in cui $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$, per $n \ge 3$. determinare la somma dei primi 100 elementi di A. [5]
5. (AHSME 1975) Il primo termine di una serie geometrica è un numero naturale, la ragione è il reciproco di un numero naturale e la somma è 3. Determinare la somma dei primi 2 termini. [8/3]
6. (AHSME 1980) Un punto parte dall'origine con una traiettoria rettilinea, raggiungendo il punto (1; 0), poi ruota di 90° in senso antiorario raggiungendo (1; ½), qui ruota di nuovo di 90° in senso antiorario e percorrendo metà del precedente tratto. Se continua questo percorso all'infinito, quale punto raggiungerà? [(4/5; 2/5)]
7. (AHSME 1984) La successione a_n è definita dalla legge: $a_1 = 2$ e $a_{n+1} = a_n + 2n$ $(n > 1)$. Calcolare a_{100}. [9902]
8. (AHSME 1992) a_n è una successione crescente di numeri interi positivi che verificano la seguente proprietà: $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, sapendo che $a_7 = 120$, determinare a_8. [194]
9. (AHSME 1996) La successione 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 2, . . . è formata da 1 separati da blocchi di 2 con n 2 nell'n–esimo blocco. La somma dei primi 1234 termini di questa successione è (A) 1996 (B) 2419 (C) 2429 (D) 2439 (E) 2449 [B]
10. (AHSME 1999) Sia $a_1 = 1$, $(a_{n+1})^3 = 99 \cdot (a_n)^3$, $\forall n \in \mathbb{N}$ una successione di numeri reali. Determinare a_{100}. [99^{33}]
11. (AHSME 1999) La successione $a_1, a_2, a_3, \ldots$ è tale che $a_1 = 19$, $a_9 = 99$ e per ogni $n \ge 3$, a_n, è la media aritmetica dei precedenti $n - 1$ termini. Quanto vale a_2? [179]
12. (Rice 2006) Calcolare $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\cdot\sqrt{k+2} + (k+2)\cdot\sqrt{k}}$. $\left[\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right]$
13. (Rice 2006) Calcolare $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{a^{k-1}}, |a| > 1$ $\left[\left(\frac{a}{a-1}\right)^2\right]$
14. (HSMC 2007) Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $1 + 2x + 4x^2 + \ldots + (2x)^n + \ldots = 3{,}4 - 1{,}2 \cdot x$, con $|x| < 0{,}5$. [$x = 1/3$]
15. (ARML 2008) Per $k > 1$, S_k denota la somma di k numeri interi consecutivi a partire da k. Calcolare il più piccolo valore di k per cui S_k è un quadrato perfetto. [81]
16. (Rice 2008) Sapendo che si ha: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, determinare $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 8n + 16}$. $\left[\frac{\pi^2}{6} - \frac{205}{144}\right]$
17. (Rice 2008) Calcolare $\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty} \frac{1}{2^{x+y-|x-y|}}$. Sugg. Calcolare la somma in 3 casi: $x = y$, $x > y$ e $x < y$; quindi confrontare i risultati. [20/9]
18. (Rice 2008) Calcolare $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{5^k}$. Sugg. Moltiplicare per 5 tutti i termini, quindi manipolare la serie ottenuta. [5/16]
19. (HCC 2012) Quale delle seguenti serie converge a 2? I $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ II $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^2+1}$ III $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^n}$
a) Solo I b) Solo II c) Solo III d) I e III e) II e III [d)]

Questions in English

Working together

This is a question assigned in 2002 at HSMC.

A sequence is defined by $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n}{1+x_n}, \ \ n > 1 \end{cases}$. Find x_{10000}.

We can write: $\dfrac{1}{x_{n+1}} = \dfrac{1+x_n}{x_n} = \dfrac{1}{x_n} + 1$. Thus we have the following chain:

$$\frac{1}{x_2} = \frac{1+x_1}{x_1} = \frac{1}{x_1} + 1 = \frac{1}{2} + 1; \frac{1}{x_3} = \frac{1+x_2}{x_2} = \frac{1}{x_2} + 1 = \left(\frac{1}{2}+1\right) + 1 = 2 + \frac{1}{2}; \frac{1}{x_4} = \frac{1+x_3}{x_3} = \frac{1}{x_3} + 1 = \left(2 + \frac{1}{2}\right) + 1 = 3 + \frac{1}{2}; \ldots$$

It is easy to understand that in general we have: $\dfrac{1}{x_{n+1}} = \dfrac{1}{2} + n \Rightarrow x_{n+1} = \dfrac{2}{2n+1} \Rightarrow x_{10000} = \dfrac{2}{2 \cdot 999 + 1} = \dfrac{2}{19999}$.

20. (V 2003) Define $a_0 = 2$, $a_1 = 8$ and $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}, n \geq 2$. Find a_{2003}. [¼]
21. (V 2003) A circle C1 is inscribed in an equilateral triangle with side length 1 unit. Construct a circle C2 that is tangent to C1 and two sides of the triangle. Then construct a circle C3 that is tangent to C2 and two sides of the triangle. Continue constructing such circles indefinitely. Find the sum of the areas of this infinite sequence of circles. [3π/32]
22. (V 2004) Suppose that C1 is a circle of radius 1, square S1 is inscribed in C1, circle C2 is inscribed in S1 and square S2 is inscribed in C2. This process continues indefinitely, alternating circles and squares. The first 5 circles and squares are shown in the figure. For $n \geq 1$, let An be the area of the region inside circle Cn and outside square Sn . Find $\sum_{n=1}^{\infty} An$. [2π – 4]
23. (HSMC 2004) Suppose that $F(n)$ is a real–valued function whose domain is the set of positive integers and that $F(n)$ satisfies the following two properties: $F(1) = 23$; $F(n + 1) = 8 + 3 \cdot F(n)$, for $n \geq 1$. It follows that there are constants p; q and r such that $F(n) = pqn - r$ for $n \geq 1$. Find the value of $p + q + r$. [16]
24. (HSMC 2008) Suppose that $f(n + 1) = f(n) + f(n - 1)$ for $n = 2, 3, \ldots$. Given that $f(6) = 2$ and $f(4) = 8$, what is $f(1) + f(3)$? [–50]
25. (HSMC 2005)The function f is given by the table

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	4	3	5	1	2

. If $u_0 = 3$, and $u_{n+1} = f(u_n)$ for $n \geq 0$, what is the value of u_{2005}? [5]

26. (HSMC 2007) Let $\{a_n\}$ be a sequence of integers such that $a_1 = 1$ and $a_{m+n} = a_m + a_n + mn$ for $m, n = 1, 2, \ldots$. Find a_{15}. [120]
27. (AK 2009) Compute $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1+2^{199}+3^{199}+\ldots+n^{199}}{n^{200}}$. [1/200]

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Corso di laurea in Informatica, Udine 2009) Costruiamo due successioni $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, nel modo seguente: $x_1 = y_1 = 1$ e per $n > 1$: $x_{n+1} = x_n + y_n$, $y_{n+1} = x_n \cdot y_n$. Si calcoli y_5.
A) 6 B) 11 C) 17 D) 30
2. (Facoltà scientifiche CISIA 2010) Una sequenza di numeri x_0, x_1, x_2, … è così costruita:
$$\begin{cases} x_0 = x_1 = 1 \\ x_i = x_{i-1} + 2 \cdot x_{i-2} & i \geq 2 \end{cases}$$
Allora x_6 è uguale a A) 43 B) 85 C) 32 D) 61 E) 21
3. (Veterinaria 1998) Indicato con $x(n)$ il termine ennesimo di una successione di numeri, e data la legge: $x(n + 1) = x(n - 1) + x(n)$, quale delle seguenti successioni numeriche rispetta la legge?
A1) 1,1,1,1,1,1,1,... B) 1,2,3,5,8,13,21,... C) 1,2,3,4,5,6,7,...
D) 1,2,4,8,16,32,64,... E) 1,–1,1,–1,1,–1,1,...
4. (Facoltà scientifiche, Roma La Sapienza) Data la funzione $f(x) = x^2 - 1$, si consideri la successione così definita: $a_1 = 0$, $a_2 = f(a_1)$, …, $a_{n+1} = f(a_n)$; per ogni numero naturale n. Quanto vale a_{64}?
A) –64 B) –1 C) 0 D) 63
5. (Scuola Superiore di Catania) Una successione di numeri è costruita nel modo seguente:
$$x_0 = 5,\ x_1 = 16,\ x_2 = 11,\ x_3 = -5,\ \ldots,\ x_{n+1} = x_{n-1} - x_n,\ \ldots$$
A che cosa è uguale x_{2005}? Quanti sono i diversi valori che assumono gli elementi della successione?

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_2_3.htm

Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1	2	3	4	5
D	A	B	B	[–16; 6]