Matematicamente.it

# Matematica C$^3$

## Algebra 2

terza edizione 2014

ISBN: 9788896354612

MATEMATICA $C^3$

# ALGEBRA 2

Manuale per il secondo anno
della Scuola Superiore di secondo grado

Matematicamente.it

3°Edizione - 2014

Matematica C$^3$– Algebra 2
Copyright © 2014 Matematicamente.it

Questo libro, eccetto dove diversamente specificato, è rilasciato nei termini della licenza Creative Commons Attribuzione allo stesso modo 3.0 Italia (CC BY 3.0) il cui testo integrale è disponibile al sito http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/deed.it.

Tu sei libero: di riprodurre, distribuire, comunicare al pubblico, esporre in pubblico, rappresentare, eseguire e recitare quest'opera, di modificare quest'opera, alle seguenti condizioni:

*Attribuzione* — Devi attribuire la paternità dell'opera nei modi indicati dall'autore o da chi ti ha dato l'opera in licenza e in modo tale da non suggerire che essi avallino te o il modo in cui tu usi l'opera.

*Condividi allo stesso modo* — Se alteri o trasformi quest'opera, o se la usi per crearne un'altra, puoi distribuire l'opera risultante solo con una licenza identica o equivalente a questa.

Per maggiori informazioni su questo particolare regime di diritto d'autore si legga il materiale informativo pubblicato su http://www.copyleft-italia.it.

COORDINATORI DEL PROGETTO Antonio Bernardo, Anna Cristina Mocchetti, Claudio Carboncini.

AUTORI Claudio Carboncini, Antonio Bernardo, Erasmo Modica, Anna Cristina Mocchetti, Germano Pettarin, Francesco Daddi, Angela D'Amato, Alessandra Marrata, Nicola Chiriano.

HANNO COLLABORATO Gemma Fiorito, Daniela Hérin, Alessandro Albertini, Luciano Serra, Pierluigi Cunti, Grazia Petrone, Raffaele Santoro, Lisa Maccari, Gavino Napoletano, Sara Gobbato, Mauro Paladini, Livia Noris, Eugenio Medaglia, Francesca Lorenzoni, Roberto Capancioni, Nicola De Rosa, Riccardo Sala, Lucia Rapella.

PROGETTAZIONE IN LATEX Dimitrios Vrettos.

IMPLEMENTAZIONE IN LATEX Claudio Carboncini, Dimitrios Vrettos.

COLLABORAZIONE, COMMENTI E SUGGERIMENTI Se vuoi contribuire anche tu alla stesura e aggiornamento del manuale Matematica C$^3$ - Algebra 1 o se vuoi inviare i tuoi commenti e/o suggerimenti scrivi a antoniobernardo@matematicamente.it.

Versione del documento: 3.0 del 15 aprile 2014.
Stampa terza edizione: aprile 2014.
ISBN 9788896354612

DATI TECNICI PER L'ADOZIONE DEL LIBRO A SCUOLA
Titolo: Matematica C$^3$, Algebra 2 - terza edizione.
Codice ISBN: 9788896354612
Editore: Matematicamente.it.
Anno di edizione: 2014.
Prezzo: € 0,00.
Formato: ebook (PDF).

# Indice

# Prefazione

Guardando i libri di testo sia con gli occhi dell'insegnante che li usa, sia dell'autore che li scrive, ci si rende conto di un fatto banale: chi scrive i manuali scolastici sono gli insegnanti, chi li usa sono sempre gli insegnanti. Dal momento che oggi ci sono gli strumenti, sia quelli elettronici, sia il sistema della stampa *on demand*, che permettono di circuitare direttamente autori e fruitori, mi sono deciso a intraprendere la creazione di un manuale di matematica "libero", nel senso più ampio che oggi, nell'era delle tecnologie dell'informazione e della comunicazione, si riesce a dare a questo termine. Tuttavia, adottare "ufficialmente" un testo scolastico nella scuola italiana è un fatto semplice solo se si segue un percorso consolidato nel tempo, fatto più che altro di prassi e abitudini che non di leggi specifiche. Per rispondere a queste esigenze questo Manuale è fatto di Autori, Contenuti, Supporti e Dati legali.

**Obiettivi** Il progetto Matematica $C^3$ ha per obiettivo la realizzazione di un manuale di matematica, per tutto il percorso scolastico e per ogni tipologia di scuola, scritto in forma collaborativa e con licenza *Creative Commons*. Si propone, quindi, di abbattere i costi dell'istruzione, ridurre il peso dei libri, invogliare gli studenti a usare il libro, promuovere l'autoformazione per chi è fuori dai percorsi scolastici. Ha inoltre l'ambizione di avviare una sfida culturale più ampia di una scuola più democratica, più libera, dove ognuno possa accedere gratuitamente almeno alle risorse di base.

**Autori** Il manuale è scritto in forma collaborativa da diverse decine di docenti di matematica sulla base della loro esperienza reale di insegnamento nelle diverse scuole. Alla sua realizzazione hanno contribuito anche studenti e appassionati. Tutti hanno contribuito in maniera gratuita e libera.

**Contenuti** Matematica $C^3$ si presenta come un *work in progress* sempre aggiornato e migliorabile da parte di tutti, docenti e studenti. Può essere liberamente personalizzato da ciascun insegnante per adeguarlo alla scuola in cui insegna, al proprio modo di lavorare, alle esigenze dei suoi studenti. È pensato non tanto per lo studio della teoria, che resta principalmente un compito dell'insegnante, quanto per fornire un'ampia scelta di esercizi da cui attingere per "praticare" la matematica. Lo stile scelto è quello di raccontare la matematica allo stesso modo in cui l'insegnante la racconta in classe di fronte agli studenti. Gli argomenti sono trattati secondo un approccio laboratoriale, senza distinguere eccessivamente tra teoria ed esercizi; teoria, esempi svolti, esercizi guidati, esercizi da svolgere vengono presentati come un tutt'uno.

**Supporti** Matematica $C^3$ è scaricabile dal sito `http://www.matematicamente.it`. È disponile in formato elettronico pdf completamente gratuito; i sorgenti in LaTeX sono liberi e disponibili sullo stesso sito. I diversi volumi che compongono l'opera possono essere stampati, fotocopiati in proprio o stampati in tipografia per le sole le parti che occorrono, in nessun caso ci sono diritti d'autore da pagare agli autori o all'editore. Il docente che vorrà sperimentare nuove forme d'uso può usarlo in formato elettronico su tablet pc, netbook o più semplicemente pc portatili, può proiettarlo direttamente sulla lavagna interattiva (LIM) interagendo con il testo, svolgendo direttamente esempi ed esercizi, personalizzando con gli alunni definizioni ed enunciati; ricorrendo eventualmente a contenuti multimediali esterni presenti sui siti internet, confrontando definizioni e teoremi su Wikipedia, cercando sull'enciclopedia libera notizie storiche sugli autori, ricorrendo eventualmente a contenuti multimediali esterni presenti sui siti internet (sul sito `http://www.matematicamente.it` sono disponibili gratuitamente test interattivi e alcune videolezioni). A casa lo studente potrà usare il libro sullo stesso dispositivo che ha usato in classe (tablet, notebook) con le annotazioni e le modifiche fatte dall'insegnante, potrà svolgere gli esercizi sul computer o sul libro cartaceo, potrà scambiare file attraverso i *social network* o i sistemi di messaggistica istantanea, particolarmente diffusi tra i ragazzi.

**Dati legali** Matematica C$^3$, eccetto dove diversamente specificato, è rilasciato nei termini della licenza Creative Commons Attribuzione allo stesso modo 3.0 Italia (CC BY 3.0) il cui testo integrale è disponibile al sito `http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/deed.it`.

Dati tecnici per l'adozione del libro a scuola: Titolo: Matematica C$^3$, Algebra 2 - Codice ISBN: 9788896354612 - Editore: Matematicamente.it - Anno di edizione: 2014 - Prezzo: € 0,00 (zero) - Formato: ebook (PDF).

Il coordinatore del progetto
prof. Antonio Bernardo.

# Numeri reali e radicali I


Foto di Jonycunha
http://www.flickr.com/photos/jonycunha/4022906268/
Licenza: Creative Commons Attribution BY-SA

# Numeri reali 1

## 1.1 Dai numeri naturali ai numeri irrazionali

Nel volume Algebra 1 abbiamo presentato i diversi insiemi numerici. Li riprendiamo brevemente per poi approfondire i numeri reali e le loro proprietà.

L'insieme dei *numeri naturali* racchiude i numeri che utilizziamo per contare; si indica nel seguente modo:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \ldots\}$$

Su questi numeri sono definite le seguenti operazioni:

- *addizione*: $n + m$ è il numero che si ottiene partendo da $n$ e continuando a contare per altre $m$ unità;
- *sottrazione*: $n - m$ è il numero, se esiste ed è unico, che addizionato a $m$ dà come risultato $n$;
- *moltiplicazione*: $n \cdot m$ è il numero che si ottiene sommando $n$ volte $m$, o meglio sommando $n$ addendi tutti uguali a $m$;
- *divisione*: $n : m$ è il numero, se esiste ed è unico, che moltiplicato per $m$ dà come risultato $n$;
- *potenza*: $n^m$ è il numero che si ottiene moltiplicando $m$ fattori tutti uguali a $n$ con $m \geqslant 2$, ponendo $n^1 = n$ e $n^0 = 1$;
- *radice*: $\sqrt[n]{m}$ con $n \geqslant 2$ è il numero, se esiste ed è unico, che elevato a $n$ dà come risultato $m$.

L'addizione, la moltiplicazione e la potenza sono definite su tutto l'insieme dei numeri naturali, cioè dati due numeri naturali qualsiasi, $n$ ed $m$, la somma $n + m$ e il loro prodotto $n \cdot m$ è sempre un numero naturale; la potenza $n^m$, escluso il caso $0^0$, è un numero naturale. Non sempre, invece, è possibile calcolare la differenza $n - m$, il quoziente $n : m$ o la radice $\sqrt[n]{m}$.

Tuttavia, dal punto di vista pratico-applicativo molto spesso si incontrano situazioni nelle quali occorre eseguire sempre operazioni. Iniziamo dall'operazione di sottrazione. Sappiamo che in tante situazioni di natura economica, ma non solo, deve essere possibile sottrarre un numero da uno più piccolo. Deve essere possibile, per esempio, comprare un'auto che costa 12.000 euro anche quando in banca possediamo solo 10.000 euro. Deve quindi essere possibile eseguire una sottrazione del tipo $10.000 - 12.000$. Il risultato di questa operazione non va poi confuso con il risultato di $12.000 - 10.000$. Nel secondo caso, infatti, significa che sul nostro conto corrente abbiamo 12.000 euro e dobbiamo spenderne 10.000, ci rimangono quindi 2.000 euro. Nel primo caso invece, possediamo 10.000 euro e dobbiamo pagare 12.000 euro ci rimane un debito di 2.000 euro. Per distinguere i due tipi di numeri i matematici mettono davanti al numero il segno $+$ o il segno $-$. Si genera così l'insieme dei *numeri relativi*.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots\}$$

Su questi numeri l'operazione di sottrazione è ovunque definita, in altre parole è possibile eseguire tutte le sottrazioni.

Non è invece possibile eseguire sempre le divisioni. Oltre hai casi $n : 0$ e $0 : 0$, non è possibile, con i numeri interi, eseguire la divisione 3 : 4. Esistono però tante situazioni reali in cui una divisione di questo tipo deve poter essere eseguita. Per esempio è possibile dividere in parti uguali 3 uova in 4 persone, basta fare una frittata in una padella tonda e dividere la frittata in quattro parti uguali, a ciascuna toccano $\frac{3}{4}$ di uovo. Deve essere possibile dividere in parti uguali 3 euro tra 4 persone. Dopo aver notato che a nessuno tocca 1 euro intero, si procede a cambiare le monete da 1 euro in monete da 1 decimo di euro, si cambiano quindi i 3 euro con 30 decimi di euro. Dividendo le 30 monete in 4 parti uguali risulta che ciascuno riceve 7 monetine e ne avanzano 2. Per dividere le 2 monete da un decimo si cambiano in monete da un centesimo, ottenendo 20 centesimi di euro. Si dividono allora le 20 monetine in 4 parti uguali, ciascuno avrà 5 centesimi di euro. In tutto a ciascuno toccano 75 centesimi di euro.

Per rappresentare il risultato di queste due operazioni di divisioni abbiamo usato nel primo caso la notazione frazionaria $\frac{3}{4}$ e nel secondo caso la notazione decimale $0,75$. Le due scritture sono perfettamente equivalenti.

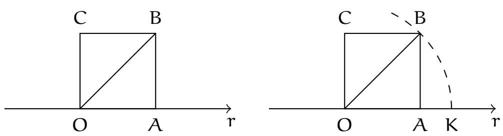
Per risolvere tutti i problemi di divisione i matematici hanno costruito l'insieme dei *numeri razionali* che indichiamo nel seguente modo:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}, m \neq 0 \right\} = \left\{ 0, +1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{2}{3,} - \frac{1}{5}, -\frac{11}{17}, \frac{129}{1725} \dots \right\}$$

Con questi numeri è possibile sempre eseguire l'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione, la divisione (ad eccezione della divisione per 0), la potenza. Non sempre, invece, è possibile eseguire l'estrazione di radice. Per esempio, hai già conosciuto il numero $\sqrt{2}$, cioè il numero che elevato al quadrato dà 2; esso non è un numero razionale, cioè non può essere scritto né sotto forma di frazione né sotto forma di numero decimale finito o periodico. I numeri di questo tipo si dicono *numeri irrazionali*.

Abbiamo già affrontato questo problema nel volume di Algebra 1; per comodità del lettore riportiamo il ragionamento.

Fissiamo sulla retta orientata $r$ l'unità di misura e disegniamo il quadrato di lato 1. Ci proponiamo di calcolare la misura della sua diagonale $OB$.




Il triangolo $OAB$ è retto in $A$, quindi per il teorema di Pitagora $\overline{OB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AB}^2$. Sostituiamo le misure: $\overline{OB}^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Per ottenere $\overline{OB}$ dobbiamo estrarre la radice quadrata e quindi $\overline{OB} = \sqrt{2}$.

Sappiamo che 'estrarre la radice quadrata' di un numero significa trovare quel numero che elevato al quadrato dà 2. Questo numero deve esistere, nel senso che esiste un punto sulla retta $r$ che lo rappresenta, per costruirlo graficamente si può tracciare l'arco di circonferenza di centro $O$ e raggio $OB$ determinando su $r$ il punto $K$ estremo del segmento con $OK = OB$.

Dalla posizione del punto $K$ possiamo dire che $1 < \sqrt{2} < 2$. Il valore cercato evidentemente non è un numero intero. Può essere un numero decimale finito? Compiliamo una tabella che contenga nella prima riga i numeri con una sola cifra decimale compresi tra 1 e 2 e nella seconda riga i rispettivi quadrati:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 1,1 | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,5 | 1,6 |
| $x^2$ | 1,21 | 1,44 | 1,69 | 1,96 | 2,25 | 2,89 |

Osserviamo che il numero 2 è compreso tra $1,4^2$ e $1,5^2$, di conseguenza $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$, ma ancora non possiamo precisare il suo valore, anche se abbiamo ristretto l'intervallo in cui si trova il punto K. Diciamo che 1,4 è un valore approssimato per difetto di $\sqrt{2}$ mentre 1,5 è un valore approssimato per eccesso; scrivendo $\sqrt{2} = 1,4$ oppure $\sqrt{2} = 1,5$ commettiamo un errore minore di $1/10$.

Per migliorare l'approssimazione e tentare di ottenere $\sqrt{2}$ come numero razionale costruiamo la tabella dei numeri decimali con due cifre compresi tra 1,4 e 1,5:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | 1,41 | 1,42 | 1,43 | 1,44 |
| $x^2$ | 1,9881 | 2,0164 | 2,0049 | 2,0776 |

Ora possiamo dire che 1,41 è un valore approssimato per difetto di $\sqrt{2}$ mentre 1,42 è un valore approssimato per eccesso, con un errore dell'ordine di $1/100$. Abbiamo quindi migliorato l'approssimazione e di conseguenza abbiamo ristretto l'intervallo in cui cade il punto K, ma ancora non abbiamo trovato un numero razionale che sia uguale a $\sqrt{2}$.

Continuando con lo stesso procedimento costruiamo due classi di numeri razionali che approssimano una per difetto e una per eccesso il numero cercato, restringendo ogni volta l'ampiezza dell'intervallo in cui cade il punto K. Il procedimento continua all'infinito e le cifre decimali che troviamo non si ripetono periodicamente.

| Valore per difetto | Numero | Valore per eccesso | Ordine dell'errore |
|---|---|---|---|
| 1 | $\sqrt{2}$ | 2 | 1 |
| 1,4 | $\sqrt{2}$ | 1,5 | $10^{-1}$ |
| 1,41 | $\sqrt{2}$ | 1,42 | $10^{-2}$ |
| 1,414 | $\sqrt{2}$ | 1,415 | $10^{-3}$ |
| 1,4142 | $\sqrt{2}$ | 1,4143 | $10^{-4}$ |
| … | $\sqrt{2}$ | … | … |

Per arrivare a concludere che $\sqrt{2}$ non è un numero razionale, possiamo ragionare nel seguente modo. Supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia un numero razionale e precisamente $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ con $a$ e $b$ primi tra loro. Se si eleva al quadrato $\sqrt{2}$ si ottiene $2 = \frac{a^2}{b^2}$.

Elevare un numero al quadrato significa elevare al quadrato le singole potenze dei fattori primi in cui questo si scompone. I fattori primi di $a^2$ e di $b^2$ sono gli stessi di $a$ e di $b$ con gli esponenti raddoppiati, anche $a^2$ e $b^2$ sono primi tra di loro e $a^2$ non può essere il doppio di $b^2$. Quindi $2 \neq \frac{a^2}{b^2}$ e $\sqrt{2} \neq \frac{a}{b}$.

Oltre a $\sqrt{2}$ vi sono altri infiniti numeri che non possono essere scritti come frazione. Per esempio, tutte le radici quadrate di numeri naturali che non sono quadrati perfetti e tutte le radici quadrate di frazioni che non sono il quadrato di alcuna frazione. Ma anche le radici cubiche del tipo $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{7}$, ... Un altro famoso numero irrazionale che si incontra nelle misure geometriche è il numero $\pi$, che corrisponde alla misura della circonferenza di diametro 1.

Questi numeri sono detti *numeri irrazionali* e insieme ad altri, come $\pi$ ed altri ancora che conoscerete in seguito, costituiscono l'insieme $\mathbb{J}$ dei numeri irrazionali.

L'unione degli insiemi $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{J}$ è l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

✍ *Esercizi proposti:* 1.1, 1.2

## 1.2 I numeri reali

In base a quanto abbiamo detto prima, essendo $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{J}$, i numeri reali sono tutti quei numeri che si possono scrivere in forma decimale con un numero finito o infinito di cifre, non necessariamente periodiche. Per esempio, la frazione $\frac{17}{16}$ è uguale al numero decimale finito 1,0625. La frazione $\frac{16}{17}$ è uguale al numero decimale periodico $0,\overline{9411764705882352}$.

Il numero $\pi$ è invece un numero decimale a infinite cifre non periodico. Riportiamo alcune cifre: $\pi$ = 3, 141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 884 197 169 399 375 105 820 974 944 592 307 816 406 286 208 998 628 034 825 342 117 067 982 148 086 513 282 306 647 093 844 609 550 582 231 725 359 408 128 481 117 450 284 102 701 938 521 105 559 644 622 948 954 930 381 964 428 810 975 665 933 446 128 475 648 233 786 783 165 271 201 909 145 648 566 923 460 348 610 454 326 648 213 393 607 260 ... Nonostante i numeri irrazionali siano stati scoperti dallo stesso Pitagora o dai suoi allievi nel IV secolo a.C., solo nel XIX secolo Augustin-Louis Cauchy e Richard Dedekind sono giunti a una formulazione rigorosa di numeri reali.

In effetti, assumere che i numeri reali sono tutti quelli che si possono scrivere in forma decimale finita o infinita, del tipo $r = n + 0, abcd\ldots$, dove $r$ è il numero reale, $n$ è la parte intera e $0, abcd\ldots$ è la parte decimale, comporta dei problemi. Per esempio, i numeri interi hanno una doppia rappresentazione: $1 = 0,99999999\ldots$ come i numeri decimali finiti: $1,225 = 1,22499999999\ldots$ Occorre quindi almeno escludere i numeri decimali con il 9 periodico. Oltre questo problema rimane la difficoltà di eseguire le operazioni tra numeri decimali illimitati. Gli algoritmi per addizionare, sottrarre e moltiplicare due numeri richiedono di cominciare dall'ultima cifra, cosa che non è possibile per i numeri decimali che non finiscono mai. Altro problema non semplice da gestire è il fatto che una definizione di questo tipo è strettamente legata al sistema di numerazione a base 10 che noi utilizziamo.

Già nel volume Algebra 1, nel paragrafo sulle relazioni di equivalenza, abbiamo visto come i matematici hanno potuto costruire l'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi relativi a partire dall'insieme di coppie ordinate di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e l'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali relativi a partire dall'insieme di coppie ordinate di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_0$.

La questione a questo punto è: possiamo costruire l'insieme dei numeri reali a partire dall'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$? Per rappresentare il numero $\sqrt{2}$ abbiamo costruito un insieme, che abbiamo indicato con $A$, di numeri razionali il cui quadrato è minore di 2 e un insieme, che abbiamo indicato con $B$, di numeri razionali il cui quadrato è maggiore di 2. Sembra allora che il numero $\sqrt{2}$ spezzi l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ in due parti: quella dei numeri razionali $a$ tali che $a^2 < 2$ e quella dei numeri razionali $b$ tali che $b^2 > 2$. La coppia di insiemi $(A, B)$ caratterizza il numero $\sqrt{2}$, possiamo anzi identificare $\sqrt{2}$ con la coppia $(A, B)$.

È proprio questa l'idea alla base del ragionamento del matematico tedesco Dedekind (1831-1916). Dedekind chiama *sezione*, o *partizione* di $\mathbb{Q}$, una coppia di sottoinsiemi non vuoti $A$ e $B$ che devono soddisfare le condizioni: $A \cap B = \emptyset$; $A \cup B = \mathbb{Q}$; $\forall a \in A, \forall b \in B, a < b$.

**Esempio 1.1.** Sezioni

- Consideriamo i due insiemi A e B così definiti: $A = \{x \in \mathbb{Q} | x < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} | x \geqslant 3\}$. Essi definiscono una sezione di $\mathbb{Q}$, infatti $A \cap B = \emptyset$; $A \cup B = \mathbb{Q}$ e ogni elemento di A è minore di ogni elemento di B; inoltre possiamo osservare che A non ammette massimo, non essendoci in esso un numero che sia maggiore di tutti gli altri, mentre B ammette il minimo che è 3;
- siano $A = \{x \in \mathbb{Q} | x < -1\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} | x > 0\}$ la coppia $(A, B)$ non è una sezione di $\mathbb{Q}$ perché pur essendo $A \cap B = \emptyset$ non è $A \cup B = \mathbb{Q}$;
- siano $A = \left\{x \in \mathbb{Q} | x \leqslant \frac{2}{7}\right\}$, $B = \left\{x \in \mathbb{Q} | x \geqslant \frac{2}{7}\right\}$, anche in questo caso la coppia $(A, B)$ non è una sezione di $\mathbb{Q}$ poiché $A \cap B = \left\{\frac{2}{7}\right\}$;
- costruiamo gli insiemi A e B nel seguente modo: A sia l'unione tra l'insieme dei numeri razionali negativi e tutti i razionali il cui quadrato è minore di 2, in B mettiamo tutti i razionali il cui quadrato è maggiore di 2. $A = \mathbb{Q}^- \cup \left\{x \in \mathbb{Q} | x^2 < 2\right\}$, $B = \left\{x \in \mathbb{Q} | x^2 > 2\right\}$. Si ha $A \cap B = \emptyset$; $A \cup B = \mathbb{Q}$, inoltre ogni elemento di A è minore di ogni elemento di B, dunque $(A, B)$ è una sezione di $\mathbb{Q}$, ma A non possiede il massimo e B non possiede il minimo, in quanto abbiamo già dimostrato che non esiste un numero razionale che ha 2 come quadrato. Questa sezione individua un buco nell'insieme $\mathbb{Q}$.

Gli esempi visti ci permettono di affermare che una partizione $(A, B)$ può essere di tre tipi:

- A ammette massimo e B non ammette minimo;
- A non ammette massimo e B ammette minimo;
- A non ammette massimo e B non ammette minimo.

**Definizione 1.1.** Si chiama *elemento separatore* di una partizione $(A, B)$ di $\mathbb{Q}$ il massimo di A o il minimo di B, nel caso in cui almeno uno di questi elementi esista.

Nel primo esempio, poiché esiste il minimo di B, la partizione $(A, B)$ ammette un elemento separatore e identifica il numero razionale 3. Nel quarto esempio non esiste un numero razionale che fa da elemento separatore, la sezione $(A, B)$ identifica un numero irrazionale.

**Definizione 1.2.** L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è l'insieme di tutte le partizioni di $\mathbb{Q}$. Chiamiamo numero razionale le partizioni che ammettono elemento separatore, chiamiamo *numero irrazionale* le sezioni che non ammettono elemento separatore.

Ogni numero reale è individuato da due insiemi di numeri razionali: nel primo tutte le approssimazioni per difetto e nell'altro tutte le approssimazioni per eccesso.

Ritornando all'esempio precedente, il numero $\sqrt{2}$ è individuato dalla sezione costituita dagli insiemi $A = \{x \in \mathbb{Q} | x < 0\}$ oppure $x^2 < 2$ e $B = \left\{x \in \mathbb{Q} | x^2 > 2\right\}$. Nell'insieme A ci sono tutti i numeri razionali negativi oltre quelli che approssimano $\sqrt{2}$ per difetto:

$$A = \{1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,414213; \ldots\}.$$

Nell'insieme B ci sono tutti i numeri razionali che approssimano $\sqrt{2}$ per eccesso:

$$B = \{2; 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143; 1,41422; 1,414214; \ldots\}.$$

Questa costruzione dell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ a partire dall'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ è puramente astratta e formale, non serve al calcolo, vuole solo concludere il cammino intrapreso per costruire tutti gli insiemi numerici a partire dall'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$.

Dal punto di vista teorico è possibile definire nell'insieme delle partizioni di $\mathbb{Q}$, l'ordinamento e le operazioni. Dal punto di vista del calcolo useremo le approssimazioni.

**Definizione 1.3.** Un insieme $X$ si dice *continuo* se ogni partizione $(X', X'')$ di $X$ ammette uno e un solo elemento separatore, cioè se esiste un elemento $x$ appartenente a $X$ tale che per ogni $x'$ di $X'$ e per ogni $x''$ di $X''$ si ha $x' \leqslant x \leqslant x''$.

**Teorema 1.1** (di Dedekind)**.** *Ogni partizione dell'insieme $\mathbb{R}$ di numeri reali ammette uno e uno solo elemento separatore.*

Da questo teorema segue che il numero reale è definito come l'elemento separatore di una sezione $(A, B)$ di numeri reali.

**Postulato 1.2** (di continuità della retta)**.** *Esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei punti della retta geometrica e l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.*

Da questo postulato segue la possibilità di definire sulla retta un sistema di coordinate: ad ogni punto corrisponde un numero reale (la sua ascissa) e viceversa ad ogni numero reale è associato uno e un solo punto sulla retta; analogamente si ha nel piano dove il sistema di assi cartesiano permette di realizzare una corrispondenza biunivoca tra coppie di numeri reali (ascissa e ordinata del punto) e un punto del piano geometrico. Vedremo in seguito che la possibilità di associare numeri e punti si estende anche allo spazio geometrico.

### 1.2.1 Confronto fra numeri reali

Per confrontare due numeri reali, osserviamo prima di tutto i segni. Se i segni dei numeri sono discordi, il numero negativo è minore del numero positivo. Se i segni dei numeri sono concordi si valuta la parte intera del numero: se sono positivi è più grande quello che ha la parte intera maggiore, viceversa se sono negativi è più grande quello che ha la parte intera minore. A parità di parte intera bisogna confrontare la parte decimale partendo dalle cifre più a sinistra finché non si trova la prima cifra decimale diversa: se i numeri sono positivi è maggiore quello che ha la cifra maggiore; se sono negativi è maggiore quello che ha la cifra minore.

---

**Esempio 1.2.** Confrontare i seguenti numeri reali

- $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ per verificarlo ci si può aiutare con la calcolatrice per calcolare le prime cifre decimali dei due numeri $\sqrt{2} = 1,4142\ldots$, $\sqrt{3} = 1,7320\ldots$; oppure ci si arriva osservando che il numero che elevato al quadrato dà 2 deve essere minore del numero che elevato al quadrato dà 3;

- $\sqrt{99} < 10$ per verificarlo è sufficiente osservare che $\sqrt{100} = 10$.

---

*Esercizi proposti:* 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7

## 1.3 Richiami sul valore assoluto

Si definisce *valore assoluto* di un numero reale $a$, indicato con $|a|$, il numero stesso se $a$ è positivo o nullo, il suo opposto se $a$ è negativo.

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ se } a \geqslant 0 \\ -a, \text{ se } a < 0 \end{cases}.$$

Il numero $a$ si dice argomento del valore assoluto.

$|-3| = 3$; $|+5| = 5$; $|0| = 0$.

### 1.3.1 Proprietà del valore assoluto

$|x + y| \leqslant |x| + |y|$: il valore assoluto della somma di due numeri è minore o uguale della somma dei valori assoluti dei due numeri. Si ha l'uguaglianza solo quando i due numeri reali hanno lo stesso segno, oppure quando almeno uno dei due numeri è nullo.

$|x - y| \leqslant |x| + |y|$: il valore assoluto della differenza di due numeri è minore o uguale della somma dei valori assoluti dei due numeri.

$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$: il valore assoluto del prodotto di due numeri è uguale al prodotto dei valori assoluti dei due numeri.

$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$: il valore assoluto del rapporto di due numeri è uguale al rapporto dei valori assoluti dei due numeri.

In generale, se l'argomento del valore assoluto è una funzione $f(x)$ si ha:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{ se } f(x) \geqslant 0 \\ -f(x), \text{ se } f(x) < 0 \end{cases}.$$

---

**Esempio 1.3.** Valore assoluto di numeri reali

- $|5 + 3| = |5| + |3|$ in entrambi i casi si ottiene 8;
- $|5 + (-3)| = 2$ mentre $|5| + |-3| = 8$, pertanto $|5 + (-3)| < |5| + |-3|$.

---

Nelle espressioni contenenti valori assoluti di argomento letterale si deve cercare di eliminare il valore assoluto.

---

**Esempio 1.4.** Valore assoluto di argomento letterale

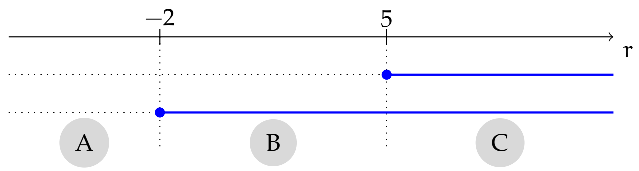
- $\left|x^2\right| = x^2$ infatti $x^2$ è una quantità sempre non negativa;
- $\left|a^2 + 1\right| = a^2 + 1$ infatti $a^2$ è sempre positivo, aumentato di 1 sarà sempre $> 0$;
- $|x - 1| = \begin{cases} x - 1, \text{ se } x \geqslant 1 \\ -x + 1, \text{ se } x < 1 \end{cases}$ una funzione di questo tipo si dice *definita per casi*;

- $f(a) = |a+1| - 3a + 1$ acquista due significati a seconda che l'argomento del valore assoluto sia non negativo o negativo. La sua espressione algebrica è:

$$f(a) = |a+1| - 3a + 1 = \begin{cases} a+1-3a+1 = -2a+2, \text{ se } a+1 \geqslant 0 \Rightarrow a \geqslant -1 \\ -(a+1)-3a+1 = -4a, \text{ se } a+1 < 0 \Rightarrow a < -1 \end{cases}.$$

**Esempio 1.5.** $f(x) = |x-5| + |x+2|$.

La presenza di due valori assoluti ci obbliga a studiare i casi generati dal segno dei singoli argomenti. Pertanto poiché l'argomento del primo valore assoluto è non negativo per $x \geqslant 5$ e l'argomento del secondo valore assoluto è non negativo per $x \geqslant -2$, possiamo porre la reciproca situazione nel seguente grafico:




(A) $x < -2$: in questo intervallo entrambi gli argomenti sono negativi, pertanto

$$f(x) = |x-5| + |x+2| = -x+5-x-2 = -2x+3.$$

Se $x = -2$ si ha $f(-2) = |-2-5| + 0 = 7$;

(B) $-2 < x < 5$ il primo argomento è negativo e il secondo è positivo, pertanto

$$f(x) = |x-5| + |x+2| = -x+5+x+2 = 7.$$

Se $x = 5$ si ha $f(5) = 0 + |5+2| = 7$;

(C) $x > 5$ entrambi gli argomenti positivi, pertanto

$$f(x) = |x-5| + |x+2| = x-5+x+2 = 2x-3.$$

Possiamo allora sintetizzare in questo modo

$$|x-5| + |x+2| = \begin{cases} -2x+3, \text{ se } x < -2 \\ 7, \text{ se } -2 \leqslant x < 5 \\ 2x-3, \text{ se } x \geqslant 5 \end{cases}.$$

---

✍ *Esercizi proposti:* 1.7, 1.8, 1.9, 1.10, 1.11

## 1.4 Esercizi

### 1.4.1 Esercizi dei singoli paragrafi

#### 1.1 - Dai numeri naturali ai numeri irrazionali

**1.1.** Dimostra, con un ragionamento analogo a quello fatto per $\sqrt{2}$, che $\sqrt{3}$ non è razionale.

**1.2.** Per ciascuno dei seguenti numeri reali scrivi una sequenza di sei numeri razionali che lo approssimano per difetto e sei numeri razionali che lo approssimano per eccesso. Esempio: $\sqrt{3}$: $A = \{1; 1,7; 1,73; 1,732; 1,7320; 1,73205\}$, $B = \{2; 1,8; 1,74; 1,733; 1,7321; 1,73206\}$.

a) $\sqrt{5}$ : $A = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$, $B = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$;
b) $\dfrac{6}{7}$ : $A = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$, $B = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$;
c) $\dfrac{1}{7}$ : $A = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$, $B = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$.

#### 1.2 - I numeri reali

**1.3.** Per ciascuno dei seguenti numeri reali scrivi una sequenza di almeno sei numeri razionali che lo approssimano per difetto e sei numeri razionali che lo approssimano per eccesso:

a) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$;
b) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$.

**1.4.** Determina per ciascuno dei seguenti numeri irrazionali i numeri interi tra i quali è compreso. Esempio: $5 < \sqrt{30} < 6$.

a) $\sqrt{50}$;
b) $\sqrt{47}$;
c) $\sqrt{91}$;
d) $\sqrt{73}$;
e) $\sqrt{107}$;
f) $\sqrt{119}$;
g) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$;
h) $2\sqrt{7}$;
i) $2+\sqrt{7}$;
j) $\sqrt{20}-\sqrt{10}$;
k) $\sqrt{\frac{7}{10}}$;
l) $7+\sqrt{\frac{1}{2}}$.

**1.5.** Disponi in ordine crescente i seguenti numeri reali:

a) $\sqrt{2}$, $1$, $\dfrac{2}{3}$, $2,0\overline{13}$, $\sqrt{5}$, $\dfrac{3}{2}$ $0,75$.
b) $\pi$, $\sqrt{3}$, $\dfrac{11}{5}$, $0,\overline{9}$, $\sqrt{10}$, $3,1\overline{4}$, $\sqrt[3]{25}$.

**1.6.** Rappresenta con un diagramma di Eulero-Venn l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$, suddividilo nei seguenti sottoinsiemi: l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$, l'insieme dei numeri interi relativi $\mathbb{Z}$, l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$, l'insieme $\mathbb{J}$ dei numeri irrazionali. Disponi in maniera opportuna i seguenti numeri: $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$, $\pi$, $0,\overline{3}$, $3,14$, $\frac{3}{2}$, $-2$.

**1.7.** Indica il valore di verità delle seguenti affermazioni:

a ) un numero decimale finito è sempre un numero razionale;
b ) un numero decimale illimitato è sempre un numero irrazionale;
c ) un numero decimale periodico è un numero irrazionale;
d ) la somma algebrica di due numeri razionali è sempre un numero razionale;
e ) la somma algebrica di due numeri irrazionali è sempre un numero irrazionale;
f ) il prodotto di due numeri razionali è sempre un numero razionale;
g ) il prodotto di due numeri irrazionali è sempre un numero irrazionale.

### 1.3 - Richiami sul valore assoluto

**1.8.** Calcola il valore assoluto dei seguenti numeri:

a ) $|-5|$
b ) $|+2|$
c ) $|-1|$
d ) $|0|$
e ) $|-10|$
f ) $|3-5(2)|$
g ) $|-3+5|$
h ) $\left|(-1)^3\right|$
i ) $|-1-2-3|$

**1.9.** Dati due numeri reali $x$ ed $y$ entrambi non nulli e di segno opposto, verifica le seguenti relazioni con gli esempi numerici riportati sotto. Quali delle relazioni sono vere in alcuni casi e false in altri, quali sono sempre vere, quali sono sempre false?

| Relazione | $x=-3, y=5$ | | $x=-2, y=2$ | | $x=-10, y=1$ | | $x=1, y=-5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\|x\| < \|y\|$ | V | F | V | F | V | F | V | F |
| $\|x\| = \|y\|$ | V | F | V | F | V | F | V | F |
| $\|x\| < y$ | V | F | V | F | V | F | V | F |
| $\|x+y\| < \|x\|+\|y\|$ | V | F | V | F | V | F | V | F |
| $\|x-y\| = \|x\|-\|y\|$ | V | F | V | F | V | F | V | F |
| $\|\|x\|-\|y\|\| = \|x-y\|$ | V | F | V | F | V | F | V | F |

**1.10.** Elimina il segno di valore assoluto dalle seguenti espressioni sostituendole con una funzione definita per casi:

a ) $f(x) = |x+1|$;
b ) $f(x) = |x-1|$;
c ) $f(x) = \left|x^2+1\right|$;
d ) $f(x) = \left|(x+1)^2\right|$;
e ) $f(x) = \left|x^2-1\right|$;
f ) $f(x) = \left|x^3-1\right|$;
g ) $f(x) = \left|x^2-6x+8\right|$;
h ) $f(x) = \left|x^2+5x+4\right|$.

**1.11.** Elimina il segno di valore assoluto dalle seguenti espressioni sostituendole con una funzione definita per casi:

a ) $f(x) = \dfrac{|x+1|}{|x+2|}$;
b ) $f(x) = \left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$;
c ) $f(x) = |x+1| + |x-2|$;
d ) $f(x) = |x+2| + |x-2|$;
e ) $f(x) = |x-2| + |x-3|$;
f ) $f(x) = |x+1| \cdot |x+2|$;
g ) $f(x) = \left|\dfrac{x+1}{4}\right| + \left|\dfrac{x+2}{x+1}\right|$;
h ) $f(x) = \left|\dfrac{x+1}{x+2}\right| + \left|\dfrac{x+2}{x+1}\right|$.

# Radicali 2

## 2.1 Radici

### 2.1.1 Radici quadrate

Ricordiamo che il quadrato di un numero reale $r$ è il numero che si ottiene moltiplicando $r$ per se stesso. Il quadrato di un numero è sempre un numero non negativo; numeri opposti hanno lo stesso quadrato: $(+3)^2 = 9$, $(-2)^2 = +4$, $(-5)^2 = (+5)^2 = +25$.

L'operazione inversa dell'elevamento al quadrato si chiama *radice quadrata*. La radice quadrata di un numero reale $a$ è allora quel numero che elevato al quadrato, cioè, che moltiplicato per se stesso, dà il numero $a$.

Osserviamo che non esiste la radice quadrata di un numero negativo, poiché non esiste nessun numero che elevato al quadrato possa dare come risultato un numero negativo.

**Definizione 2.1.** Si dice *radice quadrata* di un numero reale positivo o nullo quel numero reale positivo o nullo che elevato al quadrato dà come risultato il numero dato. In simboli $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$ dove $a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Il simbolo $\sqrt{\ }$ è il simbolo della radice quadrata; il numero $a$ è detto *radicando*, il numero $b$ è detto *radice quadrata* di $a$.

Dalla definizione $\sqrt{a^2} = a$ con $a \geqslant 0$, quindi $\sqrt{81} = 9$ perché $9^2 = 81$; $\sqrt{\frac{9}{64}} = \frac{3}{8}$ perché $\left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{64}$.

❑ **Osservazione** $\sqrt{81} = \sqrt{(-9)^2}$, ma non è vero che $\sqrt{(-9)^2} = -9$ perché nella definizione di radice quadrata abbiamo imposto che il risultato dell'operazione di radice quadrata sia sempre un numero positivo o nullo. Questa osservazione ci induce a porre molta attenzione quando il radicando è un'espressione letterale: in questo caso $\sqrt{a^2} = a$ non è del tutto corretto poiché $a$ può assumere sia valori positivi sia valori negativi. Scriveremo correttamente $\sqrt{a^2} = |a|$.

---

**Esempio 2.1.** Radici quadrate

- $\sqrt{4} = 2$ infatti $2^2 = 4$;
- $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$ infatti $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$;
- $\sqrt{0,01} = 0,1$ infatti $0,1^2 = 0,01$;
- $\sqrt{1} = 1$ infatti $1^2 = 1$;
- $\sqrt{0} = 0$ infatti $0^2 = 0$;
- $\sqrt{-16}$ non esiste, radicando negativo;
- $\sqrt{11}$ esiste ma non è un numero intero né razionale, è un numero irrazionale;
- $\sqrt{x^2} = |x|$ dobbiamo mettere il valore assoluto al risultato perché non conoscendo il segno di $x$ dobbiamo imporre che il risultato sia sicuramente positivo;

- $\sqrt{a^2-4a+4} = \sqrt{(a-2)^2} = |a-2|$ dobbiamo mettere il valore assoluto perché $a-2$ può anche essere negativo;
- $\sqrt{9(x+1)^2} = 3|x+1|$.

### 2.1.2 Radici cubiche

**Definizione 2.2.** Si dice *radice cubica* di un numero reale $a$ quel numero che, elevato al cubo, dà come risultato $a$. In simboli $\sqrt[3]{a} = b \Leftrightarrow b^3 = a$ dove $a, b \in \mathbb{R}$.

Puoi notare che la radice cubica di un numero reale esiste sempre sia per i numeri positivi o nulli, sia per i numeri negativi.

**Esempio 2.2.** Radici cubiche

- $\sqrt[3]{-8} = -2$ infatti $(-2)^3 = -8$;
- $\sqrt[3]{125} = 5$ infatti $5^3 = 125$;
- $\sqrt[3]{1} = 1$ infatti $1^3 = 1$;
- $\sqrt[3]{0} = 0$ infatti $0^3 = 0$;
- $\sqrt[3]{-1000} = -10$ infatti $(-10)^3 = -1000$;
- $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$ infatti $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$;
- $\sqrt[3]{0,125} = 0,5$ infatti $(0,5)^3 = 0,125$;
- $\sqrt[3]{x^3} = x$ per le radici cubiche non si deve mettere il valore assoluto;
- $\sqrt[3]{x^3+3x^2+3x+1} = \sqrt[3]{(x+1)^3} = x+1$ non si deve mettere il valore assoluto.

Osserva che la radice cubica di un numero mantiene sempre lo stesso segno del numero in quanto il cubo di un numero reale conserva sempre il segno della base.

### 2.1.3 Radici n-esime

Oltre alle radici quadrate e cubiche si possono considerare radici di indice qualsiasi. Si parla in generale di radice n-esima per indicare una radice con un qualsiasi indice $n$.

**Definizione 2.3.** Si dice *radice n-esima* di un numero reale a quel numero $b$ che elevato ad $n$ dà come risultato $a$. In simboli $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$ con $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$.

Non si definisce la radice di indice 0 e la scrittura $\sqrt[0]{a}$ è priva di significato. Alla scrittura $\sqrt[1]{a}$ si dà il valore $a$.

Quando si tratta con le radici n-esime di un numero reale, bisogna fare attenzione se l'indice della radice è pari o dispari. Si presentano infatti i seguenti casi:

- se l'indice $n$ è dispari $\sqrt[n]{a}$ è definita per qualsiasi valore di $a \in \mathbb{R}$, inoltre è negativa se $a < 0$, positiva se $a > 0$ e nulla se $a = 0$;
- se l'indice $n$ è pari $\sqrt[n]{a}$ è definita solo per i valori di $a \geqslant 0$ e si ha che $\sqrt[n]{a} \geqslant 0$.

**Esempio 2.3.** Radici n-esime

- ➡ $\sqrt[4]{16} = 2$ infatti $2^4 = 16$;
- ➡ $\sqrt[4]{-16}$ non esiste infatti $(-2)^4 = +16$;
- ➡ $\sqrt[5]{32} = 2$ infatti $2^5 = 16$;
- ➡ $\sqrt[4]{1} = 1$ infatti $1^4 = 1$;
- ➡ $\sqrt[n]{0} = 0$;
- ➡ $\sqrt[5]{-1} = -1$ infatti $(-1)^5 = -1$;
- ➡ $\sqrt[4]{x^4} = |x|$ va messo il valore assoluto perché l'indice della radice è pari;
- ➡ $\sqrt[5]{x^5} = x$ non va messo il valore assoluto perché l'indice della radice è dispari.

✍ *Esercizi proposti:* 2.1, 2.2, 2.3, 2.4,2.5, 2.6,2.7, 2.8,2.9, 2.10

## 2.2 Condizioni di esistenza

Quando il radicando è un'espressione letterale dobbiamo fare molta attenzione a operare su di esso. Le *condizioni di esistenza*, in breve si può scrivere C. E., di un radicale con radicando letterale, sono le condizioni cui devono soddisfare le variabili che compaiono nel radicando affinché la radice abbia significato.

Supponiamo di avere $\sqrt[n]{A(x)}$ con $A(x)$ espressione nell'indeterminata $x$, dobbiamo distinguere i seguenti casi:

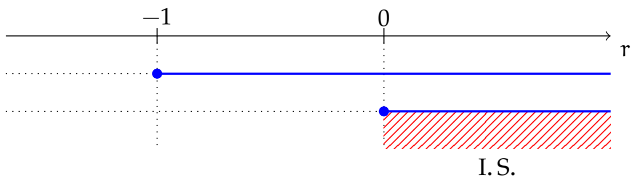
- ➡ se $n$ è pari la radice esiste per tutti i valori di $x$ che rendono non negativo il radicando, cioè C. E. $A(x) \geqslant 0$;
- ➡ se $n$ è dispari la radice esiste per qualsiasi valore della variabile $x$, purché esista il radicando stesso.

**Esempio 2.4.** Condizioni di esistenza

- ➡ $\sqrt{x}$: C. E. $x \geqslant 0$;
- ➡ $\sqrt[3]{x}$: C. E. $\forall x \in \mathbb{R}$;
- ➡ $\sqrt{-x}$: C. E. $x \leqslant 0$;
- ➡ $\sqrt[3]{-x}$: C. E. $\forall x \in \mathbb{R}$;
- ➡ $\sqrt{x-1}$: C. E. $x - 1 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 1$;
- ➡ $\sqrt{a^2+1}$: C. E. $\forall a \in \mathbb{R}$, infatti $a^2$ è sempre positivo pertanto $a^2 + 1 > 0, \forall a \in \mathbb{R}$;
- ➡ $\sqrt[3]{\frac{1}{x+1}}$: la radice cubica è definita per valori sia positivi sia negativi del radicando, tuttavia bisogna comunque porre la condizione che il denominatore della frazione non sia nullo, quindi C. E. $x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$;
- ➡ $\sqrt[4]{xy}$: C. E. $xy \geqslant 0$;
- ➡ $\sqrt[5]{a^2(a-3)}$: poiché la radice ha indice dispari non occorre porre alcuna condizione di esistenza.

**Esempio 2.5.** Determina le condizioni di esistenza della seguente espressione: $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$.

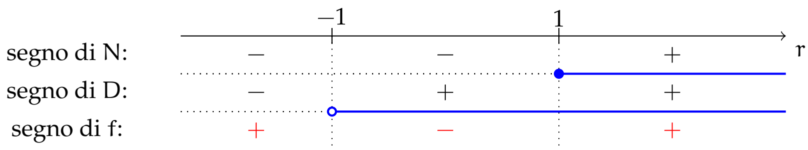
C.E. $\sqrt{x}$ esiste per $x \geqslant 0$, $\sqrt{x+1}$ esiste per $x+1 \geqslant 0$, quindi per individuare le condizioni di esistenza dell'espressione occorre risolvere il sistema $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x+1 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x \geqslant -1 \end{cases}$.




In definitiva C. E. $x \geqslant 0$.

**Esempio 2.6.** Determina le condizioni di esistenza della radice $\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

C.E. $\dfrac{x-1}{x+1} \geqslant 0$. Occorre discutere il segno della frazione $f$, combinando il segno del numeratore $N$ e del denominatore $D$:




Pertanto C.E. $x < -1 \vee x \geqslant 1$.

---

✍ *Esercizi proposti:* 2.11, 2.12, 2.13, 2.14,2.15

## 2.3 Potenze ad esponente razionale

In questo paragrafo ci proponiamo di scrivere la radice n-esima di un numero reale $a \geqslant 0$ sotto forma di potenza di $a$, vogliamo cioè che sia: $\sqrt[n]{a} = a^x$.

**Caso con esponente positivo** Elevando ambo i membri dell'uguaglianza alla potenza $n$ otteniamo: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = (a^x)^n$ da cui si ottiene $a = a^{n \cdot x}$. Trattandosi di due potenze con base $a \geqslant 0$, l'uguaglianza è resa possibile solo se sono uguali gli esponenti. In altre parole, deve essere: $1 = n \cdot x \Rightarrow x = \dfrac{1}{n}$, quindi: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Vediamo ora di generalizzare la formula. Sia $m$ un numero intero positivo, possiamo scrivere $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$ e quindi $a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$.

---

**Esempio 2.7.** Calcola le seguenti potenze a esponente razionale positivo.

- $27^{\frac{2}{3}}$: si ha che $27^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 3^2 = 9$;
- $25^{\frac{3}{2}}$: si ha che $25^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt[2]{25}\right)^3 = 5^3 = 125$.

---

**Caso con esponente negativo** Per definire la potenza ad esponente razionale negativo è necessario imporre la restrizione $a \neq 0$, infatti risulta: $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{m}{n}}$

---

**Esempio 2.8.** Calcola le seguenti potenze a esponente razionale negativo.

- $27^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{27}\right)^2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$;
- $125^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{125^{-2}} = \sqrt[3]{(5^3)^{-2}} = \sqrt[3]{(5^{-2})^3} = 5^{-2} = \frac{1}{25}$;
- $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^{-3}} = \sqrt{8^3} = \sqrt{(2^3)^3} = \sqrt{2^9}$;
- $\left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{1}{2}} = (49)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{49} = 7$.

---

In generale si dà la seguente

**Definizione 2.4.** Si dice *potenza a esponente razionale* $\frac{m}{n}$ di un numero reale positivo $a$ l'espressione: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ con $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$.

Perché abbiamo dovuto imporre la condizione che a sia un numero positivo? Partiamo dall'espressione $a^{\frac{1}{n}}$ con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, se $n$ è dispari la potenza $a^{\frac{1}{n}}$ è sempre definita per ogni valore della base $a$, mentre se è pari $a^{\frac{1}{n}}$ è definita solo per $a \geqslant 0$.

Nel caso generale $a^{\frac{m}{n}}$ con $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ la formula $a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ è falsa se $a < 0$.

Consideriamo il seguente esempio: $(-2)^{\frac{6}{6}} = \left[(-2)^{\frac{1}{6}}\right]^6 = \left(\sqrt[6]{-2}\right)^6$ non è definita nei numeri reali perché non esiste la radice sesta di un numero negativo. Tuttavia possiamo anche scrivere

$$(-2)^{\frac{6}{6}} = \left[(-2)^6\right]^{\frac{1}{6}} = (64)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{64} = 2.$$

Arriviamo pertanto a due risultati differenti.

Per estendere la definizione al caso di basi negative sarebbe necessario stabilire un ordine di priorità delle operazioni ma ciò andrebbe contro la proprietà commutativa del prodotto degli esponenti di una potenza di potenza.

✍ *Esercizi proposti:* 2.16, 2.17, 2.18, 2.19,2.20

## 2.4 Semplificazione di radici

**Proposizione 2.1.** *Il valore di una radice in* $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *non cambia se moltiplichiamo l'indice della radice e l'esponente del radicando per uno stesso numero intero positivo. In simboli* $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nt]{a^{mt}}$ *con* $a \geqslant 0$ *e* $m, n, t \in \mathbb{N} - \{0\}$.

**Esempio 2.9.** Radici equivalenti.

- $\sqrt{2}=\sqrt[4]{2^2}$ abbiamo moltiplicato per 2 indice della radice ed esponente del radicando;
- $\sqrt[3]{a}=\sqrt[9]{a^3}$ abbiamo moltiplicato per 3 indice della radice ed esponente del radicando.

**Proposzione 2.2.** *Il valore di una radice in $\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ non cambia se dividiamo l'indice della radice e l'esponente del radicando per un loro divisore comune. In simboli $\sqrt[nt]{a^{mt}}=\sqrt[n]{a^m}$ con $a\geqslant 0$ e $m,n,t\in\mathbb{N}-\{0\}$.*

**Esempio 2.10.** Semplificazione di radici

- $\sqrt[4]{2^2}=\sqrt{2}$: abbiamo semplificato per 2 indice della radice ed esponente del radicando;
- $\sqrt[10]{3^{15}}=\sqrt{3^3}$: abbiamo semplificato per 5;
- $\sqrt[7]{3^9}$: non è riducibile perché indice della radice ed esponente non hanno divisori comuni;
- $\sqrt[8]{2^6}=2^{\frac{6}{8}}$: semplificando la frazione dell'esponente otteniamo $2^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{2^3}$;
- $\sqrt[6]{\left(\frac{1}{5}\right)^{-9}}=\sqrt[6]{5^9}=\sqrt[2]{5^3}$;
- $\sqrt[4]{(-3)^2}=\sqrt[4]{3^2}=\sqrt{3}$;
- $\sqrt{10^{-4}}$: semplificando per 2 indice della radice ed esponente del radicando si ottiene $10^{-2}=\frac{1}{100}$;
- $\sqrt{30\cdot 27\cdot 10}$: scomponendo in fattori primi otteniamo

  $$\sqrt{30\cdot 27\cdot 10}=\sqrt{2\cdot 3\cdot 5\cdot 3^3\cdot 2\cdot 5}=\sqrt{2^2\cdot 3^4\cdot 5^2}.$$

  Osserviamo che tutti gli esponenti del radicando e l'indice della radice hanno un divisore, quindi $\sqrt{2^2\cdot 3^4\cdot 5^2}=2\cdot 3^2\cdot 5=90$

Se il radicando è un'espressione letterale, quindi sia positiva che negativa, dobbiamo scrivere

$$\sqrt[nt]{a^{mt}}=\begin{cases}\sqrt[n]{a^m} \text{ se la potenza t che abbiamo semplificato è dispari}\\ \sqrt[n]{|a^m|}, \text{ se t è pari.}\end{cases}$$

**Esempio 2.11.** Semplificazione di radici con espressione letterale come radicando.

- $\sqrt{4x^4y^2a^6}=\sqrt{2^2x^4y^2a^6}=2x^2\left|ya^3\right|$: abbiamo semplificato per 2 sia l'indice della radice che l'esponente del radicando;
- $\sqrt[12]{a^2+2a+1}=\sqrt[12]{(a+1)^2}=\sqrt[6]{|a+1|}$: dopo aver riconosciuto che il radicando è il quadrato del binomio, abbiamo semplificato per 2 indice ed esponente;

- $\sqrt{x^2y^2} = |xy|$;
- $\sqrt{x^2+2xy+y^2} = \sqrt{(x+y)^2} = |x+y|$;
- $\sqrt{x^2+y^2}$ non è semplificabile perché il radicando non può essere espresso sotto forma di potenza;
- $\sqrt[6]{(x-1)^2} = \sqrt[3]{|x-1|}$;

---

La proprietà invariantiva si può applicare per semplificare i radicali se la base del radicando è positiva o nulla, se fosse negativa si potrebbe perdere la concordanza del segno. Per esempio $\sqrt[10]{(-2)^6} \neq \sqrt[5]{(-2)^3}$, infatti il primo radicando è positivo mentre il secondo è negativo.

Invece $\sqrt[9]{(-2)^3} = \sqrt[3]{-2}$ perché in questo caso la concordanza del segno è conservata, infatti pur essendo la base negativa, l'esponente resta dispari, conservando il segno della base.

Se il radicando ha base negativa e nella semplificazione il suo esponente passa da pari a dispari è necessario mettere il radicando in valore assoluto: $\sqrt[10]{(-2)^6} = \sqrt[5]{\left|-2^3\right|}$.

Se il radicando è letterale si segue la stessa procedura: ogni volta che studiando il segno del radicando si trova che la base può essere negativa, se l'esponente del radicando passa da pari a dispari, si mette il modulo per garantire la concordanza del segno: $\sqrt[10]{x^6} = \sqrt[5]{\left|x^3\right|}$, C. E. $\forall x \in \mathbb{R}$.

✍ *Esercizi proposti:* 2.21, 2.22, 2.23, 2.24,2.25,2.26,2.27,2.28,2.29,2.30,2.31

## 2.5 Moltiplicazione e divisione di radici

Prima di operare con i radicali letterali, è necessario determinare le condizioni di esistenza: il prodotto di due radicali esiste là dove sono soddisfatte le condizioni di esistenza di tutti i fattori; il quoziente esiste là dove sono soddisfatte le condizioni di esistenza di dividendo e divisore, con il divisore diverso da zero.

### 2.5.1 Moltiplicazione e divisione di radici con lo stesso radicando

Per effettuare la moltiplicazione o la divisione tra radici aventi lo stesso radicando si possono trasformare le radici in forma di potenze con esponente razionale e utilizzare le proprietà delle potenze.

---

**Esempio 2.12.** Moltiplicazione e divisione di radici con lo stesso radicando.

- $\sqrt[4]{6} \cdot \sqrt[3]{6} = 6^{\frac{1}{4}} \cdot 6^{\frac{1}{3}} = 6^{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}} = 6^{\frac{7}{12}} = \sqrt[12]{6^7}$;
- $\sqrt[4]{6} : \sqrt[3]{6} = 6^{\frac{1}{4}} : 6^{\frac{1}{3}} = 6^{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}} = 6^{-\frac{1}{12}} = \frac{1}{\sqrt[12]{6}}$.

---

### 2.5.2 Moltiplicazione e divisione di radici con lo stesso indice

Il prodotto di due radici che hanno lo stesso indice è una radice che ha per indice lo stesso indice e per radicando il prodotto dei radicandi:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}.$$

Allo stesso modo, il quoziente di due radici che hanno lo stesso indice è una radice che ha per indice lo stesso indice e per radicando il quoziente dei radicandi:

$$\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a:b}\Rightarrow\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Per rendersi conto di questa proprietà si possono trasformare le radici in potenze ad esponenti razionali e applicare le proprietà delle potenze:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}}=(ab)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{ab},\qquad\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=a^{\frac{1}{n}}:b^{\frac{1}{n}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

**Esempio 2.13.** Moltiplicazione e divisione di radici con lo stesso indice.

- $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{2\cdot 3}=\sqrt{6}$;
- $\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{72}}=\sqrt[3]{\frac{9}{72}}=\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2}$;
- $\sqrt{2a}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}:\sqrt{\frac{2b}{9}}$, C. E. $a\geqslant 0\wedge b>0$ $\sqrt{2a}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}:\sqrt{\frac{2b}{9}}=\sqrt{2a\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{9}{2b}}=\sqrt{\frac{9a^2}{b^2}}=\frac{3a}{b}$.

### 2.5.3 Moltiplicazione e divisione di radici con indici diversi

Per moltiplicare o dividere radici con indici differenti è necessario prima ridurre le radici allo stesso indice, cioè trasformarle in radici equivalenti con lo stesso indice usando la proprietà invariantiva. Dopo aver ottenuto radici con lo stesso indice si applica la regola precedente.

**Procedura 2.3.** *Ridurre due o più radici allo stesso indice:*

a ) *scomporre in fattori irriducibili tutti i radicandi;*
b ) *porre le condizioni di esistenza;*
c ) *calcolare il minimo comune multiplo tra gli indici delle radici;*
d ) *per ciascuna radice dividere il* mcm *per l'indice della radice e moltiplicare il quoziente trovato per l'esponente del radicando.*

**Esempio 2.14.** Moltiplicazione e divisione di radici con indice diverso.

- $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[6]{2^3\cdot 2^2}=\sqrt[6]{2^5}$. Gli indici delle radici sono 2 e 3, il loro mcm è 6, il primo radicando va elevato a $6:2$ cioè 3, mentre il secondo radicando va elevato a $6:3$ cioè 2;

➡ $\sqrt[3]{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{8}{27}} : \sqrt[6]{\frac{2}{3}} = \sqrt[12]{\frac{3^4}{2^4} \cdot \frac{8^3}{27^3} : \frac{2^2}{3^2}} = \sqrt[12]{\frac{3^4}{2^4} \cdot \frac{2^9}{3^9} : \frac{2^2}{3^2}} = \sqrt[12]{\frac{3^6 \cdot 2^9}{3^9 \cdot 2^6}} = \sqrt[12]{\frac{2^3}{3^3}} = \sqrt[4]{\frac{2}{3}}$. Il mcm tra gli indici delle radici è 12. Il primo radicando va elevato a $12 : 3 = 4$; il secondo radicando va elevato a $12 : 4 = 3$; il terzo va elevato a $12 : 6 = 2$.

**Esempio 2.15.** $\dfrac{\sqrt[3]{x^2y} \cdot \sqrt{xy}}{\sqrt[6]{x^2y^3}}$, C. E. $x > 0 \wedge y > 0$. Il mcm degli indici delle radici è 6, quindi:

$$\frac{\sqrt[3]{x^2y} \cdot \sqrt{xy}}{\sqrt[6]{x^2y^3}} = \sqrt[6]{\frac{\left(x^2y\right)^2 \cdot (xy)^3}{x^2y^3}} = \sqrt[6]{\frac{x^4y^2x^3y^3}{x^2y^3}} = \sqrt[6]{\frac{x^7y^5}{x^2y^3}} = \sqrt[6]{x^5y^2}.$$

**Esempio 2.16.** $\sqrt[3]{\dfrac{ax+a}{x^2+2x+1}} \cdot \sqrt{\dfrac{x^2-2x+1}{ax-a}}$.

a) Scomponiamo in fattori i radicandi $\sqrt[3]{\dfrac{a(x+1)}{(x+1)^2}} \cdot \sqrt{\dfrac{(x-1)^2}{a(x-1)}}$;
b) C. E. $x+1 \neq 0 \wedge a(x-1) > 0 \Rightarrow x \neq -1 \wedge ((a > 0 \wedge x > 1) \vee (a < 0 \wedge x < 1))$;
c) Semplifichiamo le frazioni di ciascun radicando $\sqrt[3]{\dfrac{a}{x+1}} \cdot \sqrt{\dfrac{x-1}{a}}$;
d) Trasformiamo nello stesso indice: il mcm degli indici è 6, quindi:

$$\sqrt[6]{\left(\frac{a}{x+1}\right)^2} \cdot \sqrt[6]{\left(\frac{x-1}{a}\right)^3} = \sqrt[6]{\frac{a^2}{(x+1)^2} \cdot \frac{(x-1)^3}{a^3}} = \sqrt[6]{\frac{(x-1)^3}{a(x+1)^2}}$$

**Esempio 2.17.** $\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x^2-2x+1}} : \sqrt[4]{\dfrac{x^4-2x^2+1}{x^2-1}}$.

a) Scomponiamo in fattori i radicandi $\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{(x-1)^2}} : \sqrt[4]{\dfrac{(x-1)^2 \cdot (x+1)^2}{(x+1)(x-1)}}$;
b) C. E. $(x-1)(x+1) > 0 \Rightarrow x < -1 \vee x > 1$. L'operazione che dobbiamo eseguire è una divisione e dunque il divisore deve essere diverso da zero, quindi $x \neq -1 \wedge x \neq 1$, comunque già implicite nelle C.E. trovate;

| | $x<-1$ | $-1<x<1$ | $x>1$ |
|---|---|---|---|
| $x-1$: | $-$ | $-$ | $+$ |
| $x+1$: | $-$ | $+$ | $+$ |
| $(x-1)(x+1)$: | $+$ | $-$ | $+$ |

c) Semplifichiamo i radicandi $\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{(x-1)^2}} : \sqrt[4]{(x-1) \cdot (x+1)}$;
d) Riduciamo allo stesso indice: il mcm degli indici è 12, quindi:
$\sqrt[12]{\left[\frac{x^2}{(x-1)^2}\right]^4} : \sqrt[12]{(x-1)^3(x+1)^3} \Rightarrow \sqrt[12]{\frac{x^8}{(x-1)^8} \cdot \frac{1}{(x-1)^3(x+1)^3}} = \sqrt[12]{\frac{x^8}{(x-1)^{11}(x+1)^3}}$.

---

✍ *Esercizi proposti:* 2.32, 2.33, 2.34, 2.35,2.36,2.37,2.38,2.39

## 2.6 Portare un fattore sotto il segno di radice

Per portare un fattore dentro il segno di radice bisogna elevarlo all'indice della radice:

- $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$ se $n$ è pari e $a \geqslant 0$;
- $a\sqrt[n]{b} = -\sqrt[n]{a^n \cdot b}$ se $n$ è pari e $a < 0$;
- $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$ se $n$ è dispari.

Ricordando che abbiamo posto $\sqrt[1]{a} = a$, portare un fattore sotto radice quivale a svolgere la moltiplicazione tra una radice di indice 1 e una radice di indice qualsiasi.

---

**Esempio 2.18.** Portare un numero reale dentro il segno di radice.

- $2 \cdot \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 7} = \sqrt[3]{56}$;
- $3 \cdot \sqrt{\frac{2}{21}} = \sqrt{3^2 \cdot \frac{2}{21}} = \sqrt{9 \cdot \frac{2}{21}} = \sqrt{\frac{6}{7}}$;
- $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ lasciamo fuori dalla radice il segno meno $-\frac{1}{2}\sqrt{3} = -\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 3} = -\sqrt{\frac{3}{4}}$;
- $-\frac{1}{3} \cdot \sqrt{12} = -\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 12} = -\sqrt{\frac{1}{9} \cdot 12} = -\sqrt{\frac{4}{3}}$;
- $(1-\sqrt{2}) \cdot \sqrt{3} = -(\sqrt{2}-1) \cdot \sqrt{3} = -\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2 \cdot 3}$;
- $-2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{(-2)^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{-40}$.

**Esempio 2.19.** Portare una espressione letterale dentro il segno di radice.

- $a \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3 b}$ l'indice della radice è dispari pertanto si porta sotto radice senza alcuna condizione;
- $(x-1) \cdot \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{(x-1)^3 \cdot x}$ l'indice della radice è dispari, non sono necessarie condizioni sulla $x$;
- $(x-2)\sqrt{y}$ osserviamo che il radicale esiste per $y \geqslant 0$. Per portare dentro il segno di radice il coefficiente $(x-2)$ bisogna fare la distinzione:

$$(x-2)\sqrt{y} = \begin{cases} \sqrt{(x-2)^2 y}, \text{ se } x \geqslant 2 \\ -(2-x)\sqrt{y} = -\sqrt{(2-x)^2 y}, \text{ se } x < 2; \end{cases}$$

- $(x-1)\sqrt{x-2}$. Il radicale esiste per $x-2 \geqslant 0 \;\rightarrow\; x \geqslant 2$, per questi valori il coefficiente esterno $(x-1)$ è positivo e può essere portato dentro la radice:

$$(x-1)\sqrt{x-2} = \sqrt{(x-1)^2(x-2)};$$

- $\frac{a-1}{a+3} \cdot \sqrt{\frac{a+2}{(a-1)^2}}$. Determiniamo le condizioni di esistenza del radicale: per l'esistenza della frazione $\frac{a+2}{(a-1)^2}$ deve essere $(a-1)^2 \neq 0$, ovvero $a \neq 1$. Affinché il radicando sia positivo o nullo, essendo il denominatore sempre positivo (ovviamente per $a \neq 1$)

è sufficiente che sia $a+2 \geqslant 0$ ovvero $a \geqslant -2$. Pertanto le condizioni di esistenza sono $a \geqslant -2$ e $a \neq 1$.

Studiamo ora il segno della frazione algebrica da portare sotto radice: tale frazione è positiva o nulla per $a < -3 \vee a \geqslant 1$, è negativa per $-3 < a \leqslant 1$.

Se $a > 1$ si ha $\frac{a-1}{a+3} \cdot \sqrt{\frac{a+2}{(a-1)^2}} = \sqrt{\frac{(a-1)^2}{(a+3)^2} \cdot \frac{a+2}{(a-1)^2}} = \sqrt{\frac{a+2}{(a+3)^2}}$.

Se $-2 < a < 1$ il fattore da portare sotto radice è negativo, quindi:

$$-\left(-\frac{a-1}{a+3}\right) \cdot \sqrt{\frac{a+2}{(a-1)^2}} = -\sqrt{\frac{[-(a-1)]^2}{(a+3)^2} \cdot \frac{a+2}{(a-1)^2}} = -\sqrt{\frac{a+2}{(a+3)^2}}$$

Se $a = -2$ l'espressione da calcolare vale zero mentre il caso $a = 1$ è escluso dalla condizione di esistenza.

---

✍ *Esercizi proposti:* 2.40, 2.41

## 2.7 Portare un fattore fuori dal segno di radice

È possibile portare fuori dal segno di radice quei fattori aventi come esponente un numero che sia maggiore o uguale all'indice della radice. In generale si inizia scomponendo in fattori irriducibili il radicando, ottenendo un radicale del tipo $\sqrt[n]{a^m}$ con $m \geqslant n$.

**I° modo:** si esegue la divisione intera $m : n$ ottenendo un quoziente $q$ e un resto $r$. Per la proprietà della divisione si ha $m = n \cdot q + r$ quindi $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{n \cdot q + r}}$ e per le proprietà delle potenze $\sqrt[n]{a^{n \cdot q + r}} = \sqrt[n]{(a^q)^n \cdot a^r}$ e per la regola del prodotto di due radici con medesimo indice si ottiene:

$$\sqrt[n]{a^{n \cdot q + r}} = \sqrt[n]{(a^q)^n \cdot a^r} = \sqrt[n]{(a^q)^n} \cdot \sqrt[n]{a^r} = a^q \cdot \sqrt[n]{a^r} \text{ con } r < n.$$

Notiamo che il fattore "fuori" dalla radice ha per esponente il quoziente della divisione intera, mentre il fattore che rimane "dentro" ha per esponente il resto della divisione stessa.

$\sqrt[3]{a^8} = \ldots$ eseguiamo la divisione $8 : 3$ con $q = 2$ e $r = 2$, otteniamo $\sqrt[3]{a^8} = a^2 \cdot \sqrt[3]{a^2}$.

**II° modo:** si può trasformare la potenza del radicando nel prodotto di due potenze con la stessa base; una avente esponente multiplo dell'indice della radice e l'altra avente per esponente la differenza tra l'esponente iniziale e il multiplo trovato. Consideriamo il seguente esempio:

$\sqrt[3]{a^8} = \ldots$ il multiplo di 3 più vicino a 8 è 6 quindi, otteniamo

$$\sqrt[3]{a^8} = \sqrt[3]{a^6 \cdot a^2} = \sqrt[3]{a^6} \cdot \sqrt[3]{a^2} = a^2 \cdot \sqrt[3]{a^2}.$$

---

**Esempio 2.20.** Portare un numero reale fuori dal segno di radice.

- $\sqrt{1200}$ Si scompone in fattori primi il radicando $1200 = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 3$ ne segue allora che $\sqrt{1200} = \sqrt{2^4 \cdot 5^2 \cdot 3} = 2^2 \cdot 5\sqrt{3} = 20\sqrt{3}$;

- $\sqrt{75} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = 5\sqrt{3}$;
- $\sqrt{720} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5} = 2^2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} = 12\sqrt{5}$.

---

Quando portiamo fuori dalla radice un termine letterale dobbiamo verificare se l'indice della radice è pari o dispari e se il termine che portiamo fuori è positivo o negativo. In particolare:

$$\sqrt[n]{a^n b} = \begin{cases} a\sqrt[n]{b}, \text{ se } n \text{ dispari;} \\ |a|\sqrt[n]{b}, \text{ se } n \text{ pari.} \end{cases}$$

---

**Esempio 2.21.** Portare una espressione letterale fuori dal segno di radice.

- $\sqrt{2a^2} = |a|\sqrt{2}$ bisogna mettere $a$ in valore assoluto perché sotto radice poteva essere sia negativo che positivo, la radice invece deve essere sempre positiva; se $a < 0$ la relazione $\sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$ è errata;
- $\sqrt[3]{a^5b^7cd^3}$ occorre eseguire le divisioni intere tra gli esponenti e l'indice della radice. Cominciamo da $a^5$ risulta $5 : 3 = 1$ con resto uguale a 2; per $b^7$ si ha $7 : 3$ con quoziente 2 e resto 1; l'esponente di c è minore dell'indice; per $d^3$ si ha $3 : 3$ con quoziente 1 e resto 0. In definitiva $\sqrt[3]{a^5b^7cd^3} = ab^2d\sqrt[3]{a^2bc}$, o anche:
$$\sqrt[3]{a^5b^7cd^3} = \sqrt[3]{(a^3a^2)(b^6b)cd^3} = \sqrt[3]{a^3b^6d^3} \cdot \sqrt[3]{a^2bc} = ab^2d^3\sqrt[3]{a^2bc}.$$
In questo caso non c'è da mettere il valore assoluto perché l'indice della radice è dispari;
- $\sqrt[3]{\dfrac{3^3x^3y}{z^6}}$, C. E. $z \neq 0$ $\sqrt[3]{\dfrac{3^3x^3y}{z^6}} = 3\dfrac{x}{z^2}\sqrt[3]{y}$;
- $\sqrt[4]{4x^4 - 4x^5}$ scomponiamo il radicando per poter studiare le condizioni di esistenza del radicale e portare fuori qualche fattore:
$$\sqrt[4]{4x^4 - 4x^5} = \sqrt[4]{4x^4(1-x)} \text{ C. E. } 1 - x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 1.$$
Pertanto:
$$\sqrt[4]{4x^4 - 4x^5} = \sqrt[4]{4x^4(1-x)} = |x|\sqrt[4]{4(1-x)} = \begin{cases} x\sqrt[4]{4(1-x)}, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ -x\sqrt[4]{4(1-x)}, \text{ se } x < 0. \end{cases};$$
- $\sqrt{3(a-1)^2} = |a-1|\sqrt{3} = \begin{cases} (a-1)\sqrt{3}, \text{ se } a > 1 \\ 0, \text{ se } a = 1 \\ (1-a)\sqrt{3}, \text{ se } a < 1. \end{cases}.$

---

✍ *Esercizi proposti:* 2.42, 2.43, 2.44, 2.45

## 2.8 Potenza di radice e radice di radice

Per elevare a potenza una radice si eleva a quella potenza il radicando: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$. Si capisce il perché di questa proprietà trasformando, come negli altri casi, la radice in potenza con esponente frazionario: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

**Esempio 2.22.** Potenza di radice.

- $\left(\sqrt{2}\right)^2 = \sqrt{2^2} = 2$;
- $\left(\sqrt[3]{2ab^2c^3}\right)^2 = \sqrt[3]{4a^2b^4c^6}$.

La radice di un'altra radice è uguale a una radice con lo stesso radicando e con indice il prodotto degli indici delle radici: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$. Anche questa proprietà si può spiegare con le proprietà delle potenze trasformando la radice in potenza con esponente frazionario: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$

**Esempio 2.23.** Radice di radice.

- $\sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[2\cdot 2]{2} = \sqrt[4]{2}$;
- $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2x}} = \sqrt[12]{2x}$.

**Esempio 2.24.** Data l'espressione $E = \sqrt[5]{3 \cdot \sqrt{2}}$ ridurla ad unico radicale.

In questo caso non possiamo subito applicare la regola annunciata, ma dobbiamo portare il fattore esterno dentro la radice più interna ottenendo $\sqrt[5]{\sqrt{3^2 \cdot 2}} = \sqrt[10]{18}$.

Osserviamo che l'espressione $E = \sqrt[5]{3 + \sqrt{2}}$ non si può ridurre ad unico radicale, se non sotto determinate condizioni che analizzeremo in seguito.

✍ *Esercizi proposti:* 2.46, 2.47, 2.48, 2.49

## 2.9 Somma di radicali

Si dice *radicale* un'espressione del tipo $a\sqrt[n]{b}$ con $a$ e $b$ numeri reali, $b \geqslant 0$ ed $n \in \mathbb{N}$. Il numero $a$ prende il nome di *coefficiente* del radicale.

Operare con i radicali è simile al modo di operare con i monomi. Infatti è possibile effettuare somme algebriche soltanto se i radicali hanno lo stesso indice e lo stesso radicando, mentre si possono sempre effettuare moltiplicazioni e divisioni dopo averli ridotti allo stesso indice.

**Definizione 2.5.** Due radicali si dicono *simili* se hanno lo stesso indice e lo stesso radicando.

È possibile effettuare somme algebriche soltanto se i radicali sono simili, si eseguono le somme allo stesso modo in cui si eseguono le somme algebriche dei monomi.

Attenzione l'operazione $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$ è errata in quanto i radicali addendi non sono simili.

**Esempio 2.25.** Esegui le seguenti somme di radicali.

- $\sqrt{8} + \sqrt{2} = \sqrt{2^3} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$;
- $2\sqrt{45} - \sqrt{80} = 2\sqrt{3^2 \cdot 5} - \sqrt{2^4 \cdot 5} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} - 2^2\sqrt{5} = 6\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$;
- $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ non si può eseguire perché i radicali non sono simili;
- $\sqrt[3]{2} + \sqrt{2}$ non si può eseguire perché i radicali non sono simili;

- $\sqrt{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$;
- $2\sqrt{5}-\sqrt{5}=\sqrt{5}$;
- $\frac{1}{2}\sqrt{7}-\frac{4}{3}\sqrt{7}=\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{3}\right)\sqrt{7}=\frac{3-8}{6}\sqrt{7}=-\frac{5}{6}\sqrt{7}$;
- $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}+3\sqrt{3}=(3-2)\sqrt{2}+(2+3)\sqrt{3}=\sqrt{2}+5\sqrt{3}$ abbiamo sommato i radicali simili;
- $2\sqrt{a}+3\sqrt{a}=5\sqrt{a}$, C. E. $a \geqslant 0$;
- $\sqrt[4]{a^5}+\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt{a}+\sqrt[4]{a^6}:\sqrt[4]{a}$. Poniamo le condizioni di esistenza $a>0$ e svolgiamo i calcoli: $\sqrt[4]{a^5}+\sqrt[4]{a^3\cdot a^2}+\sqrt[4]{a^6:a}=\sqrt[4]{a^5}+\sqrt[4]{a^5}+\sqrt[4]{a^5}=3\sqrt[4]{a^5}=3\sqrt[4]{a^4\cdot a}=3a\sqrt[4]{a}$.

---

Per semplificare le espressioni che seguono, useremo le procedure di calcolo dei polinomi.

---

**Esempio 2.26.** Esegui le seguenti operazioni con i radicali.

- $(1+\sqrt{2})(3\sqrt{2}-1)=3\sqrt{2}-1+3\sqrt{2^2}-\sqrt{2}=3\sqrt{2}-1+3\cdot 2-\sqrt{2}=2\sqrt{2}+5$;
- $(\sqrt{3}+1)^2=(\sqrt{3})^2+(1)^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot 1=3+1+2\sqrt{3}=4+2\sqrt{3}$;
- $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=(\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2+2\sqrt{3}(-\sqrt{2})=3+2-2\sqrt{6}=5-2\sqrt{6}$;
- $(3+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=(3)^2+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2+6\sqrt{2}+6\sqrt{3}+2\sqrt{2}\sqrt{3}=14+6\sqrt{2}+6\sqrt{3}+2\sqrt{6}$;
- $(\sqrt{2}+4)(3-\sqrt{2})=3\sqrt{2}+\sqrt{2}(-\sqrt{2})+12+4(-\sqrt{2})=3\sqrt{2}-2+12-4\sqrt{2}=10-\sqrt{2}$;
- $(\sqrt{2}-3)^3=(\sqrt{2})^3-9(\sqrt{2})^2+27\sqrt{2}+(-3)^3=2\sqrt{2}-18+27\sqrt{2}-27=29\sqrt{2}-45$.

---

Le espressioni con radicali possono essere trasformate in potenze con esponente frazionario per poi applicare le proprietà delle potenze:

---

**Esempio 2.27.** Trasforma i radicali in potenze con esponente frazionario applicando le proprietà delle potenze.

- $\dfrac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot b}}{\sqrt[6]{a^5\cdot b}}=\dfrac{a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{5}{6}}\cdot b^{\frac{1}{6}}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{5}{6}}\cdot b^{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}=a^{\frac{2}{6}}\cdot b^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{a^2b}$;
- $\sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{b}}{\sqrt[5]{a^2}}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[4]{a^6b}}{a\sqrt[3]{b}}}$.

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{b}}{\sqrt[5]{a^2}}}\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{a^6b}}{a\sqrt[3]{b}}} &= \left(\frac{a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{2}{5}}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{a^{\frac{3}{2}}\cdot b^{\frac{1}{4}}}{ab^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{1}{3}} \\
&= \frac{a^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{5}}}\cdot\frac{a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{12}}}{a^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{9}}} \\
&= a^{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{4}+\frac{1}{12}-\frac{1}{9}} \\
&= a^{\frac{3}{10}}\cdot b^{\frac{2}{9}} \\
&= \sqrt[10]{a^3}\cdot\sqrt[9]{b^2};
\end{aligned}
$$

➡ $\sqrt[6]{\dfrac{x^3 \cdot \sqrt[3]{xy^2}}{x^2 - \sqrt{xy}}}$.

$$\begin{aligned}
\sqrt[6]{\frac{x^3 \cdot \sqrt[3]{xy^2}}{x^2 - \sqrt{xy}}} &= \left(\frac{x^3 \cdot (xy^2)^{\frac{1}{3}}}{x^2 - (xy)^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{6}} \\
&= \left(\frac{x^3 \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{2}{3}}}{x^2 - x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{6}} \\
&= \left(\frac{x^{\frac{10}{3}} \cdot y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{2}} \cdot \left(x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)}\right)^{\frac{1}{6}} \\
&= \left[x^{\frac{17}{6}} \cdot y^{\frac{2}{3}} \cdot \left(x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\right]^{\frac{1}{6}} \\
&= x^{\frac{17}{36}} \cdot y^{\frac{1}{9}} \cdot \left(x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{6}}.
\end{aligned}$$

---

✍ *Esercizi proposti:* 2.50, 2.51, 2.52, 2.53, 2.54, 2.55, 2.56, 2.57, 2.58, 2.59, 2.60, 2.61, 2.62, 2.63, 2.64, 2.65, 2.66, 2.67

## 2.10 Razionalizzazione del denominatore di una frazione

Nel calcolo di espressioni che contengono radicali può capitare che al denominatore compaiano dei radicali. Per migliorare l'approssimazione si cerca di evitare questa situazione e operare affinché non compaiano radicali al denominatore. Questa operazione prende il nome di *razionalizzazione del denominatore*.

Razionalizzare il denominatore di una frazione vuol dire trasformare una frazione in una frazione equivalente avente per denominatore un'espressione nella quale non compaiano radici.

**I° Caso:** la frazione è del tipo $\dfrac{a}{\sqrt{b}}$.

Per razionalizzare il denominatore di una frazione di questo tipo basta moltiplicare numeratore e denominatore per $\sqrt{b}$, che prende il nome di fattore razionalizzante:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}.$$

---

**Esempio 2.28.** Razionalizza il denominatore delle seguenti espressioni.

➡ $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

➡ $\dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\cdot 3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

➡ $\dfrac{a^2-1}{\sqrt{a-1}} = \dfrac{(a^2-1)\sqrt{a-1}}{\sqrt{a-1}\sqrt{a-1}} = \dfrac{(a^2-1)\sqrt{a-1}}{a-1} = \dfrac{(a-1)(a+1)\sqrt{a-1}}{a-1} = (a+1)\sqrt{a-1}.$

---

**II° Caso:** la frazione è del tipo $\dfrac{a}{\sqrt[n]{b^m}}$ con $n > m$.

In questo caso il fattore razionalizzante è $\sqrt[n]{b^{n-m}}$. Infatti si ha:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^m}\cdot\sqrt[n]{b^{(n-m)}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^m\cdot b^{n-m}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}$$

Se abbiamo un'espressione in cui l'esponente del radicando supera l'indice della radice, prima di razionalizzare possiamo portare fuori dalla radice.

---

**Esempio 2.29.** Razionalizza il denominatore delle seguenti espressioni.

➡ $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$: il fattore razionalizzante è $\sqrt[3]{2^2}$ quindi:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1\cdot\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2};$$

➡ $\dfrac{ab}{\sqrt[4]{xa^2b^3}}$: il fattore razionalizzante è $\sqrt[4]{x^3a^2b}$ quindi:

$$\frac{ab}{\sqrt[4]{xa^2b^3}} = \frac{ab\cdot\sqrt[4]{x^3a^2b}}{\sqrt[4]{xa^2b^3}\cdot\sqrt[4]{x^3a^2b}} = \frac{ab\sqrt[4]{x^3a^2b}}{\sqrt[4]{x^4a^4b^4}} = \frac{ab\sqrt[4]{x^3a^2b}}{xab} = \frac{\sqrt[4]{x^3a^2b}}{x};$$

➡ $\dfrac{1}{\sqrt[3]{b^5}} = \dfrac{1}{b\sqrt[3]{b^2}} = \dfrac{1\cdot\sqrt[3]{b}}{b\sqrt[3]{b^2}\cdot\sqrt[3]{b}} = \dfrac{\sqrt[3]{b}}{b^2}.$

---

**III° Caso:** la frazione è del tipo $\dfrac{x}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ oppure $\dfrac{x}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

Per questo tipo di frazione occorre sfruttare il prodotto notevole $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$. Il fattore razionalizzante nel primo caso è $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, nel secondo è $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. Sviluppiamo solo il primo caso, poiché il secondo è del tutto analogo:

$$\frac{x}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{x\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{x(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}} = \frac{x(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$$

---

**Esempio 2.30.** Razionalizza il denominatore delle seguenti espressioni.

➡ $\dfrac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \dfrac{2\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{3}-\sqrt{5})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{5})} = \dfrac{2(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{\sqrt{3^2}-\sqrt{5^2}} = \dfrac{2(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{-2} = -(\sqrt{3}+\sqrt{5});$

➡ $\dfrac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}\cdot(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})\cdot(3+\sqrt{2})} = \dfrac{\sqrt{2}(3+\sqrt{2})}{3^2-\sqrt{2^2}} = \dfrac{\sqrt{2}(3+\sqrt{2})}{9-2} = \dfrac{\sqrt{2}(3+\sqrt{2})}{7};$

➡ $\dfrac{1+\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} = \dfrac{(1+\sqrt{a})\cdot(1+\sqrt{a})}{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a})} = \dfrac{(1+\sqrt{a})^2}{1-\sqrt{a^2}} = \dfrac{1+2\sqrt{a}+a}{1-a}$ con $a \geqslant 0 \wedge a \neq 1.$

---

**IV° Caso:** la frazione è del tipo $\dfrac{x}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$

Anche in questo caso si utilizza il prodotto notevole della differenza di quadrati, solo che va ripetuto più volte.

---

**Esempio 2.31.** Razionalizza $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

Il fattore di razionalizzazione è in questo caso $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$ quindi:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-5}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2+3+2\sqrt{6}-5}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}};$$

ora il fattore razionalizzante di questa frazione è $\sqrt{6}$:

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{30}}{2\cdot 6}=\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}.$$

---

**V° Caso:** la frazione è del tipo $\dfrac{x}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$.

In questo caso si utilizza il prodotto notevole $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ e quello analogo $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.

$$\frac{x}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\frac{x}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}\cdot\frac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\frac{x\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{(\sqrt[3]{a})^3+(\sqrt[3]{b})^3}$$
$$=\frac{x\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a+b}.$$

---

**Esempio 2.32.** Razionalizza $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}}$.

Il fattore di razionalizzazione è in questo caso $\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2\cdot 3}+\sqrt[3]{3^2}$ quindi:

$$\frac{1\cdot\left(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2\cdot 3}+\sqrt[3]{3^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2\cdot 3}+\sqrt[3]{3^2}\right)}=\frac{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2\cdot 3}+\sqrt[3]{3^2}}{2-3}=-\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}\right).$$

---

✍ *Esercizi proposti:* 2.68, 2.69, 2.70, 2.71, 2.72, 2.73, 2.74, 2.75, 2.76

## 2.11 Radicali doppi

Si dice radicale doppio un'espressione del tipo $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ oppure $\sqrt{a-\sqrt{b}}$.

I radicali doppi possono essere trasformati nella somma algebrica di due radicali semplici se l'espressione $a^2-b$ è un quadrato perfetto. La formula per ottenere la trasformazione in radicali semplici è:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

---

**Esempio 2.33.** Trasforma, se possibile, i seguenti radicali doppi in radicali semplici.

- $\sqrt{7-\sqrt{40}} = \sqrt{\frac{7+\sqrt{49-40}}{2}} - \sqrt{\frac{7-\sqrt{49-40}}{2}} = \sqrt{\frac{7+3}{2}} - \sqrt{\frac{7-3}{2}} = \sqrt{5}-\sqrt{2}$;
- $\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2^2-3}}{2}} - \sqrt{\frac{2-\sqrt{2^2-3}}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, razionalizzando il denominatore si ottiene: $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$;
- $\sqrt{7+2\sqrt{6}} = \sqrt{7+\sqrt{24}}$ per applicare la formula abbiamo portato il fattore 2 dentro la radice: $\sqrt{7+\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{7-\sqrt{49-24}}{2}} + \sqrt{\frac{7-\sqrt{49-24}}{2}} = \sqrt{\frac{7+5}{2}} + \sqrt{\frac{7-5}{2}} = \sqrt{6}+1$;
- $\sqrt{5+\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{25-3}}{2}} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{25-3}}{2}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{22}}{2}} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{22}}{2}}$ la formula non è stata di alcuna utilità in quanto il radicale doppio non è stato eliminato.

---

✍ *Esercizi proposti:* 2.77, 2.78, 2.79

## 2.12 Equazioni, disequazioni e sistemi a coefficienti irrazionali

Avendo imparato come operare con i radicali puoi risolvere equazioni, sistemi e disequazioni con coefficienti irrazionali.

### 2.12.1 Equazioni di primo grado

---

**Esempio 2.34.** Risolvi le seguenti equazioni.

- $\sqrt{3}x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{9}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}$;
- $(\sqrt{3}-1)x-\sqrt{6} = 2x-\sqrt{2}(3\sqrt{2}+1)+1$.

$$\begin{aligned}
&(\sqrt{3}-1)x-\sqrt{6} = 2x-\sqrt{2}(3\sqrt{2}+1)+1\\
\Rightarrow&\sqrt{3}x-x-\sqrt{6} = 2x-3\cdot 2-\sqrt{2}+1\\
\Rightarrow&\sqrt{3}x-3x = \sqrt{6}-\sqrt{2}-5\\
\Rightarrow&x(\sqrt{3}-3) = \sqrt{6}-\sqrt{2}-5\\
\Rightarrow&x = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}-5}{\sqrt{3}-3}.
\end{aligned}$$

Razionalizziamo ora il denominatore:

$$x = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}-5}{\sqrt{3}-3}\cdot\frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+3} = \frac{3\sqrt{2}+3\sqrt{6}-\sqrt{6}-5\sqrt{3}-15}{3-9} = -\frac{\sqrt{6}}{3}+\frac{5\sqrt{3}}{6}+\frac{5}{2}.$$

---

### 2.12.2 Disequazioni di primo grado

**Esempio 2.35.** Risolvi le seguenti disequazioni.

- $(\sqrt{3}-1)x \leqslant \sqrt{3}$ il coefficiente dell'incognita è positivo, quindi: $x \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$ e poi razionalizzando $x \leqslant \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$;
- $2x \cdot (1-\sqrt{2}) \geqslant -3\sqrt{2}$ il coefficiente dell'incognita è negativo, quindi $x \leqslant \dfrac{-3\sqrt{2}}{2(1-\sqrt{2})}$ e poi razionalizzando $x \leqslant 3+\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

### 2.12.3 Sistemi di primo grado

**Esempio 2.36.** Risolvi $\begin{cases} x(2+\sqrt{2})+y=\sqrt{2}(2+x) \\ x-(\sqrt{2}+1)y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+2y) \end{cases}$.

Eseguiamo i calcoli per ottenere la forma canonica:

$$\begin{cases} 2x+x\sqrt{2}+y=2\sqrt{2}+x\sqrt{2} \\ x-y\sqrt{2}-y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-y\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=2\sqrt{2} \\ x-y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

e con il metodo di riduzione, sommando le due equazioni otteniamo:

$$\begin{cases} 3x=2\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y=2\sqrt{2}-2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y=2\sqrt{2}-2\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}.$$

✍ *Esercizi proposti:* 2.80, 2.81, 2.82, 2.83, 2.84, 2.85, 2.86, 2.87, 2.88, 2.89

## 2.13 Esercizi

### 2.13.1 Esercizi dei singoli paragrafi

#### 2.1 - Radici

**2.1.** Determina le seguenti radici quadrate razionali (quando è possibile calcolarle).

a) $\sqrt{9}$;
b) $\sqrt{36}$;
c) $\sqrt{-49}$;
d) $\sqrt{64}$;
e) $\sqrt{-81}$;
f) $\sqrt{\frac{16}{25}}$;
g) $\sqrt{\frac{49}{81}}$;
h) $\sqrt{\frac{121}{100}}$;
i) $\sqrt{\frac{144}{36}}$;
j) $\sqrt{\frac{-1}{4}}$;
k) $\sqrt{0,04}$;
l) $\sqrt{0,09}$;
m) $\sqrt{0,0001}$;
n) $\sqrt{\frac{144}{9}}$;
o) $\sqrt{0,16}$.

**2.2.** Determina le seguenti radici quadrate razionali (quando è possibile calcolarle).

a) $\sqrt{-0,09}$;
b) $\sqrt{25 \cdot 16}$;
c) $\sqrt{36 \cdot 49}$;
d) $\sqrt{0,04 \cdot 0,0121}$;
e) $\sqrt{\frac{1}{100}}$;
f) $\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{1+\sqrt{6+\sqrt{9}}}}}$;
g) $\sqrt{5+\sqrt{14+\sqrt{2+\sqrt{4}}}}$.

**2.3.** Senza usare la calcolatrice determina per ciascuna delle seguenti radici quadrate il valore approssimato a $1/10$: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{\frac{17}{4}}$.

**2.4.** Estrai le seguenti radici di espressioni letterali, facendo attenzione al valore assoluto.

a) $\sqrt{a^2+2a+1}$;
b) $\sqrt{4x^2+8x+4}$;
c) $\sqrt{9-12a+4a^2}$.

**2.5.** Senza usare la calcolatrice determina per ciascuna delle seguenti radici cubiche il valore approssimato a $1/10$: $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[3]{100}$, $\sqrt[3]{25}$, $\sqrt[3]{250}$.

**2.6 (*).** Determina le seguenti radici se esistono.

a) $\sqrt[3]{27}$;
b) $\sqrt[3]{64}$;
c) $\sqrt[3]{-1}$;
d) $\sqrt[3]{1000}$;
e) $\sqrt[3]{125}$;
f) $\sqrt[3]{-216}$;
g) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$;
h) $\sqrt[3]{-\frac{64}{125}}$;
i) $\sqrt[3]{\frac{1000}{27}}$.

**2.7 (*).** Determina le seguenti radici se esistono.

a) $\sqrt[3]{0,001}$;
b) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$;
c) $\sqrt[3]{-0,008}$;
d) $\sqrt[3]{4+\sqrt[3]{61+\sqrt[3]{25+\sqrt[3]{8}}}}$;
e) $\sqrt[3]{25+\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{122+\sqrt[3]{27}}}}$;
f) $\sqrt[3]{27 \cdot \sqrt{64}}$;
g) $\sqrt[9]{0}$;
h) $\sqrt[8]{-1}$;
i) $\sqrt[5]{-100000}$.

**2.8 (*).** Determina le seguenti radici se esistono.

a ) $\sqrt[4]{0,0001}$;
b ) $\sqrt[4]{81}$;
c ) $\sqrt[6]{64}$;
d ) $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}$;
e ) $\sqrt[4]{-4}$;
f ) $\sqrt[10]{0}$;
g ) $\sqrt[4]{0,0081}$;
h ) $\sqrt[5]{34-\sqrt[4]{14+\sqrt{2+\sqrt[3]{8}}}}$;
i ) $\sqrt{20+\sqrt[3]{121+\sqrt[4]{253+\sqrt[5]{243}}}}$.

**2.9 (*).** Determina le seguenti radici se esistono.

a ) $\sqrt{21+\sqrt{16}}$;
b ) $\sqrt[5]{31+\sqrt[4]{1}}$;
c ) $\sqrt[5]{240+\sqrt{9}}$;
d ) $\sqrt{\sqrt{0,16}}$;
e ) $\sqrt[5]{32\cdot 10^{-5}}$;
f ) $\sqrt{3\sqrt{37-4\sqrt{81}\cdot 27}}$;
g ) $\sqrt{72+\sqrt{80+\sqrt{1}}}$;
h ) $\sqrt{\frac{25a^4}{9}}$;
i ) $\sqrt[4]{620+\sqrt[4]{625}}$.

**2.10 (*).** Determina le seguenti radici se esistono.

a ) $\sqrt{24336}$;
b ) $\sqrt[5]{243}$;
c ) $\sqrt[4]{600+\sqrt{25}\cdot\sqrt{25}}$;
d ) $\sqrt[3]{8a^3+12a^2+6a+1}$;
e ) $\sqrt[3]{a^6+9a^4+27a^2+27}$;
f ) $\sqrt[3]{1-6x+12x^2-8x^3}$.

### 2.2 - Condizioni di esistenza

**2.11 (*).** Determina le condizioni di esistenza dei seguenti radicali.

a ) $\sqrt[3]{x+1}$;
b ) $\sqrt{1-x}$;
c ) $\sqrt{\dfrac{1}{x+1}}$;
d ) $\sqrt{3x^2y}$;
e ) $\sqrt[3]{3xy}$;
f ) $\sqrt[4]{-2x^2y^2}$;
g ) $\sqrt[4]{\dfrac{x^2+1}{x-1}}$;
h ) $\sqrt[5]{\dfrac{1}{x^3}}$;
i ) $\sqrt{\dfrac{4-x}{x-3}}$.

**2.12 (*).** Determina le condizioni di esistenza dei seguenti radicali.

a ) $\sqrt{x^2(x+1)}$;
b ) $\sqrt[3]{1+a^2}$;
c ) $\sqrt[6]{2x-1}$;
d ) $\sqrt{1-x}+2\sqrt{\dfrac{1}{x-1}}$;
e ) $\sqrt{1+|x|}$;
f ) $\sqrt{(a-1)(a-2)}$;
g ) $\sqrt{|x|+1}\cdot\sqrt[3]{x+1}$;
h ) $\sqrt[3]{\dfrac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}}$;
i ) $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-1}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{3-x}}$.

**2.13 (*).** Determina le condizioni di esistenza dei seguenti radicali.

a ) $\sqrt{\dfrac{5-x}{x+2}}$;
b ) $\sqrt{\dfrac{2y}{(2y+1)^2}}$;
c ) $\sqrt{\dfrac{x-3}{1-x}}$;
d ) $\sqrt{\dfrac{a}{a^2-a-2}}$;
e ) $\sqrt{\dfrac{1}{b^2-4}}$;
f ) $\sqrt{\dfrac{(x-1)^2}{(x-3)(x+2)}}$;
g ) $\sqrt{\dfrac{2}{x}+\dfrac{x}{2}}$;
h ) $\sqrt[6]{\dfrac{x-1}{|x|}}$;
i ) $\sqrt[4]{\dfrac{4x^2+4+8x}{9}}$.

**2.14 (*).** Determina le condizioni di esistenza dei seguenti radicali.

a) $\sqrt[6]{\dfrac{(b^2+1+2b)^3}{729b^6}}$;
b) $\sqrt{\dfrac{x(x-1)}{x-4}}$;
c) $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{2}{xy}}$;
d) $\sqrt[4]{\dfrac{m+1}{m-1}}$;
e) $\sqrt[3]{x(x+2)^2}$;
f) $\sqrt{\dfrac{1+a}{a^2}}$;
g) $\sqrt{\dfrac{a+2}{a(a-4)}}$;
h) $\sqrt{\dfrac{1}{b^2-4}}$;
i) $\sqrt{\dfrac{a^3}{a^2+6a+9}}$.

**2.15 (*).** Determina le condizioni di esistenza dei seguenti radicali.

a) $\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+1}}$;
b) $\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x-2}}$;
c) $\sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}$;
d) $\sqrt[3]{\dfrac{x^3}{x^3+1}}$;
e) $\sqrt{2x+3}$;
f) $\sqrt[3]{a^2-1}$;
g) $\sqrt{x(x+1)(x+2)}$;
h) $\sqrt{|x|+1}$;
i) $\sqrt{\dfrac{x}{|x+1|}}$;
j) $\sqrt{\dfrac{1}{-x^2-1}}$.

### 2.3 - Potenze a esponente razionale

**2.16.** Calcola le seguenti potenze con esponente razionale.

a) $4^{\frac{3}{2}}$;
b) $8^{\frac{2}{3}}$;
c) $9^{-\frac{1}{2}}$;
d) $16^{\frac{3}{4}}$;
e) $16^{\frac{5}{4}}$;
f) $\left(\dfrac{9}{4}\right)^{\frac{4}{3}}$;
g) $125^{-\frac{2}{3}}$;
h) $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{-\frac{3}{2}}$;
i) $25^{-\frac{3}{2}}$;
j) $27^{\frac{4}{3}}$.

**2.17 (*).** Calcola le seguenti potenze con esponente razionale.

a) $32^{\frac{2}{5}}$;
b) $49^{-\frac{1}{2}}$;
c) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$;
d) $\left(-\dfrac{1}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$;
e) $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{-\frac{5}{2}}$;
f) $(0,008)^{-\frac{2}{3}}$;
g) $4^{0,5}$;
h) $16^{0,25}$;
i) $32^{0,2}$;
j) $100^{0,5}$.

**2.18 (*).** Trasforma le seguenti espressioni in forma di potenza con esponente frazionario.

a) $\sqrt{2}$;
b) $\sqrt[3]{8^2}$;
c) $\sqrt[7]{5^3}$;
d) $\sqrt{3^3}$;
e) $\sqrt{\left(\dfrac{1}{3^3}\right)}$;
f) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{3^2}}$;
g) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{25}}$;
h) $\sqrt[5]{\dfrac{4^2}{3^2}}$.

**2.19** (*). Trasforma nella forma radicale le seguenti espressioni.

a) $\left(\left(a^2+1\right)^{\frac{2}{3}}+1\right)^{\frac{1}{4}}$; b) $\left(1+\left(1+a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{2}{3}}$.

**2.20.** Scrivi in ordine crescente i seguenti numeri:

$$0{,}00000001, \quad (0{,}1)^{10}, \quad (0{,}1)^{0{,}1}, \quad 10^{-10}, \quad \sqrt{0{,}0000000001}.$$

**2.4 - Semplificazione di radici**

**2.21.** Trasforma i seguenti radicali applicando la proprietà invariantiva.

a) $\sqrt[4]{4} = \sqrt[8]{\ldots}$;
b) $\sqrt[3]{9} = \sqrt[6]{\ldots}$;
c) $\sqrt[5]{5} = \sqrt[15]{\ldots}$;
d) $\sqrt{2} = \sqrt[6]{\ldots}$;
e) $\sqrt{2} = \sqrt[\cdots]{16}$;
f) $\sqrt[3]{3} = \sqrt[\cdots]{81}$.

**2.22.** Trasforma i seguenti radicali applicando la proprietà invariantiva.

a) $\sqrt[3]{-5} = -\sqrt[\cdots]{25}$;
b) $\sqrt[4]{\frac{3}{2}} = \sqrt[\cdots]{\frac{27}{8}}$;
c) $\sqrt[21]{a^7} = \sqrt[6]{\ldots}, a > 0$;
d) $\sqrt[8]{a^{24}} = \sqrt[5]{\ldots}, a > 0$;
e) $\sqrt[3]{27} = \frac{1}{\sqrt{\cdots}}$;
f) $\sqrt{x^4+2x^2+1} = \sqrt[7]{\ldots}$

**2.23** (*). Semplifica i seguenti radicali.

a) $\sqrt[4]{25}$;
b) $\sqrt[6]{8}$;
c) $\sqrt[8]{16}$;
d) $\sqrt[9]{27}$;
e) $\sqrt[4]{100}$;
f) $\sqrt[6]{144}$;
g) $\sqrt[4]{169}$;
h) $\sqrt[6]{121}$;
i) $\sqrt[6]{125}$.

**2.24** (*). Semplifica i seguenti radicali.

a) $\sqrt[4]{49}$;
b) $\sqrt[6]{64}$;
c) $\sqrt[12]{16}$;
d) $\sqrt[6]{\frac{16}{121}}$;
e) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$;
f) $\sqrt[10]{\frac{25}{81}}$;
g) $\sqrt[15]{\frac{64}{27}}$;
h) $\sqrt[9]{-3^3}$;
i) $\sqrt[6]{(-2)^4}$.

**2.25** (*). Semplifica i seguenti radicali.

a) $\sqrt[12]{-4^6}$;
b) $\sqrt[10]{-32}$;
c) $\sqrt[6]{5^2-4^2}$;
d) $\sqrt[4]{12^2+5^2}$;
e) $\sqrt[10]{3^2+4^2}$;
f) $\sqrt[4]{10^2-8^2}$;
g) $\sqrt[3]{2^6 \cdot 5^{15}}$;
h) $\sqrt[4]{3^4 \cdot 4^6}$;
i) $\sqrt[5]{5^5 \cdot 4^{10} \cdot 2^{15}}$.

**2.26** (*). Semplifica i seguenti radicali.

a) $\sqrt[9]{27 \cdot 8 \cdot 125}$;
b) $\sqrt[4]{625}$;
c) $\sqrt[6]{1000}$;
d) $\sqrt[4]{2+\frac{17}{16}}$;
e) $\sqrt[6]{\left(\frac{13}{4}+\frac{1}{8}\right)^4}$;
f) $\sqrt[6]{\left(1+\frac{21}{4}\right)^3}$;
g) $\sqrt[16]{(-16)^4}$;
h) $\sqrt[10]{2^{10} \cdot 3^{20}}$;
i) $\sqrt[6]{2^8 \cdot 3^6}$.

**2.27** (*). Semplifica i seguenti radicali.

a) $\sqrt[12]{3^6 \cdot 4^{12}}$;
b) $\sqrt[4]{2^{10} \cdot 3^{15} \cdot 12^5}$;
c) $\sqrt[6]{3^9 \cdot 8^2}$;
d) $\sqrt[4]{9x^2y^4}$;
e) $\sqrt[3]{64a^6b^9}$;
f) $\sqrt[3]{x^6y^9(x-y)^{12}}$;
g) $\sqrt[5]{\frac{32a^{10}}{b^{20}}}$;
h) $\sqrt[4]{\frac{20a^6}{125b^{10}}}$;
i) $\sqrt[8]{\frac{16x^5y^8}{81x}}$.

**2.28** (*). Semplifica i seguenti radicali.

a) $\left(\sqrt{a+1}\right)^6$;
b) $\sqrt[9]{27a^6b^{12}}$;
c) $\sqrt[12]{(2x+3)^3}$;
d) $\sqrt[6]{\frac{0{,}008x^{15}y^9}{8a^{18}}}$;
e) $\sqrt[10]{\frac{121a^5}{ab^2}}$;
f) $\sqrt{\frac{25a^4b^8c^7}{c(a+2b)^6}}$;
g) $\sqrt[6]{a^2+2a+1}$;
h) $\sqrt[9]{a^3+3a^2+3a+1}$;
i) $\sqrt{3a^2+\sqrt{a^4}}$.

**2.29** (*). Semplifica i seguenti radicali.

a) $\sqrt[4]{x^4+2x^2+1}$;
b) $\sqrt[10]{a^4+6a^2x+9x^2}$;
c) $\sqrt[6]{8a^3-24a^2+24a-8}$;
d) $\sqrt[6]{\frac{9x^2}{y^6}}$;
e) $\sqrt[4]{\frac{16a^4b^6}{25x^2}}$;
f) $\sqrt{\frac{2x^2-2}{8x^2-8}}$;
g) $\sqrt[8]{a^4+2a^2x^2+x^4}$;
h) $\sqrt{\frac{25a^4b^6}{a^4+4+4a^2}}$;
i) $\sqrt[9]{x^6+3x^5+3x^4+x^3}$.

**2.30** (*). Semplifica i seguenti radicali.

a) $\sqrt[4]{a^2+6a+9}$;
b) $\sqrt[9]{8x^3-12x^2+6x+x^3}$;
c) $\sqrt[4]{a^4(a^2-2a+1)}$;
d) $\sqrt[4]{(x^2-6x+9)^2}$;
e) $\sqrt[12]{(x^2+6x+9)^3}$;
f) $\sqrt{a^2+2a+1}-\sqrt{a^2-2a+1}$;
g) $\sqrt[18]{\frac{a^9+3a^8+3a^7+a^6}{9a^7+9a^5+18a^6}}$;
h) $\sqrt[6]{\frac{(x^2+1-2x)^3b}{b^7\left(x^3+3x^2+3x+1\right)^2}}$;
i) $\sqrt{\frac{(x^3+x^2y)(a+2)}{2x+2y+ax+ay}}$.

**2.31.** [*] Semplifica i seguenti radicali.

a) $\sqrt[2n]{16^n}$;
b) $\sqrt[4n]{\frac{2^{3n}}{3^{2n}}}$;
c) $\sqrt[n^2]{\frac{6^{2n}}{5^{3n}}}$;
d) $\sqrt[3n]{27^n \cdot 64^2n}$;
e) $\sqrt[2n^2]{16^2n \cdot 81^2n}$;
f) $\sqrt[n+1]{16^{2n+2}}$;
g) $\sqrt[5]{25x^3y^4}$;
h) $\sqrt[12]{81a^6b^{12}}$;
i) $\sqrt[5]{32x^{10}}$.

### 2.5 - Moltiplicazione e divisione di radici

**2.32** (*). Esegui le seguenti moltiplicazioni e divisioni di radicali.

a) $\sqrt{45}\cdot\sqrt{5}$;
b) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}$;
c) $\sqrt[3]{16}\cdot\sqrt[3]{4}$;
d) $\sqrt{75}\cdot\sqrt{12}$;
e) $\sqrt[3]{20}\cdot\sqrt{50}$;
f) $\sqrt{40} : \left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\right)$;
g) $\sqrt{\frac{1}{5}}\cdot\sqrt{45}$;
h) $\sqrt[3]{3} : \sqrt[3]{9}$;
i) $\sqrt[5]{2}\cdot\sqrt[5]{6} : \sqrt[5]{12}$.

**2.33 (*).** Esegui le seguenti moltiplicazioni e divisioni di radicali.

a) $\sqrt[6]{81}\cdot\sqrt[6]{81}:\sqrt[6]{9}$;
b) $\sqrt[4]{1+\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[4]{2-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[4]{1+\frac{5}{4}}$;
c) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}$;
d) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{8}$;
e) $\sqrt[6]{81}\cdot\sqrt{3}$;
f) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$;
g) $\sqrt{\frac{10}{2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{6}{3}}:\sqrt[6]{\frac{4}{9}}$;
h) $\sqrt{2^3\cdot 3}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3^3}$.

**2.34 (*).** Esegui le seguenti moltiplicazioni e divisioni di radicali.

a) $\left(\sqrt[3]{\frac{42}{13}}:\sqrt[3]{\frac{91}{36}}\right):\sqrt{13}$;
b) $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt[3]{\frac{25}{24}}\cdot\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$;
c) $\sqrt[3]{5+\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$;
d) $\sqrt[5]{2^3}\cdot\sqrt[10]{2^4}$;
e) e)$\sqrt{15}\cdot\sqrt{30}\cdot\sqrt{8}$;
f) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$;
g) $\sqrt[3]{-1-\frac{1}{2}} : \sqrt{1-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[6]{12}$;
h) $\sqrt[3]{1+\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[4]{2+\frac{1}{4}}$.

**2.35.** [*] Esegui le seguenti operazioni (le lettere rappresentano numeri reali positivi).

a) $\sqrt[3]{4a}\cdot\sqrt[3]{9a}\cdot\sqrt[3]{12a}$;
b) $\sqrt{3a}:\sqrt{\frac{1}{5}a}$;
c) $\sqrt[3]{2ab}\cdot\sqrt[3]{4a^2b^2}$;
d) $\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}:\sqrt[6]{x}$;
e) $\sqrt{\frac{1}{a^4}}\cdot\sqrt{\frac{a^6b}{2}}:\sqrt{\frac{2b}{a}}$;
f) $\sqrt{\frac{4}{9}}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}a}:\sqrt[6]{3a}$.

**2.36 (*).** Esegui le seguenti operazioni (le lettere rappresentano numeri reali positivi).

a) $\sqrt[3]{ax}\cdot\sqrt{xy}\cdot\sqrt[5]{ay}$;
b) $\sqrt[3]{(x+1)^2}:\sqrt{x-1}$;
c) $\sqrt{a^2-b^2}:\sqrt{a+b}$;
d) $\sqrt{a^2-3a}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[6]{a^5}$;
e) $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\sqrt[3]{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$;
f) $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}:\sqrt[3]{\frac{a+b}{a-b}}$.

**2.37 (*).** Esegui le seguenti operazioni (le lettere rappresentano numeri reali positivi).

a) $\sqrt{\frac{a^2+2a+1}{2a}}\cdot\sqrt{\frac{1+a}{a^2}}:\sqrt{\frac{2}{a}}$;
b) $\sqrt{\frac{a+1}{a-3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{a^2-9}{a^2-1}}$;
c) $\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}\cdot\sqrt{\frac{x-1}{x+3}}:\sqrt[3]{\frac{x^2-1}{x^2+x-6}}$;
d) $\sqrt{a^4b}\cdot\sqrt[6]{\frac{a^2}{b}}$;
e) $\sqrt[3]{\frac{a^2-2}{a+3}}\cdot\sqrt[4]{\frac{a+3}{a-2}}$;
f) $\sqrt{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}:\sqrt{x+y}$.

**2.38 (*).** Esegui le seguenti operazioni (le lettere rappresentano numeri reali positivi).

a) $\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}:\sqrt{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}$;
b) $\frac{\sqrt{4a^2-9}\cdot\sqrt{2a-3}}{\sqrt[3]{2a+3}}$;
c) $\sqrt{\frac{9-a^2}{(a+3)^2}}\cdot\sqrt{\frac{27+9a}{3-a}}$;
d) $\sqrt{\frac{a+2}{a-1}}:\sqrt[3]{\frac{(a-1)^2}{a^2+4a+4}}$;
e) $\sqrt{\frac{x^2-4}{x+1}}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{x^3-2x^2}}$;
f) $\sqrt[4]{\frac{a+b}{a^2-b^2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{a-2b}{a+2b}}\cdot\sqrt[6]{a^2-4b^2}$.

**2.39 (*).** Esegui le seguenti operazioni (le lettere rappresentano numeri reali positivi).

a) $\sqrt{\frac{a^2b+ab^2}{xy}}\cdot\sqrt[6]{\frac{(a+b)^2}{x^2}}\cdot\sqrt[6]{\frac{x^2y^3}{(a+b)^2}}\cdot\sqrt[4]{\frac{x}{a^3b^2+a^2b^3}}$;
b) $\frac{\sqrt{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}:\sqrt[3]{\frac{x}{y}-\frac{1}{x}}}{\sqrt{\frac{xy}{x+y}}}$.

### 2.6 - Portare un fattore sotto il segno di radice

**2.40** (*). Trasporta dentro la radice i fattori esterni.

a) $2\sqrt{2}$;
b) $3\sqrt{3}$;
c) $2\sqrt{3}$;
d) $3\sqrt{2}$;
e) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$;
f) $\frac{1}{3}\sqrt{3}$;
g) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$;
h) $\frac{2}{3}\sqrt{6}$;
i) $\frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}$;
j) $2\sqrt[3]{2}$;
k) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{3}$;
l) $4\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$;
m) $-3\sqrt{3}$;
n) $-2\sqrt[3]{2}$;
o) $\frac{-1}{2}\sqrt[3]{4}$;
p) $\frac{-1}{5}\sqrt{5}$;
q) $-\frac{1}{3}\sqrt[3]{9}$;
r) $\left(1+\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}$.

**2.41** (*). Trasporta dentro la radice i fattori esterni, discutendo i casi letterali.

a) $x\sqrt{\frac{1}{5}}$;
b) $x^2\sqrt[3]{x}$;
c) $a\sqrt{2}$;
d) $x^2\sqrt[3]{3}$;
e) $2a\sqrt{5}$;
f) $a\sqrt{-a}$;
g) $(a-1)\sqrt{a}$;
h) $(x-2)\sqrt{\frac{1}{2x-4}}$;
i) $x\sqrt{\frac{1}{x^2+x}}$;
j) $\frac{a+1}{a+2}\sqrt{\frac{a^2+3a+2}{a^2+4a+3}}$;
k) $\frac{2}{x}\sqrt{\frac{x^2+x}{x-1}-x}$;
l) $\frac{1}{x-1}\sqrt{x^2-1}$.

### 2.7 - Portare un fattore fuori dal segno di radice

**2.42** (*). Semplifica i radicali portando fuori i fattori possibili (attenzione al valore assoluto).

a) $\sqrt{250}$;
b) $\sqrt{486}$;
c) $\sqrt{864}$;
d) $\sqrt{3456}$;
e) $\sqrt{20}$;
f) $\sqrt{0,12}$;
g) $\sqrt{45}$;
h) $\sqrt{48}$;
i) $\sqrt{98}$;
j) $\sqrt{50}$;
k) $\sqrt{300}$;
l) $\sqrt{27}$;
m) $\sqrt{75}$;
n) $\sqrt{40}$;
o) $\sqrt{12}$;
p) $\sqrt{80}$.

**2.43** (*). Semplifica i radicali portando fuori i fattori possibili (attenzione al valore assoluto).

a) $\sqrt{\frac{18}{80}}$;
b) $\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{4}{9}}$;
c) $\sqrt{1-\frac{9}{25}}$;
d) $\sqrt{\frac{10}{3}+\frac{2}{9}}$;
e) $\frac{2}{5}\sqrt{\frac{50}{4}}$;
f) $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{8}{27}}$;
g) $\frac{5}{7}\sqrt{\frac{98}{75}}$;
h) $\frac{1}{5}\sqrt{\frac{1000}{81}}$;
i) $\sqrt[3]{250}$;
j) $\sqrt[3]{24}$;
k) $\sqrt[3]{108}$;
l) $\sqrt[4]{32}$;
m) $\sqrt[4]{48}$;
n) $\sqrt[4]{250}$;
o) $\sqrt[5]{96}$;
p) $\sqrt[5]{160}$.

**2.44** (*). Semplifica i radicali portando fuori i fattori possibili (attenzione al valore assoluto).

a) $\sqrt{x^2y}$;
b) $\sqrt{\frac{a^5}{b^2}}$;
c) $\sqrt{\frac{a^2b^3c^3}{d^9}}$;
d) $\sqrt{4ax^2}$;
e) $\sqrt{9a^2b}$;
f) $\sqrt{2a^2x}$;
g) $\sqrt{x^3}$;
h) $\sqrt{a^7}$;
i) $\sqrt[3]{16a^3x^4}$;
j) $\sqrt[3]{4a^4b^5}$;
k) $\sqrt[3]{27a^7b^8}$;
l) $\sqrt{18a^6b^5c^7}$.

**2.45** (*). Semplifica i radicali portando fuori i fattori possibili (attenzione al valore assoluto).

a) $\sqrt{a^2+a^3}$;
b) $\sqrt{4x^4-4x^2}$;
c) $\sqrt{25x^7-25x^5}$;
d) $\sqrt[3]{3a^5b^2c^9}$;
e) $\sqrt[4]{16a^4b^5c^7x^6}$;
f) $\sqrt[5]{64a^4b^5c^6d^7}$;
g) $\sqrt[6]{a^{42}b^{57}}$;
h) $\sqrt[7]{a^{71}b^{82}}$;
i) $\sqrt{a^3}+\sqrt{a^5}+\sqrt{a^7}$.

### 2.8 - Potenza di radice e radice di radice

**2.46** (*). Esegui le seguenti potenze di radici.

a) $(\sqrt{3})^2$;
b) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3$;
c) $\left(\sqrt{4}\right)^2$;
d) $\left(\sqrt[4]{2}\right)^6$;
e) $(2\sqrt{3})^2$;
f) $(3\sqrt{5})^2$;
g) $\left(5\sqrt{2}\right)^2$;
h) $(-2\sqrt{5})^2$;
i) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2$;
j) $\left(\frac{2}{3}\sqrt[4]{\frac{2}{3}}\right)^2$;
k) $\left(a\sqrt{2a}\right)^2$;
l) $\left(\frac{1}{a}\sqrt{a}\right)^2$;
m) $(2\sqrt[3]{3})^3$;
n) $(3\sqrt[3]{3})^3$;
o) $(\frac{1}{3}\sqrt[3]{3})^3$;
p) $(\frac{1}{9}\sqrt[3]{9})^3$.

**2.47** (*). Esegui le seguenti potenze di radici.

a) $(\sqrt{3})^3$;
b) $(2\sqrt{5})^3$;
c) $\left(3\sqrt{2}\right)^3$;
d) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^6$;
e) $(\sqrt[3]{3})^6$;
f) $(\sqrt[3]{5})^5$;
g) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^6$;
h) $(\sqrt[6]{3})^4$;
i) $\left(\sqrt[6]{3ab^2}\right)^4$;
j) $\left(\sqrt[4]{16a^2b^3}\right)^2$;
k) $\left(\sqrt[3]{6a^3b^2}\right)^4$;
l) $\left(\sqrt[3]{81ab^4}\right)^4$.

**2.48** (*). Esegui le seguenti radici di radici.

a) $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$;
b) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{16}}$;
c) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{15}}$;
d) $\sqrt[5]{\sqrt{a^5}}$;
e) $\sqrt{\sqrt{16}}$;
f) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}$;
g) $\sqrt[5]{\sqrt{a^{10}}}$;
h) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{a^{12}}}}$.

**2.49** (*). Esegui le seguenti radici di radici.

a) $\sqrt{\sqrt[3]{3a}}$;
b) $\sqrt{\sqrt[4]{3ab}}$;
c) $\sqrt[3]{\sqrt{(a+1)^5}}$;
d) $\sqrt[4]{\sqrt{(2a)^5}}$;
e) $\sqrt{2(a-b)}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{\frac{1}{4a-4b}}}$;
f) $\sqrt{3(a+b)}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{\frac{1}{3a+3b}}}$.

### 2.9 - Somma di radicali

**2.50** (*). Esegui le seguenti operazioni con i radicali.

a) $3\sqrt{2}+\sqrt{2}$;
b) $\sqrt{3}-3\sqrt{3}$;
c) $8\sqrt{6}-3\sqrt{6}$;
d) $\sqrt{5}-3\sqrt{5}+7\sqrt{5}$;
e) $3\sqrt{2}+2\sqrt{2}-3\sqrt{2}$;
f) $2\sqrt{7}-7\sqrt{7}+4\sqrt{7}$;
g) $11\sqrt{5}+6\sqrt{2}-(8\sqrt{5}+3\sqrt{2})$;
h) $5\sqrt{3}+3\sqrt{7}-[2\sqrt{3}-(4\sqrt{7}-3\sqrt{3})]$.

**2.51** (*). Esegui le seguenti operazioni con i radicali.

a) $\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{3}{4}\sqrt{2}$;
b) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}$;
c) $3\sqrt{5}+\frac{2}{3}\sqrt{2}-\frac{5}{6}\sqrt{2}$;
d) $5\sqrt{10}-\left(6+4\sqrt{19}\right)+2-\sqrt{10}$;
e) $\sqrt{5}+\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2\sqrt{2}$;
f) $-3\sqrt{7}+4\sqrt{2}+\sqrt{3}-5\sqrt{7}+8\sqrt{3}$;
g) $3\sqrt{3}+5\sqrt{5}+6\sqrt{6}-7\sqrt{3}-8\sqrt{5}-9\sqrt{6}$;
h) $\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{2}-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}$;
i) $5\sqrt{6}+3\sqrt[4]{6}-2\sqrt[4]{6}+3\sqrt[3]{6}-2\sqrt{6}$;
j) $\sqrt{75}+3\sqrt{18}-2\sqrt{12}-2\sqrt{50}$.

**2.52** (*). Esegui le seguenti operazioni con i radicali.

a) $3\sqrt{128}-2\sqrt{72}-(2\sqrt{50}+\sqrt{8})$;
b) $3\sqrt{48}+2\sqrt{32}+\sqrt{98}-(4\sqrt{27}+\sqrt{450})$;
c) $\sqrt[4]{162}-\sqrt[4]{32}+5\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{250}$;
d) $2\sqrt[3]{54}-\sqrt[4]{243}+3\sqrt[4]{48}-\sqrt[3]{250}$;
e) $\sqrt{\frac{32}{25}}-\sqrt{\frac{108}{25}}+\sqrt{\frac{27}{49}}+\frac{2}{5}\sqrt{\frac{3}{4}}-\sqrt{\frac{8}{9}}$;
f) $2\sqrt{\frac{27}{8}}+5\sqrt{\frac{3}{50}}+7\sqrt{\frac{27}{98}}-5\sqrt{\frac{147}{50}}$.

**2.53** (*). Esegui le seguenti operazioni con i radicali.

a) $\frac{1}{2}\sqrt{a}-\frac{4}{5}\sqrt{b}-\sqrt{a}+0,4\sqrt{b}$;
b) $\sqrt[3]{a-b}+\sqrt[3]{a^4-a^3b}-\sqrt[3]{ab^3-b^4}$;
c) $3\sqrt{x}-5\sqrt{x}$;
d) $2\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt{x}$;
e) $\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}+2\sqrt{a+b}$;
f) $\frac{1}{3}\sqrt{x}-\frac{4}{5}\sqrt{x}+0,4\sqrt{a}-\frac{1}{2}\sqrt{a}$;
g) $2a\sqrt{2a}-7a\sqrt{2a}+3a\sqrt{2a}-\frac{1}{2}\sqrt{a}$;

**2.54** (*). Esegui le seguenti operazioni con i radicali.

a) $6\sqrt{ab}-3\sqrt{a}-7\sqrt{ab}+2\sqrt{a}+9\sqrt{b}+\sqrt{a}$;
b) $3\sqrt{xy}+3\sqrt{x}-3\sqrt{y}+2\sqrt{xy}-3(\sqrt{x}+\sqrt{y})$.

**2.55** (*). Esegui le seguenti operazioni con i radicali.

a) $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+2)$;
b) $(3\sqrt{2}-1)(2\sqrt{2}-3)$;
c) $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)$;
d) $(\sqrt{2}-3\sqrt{3})(3\sqrt{3}-\sqrt{2})$;
e) $(\sqrt{3}+1)^2$;
f) $(\sqrt{3}-2)^2$;
g) $(2+\sqrt{5})^2$;
h) $(4-\sqrt{3})^2$;
i) $(6+2\sqrt{3})^2$;
j) $(\sqrt{6}-\frac{1}{2}\sqrt{3})^2$;
k) $(\sqrt{2}-1)^2$;
l) $(2\sqrt{2}-1)^2$.

**2.56** (*). Esegui le seguenti operazioni con i radicali.

a) $(\sqrt{3}+1)^2$;
b) $(\sqrt{3}-3)^2$;
c) $(\sqrt{5}-2)^2$;
d) $(2\sqrt{5}+3)^2$;
e) $(2\sqrt{7}-\sqrt{5})^2$;
f) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2$;
g) $(\sqrt{2}-3\sqrt{3})^2$;
h) $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$;
i) $(\sqrt{2}-1-\sqrt{5})^2$;
j) $(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)^2$;
k) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})^2$;
l) $(\sqrt[3]{2}-1)^3$.

**2.57** (*). Esegui le seguenti operazioni con i radicali.

a) $(\sqrt[3]{3}+1)^3$;
b) $(\sqrt[3]{2}-2)^3$;
c) $(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})^3$;
d) $(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{4})$;
e) $\left[(\sqrt[4]{2}+1)(\sqrt[4]{2}-1)\right]^2$;
f) $(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9})$;
g) $(\sqrt{3}+\sqrt{3})\sqrt{3}\sqrt{3}$;
h) $3\sqrt{3}+\sqrt{3}:\sqrt{3}-(1+\sqrt{3})^2$;

i ) $6\sqrt{5}+2\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}-3\sqrt{5}+\sqrt{25}$;
j ) $(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{2a}+\sqrt[3]{4})$;
k ) $(1+\sqrt{2})^2$;
l ) $(2-\sqrt{2})^2$.

**2.58** (*). Esegui le seguenti operazioni con i radicali.

a ) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$;
b ) $(2\sqrt{2}-1)^2$;
c ) $(3\sqrt{3}+2\sqrt{2})^2$;
d ) $\left(\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)^2$;
e ) $(4\sqrt{3}-3\sqrt{7})^2$;
f ) $(2\sqrt{2}-3\sqrt{3})^2$;
g ) $(\sqrt{x}-1)^2$;
h ) $(2x+\sqrt{x})^2$;
i ) $(x+\sqrt[3]{x})^3$;
j ) $(2x+\sqrt{x})(2x-\sqrt{x})$;
k ) $\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$;
l ) $\left(\sqrt{a}+\frac{1}{a}\right)\left(\sqrt{a}-\frac{1}{a}\right)$.

**2.59** (*). Esegui le seguenti operazioni con i radicali.

a ) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$;
b ) $(\sqrt{2}-1)^2-(2\sqrt{2}-1)^2+(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)$;
c ) $(\sqrt{3}+1)^2+\sqrt{3}(\sqrt{3}-3)-2(\sqrt{3}+3)(\sqrt{3}-3)$;
d ) $(\sqrt{3}-3)^2+(\sqrt{3}-3)^3+2\sqrt{27}-\sqrt{3}(2\sqrt{3}-2)$;
e ) $(\sqrt{5}-2)^2-(2\sqrt{5}+3)^2+\left[(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2+1\right](\sqrt{5}+\sqrt{2})$;
f ) $(2\sqrt{7}-\sqrt{5})^2+2(\sqrt{7}+\sqrt{5}+1)^2-\sqrt{35}$;
g ) $(\sqrt{2}+1)^2+(\sqrt{2}-1)^2$;
h ) $(2\sqrt{2}-3\sqrt{3})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})$.

**2.60.** Esegui le seguenti operazioni con i radicali.

a ) $(\sqrt{x}-1)^2+(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)$;
b ) $(\sqrt{2}-1)^3+(\sqrt{2}-1)^2\sqrt{2}-1$;
c ) $2\sqrt{54}-\sqrt[4]{243}+3\sqrt[4]{48}-\sqrt[3]{250}$;
d ) $(\sqrt{10}-\sqrt{7})(2\sqrt{10}+3\sqrt{7})$;
e ) $\sqrt{48x^2y}+5x\sqrt{27y}$;
f ) $\sqrt{5}\sqrt{15}-4\sqrt{3}$;
g ) $(\sqrt{7}-\sqrt{5})(2\sqrt{7}+3\sqrt{5})$;
h ) $\sqrt{27ax^4}+5x^2\sqrt{75a}$.

**2.61** (*). Esegui le seguenti operazioni con i radicali.

a ) $\sqrt{125}+3\sqrt[6]{27}-\sqrt{45}-2\sqrt[4]{9}+\sqrt{20}+7\sqrt[8]{81}$;
b ) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}\cdot\sqrt{a\sqrt[3]{a}}\cdot\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}\cdot\sqrt[3]{a\sqrt{a}}\cdot\sqrt[9]{a^8}$;
c ) $\sqrt[5]{b\sqrt[3]{b^2}}\cdot\sqrt{b^2\sqrt{b\sqrt{b^2}}}:\sqrt[5]{b^4\sqrt[3]{b^2}}\cdot\sqrt{b}$;
d ) $\sqrt[3]{\frac{x}{y^3}-\frac{1}{y^2}}+\sqrt[3]{xy^3-y^4}-\sqrt[3]{8x-8y}$;
e ) $(\sqrt{2}+3)\cdot(1-\sqrt{3})^2$;
f ) $(\sqrt[3]{2}+3)\cdot(1-\sqrt[3]{3})^2$;
g ) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}\cdot\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}$;
h ) $\sqrt[5]{b\sqrt[3]{b^2}}\cdot\sqrt{b\sqrt{b\sqrt{b^2}}}:\left(\sqrt[5]{b\sqrt[3]{b^2}}\cdot\sqrt{b}\right)$.

**2.62** (*). Esegui le seguenti operazioni con i radicali.

a ) $\sqrt{\frac{4a^2-b^2}{a^2-b^2}}\sqrt{\frac{a-b}{2a+b}}$;
b ) $\sqrt{\frac{9a}{b}}\sqrt{\frac{b^2-2b}{3ab-6a}}$;
c ) $\sqrt{\frac{9a^2-6ab+b^2}{a^2-b^2}}\sqrt{\frac{a+b}{3a-b}}$;
d ) $\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}\sqrt{\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}}$;

e) $\sqrt[3]{\frac{a}{a+3}\sqrt{\frac{a}{a+3}\sqrt{\frac{a}{a+3}}}} : \sqrt{\frac{a}{a+3}}$;

f) $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}\sqrt{\frac{1}{x-1}}}} \cdot \sqrt[4]{x+1}$.

**2.63 (*).** Esegui le seguenti operazioni con i radicali.

a) $\sqrt{\frac{a^2-2a+1}{a(a+1)^3}} \cdot \sqrt[4]{\frac{a^2}{(a+1)^2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{(a+1)^3}{(a-1)^2}}$;

b) $\left(\sqrt{\frac{1}{b^4}+\frac{1}{b^2}} + \sqrt{\frac{ab^5+ab^4}{a}} - 2\sqrt{b+1}\right) \cdot \frac{b^2}{(b+1)^2}$;

c) $\left(\sqrt[3x]{y^x \sqrt[4x]{y}} + \sqrt[6]{y^2 \sqrt[2x^2]{y}}\right) \cdot \sqrt[3]{y \sqrt[4x^2]{\frac{1}{y}}}$;

d) $\sqrt[4]{\frac{b^2-1}{b}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3b-3}{6b^2}} : \sqrt[6]{\frac{(b-1)^4}{4b^5}}$;

e) $\sqrt[3]{\frac{a^2+2a+1}{ab-b}} \cdot \sqrt[6]{\frac{a^2-2a+1}{ab+b}} \cdot \sqrt[4]{\frac{b^2(a-1)^2}{2a^2+4a+2}}$;

f) $\sqrt[3]{\frac{x^2+2xy+y^2}{x+3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{5x}{x^2+6x+9}} \cdot \sqrt[3]{\frac{x+y}{5x}}$.

**2.64 (*).** Esegui le seguenti operazioni con i radicali.

a) $\sqrt[3]{\frac{x^2-x}{x+1}} \cdot \sqrt[15]{\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}} : \sqrt[5]{\frac{x-1}{x+1}}$;

b) $\sqrt{\frac{25x^3+25x^2}{y^3-y^2}} + \sqrt{\frac{x^3+x^2}{y^3-y^2}} - x\sqrt{\frac{4x+4}{y^3-y^2}}$;

c) $\left(\sqrt{\frac{1}{y^4}+\frac{1}{y^3}} + \sqrt{\frac{xy^5+xy^4}{x}} - 2\sqrt{y+1}\right) : \frac{(y+1)^2}{y^2}$;

d) $\sqrt[4]{\frac{a^2-a}{(a+1)^2}} \cdot \sqrt[12]{\frac{a^2-2a+1}{(a-1)^7}} : \sqrt[3]{\frac{2a^2-2a+1}{a^3-a^2} - \frac{1}{a-1}}$;

e) $\sqrt{\frac{a^2b+ab^2}{xy}} \cdot \sqrt[6]{\frac{(a+b)^2}{x^2}} \cdot \sqrt[6]{\frac{x^2y^3}{(a+b)^2} \cdot \sqrt[4]{\frac{x}{a^3b^2+a^2b^3}}}$;

f) $\sqrt[6]{\frac{1}{x}+4x-4} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x}+4x+4} \cdot \sqrt{\frac{x}{4x^2-1}}$.

**2.65.** [*] Esegui le seguenti operazioni con i radicali.

a) $\sqrt{\frac{a^2-2a+1}{a(a+1)^3}} \cdot \sqrt[4]{\frac{a^2}{(a+1)^2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{(a+1)^2}{(a-1)^2}}$;

b) $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{3}-2+\frac{3}{a}} \cdot \sqrt[6]{\frac{9a^2(a+3)^3}{(a-3)^2}}\right) : \sqrt{\frac{a^2-9}{3a}}$;

c) $\sqrt[4]{\frac{a^3-a^2}{(a+1)^2}} \cdot \sqrt[12]{\frac{a^2-2a+1}{(a-1)^7}} \cdot \sqrt[3]{\frac{2a^2-2a+1}{a^3-a^2} - \frac{1}{a-1}}$;

d) $\sqrt{1-\frac{1}{y}+\frac{1}{4y^2}} : \left(\sqrt[6]{\frac{1}{8y^3+12y^2+6y+1}} \cdot \sqrt{1-\frac{1}{4y^2}}\right)$;

e) $\sqrt[3]{1-\frac{1}{a}+\frac{1}{4a^2}} : \left(\sqrt{1-\frac{1}{4a^2}} \cdot \sqrt[6]{\frac{1}{8a^3+12a^2+6a+1}}\right)$;

f) $\sqrt{\frac{1}{5a}+\frac{1}{25a^2}} + \sqrt{\frac{25a^2-1}{20a^3-4a^2}} - \sqrt{\frac{5a+1}{100a^2}}$.

**2.66.** [*] Esegui le seguenti operazioni con i radicali.

a) $\sqrt[3]{\frac{x}{y^3}-\frac{1}{y^2}} + \sqrt[3]{xy^3-y^4} - \sqrt[3]{8x-8y}$;

b) $\sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{4x^2}} + \sqrt{\frac{4x^3-4y^3}{x-y}} + \sqrt{4x^4+4x^3y+4x^2y^2}$;

c) $\sqrt{\frac{a^3+2a^2+a}{a^2+6a+9}} + \sqrt{\frac{a^3+4a^2+4a}{a^2+6a+9}} - \sqrt{\frac{a^3}{a^2+6a+9}}$;

d) $\sqrt{4x-12y}+\sqrt{\frac{x^3-3x^2y}{y^2}}+\sqrt{\frac{xy^2-3y^3}{x^2}}$;
e) $\left(\sqrt[6]{\frac{1}{x^2-2x+1}}+\sqrt[6]{\frac{64a^6}{x^2-2x+1}}+\sqrt[6]{\frac{a^{12}}{x^2-2x+1}}\right)\cdot\sqrt[3]{x-1}$;
f) $\left(\sqrt[3x]{y^x\sqrt[4x]{y}}+\sqrt[6]{y^2\sqrt[2x^2]{y}}\right)\cdot\sqrt[4x^2]{\frac{1}{y}}$.

**2.67 (*).** Esegui trasformando i radicali in potenze con esponente frazionario.

a) $\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a^2}}}\cdot\sqrt[3]{a\sqrt[3]{\frac{1}{a}}}:\sqrt{\frac{1}{a}}$;
b) $\sqrt[5]{a\sqrt{a^3}}\cdot\sqrt{a\sqrt[7]{\frac{1}{a^2}}}:\sqrt[7]{a^4\sqrt{a}}$;
c) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}\cdot\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}\cdot\sqrt{a\sqrt[3]{a}}\cdot\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$;
d) $\sqrt[5]{b\sqrt[3]{b^2}}\cdot\sqrt{b^2\sqrt{b\sqrt{b^2}}}:\sqrt[5]{b^4\sqrt[3]{b^2}}\cdot\sqrt{b}$.

## 2.10 - Razionalizzazione del denominatore di una frazione

**2.68 (*).** Razionalizza i seguenti radicali.

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$;
b) $\frac{2}{\sqrt{2}}$;
c) $\frac{5}{\sqrt{10}}$;
d) $\frac{10}{\sqrt{5}}$;
e) $-\frac{2}{\sqrt{3}}$;
f) $\frac{4}{2\sqrt{2}}$;
g) $\frac{3}{\sqrt{27}}$;
h) $\frac{4}{\sqrt{8}}$;
i) $-\frac{10}{5\sqrt{5}}$;
j) $\frac{2}{3\sqrt{6}}$;
k) $-\frac{3}{4\sqrt{5}}$;
l) $\frac{1}{\sqrt{50}}$.

**2.69.** Razionalizza i seguenti radicali.

a) $\frac{9}{\sqrt{18}}$;
b) $\frac{7}{\sqrt{48}}$;
c) $\frac{3}{\sqrt{45}}$;
d) $\frac{5}{\sqrt{125}}$;
e) $\frac{6}{5\sqrt{120}}$;
f) $\frac{1}{3\sqrt{20}}$;
g) $\frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{50}}$;
h) $3\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{324}}$;
i) $\frac{2}{\sqrt{2\sqrt{2}}}$;
j) $\frac{a}{\sqrt{a}}$;
k) $\frac{x}{\sqrt{x}}$;
l) $\frac{ax}{\sqrt{2a}}$.

**2.70 (*).** Razionalizza i seguenti radicali.

a) $\frac{2a}{\sqrt{2}}$;
b) $\frac{a}{2\sqrt{a}}$;
c) $\frac{x}{3\sqrt{2x}}$;
d) $\frac{x^2}{a\sqrt{x}}$;
e) $\frac{3x}{\sqrt{12x}}$;
f) $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$;
g) $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$;
h) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$;
i) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$;
j) $\frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}}$;
k) $\frac{\sqrt{3}-1}{3\sqrt{3}}$;
l) $\frac{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.

**2.71 (*).** Razionalizza i seguenti radicali.

a) $\frac{\sqrt{5}-5\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$;
b) $\frac{\sqrt{16}+\sqrt{40}}{\sqrt{8}}$;
c) $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{20}}{2\sqrt{5}}$;
d) $\frac{9-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$;
e) $\frac{3a-\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$;
f) $\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a+b}}$;
g) $\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x^2-y^2}}$;
h) $\frac{x}{\sqrt{2x+1}}$;
i) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$;
j) $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$;
k) $\frac{3}{\sqrt[3]{5}}$;
l) $\frac{4}{\sqrt[3]{6}}$.

**2.72.** Razionalizza i seguenti radicali.

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$;
b) $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$;
c) $\frac{3}{\sqrt[3]{5}}$;
d) $\frac{4}{\sqrt[3]{6}}$;
e) $\frac{2}{3\sqrt[3]{2}}$;
f) $\frac{6}{5\sqrt[3]{100}}$;
g) $\frac{2}{\sqrt[5]{9}}$;
h) $\frac{3}{2\sqrt[6]{27}}$;
i) $\frac{10}{\sqrt[5]{125}}$;
j) $\frac{16}{\sqrt[3]{36}}$;
k) $\frac{9}{\sqrt[4]{2025}}$;
l) $\frac{1}{\sqrt[5]{144}}$.

**2.73 (*).** Razionalizza i seguenti radicali.

a) $\frac{ab}{\sqrt[3]{a^2b}}$; b) $\frac{ab^2}{\sqrt[3]{ab^2}}$; c) $\frac{3a^2b}{\sqrt[4]{9ab^3}}$; d) $\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt[4]{27ab^2c^5}}$; e) $\frac{5x}{\sqrt[3]{x\sqrt{5}}}$; f) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[5]{16a^2b^3c^4}}$; g) $\frac{\sqrt[3]{x^2y}+\sqrt[3]{xy^2}}{\sqrt[3]{xy}}$; h) $\frac{3-a\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{9a}}$; i) $\frac{1-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{4a^2x}}$; j) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; k) $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; l) $\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

**2.74.** [*] Razionalizza i seguenti radicali.

a) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$; b) $\frac{3}{\sqrt{2}+1}$; c) $\frac{2}{\sqrt{2}-1}$; d) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$; e) $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; f) $\frac{3}{2+3\sqrt{3}}$; g) $\frac{x}{\sqrt{x}+1}$; h) $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; i) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$; j) $\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{ab}}$; k) $\frac{x}{\sqrt{y}-\sqrt{x+y}}$; l) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3-\sqrt{3}}}$.

**2.75.** Razionalizza i seguenti radicali.

a) $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}}$; b) $\frac{7}{\sqrt{7+2\sqrt{6}}}$; c) $\frac{a-2}{\sqrt{a}-2}$; d) $\frac{a-x}{\sqrt{a}-2\sqrt{x}}$; e) $\frac{x+1}{\sqrt{x(x+1)}}$; f) $\frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; g) $\frac{-3}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+1}$; h) $\frac{2}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}+2}$; i) $\frac{(a+b)^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{ab}}$; j) $\frac{3}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{9}}$; k) $\frac{6}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{5}}$; l) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}}$.

**2.76 (*).** Razionalizza i seguenti radicali.

a) $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{3}}$; b) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt[3]{2}-1}$; c) $\frac{3}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}$; d) $\frac{a-4b^2}{\sqrt{a}-2b}$; e) $\frac{2}{\sqrt[3]{2}-1}$; f) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}$; g) $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; h) $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{3\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$; i) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; j) $\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; k) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; l) $\frac{a+2\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

### 2.11 - Radicali doppi

**2.77 (*).** $a^2-b$ deve essere un quadrato perfetto per applicare la formula di trasformazione.

a) $\sqrt{12-\sqrt{23}}$; b) $\sqrt{12+2\sqrt{5}}$; c) $\sqrt{15+\sqrt{29}}$; d) $\sqrt{3+\sqrt{5}}$; e) $\sqrt{3-\sqrt{8}}$; f) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$; g) $\sqrt{4-\sqrt{7}}$; h) $\sqrt{5+\sqrt{21}}$; i) $\sqrt{6+4\sqrt{2}}$; j) $\sqrt{6-3\sqrt{3}}$; k) $\sqrt{6+2\sqrt{5}}$; l) $\sqrt{6-\sqrt{11}}$.

**2.78 (*).** $a^2-b$ deve essere un quadrato perfetto per applicare la formula di trasformazione.

a) $\sqrt{7+3\sqrt{5}}$; b) $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$; c) $\sqrt{7-\sqrt{33}}$; d) $\sqrt{7+2\sqrt{6}}$; e) $\sqrt{7-\sqrt{13}}$; f) $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$; g) $\sqrt{8-\sqrt{55}}$; h) $\sqrt{8+4\sqrt{3}}$.

**2.79.** $a^2 - b$ deve essere un quadrato perfetto per applicare la formula di trasformazione.

a) $\sqrt{8-\sqrt{39}}$;
b) $\sqrt{8-4\sqrt{7}}$;
c) $\sqrt{8+\sqrt{15}}$;
d) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$;
e) $\sqrt{\frac{15}{2}-\sqrt{\frac{86}{9}}}$;
f) $\sqrt{\frac{5}{2}-\sqrt{6}}$;
g) $\sqrt{\frac{8}{5}-\sqrt{\frac{7}{4}}}$;
h) $\sqrt{10+\sqrt{19}}$.

### 2.12 - Equazioni, disequazioni, sistemi

**2.80 (*).** Risolvi le seguenti equazioni a coefficienti irrazionali.

a) $\sqrt{2}x = 2$;
b) $\sqrt{2}x = \sqrt{12}$;
c) $2x = \sqrt{6}$;
d) $\sqrt{2}x = \sqrt{6} + \sqrt{14}$;
e) $x - \sqrt{3} = 2\left(x - \sqrt{3}\right)$;
f) $2\sqrt{3}x - \sqrt{2} = \sqrt{2}$;
g) $2x + \sqrt{5} = \sqrt{5}x + 2$;
h) $(1+\sqrt{2})x = \sqrt{2}(1-\sqrt{2})$.

**2.81 (*).** Risolvi le seguenti equazioni a coefficienti irrazionali.

a) $\frac{1-x}{\sqrt{2}} - \frac{x}{\sqrt{8}} = x - \sqrt{2}$;
b) $2x - \left(x+\sqrt{3}\right)\sqrt{2} = 2x + 3\sqrt{5}$;
c) $\frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{x-1}{2}$;
d) $\frac{x+\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}} + \frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} = 2$;
e) $(x+\sqrt{2})^2 - (x+\sqrt{3})^2 = 6$.

**2.82 (*).** Risolvi le seguenti equazioni a coefficienti irrazionali.

a) $\frac{x-\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}-3x}{4} = 2x$;
b) $2(x-1)^2 - \sqrt{2}x = 1 + 2x(x-2)$;
c) $\frac{\sqrt{3}}{3x-6} - \frac{1}{20-10x} = \sqrt{3} + 2$;
d) $\frac{3x-2}{\sqrt{8}x-\sqrt{32}} + \frac{5x}{4\sqrt{3}x-8\sqrt{3}} = 0$.

**2.83 (*).** Risolvi le seguenti disequazioni a coefficienti irrazionali.

a) $4x + \sqrt{2} < 2x - \sqrt{2}$;
b) $(\sqrt{3}+1) - (\sqrt{3}+\sqrt{2}x) < 3\sqrt{2}$;
c) $x\sqrt{2} + \sqrt{5} > \sqrt{10}$;
d) $3(x-\sqrt{3}) < 2(x+\sqrt{3}) - \sqrt{6}$;
e) $\frac{x-\sqrt{2}}{2} \leqslant \frac{2x-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

**2.84 (*).** Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni a coefficienti irrazionali.

a) $\begin{cases} \sqrt{2}x \geqslant 2 \\ (3-\sqrt{2})x < \sqrt{2} \end{cases}$;
b) $\begin{cases} 2(x-\sqrt{2}) > 3x - \sqrt{3} \\ (x-\sqrt{2})^2 > (x-\sqrt{3})^2 - \sqrt{3} \end{cases}$.

**2.85 (*).** Risolvi i seguenti sistemi di equazioni a coefficienti irrazionali.

a) $\begin{cases} \sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 5 \\ \sqrt{3}x + \sqrt{2}y = 2\sqrt{6} \end{cases}$;
b) $\begin{cases} x - \sqrt{3} = 2 - y \\ x + 2 = y + \sqrt{3} \end{cases}$;
c) $\begin{cases} x + 2y = \sqrt{2} - 1 \\ 2x - 2y = 2\sqrt{2} \end{cases}$;
d) $\begin{cases} \frac{2(x+\sqrt{3})}{\sqrt{2}+2\sqrt{3}} = \frac{y}{\sqrt{2}} \\ \frac{2x-y}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$.

**2.86 (*).** Risolvi i seguenti sistemi di equazioni a coefficienti irrazionali.

a) $\begin{cases} x+\sqrt{3}y=2 \\ \sqrt{3}x-4y=1 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \sqrt{2}x-y=1 \\ 2x+\sqrt{2}y=0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 4x-2\sqrt{5}y=\sqrt{2} \\ \sqrt{2}x+y=-2 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} \sqrt{3}x+4\sqrt{2}y=4 \\ \sqrt{12}x+8\sqrt{2}y=8 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} 2x+3\sqrt{2}y=2 \\ \sqrt{3}x-y=-\sqrt{8} \end{cases}$.

**2.87 (*).** Risolvi i seguenti sistemi di equazioni a coefficienti irrazionali.

a) $\begin{cases} x+y=3\sqrt{5} \\ \sqrt{8}x+2\sqrt{2}y=-5\sqrt{11} \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x-3\sqrt{3}y=\sqrt{27} \\ -\sqrt{3}x+\sqrt{243}y=0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} \sqrt{2}x+2y=4 \\ 2x+\sqrt{32}y=-1 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x-y\sqrt{3}=2 \\ x\sqrt{3}-y=1 \end{cases}$.

**2.88 (*).** Risolvi i seguenti sistemi di equazioni a coefficienti irrazionali.

a) $\begin{cases} x-2y\sqrt{2}=\sqrt{2} \\ x\sqrt{2}+y=\sqrt{2} \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x\sqrt{2}+y=1 \\ x+y\sqrt{2}=0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 2x+3y\sqrt{2}=0 \\ x+y=\sqrt{8} \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x\sqrt{3}+4y\sqrt{2}=4 \\ x\sqrt{12}+8y\sqrt{2}=-4 \end{cases}$.

**2.89 (*).** Risolvi i seguenti sistemi di equazioni a coefficienti irrazionali.

a) $\begin{cases} x-3y\sqrt{3}=0 \\ -x\sqrt{3}+9y=0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x+y=3\sqrt{5} \\ 2x-y=\sqrt{5} \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x\sqrt{2}-2y=-1 \\ x\sqrt{8}-y=0 \end{cases}$.

### Esercizi di riepilogo

**2.90.** Vero o Falso? È dato un quadrato di lato $3\sqrt{2}$.

a) Il suo perimetro è in numero irrazionale V F
b) La sua area è un numero irrazionale V F

**2.91.** Vero o Falso? È dato un rettangolo di base $\sqrt{12}$ e altezza 14.

a) il suo perimetro è un numero irrazionale V F
b) la sua area è un numero razionale V F
c) il perimetro non esiste perché non si sommano razionali con irrazionali V F
d) la misura del perimetro è un numero sia razionale che irrazionale V F

**2.92.** Vero o Falso? Un triangolo rettangolo ha i cateti lunghi rispettivamente $\sqrt{3}$ cm e $\sqrt{13}$ cm.

a) l'ipotenusa ha come misura un numero razionale V F
b) il perimetro è un numero irrazionale V F

c ) l'area è un numero irrazionale V F

**2.93.** Vero o Falso? È dato un quadrato di lato $1+\sqrt{5}$.

a ) la misura della diagonale è un numero irrazionale V F
b ) l'area è un numero irrazionale V F

**2.94.** Vero o Falso? È dato un rettangolo di base $\sqrt{12}$ e altezza $\sqrt{3}$.

a ) il perimetro è un numero irrazionale V F
b ) l'area è un numero irrazionale V F
c ) la misura della diagonale è un numero irrazionale V F
d ) il quadrato della misura del perimetro è un numero irrazionale V F

**2.95.** Un triangolo rettangolo ha un cateto lungo 7 cm. Determina, se esiste, una possibile misura dell'altro cateto in modo che questa sia un numero irrazionale e che l'ipotenusa sia, invece, un numero razionale.

**2.96.** Perché l'uguaglianza $\sqrt{(-5)^2}=-5$ è falsa?

**2.97.** Determina il valore di verità delle seguenti affermazioni.

a ) la radice terza del triplo di $a$ è uguale ad $a$;
b ) dati due numeri reali positivi, il quoziente delle loro radici quadrate è uguale alla radice quadrata del quoziente;
c ) il doppio della radice quadrata di $a$ è uguale alla radice quadrata del quadruplo di $a$;
d ) dati due numeri reali positivi, la somma delle loro radici cubiche è uguale alla radice cubica della loro somma;
e ) la radice cubica di 2 è la metà della radice cubica di 8;
f ) dati un numero reale positivo, la radice quadrata della sua radice cubica è uguale alla radice cubica della sua radice quadrata;
g ) sommando due radicali letterali simili si ottiene un radicale che ha la stessa parte letterale dei radicali dati.

**2.98.** Riscrivi in ordine crescente i radicali $\sqrt{5}, 4\sqrt{2}, 2\sqrt{3}$,

**2.99.** Verifica che il numero irrazionale $\sqrt{7-2\sqrt{6}}$ appartiene all'intervallo $(1;2)$ e rappresentalo sull'asse dei numeri reali.

**2.100.** Dati i numeri $\alpha=\sqrt[3]{(\sqrt{30}-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{30}+\sqrt{3})}+\sqrt[4]{(7\sqrt{2}-\sqrt{17})\cdot(7\sqrt{2}-\sqrt{17})}$ e $\beta=(3+\sqrt{5})\cdot(3-\sqrt{5})-\frac{3}{2+\sqrt{5}}$, quali affermazioni sono vere?

a ) sono entrambi irrazionali;
b ) solo $\alpha$ è irrazionale;
c ) $\alpha$ è minore di $\beta$;
d ) $\alpha$ è maggiore di $\beta$;
e ) $\beta$ è irrazionale negativo.

**2.101.** Le misure rispetto al cm dei lati di un rettangolo sono i numeri reali $l_1=\sqrt[3]{1-\frac{1}{8}}\cdot\sqrt[3]{1-\frac{2}{7}}\cdot\sqrt[3]{25}$ e $l_2=\sqrt{\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot(\sqrt[8]{6})^3:\sqrt[4]{\sqrt{6}}$. Determinare la misura del perimetro e della diagonale del rettangolo.

**2.102.** Se $x$ è positivo e diverso da 1, l'espressione $E=\sqrt[4]{\frac{4}{\sqrt{x}-1}-\frac{4}{\sqrt{x}+1}}:\sqrt[4]{\frac{4}{\sqrt{x}-1}+\frac{4}{\sqrt{x}+1}}$ è uguale a:

a) $\sqrt[4]{\frac{1}{x}}$; b) $\sqrt[8]{\frac{1}{x}}$; c) $\frac{1}{x}$; d) $\sqrt[8]{x}$; e) 0.

**2.103.** Stabilire se la seguente affermazione è vera o falsa. Per tutte le coppie $(a, b)$ di numeri reali positivi con $a = 3b$, l'espressione $E = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{a+b}{a-b}$ ha il numeratore doppio del denominatore.

**2.104.** Calcola il valore delle seguenti espressioni letterali per i valori indicati delle lettere.

a) $x + 2\sqrt{3}$ per $x = \sqrt{3}$
b) $\sqrt{2}x + 3\sqrt{6}$ per $x = \sqrt{3}$
c) $x^2 + x - 1$ per $x = \sqrt{2}$
d) $x^2 + \sqrt{5}x - 1$ per $x = \sqrt{5}$
e) $(x + 2\sqrt{2})^2$ per $x = \sqrt{2}$

**2.105.** Trasforma in un radicale di indice 9 il seguente radicale $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}}{\sqrt{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2}} : \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} + 1}$.

**2.106 (*).** Risolvi le seguenti equazioni.

a) $\frac{x\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{x\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{3x+3}{\sqrt{3}}$; b) $\frac{\sqrt{3}+x}{x-\sqrt{3}} + \frac{x+\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}} = 2$.

**2.107.** Per quale valore di k il sistema lineare è determinato? $\begin{cases} x\sqrt{3} + (k - \sqrt{3})y = 1 \\ -2x + y\sqrt{6} = -k \end{cases}$.

**2.108.** L'insieme di soluzioni della disequazione $(\sqrt{2} - \sqrt{3})x < 0$ è:

a) $x \geqslant 0$; b) $x \leqslant 0$; c) $x > 0$; d) $x < 0$; e) $\mathbb{R}$.

**2.109.** Data l'espressione $E = \frac{2a-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{(a+2)\cdot\sqrt{2}}{2} + \frac{4}{\sqrt{2}} - 1$, stabilire se esistono valori di $a$ che la rendono positiva.

**2.110.** Data la funzione $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

a) determina il suo dominio;
b) riscrivi la funzione razionalizzando il denominatore;
c) calcola $f(2)$;
d) per quali valori di $x$ si ha $f(x) > 0$?;
e) risolvi l'equazione $f(x) = 0$.

### 2.13.2 Risposte

**2.6.** b) 4, h) $-\frac{4}{5}$, i) $\frac{10}{3}$.

**2.7.** e) 3, h) $\emptyset$.

**2.8.** b) 3, d) $\frac{2}{3}$, h) 2.

**2.9.** c) 3, e) 0, 2, i) 5.

**2.10.** d) $2a + 1$, e) $a^2 + 3$, f) $1 - 2x$.

**2.11.** a) $\forall x \in \mathbb{R}$, b) $x \leqslant 1$, c) $x > -1$, d) $y \geqslant 0$, f)$x > 1$.

**2.12.** a) $x \geqslant -1$, d) $\emptyset$, i) $-12$.

**2.13.** a) $-2 < x \leqslant 5$, e) $b < -2 \vee b > 2$.

**2.14.** b) $0 \leqslant x \leqslant 1 \vee x > 4$, e) $-2 < a < 0 \ \vee \ a > 4$.

**2.15.** a) $\forall x \in \mathbb{R}$, d) $\forall x \in \mathbb{R}$, g) $-2 < x < -1 \vee x > 0$, i) $x > 0$, f)$\emptyset$.

**2.17.** a) 4, f) 25, i) 2.

**2.18.** c) $5^{\frac{3}{7}}$, g) $25^{-\frac{1}{3}}$.

**2.19.** a) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{(a^2+1)^2}+1}$.

**2.23.** c) $\sqrt{2}$, e) $\sqrt{10}$, i) $\sqrt{5}$.

**2.24.** b) 2, d) $\sqrt[3]{\frac{4}{11}}$, h)$\sqrt[3]{-3}$.

**2.25.** a) $\emptyset$, e) $\sqrt[5]{5}$, g) 12.500.

**2.26.** b) 5, d) , e) $\frac{9}{4}$, g)2.

**2.27.** a) $4 \cdot \sqrt{3}$, e) $4a^2b^3$, i) $|y| \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot |x|}{3}}$.

**2.28.** a) $\sqrt{(2x+3)}$, e) $\sqrt[5]{\frac{11a^2}{b}}$, i) $2 \cdot |a|$.

**2.29.** b) $\sqrt[5]{|a^2+3x|}$, f) $\frac{1}{2}$, h) $\frac{5a^2|b|^3}{a^2+2}$.

**2.30.** c) $|a| \sqrt{|a-1|}$, d) $|x-3|$, h)$\frac{|x-1|}{|b||x+1|}$.

**2.31.** b) $\sqrt[4]{\frac{8}{9}}$, e) $\sqrt[n]{6^4}$, i)$2x^2$.

**2.32.** a) 15, d) 30, i) 1.

**2.33.** c) $\sqrt[6]{3^7}$, e) $\sqrt[6]{3^7}$, h) $\sqrt[6]{\frac{3^2 \cdot 5^3}{4^2}}$.

**2.34.** b) $\frac{5}{4}$, d) 2, e) 60, h) $\sqrt[6]{\frac{3^5}{2^5}}$.

**2.35.** b) $\sqrt{15}$, c)$2ab$ , e) $\sqrt[6]{\frac{2^3a^2}{3^4}}$.

**2.36.** b) $\sqrt[6]{\frac{(x+1)^4}{(x-1)^3}}$, c) $\sqrt{a-b}$, e) $\sqrt[6]{\frac{(1-x)^4}{(1+x)(1+x^2)^2}}$.

**2.37.** b) $\sqrt[6]{\frac{(a+1)(a+3)^2}{(a-3)(a-1)^2}}$, c) $\sqrt[6]{\frac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+3)}}$, f) $\sqrt{\frac{x-y}{xy}}$.

**2.38.** a) $\sqrt{\frac{a+b}{ab}}$, d) $\sqrt[6]{\frac{(a+2)^7}{(a-1)^7}}$, e) $\sqrt[6]{\frac{x+2}{x^2(x+1)}}$.

**2.39.** a) $\sqrt[4]{\frac{a+b}{x}}$.

**2.40.** a) $\sqrt{2^3}$, g) $\sqrt{\frac{3}{4}}$, o) $-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

**2.41.** b) $\sqrt[3]{x^7}$, g) $\sqrt{(a-1)^2a}$.

**2.42.** a) $5\sqrt{10}$, b) $9\sqrt{6}$, c) $12\sqrt{6}$, d) $24\sqrt{6}$, k) $10\sqrt{3}$.

**2.43.** b) $\frac{1}{6}\sqrt{97}$, g) $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

**2.44.** e) $3|a|\sqrt{b}$, C. E. $b >= 0$.

**2.45.** b) $|2x|\sqrt{x^2-1}$, C. E. $x \leqslant 1 \vee x \geqslant 1$, i) $(a+a^2+a^3)\sqrt{a}$.

**2.46.** d) $\sqrt{2^3}$, l) $2a^3$, p) $\frac{1}{9}$.

**2.47.** j) $\sqrt{2^4a^2\left|b^3\right|}$.

**2.48.** h) $\sqrt[3]{a^2}$.

**2.49.** f) $\sqrt[3]{3(a+b)}$, C. E. $a > b$.

**2.50.** c) $5\sqrt{6}$, f) $-\sqrt{7}$, g) $3(\sqrt{5}+3\sqrt{2})$, h) $7\sqrt{7}$.

**2.51.** c) $\sqrt{5}-\frac{1}{6}\sqrt{2}$, j) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

**2.52.** a) 0, b) 0, c) $\sqrt[4]{2}+12\sqrt[3]{2}$, d) $\sqrt[3]{2}+3\sqrt[4]{3}$, e) $\frac{2}{15}\sqrt{2}-\frac{4}{7}\sqrt{3}$, f) 0.

**2.53.** a) $-\frac{1}{2}\sqrt{a}-\frac{2}{5}\sqrt{b}$, b) $(1+a-b)\sqrt[3]{a-b}$.

**2.54.** a) $9\sqrt{b}-\sqrt{ab}$.

**2.55.** e) $4+2\sqrt{3}$, f) $7-4\sqrt{3}$, g) $9+4\sqrt{5}$, h) $19-8\sqrt{3}$, i) $48+24\sqrt{3}$, j) $\frac{27}{4}-\sqrt{18}$.

**2.56.** i) $8-2\sqrt{2}-2\sqrt{10}+2\sqrt{5}$, l) $1-3\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}$.

**2.57.** i) $3\sqrt{5}+25$.

**2.58.** f) $-19-12\sqrt{6}$, k) $a+2+\frac{1}{a}$.

**2.59.** a) $x-y$, g) $6$.

**2.61.** c) $\sqrt[5]{b^7}$, h) $\sqrt{b}$.

**2.62.** e) $\sqrt[12]{\frac{a}{a+3}}$, f) $\sqrt[8]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5}$.

**2.63.** a) $\sqrt[3]{\frac{a-1}{(a+1)^3}}$, b) $(b-1)^2\sqrt{b+1}$, c) $2\sqrt[3]{y^2}$, d) $\sqrt[12]{\frac{(b+1)^3}{b(b-1)}}$, e) $\sqrt[4]{\frac{(a-1)^2}{2}}$, f) $\frac{x+y}{x+3}$.

**2.64.** a) $\sqrt[3]{x}$, c) $(y-1)^2\sqrt{y+1}$, d) $\sqrt[12]{\frac{a^{11}}{(a^2-1)^6}}$, e) $\sqrt[24]{\frac{a^{10}b^{10}(a+b)^{11}}{x^{11}}}$, f) $\sqrt[6]{\frac{2x+1}{2x-1}}$.

**2.65.** a) $\sqrt[3]{\frac{a-1}{(a+1)^2}}$, b) $\sqrt[6]{\frac{27a^3}{a-3}}$, c) $\sqrt[6]{\frac{a-1}{a(a+1)^3}}$, d) $\sqrt{2y-1}$, e) $\sqrt[6]{4a^2(2a-1)}$, f) $\frac{3}{5a}\sqrt{5a+1}$.

**2.66.** a) $\frac{(1-y)^2}{y}\sqrt[3]{x-y}$, b) $\frac{(1+2x)^2}{2x}\sqrt{x^2+xy+y^2}$, c) $\sqrt{a}$, d) $\frac{(x+y)^2}{xy}\sqrt{x-3y}$, e) $(1+a)^2$.

**2.67.** a) $\sqrt{a^3}$, b) $\sqrt[14]{a^3}$, c) $\sqrt[9]{a^{19}}$, d) $\sqrt[5]{b^7}$.

**2.68.** d) $2\sqrt{5}$, h) $\sqrt{2}$, j) $\frac{\sqrt{6}}{9}$, d) , e) , f) .

**2.70.** c) $\frac{\sqrt{2x}}{6}$.

**2.71.** c) $\frac{\sqrt{2}+2}{2}$, l) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{36}$.

**2.73.** b) $\sqrt[3]{a^2b}$.

**2.74.** d) $3-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{6}$.

**2.77.** d) $\frac{\sqrt{10}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**2.78.** d) $\sqrt{6}+1$.

**2.80.** e) , f) $\frac{\sqrt{6}}{3}$, g) $1$, h) $4-3\sqrt{2}$.

**2.81.** a) $18 - 12\sqrt{2}$, b) $-\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{10}}{2}$, c) $-(1+\sqrt{2})$, e) $\emptyset$, f) $\frac{-7(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2}$.

**2.82.** a) $-\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3}$, b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, c) $\frac{36+17\sqrt{3}}{30}$, d) $\frac{36-10\sqrt{6}}{29}$.

**2.83.** a) $x < -\sqrt{2}$, b) $x > \frac{\sqrt{2}-6}{2}$, c) $x > \frac{\sqrt{10}(\sqrt{2}-1)}{2}$, d) $x < 5\sqrt{3} - \sqrt{6}$, e) $x \geqslant \frac{4\sqrt{3}-4+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{7}$.

**2.84.** a) $\emptyset$, b) $\frac{\sqrt{3}-3+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} < x < \sqrt{3} - 2\sqrt{2}$.

**2.85.** a) $(\sqrt{2}; \sqrt{3})$, b) $(\sqrt{3}; 2)$, c) $(\sqrt{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3})$, d) $(\sqrt{2} + \sqrt{3}; 2\sqrt{2})$.

**2.86.** a) $(\frac{\sqrt{3}+8}{7}; \frac{2\sqrt{3}-1}{7})$, b) $(\frac{\sqrt{2}}{4}; -\frac{1}{2})$, c) $(\frac{5\sqrt{5}-11\sqrt{2}}{6} \frac{10-5\sqrt{10}}{6}$, d) $\mathbb{R}$, e) $(\frac{2-3\sqrt{6}}{5}; \frac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{5})$.

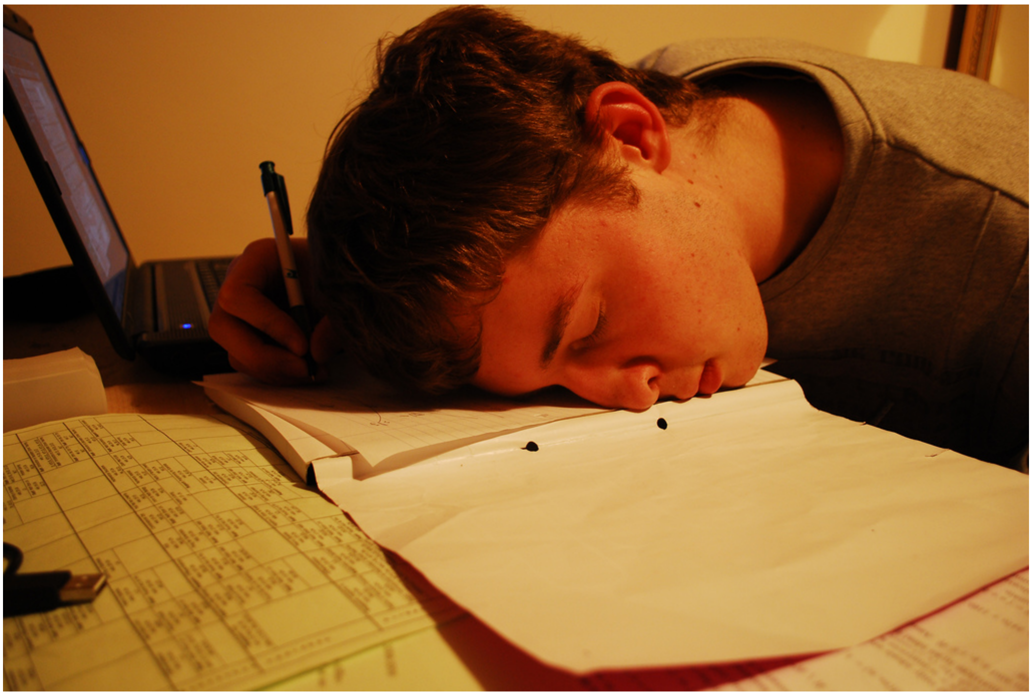
**2.87.** a) $\emptyset$, b) $(\frac{9+9\sqrt{3}}{2}; \frac{1+\sqrt{3}}{2})$, c) $(\frac{1}{2} + 4\sqrt{2}; -2 - \frac{\sqrt{2}}{4})$, d) $(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1; \frac{1}{2} - \sqrt{3})$.

**2.88.** a) $(\frac{\sqrt{2}+4}{5}; \frac{\sqrt{2}-2}{5})$, b) $(\sqrt{2}; -1)$, c) $(-\frac{4\sqrt{2}+12}{7}; \frac{18\sqrt{2}+12}{7})$, d) $\emptyset$.

**2.89.** a) $\mathbb{R}$, b) $(\frac{4\sqrt{5}}{3}; \frac{5\sqrt{5}}{3})$, c) $(\frac{\sqrt{2}}{6}; \frac{2}{3})$.

**2.106.** a) $-1$, b) $2 \cdot (3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})$.

# Algebra di secondo grado II



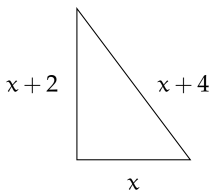
"225/365 Z is for Zzzzzzzzzzz"
Foto di stuartpilbrow
http://www.flickr.com/photos/stuartpilbrow/3326749916/
Licenza: Attribuzione 2.0 Generico (CC BY 2.0)

# Equazioni di secondo grado 3

## 3.1 Le equazioni di secondo grado in una incognita

Consideriamo il seguente problema: " in un triangolo rettangolo l'ipotenusa è più lunga del cateto minore di 4 cm, mentre l'altro cateto è più lungo del cateto minore di 2 cm. Si vogliono trovare le misure dei tre lati".

Si può formalizzare il problema indicando con $x$ la misura incognita del cateto minore. La lunghezza dell'ipotenusa sarà $x+4$, mentre quella dell'altro cateto $x+2$. Applicando il teorema di Pitagora si ha: $x^2+(x+2)^2=(x+4)^2$. Dopo aver effettuato i calcoli e aver portato tutti i termini a sinistra del predicato uguale abbiamo: $x^2-4x-12=0$.




Questa è una equazione di secondo grado in una incognita in quanto la variabile $x$ vi compare elevata al secondo grado.

**Definizione 3.1.** Si dice *equazione di secondo grado*, un'equazione del tipo: $ax^2+bx+c=0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. I valori $a$, $b$, $c$ prendono il nome di *coefficienti* e, in particolare, $c$ viene detto *termine noto*.

Un'equazione di secondo grado si definisce:

*monomia* quando il secondo e il terzo coefficiente sono nulli $ax^2=0$;
*incompleta pura* quando il secondo coefficiente è nullo $ax^2+c=0$;
*incompleta spuria* quando il terzo coefficiente è nullo $ax^2+bx=0$;
*completa* quando i tre coefficienti sono tutti diversi da zero $ax^2+bx+c=0$.

### 3.1.1 Risoluzione di un'equazione di secondo grado pura

Il coefficiente della $x$ è nullo e l'equazione si presenta nella forma: $ax^2+c=0$. Si risolve portando a secondo membro il termine noto e dividendo per il coefficiente di $x^2$:

$$ax^2+c=0 \Rightarrow ax^2=-c \Rightarrow x^2=-\frac{c}{a} \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

**Esempio 3.1.** Risoluzione di equazioni pure.

- $4x^2 - 9 = 0$ risoluzione $4x^2 = +9 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} \Rightarrow x_1 = -\frac{3}{2} \vee x_2 = +\frac{3}{2}$
- $4x^2 + 9 = 0$ risoluzione $4x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{9}{4}$. L'equazione non ammette soluzioni reali in quanto il quadrato di un numero reale non è mai negativo.

Le soluzioni dell'equazione incompleta pura $ax^2 + c = 0$ dipendono dal segno di $-\frac{c}{a}$:

se $-c/a > 0$, ovvero se $a$ e $c$ sono discordi, l'equazione ammette *due soluzioni reali distinte opposte* $x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}} \vee x_2 = +\sqrt{-\frac{c}{a}}$;
se $-c/a < 0$, ovvero se $a$ e $c$ sono concordi, l'equazione *non ammette soluzioni reali*;
se $-c/a = 0$, allora $c = 0$, l'equazione ha *due soluzioni reali coincidenti nulle* $x_1 = x_2 = 0$.

✍ *Esercizi proposti:* 3.1, 3.2, 3.3, 3.4

### 3.1.2 Risoluzione di un'equazione incompleta spuria

Un'equazione incompleta spuria si presenta nella forma: $ax^2 + bx = 0$. Per risolverla, si raccoglie a fattore comune la $x$; precisamente $x(ax + b) = 0$. Applicando la legge di annullamento del prodotto si ottiene $x_1 = 0$ oppure $ax + b = 0$ da cui $x_2 = -\frac{b}{a}$. Pertanto un'equazione di questo tipo ha sempre due soluzioni reali distinte di cui una nulla.

**Esempio 3.2.** Risoluzione di equazioni incomplete spurie.

- $2x^2 - 4x = 0$. Raccogliendo a fattor comune si ha: $2x(x - 2) = 0$ da cui, applicando la legge di annullamento del prodotto, segue $2x = 0 \vee x - 2 = 0$ da cui $x_1 = 0 \vee x_2 = 2$;
- $x^2 + x = 0$. Raccogliendo $x$ a fattore comune, si ha $x(x + 1) = 0$, da cui, applicando la legge di annullamento del prodotto, segue $x = 0 \vee x + 1 = 0$ da cui $x_1 = 0 \vee x_2 = -1$.

✍ *Esercizi proposti:* 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10, 3.11

## 3.2 Risoluzione di un'equazione completa

Per risolvere l'equazione di secondo grado completa si applica una formula che si ottiene utilizzando il metodo del completamento del quadrato:

$ax^2 + bx + c = 0$: equazione completa di secondo grado;
$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$: si moltiplicano ambo i membri per $4a$;
$4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 = b^2$: si aggiunge ad ambo i membri $b^2$;
$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$: si porta $4ac$ a secondo membro;
$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$: il primo membro risulta il quadrato di un binomio;
$k = 2ax + b$: si sostituisce il binomio $2ax + b$ con la la variabile $k$;
$k^2 = b^2 - 4ac$: l'equazione diventa un'equazione di secondo grado pura in $k$;
$k_{1,2} = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$: si calcolano le soluzioni in $k$;
$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$: al posto di $k$ si mette il binomio $2ax + b$;

$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$: si separa il monomio con l'incognita;
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$: si risolve l'equazione di primo grado rispetto alla $x$.

Da quanto ottenuto possiamo osservare che:

- la soluzione si ottiene esclusivamente operando sui coefficienti dell'equazione;
- il valore dell'incognita si ottiene con due calcoli: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$;
- nel calcolo è coinvolta l'estrazione di radice quadrata: l'espressione $b^2 - 4ac$ prende il nome di *discriminante* e si è solito porre $b^2 - 4ac = \Delta($ Delta$)$.

Questa formula si può applicare anche ai tipi di equazioni incomplete che abbiamo già studiato. La parola discriminante deriva dal verbo *discrimen* (divisione); in effetti, il $\Delta$ permette di effettuare una distinzione tra la tipologia delle soluzioni di un'equazione di secondo grado. Si possono infatti presentare tre casi:

- Primo caso. $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ il radicale $\sqrt{\Delta}$ è un numero reale e l'equazione ammette *due soluzioni reali e distinte*: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \vee x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$;
- Secondo caso. $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ l'equazione ammette *due radici reali e coincidenti*: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$;
- Terzo caso. $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, l 'equazione *non ammette soluzioni reali*.

Riassumendo e schematizzando si ha:

| $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$ | |
|---|---|
| Discriminante | Soluzioni |
| $\Delta > 0$ | Due soluzioni reali e distinte: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \vee x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ |
| $\Delta = 0$ | Due soluzioni reali e coincidenti: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ |
| $\Delta < 0$ | Nessuna soluzione reale: I.S. $= \emptyset$ |

**Esempio 3.3.** Risoluzione di equazioni complete.

- $3x^2 - 5x + 2 = 0$. $a = +3, b = -5, c = +2$. Calcolo del discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(+3)(+2) = 25 - 24 = 1.$$

  Poiché $\Delta > 0$ l'equazione ammette due soluzioni reali e distinte

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{(+2)(+3)} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{6} \Rightarrow x_1 = 1 \vee x_2 = \frac{2}{3};$$

- $4x^2 - 12x + 9 = 0$. $a = +4, b = -12, c = +9$. Calcolo del discriminante:

$$\Delta = (-12)^2 - 4(+4)(+9) = 144 - 144 = 0.$$

  Poiché $\Delta = 0$ l'equazione ammette due soluzioni reali coincidenti

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-12)}{2(+4)} = \frac{12}{8} \Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{3}{2};$$

➡ $x^2 - x + 3 = 0$. $a = +1, b = -1, c = +3$. Calcolo del discriminante:

$$\Delta = (-1)^2 - 4(+1)(+3) = 1 - 12 = -11.$$

Poiché $\Delta < 0$ l'equazione non ammette soluzioni reali.

---

✍ *Esercizi proposti:* 3.12, 3.13, 3.14, 3.15, 3.16, 3.17, 3.18, 3.19

### 3.2.1 Formula ridotta per equazioni di secondo grado

Se nell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ il coefficiente $b$ è un numero pari, conviene applicare una formula, detta *formula ridotta*, che semplifica i calcoli.

Supponiamo $b = 2k$, l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ diventa $ax^2 + 2kx + c = 0$ e nella formula risolutiva dell'equazione si ottiene:

$$x_{1,2} = \frac{-2k \pm \sqrt{(2k)^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{k^2 - ac}}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Dato che $b = 2k$ quindi $k = \frac{b}{2}$ la formula ridotta che conviene utilizzare quando $b$ è pari è:

$$x_{1,2} = \frac{\left(-\frac{b}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}.$$

La quantità sotto radice, uguale a $\frac{\Delta}{4}$, è detta anche *discriminante ridotto*.

---

**Esempio 3.4.** Applicazione della formula ridotta nella risoluzione di equazioni complete.

➡ $x^2 - 4x + 3 = 0$. Il coefficiente di primo grado è pari, per cui conviene utilizzare la formula ridotta:

$$\frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 1(3)}}{1} = 2 \pm \sqrt{1} \Rightarrow x_1 = 1 \vee x_2 = 3;$$

➡ $-x^2 - 2x + 24 = 0$. Applichiamo la formula ridotta:

$$\frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - (-1)(24)}}{-1} = -1 \pm \sqrt{25} \Rightarrow x_1 = -6 \vee x_2 = 4;$$

➡ $-3x^2 - 6x + 12 = 0$. Per prima cosa dividiamo l'equazione per $-3$, per il secondo principio di equivalenza, si ha l'equazione equivalente $x^2 + 2x - 4 = 0$. Poiché il coefficiente della $x$ è pari si può applicare la formula ridotta:

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+4} = -1 \pm \sqrt{5} \Rightarrow x_1 = -1 + \sqrt{5} \vee x_2 = -1 - \sqrt{5}.$$

---

Quando $b$ è pari e $a = 1$, la formula si dice *ridottissima*: $x_{1,2} = \left(-\frac{b}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$.

---

**Esempio 3.5.** Applicazione della formula ridottissima nella risoluzione di equazioni complete.

- $x^2 - 6x + 8 = 0$. Il coefficiente $b$ è pari e il coefficiente $a = 1$, quindi possiamo applicare la formula ridottissima $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-8}$, quindi $x_1 = 2 \vee x_2 = 4$.

---

✍ *Esercizi proposti:* 3.20, 3.21, 3.22, 3.23, 3.24

Riassumiamo e schematizziamo la risoluzione di un'equazione di secondo grado:

| Equazioni incomplete | | | |
|---|---|---|---|
| Coefficienti | Nome | Equazione | Soluzioni |
| $b = 0, c = 0$ | Monomia | $ax^2 = 0$ | $x_1 = x_2 = 0$ |
| $b = 0, c \neq 0$ | Pura | $ax^2 + c = 0$ | $\text{I.S.} = \emptyset$ se $a \cdot c > 0$ |
| | | | $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ se $a \cdot c < 0$ |
| $b \neq 0, c = 0$ | Spuria | $ax^2 + bx = 0$ | $x_1 = 0 \vee x_2 = -\frac{b}{a}$ |
| **Equazione completa $ax^2 + bx + c = 0$** | | | |
| Discriminante | Numero soluzioni | | Soluzioni |
| $\Delta > 0$ | Due soluzioni reali e distinte | | $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ |
| $\Delta = 0$ | Due soluzioni reali e coincidenti | | $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ |
| $\Delta < 0$ | Nessuna soluzione reale | | $\text{I.S.} = \emptyset$ |

✍ *Esercizi proposti:* 3.25, 3.26, 3.27, 3.28, 3.29, 3.30, 3.31, 3.32, 3.33, 3.34, 3.35

### 3.2.2 Equazioni che si possono risolvere con opportune sostituzioni

---

**Esempio 3.6.** Risoluzione di equazioni con sostituzioni.

- $(x-1)^2 = 16$. Sostituendo $x - 1 = t$ l'equazione diventa $t^2 = 16$, le cui soluzioni sono $t_1 = -4 \vee t_2 = +4$. Per determinare la $x$ sostituiamo i valori di $t$ trovati nella relazione $x - 1 = t$. Si ha $x - 1 = -4 \vee x - 1 = +4$ quindi l'equazione assegnata ammette le due soluzioni $x_1 = -3 \vee x_2 = 5$;

- $(x-1)^2 + 2(x-1) = 0$. Sostituendo $x - 1 = t$ l'equazione diventa $t^2 + 2t = 0$ le cui soluzioni sono $t(t+2) = 0 \Rightarrow t_1 = 0 \vee t + 2 = 0 \Rightarrow t_2 = -2$. Sostituendo $x - 1 = t$ si ha $x - 1 = 0 \vee x - 1 = -2$ quindi l'equazione assegnata ammette le due soluzioni $x_1 = -1 \vee x_2 = 1$.

---

✍ *Esercizi proposti:* 3.36, 3.37, 3.38

## 3.3 Discussione e risoluzione di equazioni numeriche frazionarie

Un'equazione in cui compare l'incognita al denominatore si chiama *frazionaria o fratta.*

---

**Esempio 3.7.** Risolvere la seguente equazione $\frac{3x+2}{1+x}=\frac{2x+3}{x-2}$.

**Passo I** Determiniamo il mcm dei denominatori: mcm $=(1+x)\cdot(x-2)$.

**Passo II** Imponiamo le *Condizioni* di *Esistenza* (C. E.): C. E. $x\neq -1 \wedge x\neq 2$. La ricerca dei valori che risolvono l'equazione si restringe ai numeri reali appartenenti all'insieme, $\mathcal{D}=\mathbb{R}-\{-1,2\}$ detto *Dominio* dell'equazione o *Insieme* di *Definizione* (abbreviato I. D.).

**Passo III** Applichiamo il primo principio d'equivalenza trasportando al primo membro la frazione del secondo membro $\frac{3x+2}{1+x}-\frac{2x+3}{x-2}=0$. Riduciamo allo stesso denominatore (mcm):

$$\frac{(3x+2)\cdot(x-2)-(2x+3)\cdot(1+x)}{(1+x)\cdot(x-2)}=0.$$

**Passo IV** Moltiplichiamo ambo i membri per il mcm, certamente diverso da zero per le condizioni poste; l'equazione diventa: $(3x+2)\cdot(x-2)-(2x+3)\cdot(1+x)=0$.

**Passo V** L'equazione che si ottiene è di secondo grado; portiamo l'equazione alla forma canonica: $3x^2-6x+2x-4-2x-3-2x^2-3x=0 \Rightarrow x^2-9x-7=0$.

**Passo VI** Calcoliamo il discriminante: $\Delta=b^2-4ac=81+28=109$. Il discriminante è positivo quindi l'equazione è determinata e ammette due soluzioni reali distinte:

$$x_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{109}}{2}\Rightarrow x_1=\frac{9-\sqrt{109}}{2}\vee x_2=\frac{9+\sqrt{109}}{2}.$$

**Passo VII** Confrontiamo le soluzioni con le Condizioni di Esistenza; in questo caso le radici appartengono all'insieme $D$; diciamo che sono accettabili e l'insieme soluzione è: I. S. $=\left\{\frac{9-\sqrt{109}}{2},\frac{9+\sqrt{109}}{2}\right\}$.

**Esempio 3.8.** Risolvere la seguente equazione $\frac{x^2}{x^2-3x+2}=\frac{x-2}{x-1}+\frac{1}{x+2}$.

**Passo I** Determiniamo il mcm dei denominatori. Scomponiamo in fattori i denominatori. Riscriviamo: $\frac{x^2}{(x-2)(x-1)}=\frac{x-2}{x-1}+\frac{1}{x+2}$ il mcm è $(x-2)(x-1)(x+2)$.

**Passo II** Imponiamo le Condizioni di Esistenza: C. E. $x\neq 1\wedge x\neq 2\wedge x\neq -2$ quindi $\mathcal{D}=\mathbb{R}-\{1,2,-2\}=$ I. D.

**Passo III** Trasportiamo al primo membro ed uguagliamo a zero; riduciamo allo stesso denominatore (mcm) i membri dell'equazione:

$$\frac{x^3+2x^2-x^2+3x-2-x^3-2x^2+4x^2+8x-4x-8}{(x-2)(x-1)(x+2)} = 0.$$

**Passo IV** Applichiamo il secondo principio di equivalenza moltiplicando ambo i membri per il mcm, certamente diverso da zero per le condizioni poste in precedenza; l'equazione diventa: $3x^2+7x-10=0$.

**Passo V** Calcoliamo il discriminante: $\Delta = b^2-4ac = 49+120 = 169$. Il discriminante è positivo, l'equazione determinata e ammette due soluzioni reali distinte: $x_{1,2} = \frac{-7\pm13}{6}$ cioè $x_1 = -\frac{10}{3} \vee x_2 = 1$.

**Passo VI** Confrontiamo con le C. E.; in questo caso solo $x_1$ appartiene all'insieme $\mathcal{D}$; diciamo che l'insieme soluzione è: I. S. $= \left\{-\frac{10}{3}\right\}$ mentre $x_2 = 1$ non è accettabile.

---

✍ *Esercizi proposti:* 3.39, 3.40, 3.41, 3.42, 3.43, 3.44, 3.45, 3.46, 3.47, 3.48, 3.49, 3.50, 3.51, 3.52, 3.53

## 3.4 Discussione e risoluzione di equazioni letterali

Ricordiamo la seguente definizione:

**Definizione 3.2.** Una equazione è *letterale* se i coefficienti dell'incognita sono espressioni letterali, cioè se oltre all'incognita (in genere indicata con la lettera $x$) compare un'altra lettera (in genere $a, b, k, \ldots$) detta parametro.

---

**Esempio 3.9.** Data l'equazione $kx^2-(2k-1)x+(k-3)=0$, discutere al variare di $k$ la realtà delle sue soluzioni.

L'equazione è letterale di secondo grado nell'incognita $x$, i cui coefficienti dipendono dal parametro $k$. Il parametro $k$ può assumere qualunque valore numerico e l'equazione rappresenta una famiglia di equazioni le cui caratteristiche variano a seconda dei valori attribuiti al parametro. Notiamo subito che se $k$ assume il valore zero, l'equazione non è più di secondo grado. Se $k$ assume il valore 3, l'equazione è ancora di secondo grado ma è incompleta (spuria) perché priva del termine noto.

*Discutere* un'equazione letterale di secondo grado significa analizzare come varia il suo insieme delle soluzioni al variare del parametro.

Ricordando la formula $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ in cui compaiono i tre coefficienti $a, b, c$ possiamo dire che:

- il primo coefficiente è $k$, se $k=0$ l'equazione diventa $x-3=0$ di primo grado con I. S. $=\{3\}$;

- il secondo coefficiente è $-2k+1$, se questo è nullo, ossia se $k=\frac{1}{2}$ l'equazione diventa $\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}=0$, equazione pura con due soluzioni reali opposte $x_1=-\sqrt{5} \vee x_2=\sqrt{5}$;
- il terzo coefficiente è $k-3$, se è nullo, cioè se $k=3$ l'equazione diventa $3x^2-5x=0$, equazione spuria con due soluzioni reali $x_1=0 \vee x_2=\frac{5}{3}$.

Per tutti i valori di $k$ dell'insieme $\mathbb{R}-\{0,\frac{1}{2},3\}$ l'equazione è completa, l'esistenza di soluzioni reali dipende dal discriminante $\Delta=(-2k+1)^2-4k(k-3)=8k+1$, quindi se

- $8k+1<0 \Rightarrow k<-\frac{1}{8}$ l'equazione non ammette soluzioni reali e $\text{I. S.}=\emptyset$;
- $8k+1 \geqslant 0 \Rightarrow k \geqslant -\frac{1}{8}$. In particolare se $k>-\frac{1}{8}$ l'equazione ammette due soluzioni reali distinte $x_{1,2}=\frac{(2k-1)\pm\sqrt{8k+1}}{2k}$, se $k=-\frac{1}{8}$ coincidenti $x_1=x_2=5$.

Riassumendo e schematizzando si ha:

| $kx^2-(2k-1)x+(k-3)=0$ con $k \in \mathbb{R}$ | | |
|---|---|---|
| Parametro | Insieme Soluzione | Equazione |
| $k=0$ | $x=3$ | di primo grado |
| $k=\frac{1}{2}$ | $x_1=-\sqrt{5} \vee x_2=+\sqrt{5}$ | pura |
| $k=3$ | $x_1=0 \vee x_2=\frac{5}{3}$ | spuria |
| $k \in \mathbb{R}-\{0,\frac{1}{2},3\}$ | | completa, $\Delta=8k+1$ |
| $k<-\frac{1}{8}$ | $\Delta<0$ non esistono soluzioni reali I.S. $=\emptyset$ | |
| $k \geqslant -\frac{1}{8}$ | $\Delta \geqslant 0$ esistono soluzioni reali | |
| $k>-\frac{1}{8}$ | $x_1=\frac{(2k-1)-\sqrt{8k+1}}{2k} \vee x_2=\frac{(2k-1)+\sqrt{8k+1}}{2k}$ | |
| $k=-\frac{1}{8}$ | $x_1=x_2=5$ | |

**Esempio 3.10.** Data l'equazione $x^2-3x+1-k=0$, discutere al variare di $k \in \mathbb{R}$, la realtà delle radici.

Il primo e il secondo coefficiente non dipendono dal parametro $k$, quindi analizziamo il terzo coefficiente. Se $k=1$ l'equazione diventa un'equazione spuria con due radici reali $x_1=0 \vee x_2=3$. Per tutti i valori di $k$ dell'insieme $\mathbb{R}-\{1\}$ l'equazione è completa, l'esistenza di soluzioni reali dipende dal discriminante $\Delta=9-4(1-k)=4k+5$, quindi se:

- $k<-\frac{5}{4}$ l'equazione non ammette soluzioni reali e $\text{I. S.}=\emptyset$;
- $k \geqslant -\frac{5}{4}$ l'equazione ammette due radici reali distinte se $k>-\frac{5}{4} \Rightarrow x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{4k+5}}{2}$, coincidenti se $k=-\frac{5}{4} \Rightarrow x_1=x_2=\frac{3}{2}$.

Riassumendo e schematizzando si ha:

| $x^2-3x+1-k=0$ con $k \in \mathbb{R}$ | | |
|---|---|---|
| Parametro | Insieme Soluzione | Equazione |
| $k=1$ | $x_1=0 \vee x_2=3$ | spuria |
| $k \in \mathbb{R}-\{1\}$ | | completa, $\Delta=4k+5$ |
| $k<-\frac{5}{4}$ | $\Delta<0$ non esistono soluzioni reali I.S. $=\emptyset$ | |
| $k \geqslant -\frac{5}{4}$ | $\Delta \geqslant 0$ esistono soluzioni reali | |
| $k>-\frac{5}{4}$ | $x_1=\frac{3-\sqrt{4k+5}}{2} \vee x_2=\frac{3+\sqrt{4k+5}}{2}$ | |
| $k=-\frac{5}{4}$ | $x_1=x_2=\frac{3}{2}$ | |

**Esempio 3.11.** Discutere la seguente equazione letterale: $\frac{x^2}{m-1}+3+m=\frac{2mx}{m-1}\left(1+\frac{1}{m}\right)$.

L'equazione pur presentando delle frazioni è intera, in quanto l'incognita $x$ non compare al denominatore. Se $m=0$ oppure $m=1$ l'equazione è priva di significato, quindi le Condizioni di Esistenza sono $m\neq 0 \wedge m\neq 1$.

Trasportiamo a sinistra del segno di uguaglianza i termini di destra ed eseguiamo il calcolo nella parentesi:

$$\frac{x^2}{m-1}+3+m-\frac{2mx}{m-1}\left(1+\frac{1}{m}\right)=0 \Rightarrow \frac{x^2}{m-1}+3+m-\frac{2mx}{m-1}-\frac{2mx}{m-1}\cdot\frac{1}{m}=0.$$

Semplifichiamo $m$ nell'ultimo termine, poiché nelle C. E. $m\neq 0$, si ottiene

$$\frac{x^2}{m-1}+3+m-\frac{2mx}{m-1}-\frac{2x}{m-1}=0.$$

Riduciamo allo stesso denominatore $m-1$, eliminiamo il denominatore essendo $m\neq 1$ per le C. E. si ha: $x^2+3m-3+m^2-m-2mx-2x=0$. Scriviamo l'equazione di secondo grado in forma canonica $x^2-2x(m+1)+m^2+2m-3=0$.

*Discussione*

- il primo coefficiente essendo uguale a 1 non dipende dal valore del parametro, quindi l'equazione è di secondo grado per qualunque valore di $m\in\mathbb{R}-\{0,1\}$;
- il secondo coefficiente è $-2(m+1)$: se $m=-1$ l'equazione diventa $x^2-4=0$, equazione pura con due soluzioni reali opposte $x_1=-2\vee x_2=2$;
- il terzo coefficiente è $m^2+2m-3$: se $m^2+2m-3=0\Rightarrow m=1\vee m=-3$ (non consideriamo il caso $m=1$ per le C. E.) l'equazione diventa $x^2+4x=0$, equazione spuria con due soluzioni reali $x_1=0\vee x_2=-4$.

Prima conclusione: per tutti i valori di $m$ nell'insieme $\mathbb{R}-\{0,1,-1,-3\}$ l'equazione è completa e l'esistenza di soluzioni reali dipende dal discriminante. Calcoliamo il discriminante: $\frac{\Delta}{4}=(m+1)^2-(m^2+2m-3)=4$; esso risulta indipendente dal valore del parametro $m$ e sempre positivo, l'equazione ammette due soluzioni reali distinte $x_1=m-1\vee x_2=m+3$.

Riassumendo in una tabella tutti i risultati ottenuti:

$\frac{x^2}{m-1}+3+m=\frac{2mx}{m-1}\left(1+\frac{1}{m}\right)$ con $m\in\mathbb{R}$

| Parametro | Insieme Soluzione | Equazione |
|---|---|---|
| $m=0\vee m=1$ | | priva di significato |
| $m=-1$ | $x_1=-2\vee x_2=2$ | pura |
| $m=-3$ | $x_1=0\vee x_2=-4$ | spuria |
| $m\in\mathbb{R}-\{0,1,-1,-3\}$ | $x_1=m-1\vee x_2=m+3$ | completa: $\Delta=4$ |

**Esempio 3.12.** Discutere l'equazione parametrica $\frac{k+x}{2x}\left(\frac{k+x}{k-x}+\frac{k-x}{k+x}\right)=k+\frac{2k}{kx-x^2}-1$.

L'equazione è fratta, poiché nel denominatore compare l'incognita $x$. Trasportiamo i termini del secondo membro a sinistra del segno uguale e scomponiamo in fattori i denominatori:

$$\frac{k+x}{2x}\left(\frac{k+x}{k-x}+\frac{k-x}{k+x}\right)-k-\frac{2k}{x(k-x)}+1=0; \text{C. E. } x\neq 0\wedge x\neq k\wedge x\neq -k.$$

Svolgiamo i calcoli nella parentesi e moltiplichiamo $\frac{k^2+x^2}{x(k-x)}-k-\frac{2k}{x(k-x)}+1=0$; Riduciamo allo stesso denominatore ed eliminiamo il denominatore $kx^2+kx\cdot(1-k)+k\cdot(k-2)=0$;

*Discussione*

- Il primo coefficiente è $k$, se $k = 0$ le C. E. si riducono a $x \neq 0$ e l'equazione diventa $0x = 0$ indeterminata, quindi I.S. $= \mathbb{R} - \{0\}$ per le condizioni poste sull'incognita. Avendo studiato il caso $k = 0$, possiamo ora supporre $k \neq 0$, dividiamo tutti i coefficienti per $k$, l'equazione diventa $x^2 + x \cdot (1-k) + (k-2) = 0$;
- il secondo coefficiente è $1-k$, se $k = 1$ le C. E. sono $x \neq 0 \wedge x \neq 1 \wedge x \neq -1$ e l'equazione diventa $x^2 - 1 = 0$, le soluzioni sono $x_1 = -1 \vee x_2 = 1$ che non sono accettabili per le C. E.;
- il terzo coefficiente è $k-2$, se $k = 2$ le C. E. sono $x \neq 0 \wedge x \neq 2 \wedge x \neq -2$ e l'equazione diventa $x^2 - x = 0$ le cui soluzioni sono $x_1 = 0 \vee x_2 = 1$ di cui $x_1 = 0$ non accettabile per le C. E.

Per $k \in \mathbb{R} - \{0, 1, 2\}$ l'equazione è completa, l'esistenza di soluzioni reali dipende dal discriminante $\Delta = (1-k)^2 - 4(k-2) = (k-3)^2$, essendo $\Delta \geqslant 0\, \forall k$, si avranno sempre due soluzioni reali: coincidenti se $k = 3 \Rightarrow x_1 = x_2 = 1$ accettabili essendo le C. E. $x \neq -3 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 3$; distinte se $k \neq 3 \Rightarrow x_1 = 1 \vee x_2 = k-2$ e confrontando con le C.E. si ottiene $x_1 = 1$ non accettabile se $k = -1$; $x_2$ sempre accettabile per $k \in \mathbb{R} - \{0, 1, 2, 3, -1\}$.

Riassumendo in una tabella tutti i risultati ottenuti:

$\frac{k+x}{2x}\left(\frac{k+x}{k-x} + \frac{k-x}{k+x}\right) = k + \frac{2k}{kx-x^2} - 1$ con $m \in \mathbb{R}$

| Parametro | Incognita | Insieme Soluzione | Equazione |
|---|---|---|---|
| | $x \neq -k \wedge x \neq 0 \wedge x \neq k$ | | |
| $k = 0$ | $x \neq 0$ | I. S. $= \mathbb{R} - \{0\}$ | indeterm. |
| $k = 1$ | $x \neq -1 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 1$ | $[x_1 = -1 \vee x_2 = 1]^*$ | pura |
| $k = 2$ | $x \neq -2 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 2$ | $x_1 = 0^* \vee x_2 = 1$ | spuria |
| $k \in \mathbb{R} - \{0, 1, 2\}$ | | | completa |
| $k = 3$ | $x \neq -3 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 3$ | $x_1 = x_2 = 1$ | |
| $k \in \mathbb{R} - \{0, 1, 2, 3\}$ | $x \neq -k \wedge x \neq 0 \wedge x \neq k$ | $x_1 = 1 \vee x_2 = k-2$ | |
| $k = -1$ | | $x_1 = 1^*$ | |
| $k \in \mathbb{R} - \{0, 1, 2, 3, -1\}$ | | $x_2 = k-2$ | |

* La soluzione o le soluzioni non sono accettabili.

✍ *Esercizi proposti:* 3.54, 3.55, 3.56, 3.57, 3.58, 3.59, 3.60, 3.61, 3.62, 3.63, 3.64, 3.65, 3.66.

## 3.5 Relazioni tra soluzioni e coefficienti

Consideriamo una generica equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ nell'ipotesi in cui ammetta soluzioni reali (cioè $\Delta \geqslant 0$), sommiamo e moltiplichiamo le soluzioni (o radici) dell'equazione:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a};$$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 + 4ac - b^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Quindi, la somma delle radici è $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ e il prodotto delle radici è $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Osserviamo che queste relazioni tra radici e coefficienti dell'equazione valgono anche nel caso in cui le radici non siano reali ($\Delta < 0$).

---

**Esempio 3.13.** Determinare somma e prodotto delle soluzioni dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ senza risolverla.

- $2x^2 + 11x - 3 = 0$.

  Calcolo il discriminante $\Delta = 145 > 0$ pertanto le radici sono reali e distinte. Applicando le precedenti formule si ha:

  $$x_1 + x_2 = -\frac{11}{2}; x_1 \cdot x_2 = -\frac{3}{2}.$$

- $x^2\sqrt{2} + 3x - 2\sqrt{2} = 0$. Calcolo il discriminante $\Delta = 25 > 0$ pertanto le radici sono reali e distinte. Applicando le precedenti formule si ha:

  $$x_1 + x_2 = -\frac{3}{\sqrt{2}} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}; x_1 \cdot x_2 = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -2.$$

- $x^2 + 2x + 15 = 0$.

  Calcolo il discriminante $\Delta = -56 < 0$ le radici non sono reali anche se la loro somma e il loro prodotto sono reali, infatti applicando le precedenti formule si ha: $x_1 + x_2 = -2$ e $x_1 \cdot x_2 = 15$.

- $x^2 - 12x + 36 = 0$.

  Il discriminate $\Delta = 12^2 - 4 \cdot 36 = 144 - 144 = 0$. Le radici sono coincidenti, applicando la formula risolutiva si ha $x_1 = x_2 = 6$. Applicando le formule per calcolare somma e prodotto si ha $x_1 + x_2 = 12$ e $x_1 \cdot x_2 = 36$ da cui si conclude ugualmente che $x_1 = x_2 = 6$.

**Esempio 3.14.** Determina le radici dell'equazione $x^2 + 2x - 15 = 0$ senza applicare la formula risolutiva, ma sfruttando la somma e il prodotto delle radici stesse.

Calcolo il discriminante $\Delta = 64$, le radici sono reali. Esse hanno come somma $-\frac{b}{a} = -2$ e come prodotto $\frac{c}{a} = -15$.

Le coppie di interi che hanno per prodotto $-15$ sono $(-3;5), (3;-5), (15,-1), (-15;1)$. Tra tutte queste coppie l'unica che ha per somma $-2$ è la coppia $(-5;3)$. Pertanto le soluzioni dell'equazione sono $x_1 = -5 \vee x_2 = 3$.

**Esempio 3.15.** Si determini la relazione che lega i coefficienti della generica equazione di secondo grado alla somma dei reciproci delle radici.

Si vuole cioè esprimere $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ attraverso i coefficienti $a$, $b$, $c$ dell'equazione. Osserviamo in via preliminare che tale somma è possibile con la condizione $x_1 \neq 0 \wedge x_2 \neq 0$ che implica $c \neq 0$. Si ha:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c}.$$

**Esempio 3.16.** Si determini la relazione che lega i coefficienti della generica equazione di secondo grado alla differenza delle radici

Poiché non abbiamo informazioni a priori su quale delle due soluzioni sia la maggiore, calcoliamo il valore assoluto della differenza richiesta. Il calcolo diventa:

$$|x_1 - x_2| = \left| \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \right| = \left| -\frac{2\sqrt{\Delta}}{2a} \right| = \left| -\frac{\sqrt{\Delta}}{a} \right|.$$

---

✍ *Esercizi proposti:* 3.67, 3.68, 3.69, 3.70, 3.71, 3.72, 3.73, 3.74, 3.75, 3.76.

### 3.5.1 Determinare due numeri conoscendone la somma e il prodotto

Consideriamo la generica equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ nell'ipotesi in cui ammetta soluzioni reali $x_1$ e $x_2$. Essendo $a \neq 0$, è possibile dividere ambo i membri per $a$, ottenendo: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Dato che $s = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $p = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ si avrà $x^2 - sx + p = 0$.

Tale equazione risolve quindi la classe di problemi del tipo: "*determinare due numeri che sommati danno* $s$ *e moltiplicati danno* $p$".

Dall'equazione $x^2 - sx + p = 0$ discende che tali numeri esistono e sono reali se e solo se $\Delta = s^2 - 4p \geqslant 0$ ovvero se il quadrato della somma è maggiore o uguale al quadruplo del loro prodotto.

---

**Esempio 3.17.** Determinare due numeri che sommati danno 12 e moltiplicati danno 35.

L'equazione che risolve il problema è: $x^2 - 12x + 35 = 0$. Le soluzioni sono $x_1 = 5 \vee x_2 = 7$.

**Esempio 3.18.** Determinare due numeri che sommati danno 5 e moltiplicati danno 9.

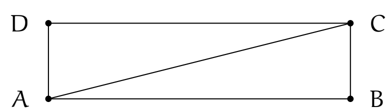
L'equazione che risolve il problema è: $x^2 - 5x + 9 = 0$. Poiché $\Delta = s^2 - 4p = 25 - 36 = -11$, l'equazione non ammette soluzioni reali e, di conseguenza, non esistono due numeri reali aventi la somma e il prodotto richiesti.

---

✍ *Esercizi proposti:* 3.77, 3.78, 3.79, 3.80.

### 3.5.2 Problemi di natura geometrica di secondo grado

**Problema 3.19.** Determinate la misura della diagonale di un rettangolo avente il perimetro di 80 m. e l'area di 375 m$^2$.




*Dati*: $2p = 80\,\text{m}$, Area $= 375\,\text{m}^2$.
*Obiettivo*: $\overline{AC}$.

*Soluzione* $\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2}$ per il teorema di Pitagora sul triangolo ABC.

Sono incognite le misura dei lati, quindi poniamo $\overline{AB} = x$ e $\overline{BC} = y$ con $x > 0$ e $y > 0$.

Il problema si formalizza con il sistema: $\begin{cases} x+y=40 \\ x\cdot y=375 \end{cases}$ che esprime la ricerca di due numeri nota la loro somma 40 e il loro prodotto 375. I numeri richiesti sono le soluzioni reali positive dell'equazione $t^2-40t+375=0$ e precisamente $t_1=15 \vee t_2=25$.

Per come abbiamo disegnato la figura abbiamo quindi: $AB=25\,\text{m}; BC=15\,\text{m}$ da cui $\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{850}=5\sqrt{34}$.

♦

✍ *Esercizi proposti:* 3.81, 3.82, 3.83.

## 3.6 Scomposizione del trinomio di secondo grado

Si consideri il trinomio di secondo grado: $ax^2+bx+c$ e sia $ax^2+bx+c=0$ (con $\Delta \geqslant 0$) l'equazione associata a tale trinomio. Effettuiamo le seguenti operazioni:

- si mette in evidenza $a$: $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$;
- si sostituiscono le relazioni trovate nel precedente paragrafo riguardo la somma e il prodotto delle soluzioni $x_1$ e $x_2$: $a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left[x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2\right]$;
- si svolgono i calcoli nella parentesi quadra:

$$a\left[x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2\right]=a\left[x^2-x_1x-x_2x+x_1\cdot x_2\right];$$

- si effettua il raccoglimento parziale e si ottiene:

$$a\left[x^2-x_1x-x_2x+x_1\cdot x_2\right]=a\left[x\left(x-x_1\right)-x_2\left(x-x_1\right)\right]=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right).$$

Sulla base del segno di $\Delta$ è possibile distinguere i casi illustrati in tabella:

| Discriminante | Soluzioni | Scomposizione |
|---|---|---|
| Caso I: $\Delta>0$ | $x_1\neq x_2$ | $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ |
| Caso II: $\Delta=0$ | $x_1=x_2$ | $ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$ |
| Caso III: $\Delta<0$ | $x_1,x_2\notin\mathbb{R}$ | $ax^2+bx+c$ è irriducibile |

---

**Esempio 3.20.** Scomporre in fattori seguenti trinomi.

- $x^2-5x+6$.

  Calcolo le soluzioni dell'equazione $x^2-5x+6=0$, con soluzioni $x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}$ cioè $x_1=2\vee x_2=3$. Applicando la formula ottenuta nel I caso si ha:

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3).$$

- $x^2-12x+36$.

  Poiché $\Delta=144-144=0$ il trinomio è un quadrato del binomio e applicando la formula ottenuta nel secondo caso si ha: $x^2-12x+36=(x-6)^2$.

- $2x^2+3x+5$.

  Essendo $\Delta = 9-40 = -31$, il trinomio è irriducibile.

- $-5x^2+2x+1$.

  Calcolo le radici dell'equazione associata $-5x^2+2x+1=0$: $x_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{24}}{-10} = \frac{1\pm\sqrt{6}}{5}$ quindi $x_1 = \frac{1-\sqrt{6}}{5} \vee x_2 = \frac{1+\sqrt{6}}{5}$ e scrivo la scomposizione:

$$-5x^2+2x+1 = -5\left(x-\frac{1-\sqrt{6}}{5}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{6}}{5}\right).$$

**Esempio 3.21.** Scrivere un'equazione di secondo grado che ammetta le seguenti soluzioni $x_1 = \frac{1}{2}$ e $x_2 = 3$.

Per quanto visto nel paragrafo, si ha: $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+3)=0$ da cui: $x^2+3x-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=0$ cioè: $x^2+5x-\frac{3}{2}=0$ ovvero: $2x^2+5x-3=0$.

---

❑ **Osservazione** Si vuole scomporre in fattori il trinomio $m = 4x^2+2x-6$, avente tutti i coefficienti pari. Anche se osserviamo che tutti i suoi coefficienti sono pari, *non possiamo dividire per due*, non essendo una equazione. Il polinomio $m = 2x^2+x-3$ è diverso da quello assegnato, mentre le equazioni associate all'uno e all'altro sono equivalenti. Nel procedere alla scomposizione possiamo usare l'equazione $2x^2+x-3=0$ le cui radici sono: $x_1 = -\frac{3}{2} \vee x_2 = 1$ e operare la scomposizione del trinomio assegnato: $p = 4x^2+2x-6 = 4\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-1)$.

✍ *Esercizi proposti:* 3.84, 3.85, 3.86, 3.87.

## 3.7 Regola di Cartesio

Se in un'equazione di secondo grado i coefficienti sono tutti diversi da zero e il discriminante è non negativo, è possibile avere delle informazioni sui segni delle soluzioni senza calcolarle esplicitamente.

In un'equazione $ax^2+bx+c=0$, dove i coefficienti sono tutti non nulli, le coppie di coefficienti $(a,b)$ e $(b,c)$ sono dette coppie di *coefficienti consecutivi*. Una coppia di coefficienti consecutivi presenta:

- una *permanenza* se i coefficienti hanno lo stesso segno;
- una *variazione* se i coefficienti hanno segni diversi.

---

**Esempio 3.22.** Determinare le variazioni e le permanenze nelle seguenti equazioni:

| Equazione | a | | b | | c |
|---|---|---|---|---|---|
| $+2x^2-3x-1$ | $+ \rightarrow$ | variazione | $\leftarrow - \rightarrow$ | permanenza | $\leftarrow -$ |
| $-x^2-3x-1$ | $- \rightarrow$ | permanenza | $\leftarrow - \rightarrow$ | permanenza | $\leftarrow -$ |
| $-3x^2+4x-1$ | $- \rightarrow$ | variazione | $\leftarrow + \rightarrow$ | variazione | $\leftarrow -$ |
| $+2x^2+x-1$ | $+ \rightarrow$ | permanenza | $\leftarrow + \rightarrow$ | variazione | $\leftarrow -$ |

---

**Teorema 3.1** (di Cartesio)**.** *In un'equazione di secondo grado* $ax^2 + bx + c = 0$ *con* $a, b, c \neq 0$ *e* $\Delta \geqslant 0$, *il numero di radici positive è uguale al numero di variazioni presenti nelle coppie di coefficienti consecutivi. Se vi è una sola variazione, le radici sono discordi e il valore assoluto maggiore è quello della radice positiva se la variazione è nella coppia* $(a, b)$, *mentre è della radice negativa se la variazione è nella coppia* $(b, c)$.

---

**Esempio 3.23.** Determinare il segno delle soluzioni dell'equazione $x^2 + 2x - 3 = 0$ senza risolverla.

L'equazione $x^2 + 2x - 3 = 0$ ha soluzioni reali in quanto $\Delta = 16 > 0$, dal momento che vi è una sola variazione, quello della coppia $(b, c)$, l'equazione ha radici discordi e il valore assoluto maggiore è quello della radice negativa.

Dimostriamo quanto è stato affermato tenendo presente che $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$; nell'equazione proposta si ha: $x_1 + x_2 = -2$ e $x_1 \cdot x_2 = -3$ dunque prodotto negativo e somma negativa. Il prodotto di due numeri è negativo quando i fattori sono discordi, quindi una soluzione è positiva e una è negativa. Chiamiamo $x_1$ la soluzione negativa e $x_2$ la soluzione positiva, poiché $x_1 + x_2 = -2 < 0$ deduciamo che in valore assoluto è più grande il numero negativo, cioè $|x_1| > |x_2|$.

**Esempio 3.24.** Determinare il segno delle soluzioni delle seguenti equazioni senza risolverle.

- L'equazione $2x^2 - 6x - 56$ ha soluzioni reali in quanto $\Delta = 484 > 0$; dal momento che vi è una sola variazione, l'equazione ha radici discordi e il valore assoluto maggiore è quello della radice positiva dal momento che la variazione è nella coppia $(a, b)$.
- L'equazione $-3x^2 - 24x - 21 = 0$ ha soluzioni reali in quanto $\Delta = 324 > 0$; dal momento che non vi sono variazioni, l'equazione ha due radici negative.
- L'equazione $x^2 - 10x + 25 = 0$ ha due soluzioni coincidenti in quanto $\Delta = 0$; dal momento che vi sono due variazioni, le due radici coincidenti sono positive.

---

✍ *Esercizi proposti:* 3.88, 3.89, 3.90.

## 3.8 Equazioni parametriche

**Definizione 3.3.** Si definisce *parametrica* un'equazione i cui coefficienti dipendono da un parametro.

L'equazione $3x^2 + (k - 1)x + (2 - 3k) = 0$ è parametrica di secondo grado nell'incognita $x$; i suoi coefficienti dipendono dal valore del parametro $k$ e quindi la natura e il segno delle sue soluzioni dipendono da $k$.

In molti problemi di applicazione della matematica in situazioni reali in cui compare un parametro, non interessa tanto determinare le soluzioni dell'equazione che formalizza il problema, quanto sapere se le soluzioni hanno determinate caratteristiche. Sappiamo che attraverso i coefficienti di un'equazione di secondo grado si possono determinare alcune relazioni tra le sue soluzioni:

- soluzioni reali se $\Delta = b^2 - 4ac \geqslant 0$; reali coincidenti se $\Delta = 0$, reali distinte se $\Delta > 0$;
- la somma delle soluzioni è $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$;
- il prodotto delle soluzioni è $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Nell'equazione $3x^2 + (k-1)x + (2-3k) = 0$ si ha $\Delta = (k-1)^2 - 12(2-3k)$ dipendente dal parametro k. Dall'analisi del $\Delta$ si potranno dedurre quali condizioni deve verificare k affinché esistano soluzioni reali. Dall'analisi di somma e prodotto $x_1 + x_2 = -\frac{(k-1)}{3}$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{(2-3k)}{3}$ potremo stabilire il segno delle soluzioni reali ed altre caratteristiche delle soluzioni.

---

**Esempio 3.25.** Assegnata l'equazione $(k+1)x^2 + (2k+3)x + k = 0$ stabilire per quale valore di k

a ) l'equazione si riduce al primo grado;
b ) l'equazione ammette soluzioni reali distinguendo i casi "soluzioni coincidenti" e "soluzioni distinte";
c ) la somma delle soluzioni sia nulla determinando in tal caso le soluzioni.

*Svolgimento guidato*

a ) l'equazione diventa di primo grado se il coefficiente $a$ si annulla cioè $k + 1 = 0$ quindi $k = -1$. In questo caso si ha una sola soluzione reale $x = 1$;
b ) studiamo il segno del discriminante: $\Delta = (2k+3)^2 - 4k(k+1) \geqslant 0$ da cui ricaviamo

$$4k^2 + 12k + 9 - 4k^2 - 4k \geqslant 0 \Rightarrow 8k + 9 \geqslant 0.$$

In questo caso se $k = -\frac{9}{8}$ le soluzioni sono coincidenti, se $k > -\frac{9}{8}$ le soluzioni sono reali distinte, se invece $k < -\frac{9}{8}$ non ci sono soluzioni reali;
c ) dalla formula ricaviamo $x_1 + x_2 = -\frac{(2k+3)}{(k+1)}$ e quindi ponendo $2k + 3 = 0$ si ha somma nulla se $k = -\frac{3}{2}$. Il valore $k = -\frac{3}{2}$ è minore di $k = -\frac{9}{8}$, pertanto non ci sono soluzioni reali. Sostituendo $k = -\frac{3}{2}$ l'equazione diventa $x^2 + 3 = 0 \to x^2 = -3$ impossibile!

---

✍ *Esercizi proposti:* 3.91, 3.92, 3.93, 3.94, 3.95, 3.96, 3.97, 3.98, 3.99, 3.100, 3.101, 3.102, 3.103, 3.104, 3.105, 3.106, 3.107, 3.108, 3.109, 3.110, 3.111.

## 3.9 Problemi di secondo grado in una incognita

> La risoluzione dei problemi ...serve ad acuire l'ingegno e a dargli la facoltà di penetrare l'intera ragione di tutte le cose.
>
> R. DESCARTES

Sappiamo che nel corso degli studi o nell'attività lavorativa possono presentarsi problemi di diversa natura: di tipo economico, scientifico, sociale; possono riguardare insiemi numerici o figure geometriche. La matematica ci può aiutare a risolvere i problemi quando essi possono essere tradotti in "forma matematica", quando cioè è possibile trascrivere in simboli le relazioni che intercorrono tra le grandezze presenti nel problema e quando si può costruire, tramite queste relazioni, un modello matematico che ci permetta di raggiungere la soluzione al quesito.

Affronteremo problemi di tipo algebrico o geometrico, che potranno essere formalizzati attraverso equazioni di secondo grado in una sola incognita. Teniamo presente, prima di buttarci nella risoluzione del problema, alcuni passi che ci aiuteranno a costruire il modello matematico:

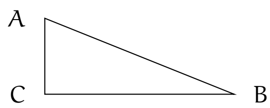
- ➡ la lettura "attenta" del testo al fine di individuare l'ambiente del problema, le parole chiave, i dati e le informazioni implicite, l'obiettivo;
- ➡ la scelta della grandezza incognita del problema, la descrizione dell'insieme in cui si ricerca il suo valore, le condizioni che devono essere soddisfatte dall'incognita;
- ➡ la traduzione in "forma matematica" delle relazioni che intercorrono tra i dati e l'obiettivo, cioè l'individuazione del modello matematico (equazione risolvente).

Dopo aver risolto l'equazione occorre confrontare la soluzione trovata con le condizioni poste dal problema.

**Problema 3.26.** Nel triangolo rettangolo $ABC$, rettangolo in $C$ l'ipotenusa supera il cateto maggiore $CB$ di $2\,\text{m}$; la differenza tra i cateti è $23\,\text{m}$. Determinare la misura del perimetro e l'area di $ABC$.

*Dati*
$\overline{AB} = \overline{CB} + 2;$
$\overline{CB} - \overline{AC} = 23;$
$A\widehat{C}B =$ retto.

*Obiettivo*
$2p;$
Area.




*Soluzione* Osserva che $2p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}$ e Area $= \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AC}}{2}$. Poni $\overline{BC} = x$; dai dati si ha $\overline{AB} = x + 2$ e $\overline{AC} = x - 23$ con $\begin{cases} x > 0 \text{ essendo misura di un segmento} \\ x > 23 \text{ poiché } \overline{AC} \text{ deve essere positiva} \end{cases}$.

Essendo il triangolo rettangolo, i lati sono legati dal teorema di Pitagora quindi si deve verificare: $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \to (x+2)^2 = (x-23)^2 + x^2$. Sviluppando i calcoli si ottiene l'equazione risolvente di secondo grado, in forma canonica: $x^2 - 50x + 525 = 0$ con $\Delta = 400$. L'equazione è determinata con il discriminante positivo, quindi esistono due soluzioni reali distinte: $x_1 = 15 \vee x_2 = 35$ entrambe positive. Ai fini del problema $x_1 = 15$ non è accettabile, quindi il problema ha una sola soluzione e $\overline{BC} = 35$; $\overline{AB} = 37$; $\overline{AC} = 12$. Conclusione: $2p = 35 + 37 + 12 = 84\,\text{m}$; Area $= 210\,\text{m}^2$.

♦

**Problema 3.27.** Un padre aveva 26 anni alla nascita del figlio; moltiplicando le età attuali del padre e del figlio si trova il triplo del quadrato dell'età del figlio; calcolare le due età.

Indichiamo con $p$ l'età attuale del padre e con $f$ l'età del figlio
*Dati*: $p = f + 26;\ p \cdot f = 3f^2$.
*Obiettivo*: $f,\ p$.

*Soluzione* I dati permettono di impostare la relazione $(f + 26) \cdot f = 3 \cdot f^2$ che esprime il legame tra le età di oggi del padre e del figlio; siamo di fronte ad un'equazione di secondo grado nell'incognita $f$. La soluzione dell'equazione deve essere espressa da un numero positivo poiché esprime l'età. Risolviamo l'equazione $2f^2 - 26f = 0$ le cui soluzioni sono $f_1 = 0 \vee f_2 = 13$. Per le condizioni poste la soluzione del problema è $f = 13$. Quindi oggi il figlio ha 13 anni e il padre 39 anni.

♦

**Problema 3.28.** Il trapezio isoscele $ABCD$ è inscritto in una semicirconferenza di diametro $AB$ di misura 25 cm; determina le misure dei lati del trapezio sapendo che il perimetro è 62 cm.

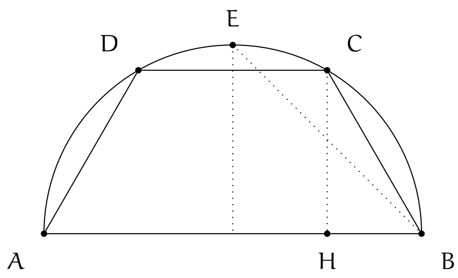
*Dati*

$\overline{AB} = 25$; $2p = 62$;

$AB \parallel DC$; $\overline{AD} = \overline{CB}$.

*Obiettivo*

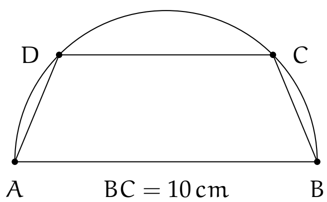
$\overline{DC}$; $\overline{CB}$.

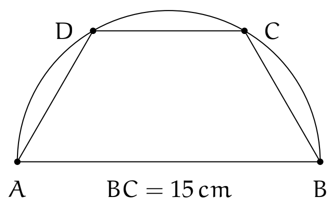



*Soluzione* $\overline{AB} + \overline{DC} + 2\overline{BC} = 62$; fissiamo come incognita la misura in cm di $BC$: $\overline{BC} = x$. Determiniamo le condizioni sull'incognita: dovrà essere $x > 0$ poiché rappresenta la misura di un segmento e inoltre affinché esista realmente il trapezio isoscele il punto $C$ non deve coincidere con il punto medio $E$ dell'arco $DC$ cioè $CB < EB$, quindi $x < \dfrac{25}{2}\sqrt{2}$.

Tracciata l'altezza $CH (H \in AB)$ si ha $\overline{DC} = \overline{AB} - 2\overline{HB}$ e per il 1° teorema di Euclide sul triangolo $ACB$, rettangolo in $C$, $\overline{HB} : \overline{CB} = \overline{CB} : \overline{AB}$; determiniamo quindi la misura di $HB$ in funzione dell'incognita fissata: $\overline{HB} = \dfrac{x^2}{25}$ da cui $\overline{DC} = 25 - \dfrac{2x^2}{25}$.

Costruiamo l'equazione risolvente: $25 + 2x + 25 - \dfrac{2x^2}{25} = 62 \to x^2 - 25x + 150 = 0$ che ha soluzioni $x_1 = 10 \vee x_2 = 15$, entrambe accettabili. Si hanno dunque due trapezi inscritti che risolvono il problema.




♦

**Problema 3.29.** Un capitale di 25000 euro viene depositato in banca a un tasso di interesse annuo c. Gli interessi maturati durante il primo anno non vengono ritirati. Nell'anno seguente si investono sia il capitale sia gli interessi maturati a un tasso di interesse annuo aumentato dello 0,5%. Alla fine dei due anni si ritira la somma di 26291,10 euro. Calcola i tassi di interesse praticati dalla banca.

Assumiamo come incognita $c$ il tasso di interesse praticato il primo anno, espresso come numero decimale e non in forma percentuale. Il tasso praticato nel secondo anno sarà $c + 0,005$.

*Soluzione* Alla fine del primo anno in banca rimane tra capitale e interessi

$$25000 + 25000 \cdot c = 25000(1 + c).$$

Nel secondo anno il tasso praticato è $c + 0{,}005$ che va applicato alla somma $25000(1 + c)$. Si ottiene quindi l'equazione

$$25000(1 + c)(1 + c + 0{,}005) = 26291{,}10.$$

Moltiplicando le parentesi tonde si ha $25000(1{,}005 + c + 1{,}005c + c^2) = 26291{,}10$ e poi dividendo per 25000 e ordinando otteniamo $c^2 + 2{,}005c - 0{,}046644 = 0$ con soluzioni

$$c_{1,2} = \frac{-2{,}005 \pm \sqrt{4{,}020025 + 0{,}186576}}{2} = \frac{-2{,}005 \pm 2{,}051}{2} \Rightarrow c_1 = -2{,}028 \vee c_2 = 0{,}023.$$

La soluzione $c_1$ è negativa e non accettabile. La risposta al problema è $0{,}023$ cioè $2{,}3\%$ il primo anno e $2{,}8\%$ il secondo anno.

♦

✍ *Esercizi proposti:* 3.112, 3.113, 3.114, 3.115, 3.116, 3.117, 3.118, 3.119, 3.120, 3.121, 3.122, 3.123, 3.124, 3.125, 3.126, 3.127, 3.128, 3.129, 3.130, 3.131, 3.132, 3.133, 3.134, 3.135, 3.136, 3.137, 3.138, 3.139, 3.140, 3.141, 3.142, 3.143, 3.144, 3.145, 3.146, 3.147, 3.148, 3.149, 3.150.

### 3.9.1 Problemi con un parametro

I problemi che abbiamo proposto sono caratterizzati da dati numerici e di conseguenza le soluzioni numeriche dell'equazione risolvente sono facilmente confrontabili con le condizioni poste sull'incognita. Abbiamo anche visto che le soluzioni dell'equazione non sempre sono soluzioni del problema e può anche succedere che il problema abbia due soluzioni.

Affrontiamo ora un problema letterale, nel quale alcuni dati sono espressi da lettere. In questi problemi dovremo rispettare le condizioni poste sull'incognita, ma anche analizzare per quali valori della lettera il problema ammette soluzioni reali. Dovremo quindi procedere con la discussione dell'equazione parametrica risolvente per stabilire se il problema letterale ammette soluzioni.

**Problema 3.30.** Sul lato $a$ dell'angolo $a\widehat{V}b$ di $60°$ si fissano i punti $A$ e $B$ tali che $\overline{VA} = 2k$ e $\overline{VB} = 8k$. Determina sul lato $b$ un punto $P$ in modo che il rapporto tra $PB$ e $PA$ sia 2.

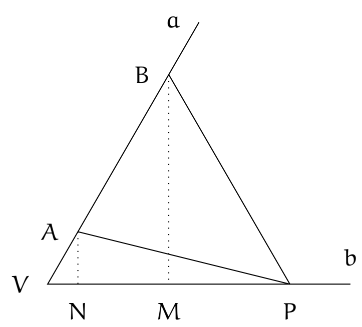
*Dati*

$a\widehat{V}b = 60°$;

$\overline{VA} = 2k$; $\overline{VB} = 8k$.

*Obiettivo*

$P \in b$ tale che $\dfrac{PB}{PA} = 2$.



*Osservazione preliminare*: le misure dei segmenti $VA$ e $VB$ sono espresse in forma letterale, affinché il problema abbia significato deve essere $k > 0$.

*Soluzione* La posizione del punto $P$ sul lato $b$ sarà individuata dalla distanza di $P$ da $V$: poniamo quindi $\overline{VP} = x$ con $x > 0$ e determiniamo $\overline{PB}$ e $\overline{PA}$ in funzione di $x$ per poter sfruttare la richiesta contenuta nell'obiettivo come equazione risolvente.

Sia $M$ il piede della perpendicolare da $B$ al lato $b$; nel triangolo rettangolo $PMB$ si ha $\overline{PB}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{PM}^2$(*) per il teorema di Pitagora. Nel triangolo $BVM$, rettangolo in $M$ con l'angolo $V$ di 60° si ha $\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{BV} \cdot \sqrt{3} = 4k \cdot \sqrt{3}$; $\overline{PM} = \overline{VP} - \overline{VM}$ e $\overline{VM} = \frac{1}{2}\overline{VB} = 4k$; per quanto detto sul triangolo $BVM$, quindi $\overline{PM} = x - 4k$; sostituendo in (*) si ottiene $\overline{PB}^2 = 48k^2 + (x - 4k)^2$.

Sia $N$ il piede della perpendicolare da $A$ al lato $b$; nel triangolo rettangolo $PNA$, con analogo ragionamento otteniamo: $\overline{PA}^2 = \overline{AN}^2 + \overline{PN}^2$ (**) per il teorema di Pitagora. Nel triangolo $AVN$, rettangolo in $N$ con l'angolo $V$ di 60° si ha $\overline{AN} = \frac{1}{2}\overline{AV} \cdot \sqrt{3} = k \cdot \sqrt{3}$; $\overline{VN} = \frac{1}{2}\overline{AV} = k$ e $\overline{PN} = \overline{VP} - \overline{VN} = x - k$; sostituendo in (**) si ottiene $\overline{PA}^2 = 3k^2 + (x - k)^2$.

Determiniamo l'equazione risolvente ricordando che il rapporto tra due segmenti è uguale al rapporto tra le rispettive misure ed elevando al quadrato si ha $\frac{\overline{PB}^2}{\overline{PA}^2} = 4$. Sostituendo quanto trovato si ottiene l'equazione $48k^2 + (x - 4k)^2 = 4 \cdot \left[3k^2 + (x - k)^2\right]$ da cui $x^2 = 16k^2$. Si tratta di un'equazione di secondo grado pura, avente due soluzioni reali opposte essendo il secondo membro positivo, quindi $x_1 = -4k$ e $x_2 = 4k$; per le condizioni poste solo $x_2$ è accettabile.

Con quale punto della figura tracciata inizialmente viene a coincidere il punto $P$ che risolve il problema?

♦

✍ *Esercizi proposti:* 3.151, 3.152, 3.153, 3.154, 3.155, 3.156, 3.157, 3.158, 3.159.

## 3.10 Esercizi

### 3.10.1 Esercizi dei singoli paragrafi

#### 3.1 - le equazioni di secondo grado in una incognita

**3.1** (*). Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado pure.

a) $x^2 - 1 = 0$;
b) $x^2 = \frac{49}{25}$;
c) $2x^2 - 32 = 0$;
d) $x^2 - 25 = 0$;
e) $16x^2 = 1$;
f) $3x^2 + 3 = 0$;
g) $x^2 - 9 = 0$;
h) $25 = 9x^2$;
i) $x^2 - 3 = 0$;
j) $x^2 + 36 = 0$;
k) $4 - x^2 = 0$;
l) $x^2 + 4 = 0$.

**3.2** (*). Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado pure.

a) $x^2 = 49$;
b) $4 - 9x^2 = 0$;
c) $5x^2 - 3 = 0$;
d) $4x^2 - 9 = 0$;
e) $9x^2 - 25 = 0$;
f) $6x^2 = 0$;
g) $2x^2 - 1 = 0$;
h) $4x^2 + 16 = 0$;
i) $1 + x^2 = 50$;
j) $3x^2 - 1 = 0$;
k) $27x^2 - 3 = 0$;
l) $7x^2 = 28$.

**3.3** (*). Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado pure.

a) $4x^2 - 4 = 0$;
b) $5x^2 - 125 = 0$;
c) $0,04x^2 = 1$;
d) $x^2 - 0,01 = 0$;
e) $0,5x^2 - 4,5 = 0$;
f) $0,09x^2 = 0,01$;
g) $\frac{1}{2}x^2 - 2 = 0$;
h) $x^2 - \frac{9}{4} = 0$;
i) $x^2 - \frac{1}{6} = 0$;
j) $121x^2 - \frac{1}{169} = 0$;
k) $x^2 + \frac{9}{4} = 0$;
l) $4\left(x^2 - \frac{3}{4}\right) = 13$.

**3.4** (*). Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado pure.

a) $x^2 - \sqrt{3} = 0$;
b) $-9x^2 = -1$;
c) $4x^2 = -9$;
d) $x^2 + 6 = 42$;
e) $5 - 125x^2 = 0$;
f) $18 - x^2 = 0$;
g) $(x+3)^2 = 6x + 34$;
h) $(x+1)^2 = 25$;
i) $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 13$;
j) $(x + \sqrt{2})^2 = 2\sqrt{2}x$;
k) $(x-2)^2 + (1-x)^2 = 1 - 6x$;
l) $(\sqrt{2}x - \sqrt{3})(\sqrt{2}x + \sqrt{3}) = 0$.

**3.5** (*). Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado spurie.

a) $x^2 - 3x = 0$;
b) $3x^2 - 2x = 0$;
c) $7x^2 + 2x = 0$;
d) $x^2 + 2x = 0$;
e) $x^2 + 5x = 0$;
f) $x^2 - x = 0$.

**3.6** (*). Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado spurie.

a) $18x^2 - 36x = 0$;
b) $2x^2 + 6x = 0$;
c) $1000x - 2000x^2 = 0$;
d) $9x^2 + 16x = 0$;
e) $6x^2 = 5x$;
f) $5x = 25x^2$.

**3.7** (*). Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado spurie.

a) $3x^2 - 2x = 4x$;
b) $81x^2 = 9x$;
c) $0,1x^2 - 0,5x = 0$;
d) $7x^2 - 2x = 0$;
e) $0,5x^2 + 0,1x = 0$;
f) $x^2 + \frac{1}{2}x = 0$.

**3.8** (*). Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado spurie.

a) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 = 0$;
b) $\sqrt{2}x^2 + \sqrt{3}x = 0$;
c) $x^2 + \sqrt{2}x = 0$;
d) $-2x^2 + 4x = 0$;
e) $5\sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{2}x = 0$;
f) $\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{4}x = 0$.

**3.9** (*). Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado spurie.

a) $3x^2 - \frac{4}{3}x = 0$;
b) $(x-2)^2 = 4$;
c) $(x+1)^2 = 1$;
d) $(x+\sqrt{2})^2 = 2$;
e) $77x - 11x^2 = 0$;
f) $\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x = 0$.

**3.10** (*). Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado spurie.

a) $\frac{11}{3}x^2 = -2x$;
b) $\frac{1}{2}(x-2)^2 - x = 2$;
c) $(x-1)(x+3) = 3x^2 - 3$;
d) $(3x-2)^2 - 4 = 6x^2$.

**3.11** (*). Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado spurie.

a) $(x-2)^2 + (1-x)^2 = 5$;
b) $(x-2)^3 - 4(2x-1) = (x+2)\left(x^2 - 2x + 4\right) - 12$;
c) $(\sqrt{2}+x)^3 - (\sqrt{3}+x)^3 = 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$;
d) $(\sqrt{2}x - \sqrt{3})(\sqrt{2}x + \sqrt{3}) + (\sqrt{3}x + \sqrt{3})^2 + (x-1)^2 = 1$;
e) $\left(x^2 + \sqrt{2}\right)(\sqrt{3}-1) + (2x+\sqrt{3})(\sqrt{2}-1) - \sqrt{2} + \sqrt{3} = 0$.

### 3.2 - Risoluzione di un'equazione completa

**3.12** (*). Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado complete.

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$;
b) $x^2 + x - 20 = 0$;
c) $2x^2 - 6x - 6 = 0$;
d) $x^2 - 3x + 6 = 0$.

**3.13.** [*] Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado complete.

a) $-x^2 + x + 42 = 0$;
b) $-x^2 + 10x - 25 = 0$;
c) $-2x^2 + 7x - 5 = 0$;
d) $3x^2 + 2x - 1 = 0$.

**3.14** (*). Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado complete.

a) $2x^2 - \sqrt{5}x - 1 = 0$;
b) $x^2 - 2\sqrt{3}x - 4 = 0$;
c) $x^2 - 3x - 2 = 0$;
d) $2x^2 - \sqrt{5}x - 1 = 0$.

**3.15** (*). Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado complete.

a) $-\frac{4}{3}x^2 - x + \frac{3}{2} = 0$;
b) $-\frac{4}{5}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{20} = 0$;
c) $-x^2 + 4x - 7 = 0$;
d) $x^2 - \sqrt{5}x - \sqrt{5} = 0$.

**3.16** (*). Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado complete.

a) $x^2 - 5x + 3 = 0$;
b) $x^2 - 4x + 9 = 0$;
c) $x^2 - 4x - 9 = 0$;
d) $x^2 + 6x - 2 = 0$.

**3.17** (*). Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado complete.

a) $x^2 - 3x - \frac{5}{2} = 0$;
b) $2x^2 - 3x + 1 = 0$;
c) $\frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - 1 = 0$;
d) $3x^2 + x - 2 = 0$.

**3.18** (*). Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado complete.

a) $3x^2 - \frac{2}{3}x - 1 = 0$;
b) $\sqrt{2}x^2 - x - 3\sqrt{2} = 0$;
c) $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$;
d) $x^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})x - \sqrt{6} = 0$.

**3.19** (*). Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado complete.

a) $(3x+1)^2 - (2x+2)^2 = 0$;
b) $(x+5)^2 = 5(4x+5)$;
c) $(x-2)(3-2x) = x-2$;
d) $(x+200)^2 + x + 200 = 2$;
e) $(x^2+x+1)(x^2-x-1) = (x^2-1)^2$.

**3.20** (*). Risolvi, applicando quando possibile la formula ridotta o ridottissima.

a) $3x^2 - 2x - 2 = 0$;
b) $x^2 + 6x - 3 = 0$;
c) $4x^2 - 8x + 3 = 0$;
d) $7x^2 - 2x - 5 = 0$.

**3.21** (*). Risolvi, applicando quando possibile la formula ridotta o ridottissima.

a) $40x^2 + 80x - 30 = 0$;
b) $5x^2 - 4x + 1 = 0$;
c) $5x^2 - 4x - 9 = 0$;
d) $\frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{4} = 0$.

**3.22** (*). Risolvi, applicando quando possibile la formula ridotta o ridottissima.

a) $6x^2 - 4x - 2 = 0$;
b) $90x^2 - 180x - 270 = 0$;
c) $\frac{3}{2}x^2 - 4x + 2 = 0$;
d) $\frac{4}{3}x^2 - 6x + 6 = 0$.

**3.23** (*). Risolvi, applicando quando possibile la formula ridotta o ridottissima.

a) $x^2 - 6x + 1 = 0$;
b) $3x^2 - 12x - 3 = 0$;
c) $7x^2 - 6x + 8 = 0$;
d) $3x^2 - 18x + 27 = 0$.

**3.24** (*). Risolvi, applicando quando possibile la formula ridotta o ridottissima.

a) $9x^2+12x+1=0$;
b) $9x^2-12x+4=0$;
c) $4x^2-32x+16=0$;
d) $3x^2+10x+20=0$.

### Altri esercizi sulle equazioni di 2° grado

**3.25** (*). Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado.

a) $(3x+1)\left(\frac{5}{2}+x\right)=2x-1$;
b) $(3x-2)^2+(5x-1)^2=(3x-2)(5x-1)$;
c) $3x-x^2=x^2+3(x-2)$;
d) $2(x-1)(x+1)=2$.

**3.26** (*). Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado.

a) $(2x-1)(4-x)-11x=(1-x)^2$;
b) $2x^2=x+x^2-(x+\sqrt{x})(x-\sqrt{x})$;
c) $(x-3)^2=9-6x$;
d) $(x-2)^3-1=x^3+12x-11$.

**3.27** (*). Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado.

a) $\frac{3x-2}{2}=x^2-2$;
b) $(2x-3)(2x+3)=27$;
c) $\frac{x-3}{2}-\frac{x^2+2}{3}=1+x$;
d) $\frac{x-2}{3}-(3x+3)^2=x$.

**3.28** (*). Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado.

a) $(x-2)^3-x^3=x^2-4$;
b) $x(1-5x)=[3-(2+5x)]x-(x^2-1)$;
c) $(x+1)^3-(x+2)^2=\frac{2x^3-1}{2}$;
d) $\frac{(x-1)^2}{2}-\frac{2x-5}{3}=-\frac{5}{3}x$.

**3.29** (*). Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado.

a) $(x+2)^3+4x^2=(x-2)^3+16$;
b) $(2-x)^3-(2-x)^2=\frac{3-4x^3}{4}$;
c) $3\left(x+\sqrt{2}\right)^2-18\left(x+\sqrt{2}\right)+27=0$;
d) $(4-3x)^3+27x^3=64+24x$.

**3.30** (*). Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado.

a) $\left(\frac{x-1}{3}-\frac{x}{6}\right)^2=(x+1)^2$;
b) $(\sqrt{3}x+1)^2+(\sqrt{3}x-1)^2-3(\sqrt{3}bx+1)(\sqrt{3}x-1)=0$;
c) $\frac{(2x+1)(x-2)}{3}+\frac{(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})}{2}=\frac{(x-1)^2}{6}$;
d) $\left(\frac{1}{2}x+1\right)^3=\left(\frac{1}{2}x-1\right)\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2$.

**3.31** (*). Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado.

a) $\frac{(3x-1)^2}{3}-\frac{(1-2x)^2}{5}+\frac{3x(x-1)}{5}+\frac{(1+x)^2}{3}=0$;
b) $\frac{1}{\sqrt{10}}x^2+1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)x$;
c) $(3x-1)^2+(2x+1)^2=(3x-1)(2x+1)$;
d) $(x+1)^4-(x+1)^3=x^3(x+4)-x(x+1)^2+3x$.

**3.32 (*).** Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado.

a) $\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)^3+\frac{1}{6}x^3=\left(\frac{1}{2}x^2-1\right)^3+\frac{1}{6}(x+1)^3+\frac{3}{2}x^4$;
b) $\frac{x-2}{2}\cdot\frac{x+2}{3}+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]+4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{3}=0$;
c) $(2-3x)^2-1=8(1-2x)+(2x+1)^2-1$;
d) $x^2+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-\sqrt{6}=0$.

**3.33 (*).** Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado.

a) $\frac{2\sqrt{3}x+1}{\sqrt{2}}-\left(x-\sqrt{3}\right)^2=\frac{1-3\sqrt{2}x}{\sqrt{2}}+\sqrt{3}x\left(\sqrt{2}+2\right)$;
b) $\sqrt{3}(2x-30)^2-2\sqrt{27}(60-4x)=0$;
c) $\left(2x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)=0$;
d) $\frac{x^2-16}{9}+\frac{(x-1)^2}{3}=\frac{x(x-2)}{9}+\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$.

**3.34 (*).** Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado.

a) $\frac{(x-1)(x+2)}{2}+\frac{(x+2)(x-3)}{3}=\frac{(x-3)(x+4)}{6}$;
b) $\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{x-1}{2}-\frac{x}{3}\right)x=-x^2+\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{9}$;
c) $\frac{1}{4}(2x-1)^2-\frac{1}{3}(x-1)^2+\frac{(x-2)(x+2)}{2}-\frac{1}{6}x+\frac{1}{6}=0$;
d) $\frac{1}{2}(2x-1)(x+1)+\frac{1}{3}\left(x^2-5\right)+2x(x-1)(x+1)=2(x+2)^3-(2x-1)^2$.

**3.35 (*).** Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado.

a) $\frac{3x-1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{\sqrt{3}}-\frac{(x-\sqrt{3})^2}{\sqrt{3}}=\frac{x^2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+2x-2\sqrt{3}$;
b) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3x^2-7x+2}{2}-\frac{x}{4}+\frac{5x-13}{2}=\frac{2}{3}x(1-x)+\frac{73}{12}x-\frac{15}{12}$;
c) $\frac{(x^2+2x+1)^2}{4}+\frac{(x+1)^2}{2}+\frac{(x^4-1)}{8}-(2x^2-2x+1)^2+9x^3\left(\frac{3}{8}x-1\right)+\frac{1}{4}x^2(x^2+20)=0$.

**3.36 (*).** Risolvi le seguenti equazioni con opportune sostituzioni.

a) $(4x+3)^2=25$;
b) $(x-5)^2+9=0$;
c) $(3x-1)^2-36=0$;
d) $4(2x+1)^2=36$.

**3.37 (*).** Risolvi le seguenti equazioni con opportune sostituzioni.

a) $(3x-5)^2-49=0$;
b) $3(2x+5)^2-4(2x+5)=0$;
c) $(3\cdot10^3x-10)^2-5(3\cdot10^3x-10)=-6$;
d) $(x-1)^2-(\sqrt{3}+\sqrt{5})(x-1)+\sqrt{15}=0$.

**3.38 (*).** Risolvi le seguenti equazioni con opportune sostituzioni.

a) $3(1-2x)^2-2(1-2x)-1=0$;
b) $\frac{4}{3}(x-2)^2-6(x-2)+6=0$;
c) $\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-2\left(x-\frac{1}{2}\right)=0$;
d) $2(x^2-1)^2+3(x^2-1)-5=0$;
e) $3(34x-47)^2-2(34x-47)=1$.

### 3.3 - Discussione e risoluzione di equazioni numeriche frazionarie

**3.39** (*). Determina l'Insieme Soluzione delle seguenti equazioni fratte.

a) $\frac{3}{x} - 2 = x$;
b) $\frac{4-3x}{x} = \frac{3-2x}{x^2}$;
c) $\frac{1}{x} = \frac{1}{x+1} - 1$;
d) $\frac{x}{2} = \frac{x+2}{x-2} + 1$.

**3.40** (*). Determina l'Insieme Soluzione delle seguenti equazioni fratte.

a) $\frac{3}{x-1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} = 0$;
b) $\frac{3x}{x^2-9} + \frac{x}{2x-6} = 1$;
c) $\frac{x+9}{x-3} = 2 - \frac{x-3}{x+9}$;
d) $\frac{x}{x+1} = \frac{4}{x+2}$.

**3.41** (*). Determina l'Insieme Soluzione delle seguenti equazioni fratte.

a) $\frac{4x-3}{x^2-4} - \frac{3x}{x-2} = \frac{4}{2-x} - \frac{4x}{2+x}$;
b) $\frac{3x+2}{2x^2-2x-12} - \frac{3-x}{4x-12} = -\frac{3}{x+2}$;
c) $\frac{2x+1}{x} = \frac{x}{2x+1}$;
d) $\frac{4-x}{18-2x^2} + \frac{2}{3-x} = \frac{6x}{4x+12}$.

**3.42** (*). Determina l'Insieme Soluzione delle seguenti equazioni fratte.

a) $\frac{6}{9x^2-12x+4} + \frac{1}{3x-\frac{1}{2}} = 0$;
b) $x - 1 - \frac{1}{x-1} = \frac{6}{6-6x}$;
c) $\frac{6x-6}{x^2-4x+3} + \frac{x^2-x-6}{x-3} = -2$;
d) $\frac{x-4}{x-2} + \frac{x-1}{x^2-5x+6} - \frac{4-2x}{3-x} = 0$.

**3.43** (*). Determina l'Insieme Soluzione delle seguenti equazioni fratte.

a) $\frac{x-3}{x-1} - \frac{4}{3} + \frac{x-1}{x+1} = 0$;
b) $\frac{x-1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{2+x}{x^2+x} = 0$;
c) $3\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{9}{3x-1} = 10$;
d) $\frac{x+1}{\sqrt{2}-x} = \frac{x-2}{x-2\sqrt{2}}$.

**3.44** (*). Determina l'Insieme Soluzione delle seguenti equazioni fratte.

a) $\frac{1}{x^2+x-2} - \frac{1}{x^3-2x^2+x} = \frac{1}{3x^2-3x}$;
b) $\frac{1}{2x-4} - \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x^2-3x+2}$;
c) $\frac{2x}{x^2+2x-8} - \frac{2x+7}{x^2-3x-4} = 0$;
d) $\frac{1-x}{x^2-4x+3} - \frac{4}{9-x^2} + \frac{x-3}{x^2+4x+3} = -\frac{5}{3-x}$.

**3.45** (*). Determina l'Insieme Soluzione delle seguenti equazioni fratte.

a) $\frac{4x-7}{x+2} + \frac{1-6x^2}{x^2-5x+6} = \frac{x}{2x^2-2x-12} - 2$;
b) $\frac{1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2} = \frac{3}{(x-2)^3}$;
c) $\frac{1}{x+3} - \frac{5(x+2)}{(x+3)^2} = \frac{5x-1}{(x+3)^3}$;
d) $\frac{3}{(3x-6)^2} - \frac{x^2-4}{(3x-6)^4} = 0$.

**3.46** (*). Determina l'Insieme Soluzione delle seguenti equazioni fratte.

a) $\frac{2x}{x^2-2x+1} = \frac{-7}{3x^2-21x+18} + \frac{2x}{x^2-3x+2}$;
b) $\frac{5x-3}{x^2-5x} + \frac{2}{x} = \frac{3x}{x^2+3x} - \frac{2}{x+3} - \frac{4}{5-x}$;
c) $\frac{x-9}{4x-x^2} - \frac{3x+2}{2-x} = \frac{x-5}{x+2} + \frac{2x^4+6x^3}{x(x-4)(x^2-4)}$;
d) $\frac{3(x+1)}{x-1} = 1 - \frac{2x-3}{x}$.

**3.47** (*). Determina l'Insieme Soluzione delle seguenti equazioni fratte.

a ) $\frac{3-3x}{x^2-1}+\frac{8x}{2-2x}=0$;
b ) $\frac{1}{x^2-9}+\frac{2}{x-3}+\frac{2x}{3x+9}-\frac{31}{3x^2-27}=\frac{1}{3}$;
c ) $\frac{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-x}}{\frac{2}{x-1}+\frac{2}{x+1}}=\frac{2x}{1-x}-\frac{2x}{1+x}$;
d ) $\frac{x+1}{x-2\sqrt{3}}-\frac{1-x}{x+2\sqrt{3}}=\frac{x^2+8}{x^2-12}$;
e ) $\frac{2x+1}{1+x}+\frac{5}{1-x}-\frac{2}{x^2-1}=0$.

**3.48** (*). Determina l'Insieme Soluzione delle seguenti equazioni fratte.

a ) $\left(\frac{x+1}{x}\right)^2-\frac{2(3x-1)}{x^2}=5$;
b ) $\frac{(x-2)^2}{x^2-1}-\frac{x+2}{x+1}+\frac{x}{2x+2}=0$;
c ) $-\frac{x^2}{x+2}+\frac{2x}{x-2}=-\frac{x+x^3}{x^2-4}$;
d ) $\frac{5}{x+1}+\frac{2x}{x-2}=\frac{6x^2-10}{x^2-x-2}$;
e ) $\frac{x+1}{x-2}-\frac{3x}{x+3}=\frac{x^2+2x}{x^2+x-6}$.

**3.49** (*). È vero che in $\mathbb{R}$ le equazioni $\frac{3}{1+x^2}=\frac{3}{x^4+2x^2+1}$ e $\frac{2x+14}{x^3-x^2+4x-4}-\frac{4}{x-1}=\frac{2}{x^2+4}$ sono equivalenti?

**3.50** (*). Verifica che il prodotto delle soluzioni dell'equazione $\frac{x}{1-x^3}+\frac{2x-2}{x^2+x+1}=0$ vale 1.

**3.51** (*). Sull'asse reale rappresenta il Dominio e l'Insieme Soluzione dell'equazione $\frac{x+2}{x}=2+\frac{x}{x+2}$.

**3.52** (*). Stabilisci se esiste qualche numero reale per cui la somma delle due frazioni $f_1=\frac{2-x}{x+2}$ e $f_2=\frac{x+1}{x-1}$ è uguale a $\frac{9}{5}$.

**3.53** (*). È vero che l'espressione $E=\frac{4x}{1-x^2}+\frac{1-x}{1+x}-\frac{1+x}{1-x}$ non assume mai il valore $-1$?

### 3.4 - Discussione e risoluzione di equazioni letterali

**3.54** (*). Risolvi ed eventualmente discuti le seguenti equazioni letterali.

a ) $x^2-ax=0$;
b ) $ax^2-4a^3=0$;
c ) $x^2+(x-a)^2=2ax$;
d ) $(2x-a)x=ax$.

**3.55** (*). Risolvi ed eventualmente discuti le seguenti equazioni letterali.

a ) $x^2-ax-6a^2=0$;
b ) $(a-3)x^2-ax+3=0$;
c ) $ax^2-a^2x+x^2+x-ax-a=0$;
d ) $\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a-1}=0$.

**3.56** (*). Risolvi ed eventualmente discuti le seguenti equazioni letterali.

a ) $\frac{x}{a+1}+\frac{x^2}{a-1}=0$;
b ) $\frac{2x}{3+kx}-\frac{x}{3-kx}=0$;
c ) $\frac{m-n}{mn}x^2=\frac{2m^2n}{m^2-n^2}-\frac{mn}{m+n}$;
d ) $\frac{mx-x^2}{m^2-3m+2}-\frac{x}{2-m}-\frac{m+1}{m-1}=0$.

**3.57 (*).** Risolvi ed eventualmente discuti le seguenti equazioni letterali.

a) $\frac{x^2+2tx}{t^2-tx}-2=\frac{3t}{t-x}+\frac{x+t}{t}$;

b) $\frac{x-1}{k+1}-\frac{x^2+1}{k^2-1}=\frac{2k}{1-k^2}$;

c) $2\cdot\sqrt{m}-x=\frac{m-1}{x}$.

**3.58.** È vero che l'equazione $1-\frac{1}{k+x}-\frac{1}{k-x}=0$ ammette due soluzioni reali coincidenti se $k=2$?

**3.59.** Nell'equazione $(a-1)\cdot(x+a)=\frac{x+a}{x-1}\cdot[x(a+1)-2a]$, dopo aver completato la discussione, stabilisci per quali valori di $a$ le radici che si ottengono dall'equazione completa sono entrambe positive.

**3.60.** È vero che l'equazione $3kx^2+(x-k)^2+2k(k+x)=0$ ammette radici reali opposte se $k<-\frac{1}{3}$?

**3.61.** Per quali valori di $b$ l'equazione $\frac{5x^2-4(b+1)}{b^2-4}-\frac{3x-1}{b+2}=\frac{3-2x}{2-b}-\frac{3x}{b^2-4}$ ha una soluzione negativa?

**3.62.** Per l'equazione $(x-k-1)^2=(k+1)\cdot(k-2x+x^2)$, completate le implicazioni:

$k=0\to$ equazione . . . . . . . . . . . . . . . I. S. $=$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$k=-1\to$ equazione . . . . . . . . . . . . . . . $x_{1,2}=$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$k=$ . . . . . . equazione pura; due soluzioni reali . . . . . . . . . se . . . . . . . . . $x_1=$ . . . . . . $\vee\ x_2=$ . . . . . .

**3.63.** Stabilisci per quali valori del parametro $m$ l'equazione $\frac{m+2}{x-2}+mx=2$ ammette soluzioni reali distinte. Se $m=-2$ sono accettabili le radici reali trovate?

**3.64.** Dopo aver discusso l'equazione parametrica $\frac{x+1}{b-1}+\frac{b-1}{x+1}=\frac{3x^2+2-bx}{bx+b-1-x}$, determina per quale valore del parametro le soluzioni sono accettabili.

**3.65.** Le soluzioni dell'equazione $(x+b)^2=(b+1)^2$ con $b\neq-1$ sono:

$\boxed{\text{A}}$ $x_1=-1\vee x_2=1$ $\boxed{\text{B}}$ $x_1=-2b-1\vee x_2=1$ $\boxed{\text{C}}$ $x_1=x_2=1$ $\boxed{\text{D}}$ $x_1=1-2b\vee x_2=1$.

**3.66.** Per quali valori di $k$ l'equazione $x^2-(2k+1)x+3k+1=0$ ammette soluzioni reali coincidenti?

### 3.5 - Relazioni tra soluzioni e coefficienti

**3.67.** Completare la seguente tabella.

| Equazione | Discriminante | I. S. $\subset\mathbb{R}$? | $x_1+x_2$ | $x_1\cdot x_2$ |
|---|---|---|---|---|
| $5x^2+2x-1=0$ | $\Delta=\dots\dots$ | | | |
| $-3x^2+1=0$ | $\Delta=\dots\dots$ | | | |
| $6x^2+7x=0$ | $\Delta=\dots\dots$ | | | |
| $-x^2+x-1=0$ | $\Delta=\dots\dots$ | | | |
| $x^2+2x+1=0$ | $\Delta=\dots\dots$ | | | |
| $2x^2-7x+1=0$ | $\Delta=\dots\dots$ | | | |

**3.68.** Senza risolvere le equazioni determina somma e prodotto dello loro radici.

a ) $x^2 + 4ax + a = 0$;
b ) $2x^2 - \sqrt{2}x + 1 = 0$;
c ) $2x^2 + 6kx + 3k^2 = 0$;
d ) $3\sqrt{3}x^2 - 6\sqrt{3}x + 2 = 0$:
e ) $\sqrt{2}x^2 + (\sqrt{3} - \sqrt{2})x + 4 = 0$:
f ) $(\sqrt{5} + \sqrt{3})x^2 - (\sqrt{5} - \sqrt{3})x + 1 = 0$.

**3.69.** Dell'equazione $3\sqrt{2}x^2 - 5x + \sqrt{2} = 0$ è nota la radice $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$; senza risolvere l'equazione determinare l'altra radice.

**3.70.** Si determini la relazione che lega i coefficienti della generica equazione di secondo grado alla somma dei quadrati delle radici. Si vuole esprimere, attraverso i coefficiente $a$, $b$, $c$ dell'equazione la quantità $x_1^2 + x_2^2$. Si tenga presente la seguente identità $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$.

**3.71.** Senza risolvere le equazioni $5x^2 + 2x - 1 = 0$; $-x^2 + x - 1 = 0$; $2x^2 - 7x + 1 = 0$ stabilisci quale ha come soluzioni due numeri reali positivi e quale due numeri reali reciproci.

**3.72.** Un'equazione di secondo grado ha il primo coefficiente uguale a $-\frac{3}{2}$; sapendo che l'insieme soluzione è I. S. $= \left\{-\frac{3}{4}; \sqrt{2}\right\}$ determinate i suoi coefficienti $b$ e $c$.

**3.73.** Dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ la somma delle soluzioni è $\frac{21}{5}$ e una soluzione è $x_1 = 3,2$; determinare $x_2$.

**3.74.** Determinate i coefficienti $a$, $b$, $c$ di un'equazione di secondo grado sapendo che $x_1 = 1 - \sqrt{2}$, il prodotto delle soluzioni è $-1$ e la somma del secondo con il terzo coefficiente è 9.

**3.75.** Determinate i coefficienti $b$ e $c$ dell'equazione $x^2 + bx + c = 0$ sapendo che una radice è tripla dell'altra e la loro somma è 20.

**3.76 (*).** Dopo aver completato la discussione dell'equazione parametrica $\frac{x+1}{b-1} + \frac{b-1}{x+1} = \frac{3x^2+2-bx}{bx+b-1-x}$, determina se esiste qualche valore del parametro per cui $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$.

**3.77.** Determina, se possibile, due numeri aventi somma e prodotto indicati.

a ) $s = 3$ e $p = 5$;
b ) $s = 7$ e $p = 2$;
c ) $s = -3$ e $p = -8$;
d ) $s = -5$ e $p = 4$.

**3.78.** Determina, se possibile, due numeri aventi somma e prodotto indicati.

a ) $s = \frac{1}{2}$ e $p = \frac{2}{3}$;
b ) $s = \sqrt{2}$ e $p = 2$;
c ) $s = \sqrt{7} - 1$ e $p = 6$;
d ) $s = a + 1$ e $p = a^2$.

**3.79.** Scrivi un'equazione di secondo grado che ammette come radici le soluzioni indicate.

a ) $x_1 = -2 \vee x_2 = 5$;
b ) $x_1 = 7 \vee x_2 = 2$;
c ) $x_1 = -\frac{1}{2} \vee x_2 = \frac{3}{4}$;
d ) $x_1 = \frac{2}{3} \vee x_2 = \frac{1}{3}$;
e ) $x_1 = \sqrt{2} \vee x_2 = \sqrt{5}$;
f ) $x_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \vee x_2 = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

**3.80.** Nell'equazione $2x^2 + 6kx + 3k^2 = 0$ determinare i valori di $k$ per cui tra le radici reali distinte sussista la relazione $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$.

**3.81.** Determinate il perimetro del rombo avente $area = 24\,m^2$, sapendo che la somma delle misure delle sue diagonali è 14 m.

**3.82.** Costruire i due triangoli isosceli aventi $area = 120\,m^2$ sapendo che 31 m è la somma delle misure della base con l'altezza.

**3.83.** Il triangolo rettangolo $ABC$ ha l'ipotenusa $AC$ di 40 cm e l'altezza $BH$ ad essa relativa di 19,2 cm. Determinate la misura delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

### 3.6 - Scomposizione del trinomio di secondo grado

**3.84 (*).** Scomponi in fattori i seguenti trinomi di secondo grado.

a) $x^2 - 5x - 14$;
b) $2x^2 + 6x - 8$;
c) $-3x^2 + \frac{39}{2}x - 9$;
d) $-2x^2 + 7x + 4$.

**3.85 (*).** Scomponi in fattori i seguenti trinomi di secondo grado.

a) $4x^2 + 4x - 15$;
b) $3x^2 + 3x - 6$;
c) $4x^2 - 9x + 2$;
d) $2x^2 + 2x - \frac{3}{2}$.

**3.86 (*).** Scomponi in fattori i seguenti trinomi di secondo grado.

a) $3x^2 + 5x - 2$;
b) $4x^2 - 24x + 20$;
c) $2x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{16}{3}$;
d) $\frac{4}{3}x^2 + \frac{11}{3}x - \frac{7}{2}$.

**3.87 (*).** Scomponi in fattori i seguenti trinomi di secondo grado.

a) $3x^2 - 6x - 12$;
b) $2x^2 - 8x + 2$;
c) $-\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{8}$;
d) $-\frac{3}{4}x^2 - \frac{9}{2}x - \frac{45}{8}$.

### 3.7 - Regola di Cartesio

**3.88.** Determina il segno delle soluzioni delle equazioni senza risolverle se $\Delta \geqslant 0$.

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$;
b) $-x^2 + x + 42 = 0$;
c) $x^2 + x - 20 = 0$;
d) $3x^2 + 2x - 1 = 0$.

**3.89.** Determina il segno delle soluzioni delle equazioni senza risolverle se $\Delta \geqslant 0$.

a) $2x^2 - \sqrt{5}x - 1 = 0$;
b) $3x^2 + 5x + 1 = 0$;
c) $-x^2 - x + 1 = 0$;
d) $-5x + 1 - x^2 = 0$.

**3.90.** Determina il segno delle soluzioni delle equazioni senza risolverle se $\Delta \geqslant 0$.

a) $-1 - x^2 - 2x = 0$;
b) $1 + x + 2x^2 = 0$;
c) $x^2 - 4\sqrt{2}x + 2 = 0$;
d) $-\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{8} = 0$.

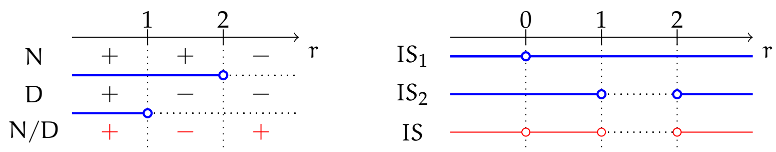
### 3.8 - Equazioni parametriche

**3.91.** Assegnata l'equazione $(1-k)x^2+(k-2)x+1=0$, stabilire i valori da assegnare al parametro $k$ affinché le soluzioni reali distinte abbiano la somma positiva.

*Svolgimento guidato*

Nel testo del problema vi sono due richieste: a) le soluzioni siano reali distinte e b) abbiano somma positiva.

Il problema si formalizza attraverso il sistema $\begin{cases} \Delta > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (k-2)^2-4(1-k) > 0 \\ -\frac{k-2}{1-k} > 0 \end{cases}$; risolviamo la prima disequazione: $k^2 > 0 \rightarrow \mathrm{I.S.}_1 = \{\, k \in \mathbb{R} | k \neq 0\}$ e la seconda disequazione studiando il segno del numeratore e del denominatore: $\begin{array}{l} N: -k+2 > 0 \Rightarrow k < 2 \\ D: 1-k > 0 \Rightarrow k < 1 \end{array}$ da cui con la tabella dei segni




ricaviamo $\mathrm{I.S.}_2 = \{k \in \mathbb{R} | k \ldots\ldots\ldots \vee k > \ldots\ldots\ldots\}$. Dal grafico a destra inoltre otteniamo $\mathrm{I.S.} = \mathrm{I.S.}_1 \cap \mathrm{I.S.}_2 = \{k \in \mathbb{R} | k \ldots\ldots\ldots \vee 0 < k < \ldots\ldots \vee k \ldots\ldots\ldots\}$.

**3.92.** Assegnata l'equazione $(k+1)x^2+(k+3)x+k=0$ stabilire per quale valore di $k$ una sua soluzione è $x=-1$. In tale caso determinare l'altra soluzione.

*Traccia di svolgimento*: Ricordiamo che un valore numerico è soluzione di un'equazione se sostituito all'incognita trasforma l'equazione in una uguaglianza vera. Per questo motivo, sostituendo all'incognita il valore assegnato, il parametro $k$ dovrà verificare l'uguaglianza: $(k+1)(-1)^2+(k+3)(-1)+k=0 \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots$ Sostituendo il valore di $k$ trovato, l'equazione diventa: $3x^2+5x+2=0$; l'altra soluzione può essere trovata o con la formula risolutiva, oppure ricordando che $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{5}{3}$ da cui $x_2=\ldots\ldots$ o anche $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$ da cui $x_2 = \ldots\ldots$

**3.93.** Giustificare la verità della seguente proposizione: "per qualunque valore assegnato al parametro $m$ l'equazione $(m-1)x^2+2mx+m+1=0$ ha soluzioni reali distinte". Determinare inoltre $m$ affinché: a) $x_1+x_2=1-\sqrt{3}$; b) $x_1 \cdot x_2 = \frac{12}{5}$; c) $x_1+x_2=1-x_1 \cdot x_2$.

**3.94.** Nell'equazione $7x^2+(k-5)x-(k+2)=0$ determinare $k$ affinché le soluzioni siano reali; distingui i casi "reali coincidenti" e "reali distinte". Nel primo caso determina $x_1=x_2=\ldots\ldots$; nel secondo caso, determina $k$ affinché

a) il prodotto delle soluzioni sia $-\frac{8}{3}$;
b) una soluzione sia nulla;
c) le soluzioni siano una il reciproco dell'altra, cioè: $x_1=\frac{1}{x_2}$;
d) la somma dei reciproci delle soluzioni sia $\frac{1}{2}$;
e) la somma delle soluzioni superi il loro prodotto di 2.

**3.95.** Verificare che nell'equazione $(2m-3)x^2-(m+2)x+3m-2=0$ si hanno due valori del parametro per cui le soluzioni sono reali coincidenti. Determina i due valori.

**3.96.** Nell'equazione $x^2 - 2(k+2)x + (k^2 - 3k + 2) = 0$ determinare $k$ affinché le soluzioni siano reali, con somma positiva e prodotto negativo.

*Traccia di svolgimento*: Il problema richiede tre condizioni alle quali deve soddisfare contemporaneamente il parametro, pertanto si formalizza con il sistema $\begin{cases} \Delta \geqslant 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} < 0 \end{cases}$.

**3.97 (*).** Data l'equazione $x^2 - 2x - k = 0$ determinare $k$ in modo che

a) le soluzioni siano reali e distinte $(\Delta > 0)$;
b) la somma delle soluzioni sia 10 $(x_1 + x_2 = 10)$;
c) il prodotto delle soluzioni sia 10 $(x_1 \cdot x_2 = 10)$;
d) una soluzione sia uguale a 0 (sostituire 0 alla $x$);
e) le radici siano opposte $(x_1 + x_2 = 0)$;
f) le radici siano reciproche $(x_1 \cdot x_2 = 1)$
g) le radici siano coincidenti $(\Delta = 0)$;
h) la somma dei quadrati delle radici sia 12 $\left(x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 12\right)$;
i) la somma dei reciproci delle radici sia $-4$ $\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_1x_2} = -4\right)$
j) la somma dei cubi delle radici sia 1
$\left(x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1^2x_2 - 3x_1x_2^2 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 1\right)$;
k) le radici siano entrambe negative $\left(\begin{cases} x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases}\right)$.

**3.98 (*).** Data l'equazione $x^2 - kx - 1 = 0$ determinare $k$ in modo che

a) le soluzioni siano coincidenti;
b) la somma delle radici sia 8;
c) le radici siano opposte;
d) una radice sia $-\frac{1}{3}$;
e) il prodotto delle radici sia $-1$.

**3.99 (*).** Data l'equazione $x^2 + (k+1)x + k = 0$ determinate $k$ affinché l'equazione

a) abbia una soluzione sia uguale a zero;
b) abbia soluzioni opposte;
c) non abbia soluzioni reali;
d) abbia le radici reciproche;
e) abbia le radici positive (regola di Cartesio).

**3.100 (*).** Data l'equazione $x^2 - kx + 6 = 0$ determinate $k$ affinché

a) abbia la somma delle radici uguale a 7;
b) abbia le radici reali e opposte;
c) abbia la somma dei reciproci delle radici uguale a $-6$;
d) abbia una radice uguale a $-\frac{3}{2}$;

**3.101 (*).** Data l'equazione $x^2 + (k+1)x + k^2 = 0$ determinare $k$ affinché

a) abbia come soluzione $-1$;
b) abbia una soluzione doppia $(x_1 = x_2)$;

c ) abbia le radici reciproche;
d ) abbia una radice l'opposto della reciproca dell'altra $\left(x_1 = -\frac{1}{x_2} \rightarrow x_1 \cdot x_2 = -1\right)$;
e ) abbia una radice nulla.

**3.102 (*).** Data l'equazione $kx^2 - 2kx + k - 2 = 0$ determinare $k$ affinché

a ) abbia una radice nulla;
b ) abbia la somma dei reciproci delle radici uguale a 1;
c ) abbia la somma dei quadrati delle radici uguale a 4;
d ) abbia la somma delle radici che superi di 5 il loro prodotto.

**3.103 (*).** Data l'equazione $x(x - a) = \frac{a+x}{a+2}$ determinate $a$ affinché

a ) una soluzione sia 1;
b ) l'equazione sia di primo grado;
c ) una soluzione sia uguale al reciproco dell'altra;
d ) la somma delle soluzioni sia il doppio del loro prodotto;
e ) la somma dei quadrati delle soluzioni sia 0;
f ) la somma delle radici sia l'opposto del loro prodotto;
g ) le soluzioni siano reali e distinte;
h ) l'equazione sia spuria;
i ) la somma dei cubi delle soluzioni sia nulla;
j ) le soluzioni siano reali e discordi;
k ) la somma dei reciproci dei cubi sia 1.

**3.104 (*).** Data l'equazione $kx^2 - (2k+1)x + k - 5 = 0$ determinare il valore di $k$ per il quale

a ) l'equazione ha soluzioni reali;
b ) il prodotto delle radici sia $-2$;
c ) la somma delle radici sia 1;
d ) una soluzione sia $-2$;
e ) le soluzioni siano opposte;
f ) la somma dei reciproci sia 3;
g ) le soluzioni siano reciproche;
h ) una soluzione sia l'opposto del reciproco dell'altra;
i ) la somma dei quadrati delle soluzioni sia 4;
j ) le radici siano concordi;
k ) le radici siano entrambe negative;
l ) la somma delle radici uguagli l'opposto del loro prodotto.

**3.105.** Per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $kx^2 - x + k = 0$ non ammette soluzioni reali?

A $k \leqslant -\frac{1}{2} \vee k \geqslant +\frac{1}{2}$ B $-\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2}$ C $k < -\frac{1}{2} \vee k > \frac{1}{2}$ D $-\frac{1}{2} \leqslant k \leqslant \frac{1}{2}$

**3.106.** Per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $x^2 + (k-2)x + 1 = 0$ ammette due soluzioni reali e distinte?

A $k > 4$ B $k = 0 \vee k = 4$ C $0 < k < 4$ D $k < 0 \vee k > 4$

**3.107.** Per quale valore di $k$ l'equazione $(k-1)x^2+kx+(k+1)=0$ ha una soluzione nulla?

A $k=1$ B $k=-1$ C $k=0$ D nesssun valore di $k$

**3.108.** Per quale valore di $k$ l'equazione $kx^2+\frac{1}{2}x+1=0$ ha due soluzioni identiche?

A $k=\frac{1}{4}$ B $k=\frac{1}{16}$ C $k=2$ D nesssun valore di $k$

**3.109.** Per quale valore di $k$ l'equazione $(k+3)x^2-2x+k=0$ ammette due soluzioni reciproche?

A $k=0$ B $k=-3$ C qualsiasi valore di $k$ D nesssun valore di $k$

**3.110.** Per quale valore di $k$ l'equazione $(k+1)x^2-kx-4=0$ ha una soluzione uguale a 2?

A $k=4$ B $k=-2$ C $k=0$ D $k=-1$

**3.111.** Se l'equazione $(k+1)x^2-kx-4=0$ ha una soluzione uguale a 2 quanto vale l'altra soluzione?

A $x=0$ B $x=-2$ C $x=\frac{1}{2}$ D $x=2$

### 3.9 - Problemi di secondo grado

**3.112 (*).** Il quadrato di un numero reale supera la metà del numero stesso di 5. Determina i numeri reali che rendono vera la proposizione enunciata.

**3.113 (*).** Il prodotto della metà di un numero relativo con il suo successivo è 666. Quali numeri verificano questa proprietà?

**3.114.** Trova un numero positivo che addizionato al proprio quadrato dia come somma 156.

**3.115.** Un numero addizionato al quadrato della sua metà, dà come risultato 120. Trova il numero.

**3.116.** Verifica che non esiste alcun numero reale tale che il quadrato del suo doppio uguagli la differenza tra il triplo del suo quadrato e il quadrato della somma del numero con 3.

**3.117 (*).** Due numeri naturali hanno rapporto 2/3 e somma dei loro quadrati 3757. Individua i numeri che verificano questa proprietà.

**3.118 (*).** La somma dei quadrati di due numeri pari consecutivi è 580. Quali sono i due numeri?

**3.119 (*).** Di due numeri naturali consecutivi si sa che la somma dei loro reciproci è 9/20. Quali sono i due numeri?

**3.120 (*).** Di cinque numeri interi consecutivi si sa che la differenza tra il quadrato della somma degli ultimi due numeri e la somma dei quadrati dei primi tre è 702. Qual è il più piccolo di questi numeri?

**3.121 (*).** La somma delle età di un padre con quella del figlio è 34. Sapendo che l'età del padre aumentata di 8 anni dà il quadrato dell'età del figlio, trovare le due età.

**3.122 (*).** Determina due numeri naturali sapendo che la somma tra il doppio del minore ed il triplo del maggiore è 42 e che il rapporto tra la loro somma e il loro prodotto è 5/12.

**3.123 (*).** Trova l'età di una persona sapendo che fra tre anni la sua età sarà uguale al quadrato della quinta parte dell'età che aveva tre anni fa.

**3.124** (*). Trova due numeri pari consecutivi tali che la somma del quadrato del minore con il loro prodotto sia 544.

**3.125** (*). Trova due numeri naturali sapendo che il minore supera di 2 la terza parte del maggiore e che il quadrato del maggiore supera di 68 il quadrato del doppio del minore.

**3.126** (*). Da un segmento di 25 cm ne vogliamo ottenere due in modo che la somma dei loro quadrati sia 337.

**3.127** (*). In una frazione il numeratore e il denominatore hanno somma 14, mentre la somma dei loro quadrati è 106. Qual è la frazione?

**3.128** (*). Due navi partono contemporaneamente da uno stesso porto e arrivano alla stessa destinazione dopo aver percorso sulla stessa rotta a velocità costante 720 miglia. Sapendo che una delle due navi viaggia con una velocità di 1 nodo (1 miglio all'ora) superiore a quella dell'altra nave e che perciò arriva 3 ore prima a destinazione, determina le velocità in nodi delle due navi.

**3.129.** Due navi che viaggiano su rotte perpendicolari a velocità costante si incontrano in mare aperto. Sapendo che una delle navi viaggia a 15 nodi (1 nodo = 1 miglio all'ora), dopo quanto tempo le due navi si trovano alla distanza di 40 miglia?

**3.130.** Luca e Carlo bevono due aranciate in bottiglia. Nel tempo in cui Luca beve 11 sorsi, Carlo ne beve 8, ma due sorsi di Carlo equivalgono a tre di Luca. Quando Carlo inizia a bere Luca ha già preso 4 sorsi. Dopo quanti sorsi di Carlo le due bibite hanno lo stesso livello?

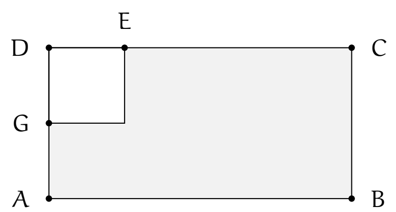
**3.131.** Un maratoneta durante un allenamento fa due giri di un percorso di 22 km mantenendo in ciascun giro una velocità costante ma nel secondo giro la velocità è inferiore di $0,5\,\text{km/h}$ rispetto al primo giro. A quali velocità ha corso se ha impiegato complessivamente 2 ore e un quarto?

**3.132** (*). Un capitale di 12000 euro è depositato in banca a un certo tasso di interesse annuale. Alla scadenza del primo anno gli interessi maturati vengono ridepositati sullo stesso conto. Alla scadenza del secondo anno si ritira la somma di 12854,70 euro. Qual è stato il tasso di interesse?

**3.133.** In un rettangolo, se si aumenta di 2 metri la base e si riduce di un metro l'altezza, la sua area aumenta di 4 metri quadrati. Se invece si riduce di un metro la base e si aumenta di 2 metri l'altezza, l'area aumenta di 22 metri quadrati. Quali sono le dimensioni del rettangolo?

**3.134** (*). Una ditta spende mensilmente 73500 in stipendi per i propri dipendenti. Aumentando di 5 il numero dei dipendenti, ma riducendo l'orario di lavoro, diminuisce a ciascuno lo stipendio di 200 e spende solamente 2500 in più per gli stipendi. Quanti dipendenti aveva inizialmente la ditta e quanto guadagnava ognuno di essi?

**3.135** (*). Da un cartoncino rettangolare ($ABCD$, come in figura) si vuole ritagliare un quadrato ($DEFG$) in modo che le due parti ottenute siano equivalenti. Determinare la misura del lato del quadrato sapendo che $\overline{EC} = 6\,\text{cm}$ e $\overline{AG} = 4\,\text{cm}$.




**3.136** (*). Un terreno a forma rettangolare di $6016\,\text{m}^2$ viene recintato con un muro lungo 350 m. Quali sono le dimensioni del rettangolo?

**3.137** (*). Determinare sul segmento $AB$ di misura 5 m un punto $P$ tale che il rettangolo delle due parti sia equivalente al quadrato di lato 2 m. Rappresenta con un disegno le soluzioni.

**3.138 (*).** Calcolare perimetro e area del triangolo $ABC$ isoscele sulla base $AB$ sapendo che la differenza tra la base e l'altezza ad essa relativa è $0,5\,\text{m}$ e tale è anche la differenza tra il lato $CB$ e la base stessa.

**3.139 (*).** La superficie del rettangolo $ABCD$ supera di $119\,\text{m}^2$ la superficie del quadrato costruito sul lato minore $AD$. Determinare il perimetro e la misura della diagonale sapendo che i $7/10$ del lato maggiore $AB$ sono uguali ai $12/5$ del lato minore.

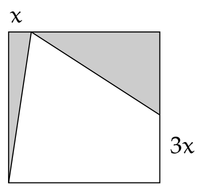
**3.140 (*).** Nel trapezio rettangolo $ABCD$, il rapporto tra la base maggiore $AB$ e la base minore $CD$ è $8/5$, il lato obliquo forma con $AB$ un angolo di $45°$. Determinare il perimetro sapendo che l'area è $312\,\text{m}^2$.

**3.141 (*).** Determina il perimetro di un rombo che ha l'area di $24\,\text{m}^2$ e il rapporto tra le diagonali $4/3$.

**3.142 (*).** Un rettangolo $ABCD$ ha il perimetro di $48\,\text{cm}$ e l'area di $128\,\text{cm}^2$. A una certa distanza $x$ dal vertice $A$ sui due lati $AD$ e $AB$ si prendono rispettivamente i punti $P$ e $Q$. Alla stessa distanza $x$ dal vertice $C$ sui lati $CB$ e $CD$ si prendono rispettivamente i punti $R$ e $S$. Sapendo che il rapporto tra l'area del rettangolo $ABCD$ e l'area del quadrilatero $PQRS$ è $32/23$ calcola la distanza $x$.

**3.143.** Un trapezio rettangolo ha la base minore di $9|\text{unitcm}$, l'altezza i $2/9$ della base maggiore e l'area di $20+9\sqrt{2}\,\text{cm}^2$. Determina la misura della base maggiore.

**3.144 (*).** Da un quadrato di $32\,\text{cm}$ di lato vengono ritagliati due triangoli rettangoli come descritti in figura. Calcola la misura di $x$, inferiore alla metà del lato del quadrato, in modo che l'area totale dei due triangoli evidenziati sia pari a $344\,\text{cm}^2$.

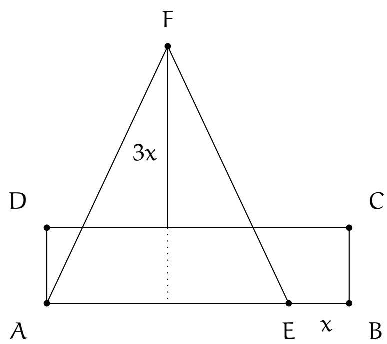



**3.145 (*).** Il rettangolo $ABCD$ ha l'area di $558\,\text{cm}^2$ e il lato $DC$ di $18\,\text{cm}$. Lo si vuole trasformare in un nuovo rettangolo $AEFG$ accorciando l'altezza di una quantità $5x$ e allungando la base di una quantità $4x$ in modo che il nuovo rettangolo $AEFG$ che abbia l'area di $228\,\text{cm}^2$. Determina la quantità $x$ necessaria a compiere la trasformazione richiesta.

**3.146 (*).** Il rettangolo $AEFG$ ha l'area di $768\{\text{cm}^2\}$ e l'altezza $AG$ di $24\,\text{cm}$. Si vuole allungare l'altezza di una quantità $x$ e accorciare la base di una quantità doppia $2x$ in modo da ottenere un secondo rettangolo $ABCD$ che abbia l'area di $702\,\text{cm}^2$. Determina $x$.

**3.147.** Un trapezio isoscele di area $144\,\text{cm}^2$ ha la base maggiore che supera di $10\,\text{cm}$ la base minore che a sua volta supera di $10\,\text{cm}$ l'altezza. Determina il perimetro del trapezio.

**3.148 (*).** Il rettangolo $ABCD$ ha l'area di $240\,\text{cm}^2$ e l'altezza $AD$ di $12\,\text{cm}$. Si vuole trasformare il rettangolo in un triangolo $AEF$ allungando l'altezza di una quantità $3x$ e accorciando la base di una quantità $x$ (vedi figura) in modo che il nuovo triangolo $AEF$ abbia l'area di $162\,\text{cm}^2$.




**3.149 (*).** La piramide di Cheope è a base quadrata ed ha una superficie totale pari a $135700\,\text{m}^2$. Sapendo che l'apotema della piramide misura 180 metri, si calcoli la lunghezza del lato di base.

**3.150 (*).** Un container a forma di parallelepipedo a base quadrata ha una superficie totale pari a $210\,\text{m}^2$. L'altezza è il doppio del lato di base diminuito di 2 metri. Trovare la lunghezza del lato di base.

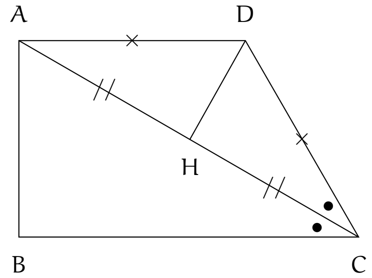
### 3.10 - Problemi con un parametro

**3.151.** Sul prolungamento dei lati $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ del quadrato $ABCD$ prendi rispettivamente i punti $Q$, $R$, $S$, $P$ in modo che $QB = RC = SD = PA$. Dimostra che $PQRS$ è un quadrato; nell'ipotesi che sia $AB = 3\,\text{m}$ determina $\overline{AP}$ in modo che l'area di $PQRS$ sia $k$, con $k$ reale positivo.

| $r$ | | $0$ | | $\frac{9}{2}$ | | $9$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | | ⋮ | $+$ | ⋮ | $+$ | ⋮ | $+$ |
| $b$ | | ⋮ | $+$ | ⋮ | $+$ | ⋮ | $+$ |
| $c$ | | ⋮ | $+$ | ⋮ | $+$ | ⋮ | $-$ |

*Svolgimento*: per dimostrare che $PQRS$ è un quadrato dobbiamo dimostrare che i lati sono congruenti e che gli angoli sono retti. Se si pone $\overline{AP} = x$ con $x > 0$. $\text{Area}(PQRS) = \overline{PQ}^2 = \overline{PA}^2 + \overline{AQ}^2$per il teorema di Pitagora. Verifica che si ottiene l'equazione risolvente $2x^2 + 6x + (9 - k) = 0$. Poiché vogliamo soluzioni reali positive, discuti l'equazione con il metodo di Cartesio. Il discriminante è $\Delta = 36 - 8(9 - k)$ pertanto l'equazione ammette soluzioni reali per $k \geqslant \frac{9}{2}$. Dal segno dei coefficienti, essendo i primi due coefficienti positivi si ha una permanenza e quindi una radice negativa che non è accettabile. Per ottenere una soluzione positiva ci deve essere una variazione di segno negli ultimi due coefficienti, in altre parole $9 - k$ deve essere negativo cioè $9 - k < 0 \rightarrow k > 9$. Pertanto il problema ha soluzioni per $k > 9$.

**3.152.** Nel trapezio rettangolo $ABCD$ di base maggiore $BC$, la diagonale $AC$ è bisettrice dell'angolo $B\widehat{C}D$. Posto $\overline{AB} = 1\,\text{m}$, determina la base maggiore in modo che sia $2k$ il perimetro del trapezio. Imposta dati e obiettivo del problema.




*Svolgimento*: poniamo $\overline{BC} = x$. Dall'informazione che la diagonale $AC$ è bisettrice dell'angolo $B\widehat{C}D$, possiamo dimostrare che $ADC$ è un triangolo isoscele sulla base $AC$. L'equazione risolvente sarà determinata dalla relazione tra i lati che esprime il perimetro del trapezio. Dobbiamo quindi esprimere $\overline{DC}$ in funzione di $x$. Traccia l'altezza $DH$ del triangolo isoscele $ADC$ e dopo aver dimostrato la similitudine di $ABC$ con $DHC$, osserva che si ha $DC : AC = HC : BC$ poiché $HC = \frac{1}{2}AC$ si ha $\frac{1}{2}\overline{AC}^2 = \overline{DC} \cdot \overline{BC}$ da cui si può ricavare la misura di $DC = \frac{1}{2}\frac{AC^2}{BC}$. Dato che $\overline{AC}^2 = 1 + x^2$, per il teorema di Pitagora applicato al triangolo $ABC$, quindi $DC = \frac{1+x^2}{2x}$ L'equazione parametrica risolvente è $2x^2 + x \cdot (1 - 2k) + 1 = 0$ con $x > 0$ che può essere discussa con il metodo di Cartesio.

**3.153.** Il quadrilatero $ABCD$ ha le diagonali perpendicolari ed è inscritto in una circonferenza; sapendo che $\overline{AB} = 5a$; $\overline{AE} = 3a$; $2p_{BCA} = \frac{5}{2} \cdot \overline{BD}$, essendo $E$ punto d'incontro delle diagonali, determinate la misura delle diagonali. Poni $\overline{CE} = x$.

**3.154.** Il rettangolo $ABCD$ ha i lati $AB$ e $BC$ che misurano rispettivamente $a$ e $3a$ (con $a \geqslant 0$). Prolunga il lato $AB$ di due segmenti congruenti $BN$ e $AM$ e sia $V$ il punto di intersezione delle retta $MD$ e $CN$. Posto $\overline{BN} = x$, determina la misura della base $MN$ del triangolo $MVN$ in modo che la sua area sia $k$ volte l'area del rettangolo assegnato.

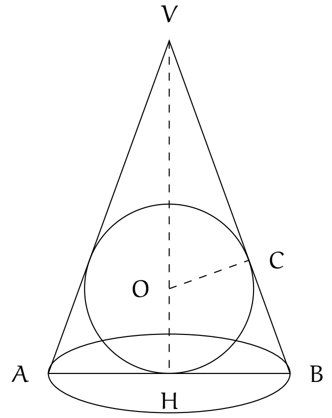
**3.155.** Due numeri reali hanno come somma $a$ con $(a \in \mathbb{R}_0)$; determinare i due numeri in modo che il loro prodotto sia $k$ con $(k \in \mathbb{R}_0)$.

Quale condizione si deve porre sull'incognita? Per quale valore del parametro i due numeri soluzione sono uguali?

**3.156.** In un triangolo rettangolo l'altezza $AH$ relativa all'ipotenusa $BC$ misura 1 m e $A\widehat{B}C = 60°$. Determinare sulla semiretta $AH$, esternamente al triangolo, un punto $P$ in modo che sia $k$ la somma dei quadrati delle distanze di $P$ dai vertici del triangolo. Quale condizione va imposta al parametro $k$ perché il problema abbia significato?

**3.157.** $\overline{AB} = 16a$; $\overline{BC} = 2a\sqrt{14}$ rappresentano le misure dei lati del rettangolo $ABCD$; determinare un punto $P$ del segmento $AB$ tale che la somma dei quadrati delle sue distanze dai vertici $C$ e $D$ sia uguale al quadrato della diagonale $DB$. Posto $\overline{AP} = x$ quale delle seguenti condizioni deve rispettare la soluzione? Dopo aver risolto il problema spiegare il significato delle soluzioni ottenute.

**3.158.** Ad una sfera di raggio 1 m è circoscritto un cono il cui volume è $k$ volte il volume della sfera. Determina l'altezza del cono.




*Dati*: $\overline{OC} = 1$, $\overline{OC} = \overline{OH}$, $OC \perp VB$, $\overline{BC} = \overline{BH}$, $\overline{AH} = \overline{HB}$, $VH \perp AB$, Volume(cono) $= k \cdot$ Volume(sfera).

*Obiettivo*: $\overline{VH}$

*Svolgimento*: Poniamo $\overline{VO} = x$ con $x > 0$ da cui $\overline{VH} = \overline{VO} + \overline{OH} = x + 1$.

Ricordiamo che $V(\text{cono}) = \frac{1}{3}\pi\overline{HB}^2 \cdot \overline{VH}$ e $V(\text{sfera}) = \frac{4}{3}\pi\overline{CO}^3$. Per impostare l'equazione risolvente dobbiamo cercare di esprimere $\overline{HB}^2$ in funzione di $x$. Verifica che dalla similitudine di $VOC$ con $VHB$ si deduce: $\overline{HB} : \overline{OC} = \overline{VH} : \overline{VC}$ quindi $\overline{HB} = \frac{\overline{OC} \cdot \overline{VH}}{\overline{VC}}$; dobbiamo ancora ricavare $\overline{VC}$ che per il teorema di Pitagora su $VCO$ è ... Sostituendo tutti gli elementi trovati nella relazione che lega il volume del cono con il volume della sfera, verifica che si ottiene $x^2 + 2x(1 - 2k) + 4k = 0$ con $x > 0$, da discutere con il metodo di Cartesio.

**3.159 (*).** Scheda di ripasso sulle equazioni

1. L'equazione $25x^2 + 1 = 0$ ha per soluzioni:

   A $x = \pm 5$ B $x = \pm\frac{1}{5}$ C $x = 4 \vee x = 1$ D non ha soluzioni reali

2. L'equazione $16x^2 + x = 0$ ha per soluzioni:

   A $x = 4 \vee x = 1$ B $x = \pm\frac{1}{4}$ C $x = -\frac{1}{16} \vee x = 0$ D non ha soluzioni reali

3. L'equazione $4x^2 - 9x = 0$ ha per soluzioni:

   A $x = \pm\frac{3}{2}$ B $x = \pm\frac{9}{4}$ C $x = \frac{3}{2} \vee x = 0$ D $x = \frac{9}{4} \vee x = 0$

4. L'equazione $9x^2 + 6x + 1 = 0$ ha per soluzioni:

   A $x = \pm 3$ B $x = \pm\frac{1}{3}$ C $x = -\frac{1}{3}$ doppia D non ha soluzioni reali

5. L'equazione $x^2 - 6x + 36 = 0$ ha per soluzioni:

   $\boxed{A}$ $x = \pm 6$ $\boxed{B}$ $x = \pm\sqrt{6}$ $\boxed{C}$ $x = 6$ doppia $\boxed{D}$ non ha soluzioni reali

6. Quale di queste equazioni ammette una soluzione doppia $x = 3$?

   $\boxed{A}$ $2x^2 - 12x + 18 = 0$ $\boxed{B}$ $9 - x^2 = 0$ $\boxed{C}$ $x^2 + 6x + 9 = 0$ $\boxed{D}$ $3x^2 + 9x = 0$

7. Quale equazione di secondo grado si ottiene con soluzioni $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$?

   $\boxed{A}$ $x^2 + x - 1 = 0$ $\boxed{B}$ $x^2 - 4x + 3 = 0$ $\boxed{C}$ $x^2 - 4x - 3 = 0$ $\boxed{D}$ $x^2 + 4x - 3 = 0$

8. Il polinomio$x^2 + 5x + 6$ può essere scomposto in:

   $\boxed{A}$ $(x+2)(x-3)$ $\boxed{B}$ $(x+5)(x+1)$ $\boxed{C}$ $(x-2)(x-3)$ $\boxed{D}$ nessuna delle risposte precedenti

9. Una delle soluzioni dell'equazione $x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2} = 0$ è $\sqrt{2}$, quanto vale l'altra?

   $\boxed{A}$ $-\sqrt{2}$ $\boxed{B}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\boxed{C}$ $\sqrt{2}+1$ $\boxed{D}$ $1$

10. Per quale valore di $k$ l'equazione $(2k-1)x^2 + (2k+1)x + k - 2 = 0$ diventa di I° grado?

    $\boxed{A}$ $k = \frac{1}{2}$ $\boxed{B}$ $k = -\frac{1}{2}$ $\boxed{C}$ $k = 2$ $\boxed{D}$ $k = 0$

11. L'equazione $4m^2x^2 - 5mx + 1 = 0$ con parametro $m$ ha per soluzioni:

    $\boxed{A}$ $x = m \vee x = 4m$ $\boxed{B}$ $x = \frac{1}{m} \vee x = \frac{1}{4m}$ $\boxed{C}$ $x = 64m \vee x = 1$ $\boxed{D}$ $x = m \vee x = \frac{1}{4}$

12. L'equazione di secondo grado $x^2 + (a+1)x + a = 0$ con $a$ parametro reale ha come soluzioni:

    $\boxed{A}$ $x = 1 \vee x = a$ $\boxed{B}$ $x = a - 1 \vee x = 1$ $\boxed{C}$ $x = -a \vee x = -1$ $\boxed{D}$ $x = a + 1 \vee x = a$

13. L'equazione $x^2 + (t-2) = 0$ con $t$ parametro reale ammette soluzioni reali per:

    $\boxed{A}$ $t \leqslant 2$ $\boxed{B}$ $t \geqslant 2$ $\boxed{C}$ $t < 2$ $\boxed{D}$ nessuna delle risposte precedenti

14. Quanto vale il prodotto delle soluzioni dell'equazione $x^2 - 6a^2x + 8a^4 = 0$?

    $\boxed{A}$ $8a^4$ $\boxed{B}$ $8a^2$ $\boxed{C}$ $6a^2$ $\boxed{D}$ non esiste

15. Il polinomio $x^2 + (m-2)x - 2m$ con $m$ parametro reale può essere scomposto in:

    $\boxed{A}$ $(x+m)(x+1)$ $\boxed{B}$ $(x+m)(x-2)$ $\boxed{C}$ $(x+m)(x+2)$ $\boxed{D}$ $(x-m)(x-2)$

16. L'equazione $x^2 + (k-1)x = 0$ con $k$ parametro reale:

    $\boxed{A}$ non ha soluzioni reali $\boxed{B}$ ha una soluzione uguale a zero

    $\boxed{C}$ due soluzioni reali coincidenti per $k = 0$ $\boxed{D}$ soluzioni reali e distinte per $k = 1$

17. L'equazione $x^2 + 2x + k - 2 = 0$ con $k$ parametro reale:

    $\boxed{A}$ ha due soluzioni reali coincidenti per $k = 3$

    $\boxed{B}$ ha due soluzioni reali coincidenti per $k = 1$

    $\boxed{C}$ ha una soluzione nulla per $k = -2$

    $\boxed{D}$ ha soluzioni reali e distinte per $k \neq 3$

18. L'equazione $x^2+m^2+1=0$ con $m$ parametro reale:

    $\boxed{A}$ ammette due soluzioni reali e opposte $\boxed{B}$ ammette due soluzioni coincidenti

    $\boxed{C}$ non ammette soluzioni reali $\boxed{D}$ ammette due soluzioni negative

19. L'equazione $2x^2+k^2=0$ con $k$ parametro reale ammette:

    $\boxed{A}$ due soluzioni reali e distinte $\boxed{B}$ due soluzioni reali solo se $k>0$

    $\boxed{C}$ soluzioni coincidenti per $k=0$ $\boxed{D}$ nessuna delle risposte precedenti è corretta

20. L'equazione $tx^2-1=0$

    $\boxed{A}$ ha come soluzioni $x_1=0 \vee x_2=1-t$ $\boxed{B}$ ammette sempre soluzioni reali

    $\boxed{C}$ ammette soluzioni reali per $t>0$ $\boxed{D}$ ha come soluzioni $x=\pm t$

### 3.10.2 Risposte

**3.1.** c) $x_1=+4 \vee x_2=-4$, f)$\emptyset$, i) $x_1=\sqrt{3} \vee x_2=-\sqrt{3}$, l) $\emptyset$.

**3.2.** c) $x_{1,2}=\frac{\pm\sqrt{15}}{5}$, f) $x_{1,2}=0$, i) $x_{1,2}=\pm 7$, l) $x_{1,2}=\pm 2$.

**3.3.** c) $x_{1,2}=\pm 5$, f) $x_{1,2}=\pm\frac{1}{3}$, i) $x_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{6}}{6}$, l) $x_{1,2}=\pm 2$.

**3.4.** c) $\emptyset$, f) $x_{1,2}=\pm 3\sqrt{2}$, i) $x_{1,2}=\pm\sqrt{10}$, l) $x_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$.

**3.5.** b) $x_1=0 \vee x_2=\frac{2}{3}$, c) $x_1=0 \vee x_2=-\frac{2}{7}$, e) $x_1=0 \vee x_2=-5$.

**3.6.** a) $x_1=0 \vee x_2=2$, c) $x_1=0 \vee x_2=\frac{1}{2}$, e) $x_1=0 \vee x_2=\frac{5}{6}$.

**3.7.** a) $x_1=0 \vee x_2=2$, c) $x_1=0 \vee x_2=5$, e) $x_1=0 \vee x_2=-0,2$.

**3.8.** a) $x_1=0 \vee x_2=2$, c) $x_1=0 \vee x_2=-\sqrt{2}$, e) $x_1=0 \vee x_2=\frac{2}{5}$.

**3.9.** a) $x_1=0 \vee x_2=\frac{4}{9}$, c) $x_1=0 \vee x_2=-2$, e) $x_1=0 \vee x_2=7$.

**3.10.** a) $x_1=0 \vee x_2=-\frac{6}{11}$, b) $x_1=0 \vee x_2=6$, c) $x_1=0 \vee x_2=1$, d) $x_1=0 \vee x_2=4$.

**3.11.** c) $x_1=0 \vee x_2=-(\sqrt{2}+\sqrt{5})$.

**3.12.** a) $x_1=2 \vee x_2=3$, b) .$x_1=-5 \vee x_2=4$, c) $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{21}}{7}$, d) $\emptyset$.

**3.13.** a) $x_1=-6 \vee x_2=7$, b) $x_1=x_2=5$, c) $x_1=1 \vee x_2=\frac{5}{2}$, d) $x_1=-1 \vee x_2=\frac{1}{3}$.

**3.14.** a) $x_{1,2}=\frac{\sqrt{5}\pm\sqrt{13}}{4}$, b) $x_{1,2}=\sqrt{3}\pm\sqrt{7}$, c) $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$, d) $x_1=-\sqrt{2} \vee x_2=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

**3.15.** a) $x_1 = -\frac{3}{2} \vee x_2 = \frac{3}{4}$, b) $x_1 = \frac{1}{8} \vee x_2 = \frac{1}{2}$, c) $\emptyset$, d) $x_{1,2} = \frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{5+4\sqrt{5}}}{2}$.

**3.16.** a) $x_{1,2} = \frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$, b) $\emptyset$, c) $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{13}$, d) $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{11}$.

**3.17.** a) $x_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{19}}{2}$, b) $x_1 = 1 \vee x_2 = \frac{1}{2}$, c) $x_1 = 1 \vee x_2 = -\frac{3}{4}$, d) $x_1 = -1 \vee x_2 = \frac{2}{3}$.

**3.18.** a) $x_{1,2} = \frac{1\pm2\sqrt{7}}{9}$, b) $x_1 = -\sqrt{2}; x_2 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, c) $x_1 = \sqrt{2} \vee x_2 = \sqrt{3}$, d) $x_1 = -\sqrt{2} \vee x_2 = \sqrt{3}$.

**3.19.** a) $x_1 = -\frac{3}{5} \vee x_2 = 1$, b) $x_1 = 0 \vee x_2 = 10$, c) $x_1 = 1 \vee x_2 = 2$, d) $x_1 = -202 \vee x_2 = -199$, e) $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$.

**3.20.** a) $x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{7}}{3}$, b) $x_{1,2} = -3 \pm 2\sqrt{3}$, c) $x_1 = \frac{1}{2} \vee x_2 = \frac{3}{2}$, d) $x_1 = 1 \vee x_2 = -\frac{5}{7}$.

**3.21.** a) $x_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{7}}{2}$, b) $\emptyset$, c) $x_1 = -1 \vee x_2 = \frac{9}{5}$, d) $x_{1,2} = \frac{-4\pm\sqrt{34}}{6}$.

**3.22.** a) $x_1 = 1 \vee x_2 = -\frac{1}{3}$, b) $x_1 = 3 \vee x_2 = -1$, c) $x_1 = 2 \vee x_2 = \frac{2}{3}$, d) $x_1 = 3 \vee x_2 = \frac{3}{2}$.

**3.23.** a) $x_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$, b) $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{5}$, c) $\emptyset$, d) $x_{1,2} = 3$.

**3.24.** a) $x_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{3}}{3}$, b) $x_{1,2} = \frac{2}{3}$, c) $x_{1,2} = 4 \pm 2\sqrt{3}$, d) $\emptyset$.

**3.25.** a) $x_1 = -1 \vee x_2 = -\frac{7}{6}$, b) $\emptyset$, c) $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$, d) $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$.

**3.26.** a) $\emptyset$, c) $x_{1,2} = 0$, d) $x_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{3}}{3}$.

**3.27.** a) $x_1 = 2 \vee x_2 = -\frac{1}{2}$, b) $x_{1,2} = \pm 3$, c) $\emptyset$, d) $x_1 = -1 \vee x_2 = -\frac{29}{27}$.

**3.28.** a) $x_{1,2} = \frac{6\pm2\sqrt{2}}{7}$, b) $x_{1,2} = \pm 1$, c) $x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{21}}{4}$, d) $\emptyset$.

**3.29.** a) $x_1 = x_2 = 0$, b) $\emptyset$, c) $x_{1,2} = 3 - \sqrt{2}$, d) $x_1 = 0 \vee x_2 = \frac{14}{9}$.

**3.30.** a) $x_1 = -\frac{8}{5} \vee x_2 = -\frac{4}{7}$, b) $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$, c) $x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{31}}{3}$, d) $x_{1,2} = -2$.

**3.31.** a) $\emptyset$, c) $\emptyset$, d) $x_1 = 0 \vee x_2 = \frac{1}{5}$.

**3.32.** a) $x_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{141}}{6}$, b) $x_1 = 0 \vee x_2 = \frac{2}{25}$, c) $x_{1,2} = \pm 1$, d) $x_1 = -\sqrt{3} \vee x_2 = +\sqrt{2}$.

**3.33.** a) $\emptyset$, b) $x_1 = 9 \vee x_2 = 15$, c) $x_1 = -\frac{2}{3} \vee x_2 = \frac{2}{13}$, d) $x_{1,2} = \frac{31\pm\sqrt{433}}{24}$.

**3.34.** a) $x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$, b) $x_{1,2} = \frac{10\pm\sqrt{10}}{54}$, c) $x_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{331}}{14}$, d) $x_{1,2} = \frac{-177\pm\sqrt{14849}}{80}$.

**3.35.** a) $x_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, b) $x_{1,2} = \pm 6$, c) $x_{1,2} = 3 \pm \frac{\sqrt{138}}{4}$.

**3.36.** a) $x_1 = -2 \vee x_2 = \frac{1}{2}$, b) $\emptyset$, c) $x_1 = -\frac{5}{3} \vee x_2 = \frac{7}{3}$, d) $x_1 = -2 \vee x_2 = 1$.

**3.37.** a) $x_1 = 4 \vee x_2 = -\frac{2}{3}$, b) $x_1 = -\frac{5}{2} \vee x_2 = -\frac{11}{6}$, c) $x_1 = \frac{1}{250} \vee x_2 = \frac{13}{3000}$, d) $x_1 = 1+\sqrt{3} \vee x_2 = 1+\sqrt{5}$.

**3.38.** a) $x_1 = 0 \vee x_2 = \frac{2}{3}$, b) $x_1 = 5 \vee x_2 = \frac{7}{2}$, c) $x_1 = \frac{1}{2} \vee x_2 = \frac{9}{2}$, d) $x1,2 = \pm\sqrt{2}$, e) $x_1 = \frac{24}{17} \vee x_2 = \frac{70}{51}$.

**3.39.** a) $x_1 = -3 \vee x_2 = 1$, b) $x_{1,2} = 1$, c) $\emptyset$, d) $x_1 = 0 \vee x_2 = 6$.

**3.40.** a) $x_1 = -1 \vee x_2 = -2$, b) $x_{1,2} = \frac{9\pm 3\sqrt{17}}{2}$, c) $\emptyset$, d) $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{5}$.

**3.41.** a) $x_1 = 1 \vee x_2 = 5$, b) $x_1 = -19 \vee x_2 = 2$, c) $x_1 = -1 \vee x_2 = -\frac{1}{3}$, d) $\emptyset$.

**3.42.** b) $\emptyset$, c) $x_1 = -3 \vee x_2 = 2$, d) $x = -1$.

**3.43.** a) $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{10}$, b) $x_{1,2} = -1$, d) $x_1 = 0; x_2 = \frac{1+3\sqrt{2}}{2}$.

**3.44.** a) $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \vee x_2 = 4$, b) $x = \frac{7}{5}$, c) $x_1 = -2 \vee x_2 = \frac{28}{17}$, d) $x_1 = -5 \vee x_2 = -\frac{1}{5}$.

**3.45.** a) $\emptyset$, b) $x_1 = -1 \vee x_2 = 3$, c) $x_1 = -5 \vee x_2 = -1$, d) $x = \frac{28}{13}$.

**3.46.** a) $x_1 = -14 \vee x_2 = -1$, b) $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{313}}{4}$, c) $\emptyset$.

**3.47.** a) $x_{1,2} = \frac{-7\pm\sqrt{97}}{8}$, b) $x_1 = -1 \vee x_2 = 1$, c) $x_1 = -\frac{1}{3} \vee x_2 = \frac{1}{3}$, d) $x_1 = \sqrt{6} - \sqrt{2} \vee x_2 = \sqrt{2} - \sqrt{6}$.

**3.48.** a) $x_1 = -\frac{3}{2} \vee x_2 = \frac{1}{2}$, b) $x_{1,2} = \frac{11\pm\sqrt{73}}{2}$, c) $x_1 = 0 \vee x_2 = -\frac{5}{4}$, d) $x_1 = 0 \vee x_2 = \frac{7}{4}$, e) $x_1 = -\frac{1}{3} \vee x_2 = 3$.

**3.54.** a) $x_1 = 0 \vee x_2 = a$, b) $a = 0 \to \mathbb{R}; a \neq 0 \to x_1 = -2a \vee x_2 = 2a$, c) $x_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{2}}{2}a$, d) $x_1 = 0 \vee x_2 = a$.

**3.55.** a) $x_1 = -2a \vee x_2 = 3a$, b) $x_1 = 1 \vee x_2 = \frac{3}{a-3}$, c) $x_1 = a \vee x_2 = -\frac{1}{a+1}$, d) $a \neq 0 \wedge a \neq 1 \to x_1 = 0 \vee x_2 = \frac{1-a}{a}$.

**3.56.** a) $a \neq -1 \wedge a \neq 1 \to x_1 = 0 \vee x_2 = \frac{1-a}{a+1}$, b) $x_1 = 0 \vee x_2 = \frac{1}{k}$, c) $x_{1,2} = \pm\frac{m}{m-n}$, d) $x_1 = m-2 \vee x_2 = m+1$.

**3.57.** a) $x_{1,2} = -3t$, b) $x_1 = -1; x_2 = k$, c) $x_{1,2} = \sqrt{m} \pm 1$.

**3.84.** a) $(x+2)(x-7)$, b) $2(x-1)(x+4)$, c) $-3\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-6)$.

**3.85.** a) $4\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)$, c) $4(x-2)\left(x-\frac{1}{4}\right)$.

**3.86.** a) $3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+2)$, c) $2(x-2)\left(x+\frac{4}{3}\right)$.

**3.87.** a) $3\left(x-1-\sqrt{5}\right)\left(x-1+\sqrt{5}\right)$, c) $-\frac{1}{2}\left(x-1-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$, d) $-\frac{3}{4}\left(x+3-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(x+3+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

**3.97.** a) $k>-1$, b) $\emptyset$, c) $k=-10$, d) $k=0$, e) $\emptyset$, f) $k=-1$, g) $k=-1$, h) $k=4$, i) $k=\frac{1}{2}$, j) $k=-\frac{7}{6}$, k) $\emptyset$.

**3.98.** a) $\emptyset$, b) $k=8$, c) $k=0$, d) $k=\frac{8}{3}$, e) $\forall k \in \mathbb{R}$.

**3.99.** a) $k=0$, b) $k=-1$, c) $\emptyset$, d) $k=1$, e) $\emptyset$.

**3.100.** a) $k=7$, b) $\emptyset$, c) $k=-36$, d) $k=-\frac{11}{2}$.

**3.101.** a) $k=0 \vee k=1$, b) $k=-\frac{1}{3} \vee k=1$, c) $k=\pm 1$, d) $\emptyset$, e) $k=0$.

**3.102.** a) $k=2$, b) $k=-2$, c) $k=2$, d) $k=\frac{1}{2}$.

**3.103.** a) $a=-1\pm\sqrt{2}$, b) $\emptyset$, c) $a=-1$, d) $a_{1.2}=\frac{-2\pm\sqrt{3}}{2}$, e) $\emptyset$, f) $\emptyset$.

**3.104.** a) $k \geqslant -\frac{1}{24}$, b) $k=\frac{5}{3}$, c) $k=-1$ non accettabile, d) $k=\frac{1}{3}$, e) $k=-\frac{1}{2}$ non accettabile, f) $k=16$, g) $\emptyset$, i) $k=\frac{7\pm\sqrt{51}}{2}$, j) $-\frac{1}{24} \leqslant k<0 \vee k>5$, k) $-\frac{1}{24} \leqslant k<0$.

**3.112.** $-2$; $5/2$.

**3.113.** 36; $-37$.

**3.117.** 51; 34.

**3.118.** 16; 18.

**3.119.** 4; 5.

**3.120.** 17.

**3.121.** 28; 6.

**3.122.** 3; 12.

**3.123.** 33.

**3.124.** 16; 18.

**3.125.** 8; 18.

**3.126.** 9; 16.

**3.127.** 5/9; 9/5.

**3.128.** 15; 16,

**3.132.** 3,5%.

**3.134.** 35; 2100.

**3.136.** 47; 128.

**3.137.** 1 cm; 4 cm.

**3.138.** $2p = 25\,\mathrm{m}$; $A = 30\,\mathrm{m}^2$.

**3.139.** $2p = 62\,\mathrm{m}$; $d = 25\,\mathrm{m}$.

**3.140.** $2p = 64+12\sqrt{2}$.

**3.141.** 40 m.

**3.142.** 6 cm.

**3.145.** 5 cm.

**3.146.** 3 cm.

**3.148.** 2; 14 non accettabile.

**3.149.** 230 m.

**3.150.** 5 m.

**3.159.** 1.D - 2.C - 3.D - 4.C - 5.D - 6.A - 7.B - 8.D - 9.D - 10.A - 11.B - 12.C - 13.A - 14.A - 15.B - 16.B - 17.A - 18.C - 19.C - 20.C.

# 4 Disequazioni di secondo grado

## 4.1 Risoluzione delle disequazioni di secondo grado

Una disequazione di secondo grado si presenta in una delle seguenti forme:

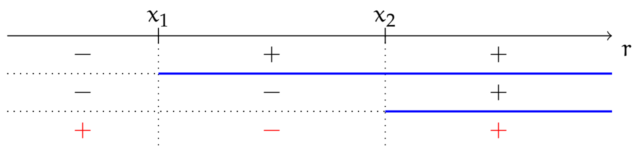
$$ax^2 + bx + c > 0; \ ax^2 + bx + c \geqslant 0; \ ax^2 + bx + c < 0; \ ax^2 + bx + c \leqslant 0.$$

Per risolverla supponiamo che il coefficiente di $x^2$, cioè il coefficiente $a$, sia *positivo*. Se così non fosse, basterebbe cambiare segno a tutti i termini e quindi il verso della disequazione; per esempio, per risolvere la disequazione $-2x^2 + 3x - 1 > 0$ si può risolvere la disequazione $2x^2 - 3x + 1 < 0$. Quindi si risolve l'equazione associata, cioè si sostituisce il segno della disequazione con l'uguale. Si passa cioè dalla disequazione $ax^2 + bx + c > 0$ all'equazione $ax^2 + bx + c = 0$. Possono presentarsi tre casi.

### 4.1.1 Equazione spuria

Sono equazioni senza il termine noto: $ax^2 + bx = 0$.

Questa equazione ammette sempre due radici reali e distinte, di cui una è sempre $0$. Ricordiamo che l'equazione si risolve mettendo $x$ a fattore comune $x(ax + b) = 0$ e applicando la legge di annullamento del prodotto, da cui ricaviamo $x = 0 \ \vee \ ax + b = 0 \to x = -\frac{b}{a}$. Chiamiamo le due radici $x_1$ e $x_2$. Analogamente a quanto fatto nelle disequazioni di primo grado, poniamo separatamente ogni fattore maggiore di 0 e confrontiamo i segni dei singoli fattori, come nel seguente grafico.




Dal grafico si evince che le soluzioni saranno:

- $x < x_1 \vee x > x_2$ soluzioni esterne se la disequazione è $ax^2 + bx > 0$, analogamente $x \leqslant x_1 \vee x \geqslant x_2$ se la disequazione è $ax^2 + bx \geqslant 0$.
- $x_1 < x < x_2$ soluzioni interne se la disequazione è $ax^2 + bx < 0$, analogamente $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ se la disequazione è $ax^2 + bx \leqslant 0$.

---

**Esempio 4.1.** Risolvere le seguenti disequazioni spurie.

- $3x^2 - 2x > 0$ mettiamo $x$ a fattore comune $x(3x - 2) > 0$. Soluzioni: $x < 0 \vee x > \frac{2}{3}$;
- $5x^2 + x \leqslant 0$ mettiamo $x$ a fattore comune $x(5x + 1) \leqslant 0$. Soluzioni: $-\frac{1}{5} \leqslant x \leqslant 0$;
- $x - 3x^2 > 0$ cambiamo di segno $3x^2 - x < 0$ da cui $x(3x - 1) < 0$. Soluzioni: $0 < x < \frac{1}{3}$.

---

### 4.1.2 Equazione pura

Sono equazioni senza il termine con la $x$: $ax^2 + c = 0$.
Possono esserci due situazioni:

- $c < 0$: in questo caso l'equazione ammette due radici reali opposte: $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$: si torna al caso precedente e si ha $x < x_1 \vee x > x_2$ se la disequazione è $ax^2 + c > 0$ oppure $x_1 < x < x_2$ se la disequazione è $ax^2 + c < 0$;
- $c > 0$: l'equazione non ammette soluzioni reali; il binomio $ax^2 + c$ è la somma di un quadrato con un numero positivo, pertanto è sempre positivo. Di conseguenza, la disequazione $ax^2 + c > 0$ avrà soluzioni per ogni $x$ reale, mentre $ax^2 + c < 0$ non avrà nessuna soluzione reale.

---

**Esempio 4.2.** Risolvere le seguenti disequazioni pure.

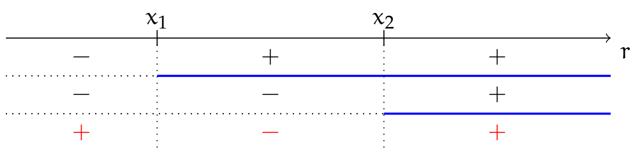
- $x^2 - 4 \geqslant 0$ Soluzioni $x \leqslant -2 \vee x \geqslant 2$;
- $2x^2 - 18 \leqslant 0$ soluzioni $-3 \leqslant x \leqslant 3$;
- $x^2 + 4 > 0$ soluzioni $\forall x \in \mathbb{R}$;
- $x^2 + 9 \leqslant 0$ soluzioni nessun valore reale $\text{I. S.} = \emptyset$;
- $1 - x^2 < 0$ cambiamo di segno $x^2 - 1 > 0$ soluzioni $x < -1 \vee x > 1$.

---

### 4.1.3 Equazione completa

Sono equazioni con tutti i coefficienti diversi da zero: $ax^2 + bx + c = 0$.
Si calcola il valore del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ e a secondo del suo segno possono presentarsi tre casi:

**Primo caso $\Delta > 0$** L'equazione ammette due radici reali e distinte; il trinomio si scompone in $a(x - x_1)(x - x_2)$. Poiché abbiamo supposto $a$ positivo, il segno del trinomio è dato dalla seguente tabella:




Per cui la disequazione $ax^2 + bx + c \geqslant 0$ è verificata per valori esterni alle soluzioni, cioè $x \leqslant x_1 \vee x \geqslant x_2$; mentre la disequazione $ax^2 + bx + c \leqslant 0$ è verificata per valori interni alle soluzioni, cioè $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$.

---

**Esempio 4.3.** Risolvere le seguenti disequazioni complete con $\Delta > 0$.

- $x^2 - 3x - 4 > 0$; calcolo il valore del discriminante $\Delta = 9 + 16 = 25$ e le soluzioni dell'equazione associata $x_1 = -1 \ \vee \ x_2 = 4$. Le soluzioni della disequazione sono: $x < -1 \ \vee \ x > 4$;
- $x^2 - 3x - 4 < 0$, in questo caso le soluzioni della disequazione sono $-1 < x < 4$.

---

**Secondo caso** $\Delta = 0$ In questo caso le radici dell'equazione associata sono coincidenti $x_1 = x_2$, pertanto il trinomio si scompone in $a(x - x_1)^2$. Poiché $a$ è positivo e il quadrato è positivo o al più nullo si possono verificare quattro casi:

- $a(x - x_1)^2 > 0$ è verificata $\forall x \in \mathbb{R} \wedge x \neq x_1$;
- $a(x - x_1)^2 \geqslant 0$ è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$;
- $a(x - x_1)^2 < 0$ non è mai verificata;
- $a(x - x_1)^2 \leqslant 0$ è verificata solo per $x = x_1$.

---

**Esempio 4.4.** Risolvere le seguenti disequazioni complete con $\Delta = 0$.

- $x^2 - 2x + 1 > 0 \ \rightarrow\ (x-1)^2 > 0$ è verificata $\forall x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 1$;
- $4x^2 - 4x + 1 \geqslant 0 \ \rightarrow\ (2x-1)^2 \geqslant 0$ è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$;
- $x^2 + 2x + 1 < 0 \ \rightarrow\ (x+1)^2 < 0$ non è mai verificata;
- $4x^2 + 4x + 1 \leqslant 0 \ \rightarrow\ (2x+1)^2 \leqslant 0$ è verificata solo per $x = -\frac{1}{2}$.

---

**Terzo caso** $\Delta < 0$ Studiamo il segno che assume il trinomio in questo caso. Dobbiamo eseguire i seguenti passaggi:

- mettiamo il coefficiente $a$ a fattore comune, aggiungendo e togliendo $\frac{b^2}{4a^2}$ ottenendo
$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right);$$
- osserviamo che i primi tre termini costituiscono lo sviluppo del quadrato di un binomio, e riduciamo gli ultimi due allo stesso denominatore ottenendo
$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right];$$
- studiamo ora il segno di questa espressione: $a$ è positivo, nella parentesi quadra si ha una somma in cui $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ essendo un quadrato è sempre positivo, come $-\frac{b^2-4ac}{4a^2} = -\frac{\Delta}{4a^2}$ sempre positivo perché $\Delta < 0$. Possiamo allora concludere che il trinomio è sempre positivo.

Si hanno allora le seguenti possibilità con $a > 0$:

- $ax^2 + bx + c > 0$ è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$;
- $ax^2 + bx + c \geqslant 0$ è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$, anche se non può essere uguale a zero;
- $ax^2 + bx + c < 0$ non è mai verificata;
- $ax^2 + bx + c \leqslant 0$ non è mai verificata.

---

**Esempio 4.5.** Risolvere le seguenti disequazioni complete con $\Delta < 0$.

- $2x^2 - 3x + 4 > 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 32 = -23 < 0$ verificata $\forall x \in \mathbb{R}$;
- $x^2 - x + 1 < 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ verificata per nessun valore reale di $x$.

---

I seguenti esempi analizzano la risoluzione di disequazioni di secondo grado con $\Delta \geqslant 0$.

---

**Esempio 4.6.** Determinare l'insieme soluzione della disequazione $-3x^2 + 2x > 0$.

Cambiamo segno per avere il primo coefficiente positivo; la disequazione si trasforma in $3x^2 - 2x < 0$ e l'equazione associata è spuria $3x^2 - 2x = 0$ con le radici $x_1 = 0 \vee x_2 = \frac{2}{3}$. Pertanto la disequazione assegnata ha $\text{I. S.} = \left\{x \in \mathbb{R} | 0 < x < \frac{2}{3}\right\}$.

**Esempio 4.7.** Determinare l'insieme soluzione della disequazione $2x^2 - 5 \leqslant 0$.

L'equazione associata $2x^2 - 5 = 0$ è pura con soluzioni reali $x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$. Razionalizzando otteniamo: $x_1 = -\frac{\sqrt{10}}{2} \vee x_2 = +\frac{\sqrt{10}}{2}$ e quindi $\text{I. S.} = \left\{x \in \mathbb{R} | -\frac{\sqrt{10}}{2} \leqslant x \leqslant +\frac{\sqrt{10}}{2}\right\}$.

**Esempio 4.8.** Determinare l'insieme soluzione della disequazione $2x^2 + 3x - 1 > 0$.

L'equazione associata è completa $2x^2 + 3x - 1 = 0$ e il delta: $\Delta = 9 + 8 = 17$ è positivo, dunque le soluzioni sono $x_1 = \frac{-3-\sqrt{17}}{4} \vee x_2 = \frac{-3+\sqrt{17}}{4}$; ci troviamo nel primo caso, quindi l'insieme soluzione della disequazione è: $\text{I. S.} = \left\{x \in \mathbb{R} | x < \frac{-3-\sqrt{17}}{4} \vee x > \frac{-3+\sqrt{17}}{4}\right\}$.

Osserviamo che contemporaneamente sappiamo anche risolvere le altre disequazioni: $2x^2 + 3x - 1 < 0$ e i casi $2x^2 + 3x - 1 \geqslant 0$; $2x^2 + 3x - 1 \leqslant 0$.

---

❍ **Conclusione** Una disequazione di secondo grado si presenta sempre in una delle seguenti forme: $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leqslant 0$; possiamo sempre supporre positivo il primo coefficiente e, anche se incompleta, per l'equazione associata possiamo sempre pensare ai tre casi generati dal segno del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$. Pertanto avremo:

| Delta | $ax^2 + bx + c > 0$ | $ax^2 + bx + c \geqslant 0$ | $ax^2 + bx + c < 0$ | $ax^2 + bx + c \leqslant 0$ |
|---|---|---|---|---|
| $\Delta > 0^{*}$ | $x < x_1 \vee x > x_2$ | $x \leqslant x_1 \vee x \geqslant x_2$ | $x_1 < x < x_2$ | $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ |
| $\Delta = 0^{**}$ | $\forall x \in \mathbb{R} - \{x_1\}$ | $\forall x \in \mathbb{R}$ | $\text{I. S.} = \emptyset$ | $x = x_1 = x_2$ |
| $\Delta < 0^{***}$ | $\forall x \in \mathbb{R}$ | $\forall x \in \mathbb{R}$ | $\text{I. S.} = \emptyset$ | $\text{I. S.} = \emptyset$ |

* L'equazione associata ha 2 soluzioni reali distinte: $x = x_1 \vee x = x_2$.
** L'equazione associata ha 2 soluzioni reali coincidenti: $x = x_1 = x_2$.
*** L'equazione associata non ha soluzioni reali.

✍ *Esercizi proposti:* 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6

## 4.2 Risoluzione grafica di una disequazione di secondo grado

Ricordiamo che un polinomio in una sola variabile, solitamente indicata con $x$, è di secondo grado se 2 è il massimo esponente della variabile. Per *trinomio di secondo grado* intendiamo un polinomio di secondo grado: $ax^2 + bx + c$ con $a \in \mathbb{R}_0$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$. Chiamiamo *zeri del trinomio* i numeri reali soluzione dell'equazione associata $ax^2 + bx + c = 0$.

**Definizione 4.1.** Una funzione che associa ad ogni numero reale $x$ il numero reale $y = ax^2 + bx + c$ con $a \in \mathbb{R}_0$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ si chiama *funzione polinomiale di secondo grado*.

Nel riferimento cartesiano ortogonale il grafico della funzione è costituito da tutti e soli i punti le cui coordinate soddisfano l'equazione $y = ax^2 + bx + c$; se $x_1$ e $x_2$ sono gli zeri reali del trinomio $ax^2 + bx + c$ allora attribuendo tali valori alla variabile $x$ si ha $y = 0$; essi sono dunque *gli zeri della funzione*, ossia le ascisse dei punti del grafico appartenenti all'asse $x$.

---

**Esempio 4.9.** Determinate gli zeri del trinomio $x^2 + x - 2$.

Risolviamo l'equazione $x^2 + x - 2 = 0$ che avendo il discriminante positivo ammette due soluzioni reali distinte $x_1 = -2 \vee x_2 = 1$. I due numeri 1 e $-2$ sono gli zeri della funzione $y = x^2 + x - 2$ (figura 4.1). Nel riferimento cartesiano ortogonale i punti $P_1(-2; 0)$ e $P_2(1; 0)$ sono i punti del grafico della funzione appartenenti all'asse $x$.

**Esempio 4.10.** Determinate gli zeri del trinomio $x^2 - 4x + 4$.

Risolviamo l'equazione $x^2 - 4x + 4 = 0$ che avendo il discriminante nullo ammette due soluzioni reali coincidenti $x_1 = x_2 = 2$, gli zeri del trinomio sono coincidenti nel numero 2 e il grafico della funzione $y = x^2 - 4x + 4$ (figura 4.2) ha due punti coincidenti appartenenti all'asse $x$: $P_1 \equiv P_2(2; 0)$.

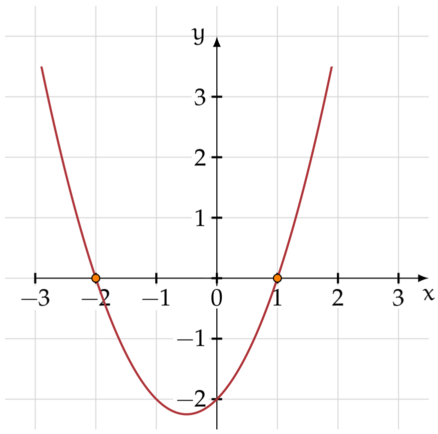



FIGURA 4.1: Esempio 4.9.

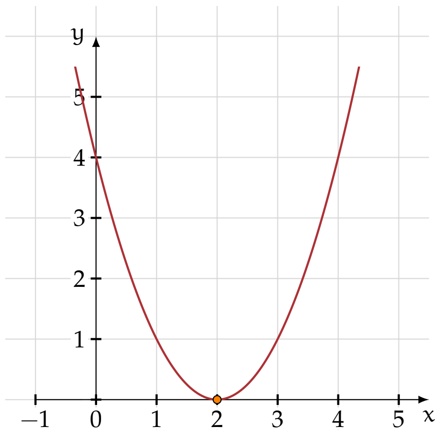



FIGURA 4.2: Esempio 4.10.

**Esempio 4.11.** Determinate gli zeri del trinomio $x^2 - 2x + 5$.

Risolviamo l'equazione $x^2 - 2x + 5 = 0$ che avendo il discriminante negativo non ammette soluzioni reali; il trinomio non ha zeri reali e il grafico della funzione $y = x^2 - 2x + 5$ (figura 4.3)non ha punti appartenenti all'asse $x$.

---

Questi esempi ci hanno permesso di chiarire il collegamento tra il concetto algebrico "zeri di un polinomio" e il concetto geometrico di "punti sull'asse delle ascisse" del grafico della funzione polinomiale di secondo grado. Pertanto studiare il *segno di un trinomio di secondo grado* equivale a determinare quali sono le *ascisse dei punti* della funzione $y = ax^2 + bx + c$ (con $a \in \mathbb{R}_0$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$) che hanno *ordinata positiva* oppure *ordinata negativa*.

Ricordiamo che nel riferimento cartesiano ortogonale i punti ad ordinata positiva si trovano nel I e nel II quadrante (al di sopra dell'asse x), i punti ad ordinata negativa si trovano nel III e nel IV quadrante (al di sotto dell'asse x), i punti ad ordinata nulla si trovano sull'asse $x$.

Per studiare il segno del trinomio, dobbiamo tracciare nel riferimento cartesiano il grafico della funzione $y = ax^2 + bx + c$ (con $a \in \mathbb{R}_0$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$).

### 4.2.1 Rappresentazione di una funzione polinomiale di secondo grado sul piano cartesiano

Consideriamo la funzione $y = 2x^2$ (figura 4.4) di proporzionalità quadratica definita in tutto $\mathbb{R}$; sappiamo che il suo grafico è una parabola che volge la concavità verso l'alto essendo il coefficiente della variabile indipendente positivo e che il punto $O(0;0)$ è il suo vertice. Per tracciarne il grafico compiliamo una tabella e riportiamo i punti nel riferimento cartesiano.

$y = 2x^2$:

| $x$ | $-1,5$ | $-1$ | $-0,5$ | $0$ | $0,5$ | $1$ | $1,5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $4,5$ | $2$ | $0,5$ | $0$ | $0,5$ | $2$ | $4,5$ |

Applichiamo a tutti i punti della tabella la traslazione di vettore $\vec{u}(1;1)$. Sappiamo che la traslazione modifica le coordinate dei punti secondo l'equazione $TR(1,1)\begin{cases} x' = x+1 \\ y' = y+1 \end{cases}$ quindi possiamo compilare la tabella dei punti corrispondenti e infine tracciare il grafico della parabola immagine di $y = 2x^2$.

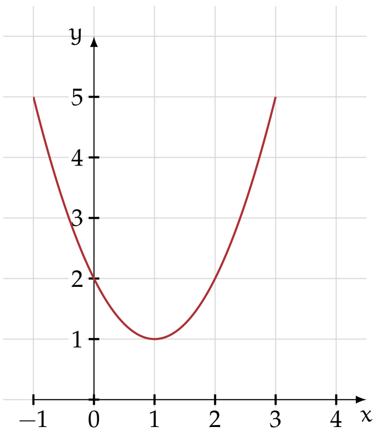



FIGURA 4.3: Esempio 4.11.

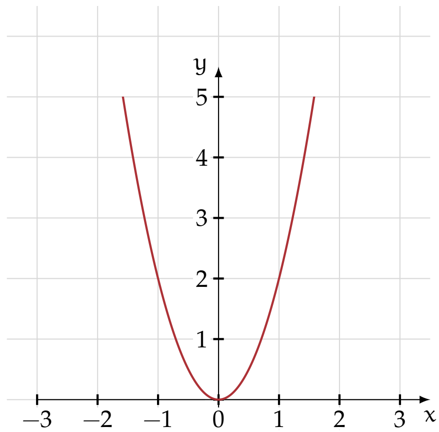
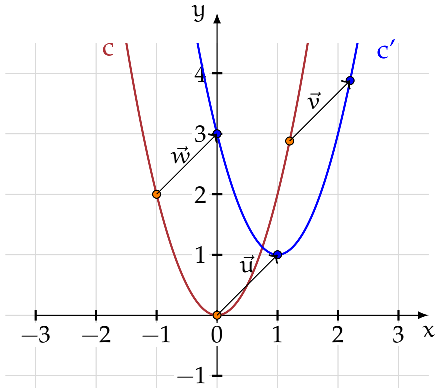



FIGURA 4.4: La funzione $y = 2x^2$.

$\vec{u}(1;1)$:

| $x$ | $-0,5$ | $0$ | $0,5$ | $1$ | $1,5$ | $2$ | $2,5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $5,5$ | $3$ | $1,5$ | $1$ | $1,5$ | $3$ | $5,5$ |




Dal grafico possiamo leggere le seguenti informazioni:

- l'immagine della parabola iniziale $c$, è ancora una parabola $c'$ essendo la traslazione una isometria;
- la parabola $c'$ volge la concavità verso l'alto, come la parabola iniziale $c$;
- il vertice $O(0;0)$ della parabola $c$ ha come immagine il vertice $D(1;1)$ della parabola $c'$, che coincide con l'estremo libero del vettore che definisce la traslazione;
- il vettore che individua la traslazione è indicato nella figura con $\vec{u}$; i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ rappresentano lo stesso vettore applicato a tre punti presi a caso sulla parabola iniziale.

La parabola immagine di $y = 2x^2$ è rappresentata da una funzione polinomiale di secondo grado che si ottiene ricavando dall'equazione di $\text{TR}(1,1)$ le coordinate $\begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' - 1 \end{cases}$ che sostituite nell'equazione di $c$ $(y' - 1) = 2 \cdot (x' - 1)^2$ permettono di ottenere l'equazione di $c' : y = 2x^2 - 4x + 3$.

**Generalizziamo** Data la parabola di equazione $y = ax^2$ e la traslazione

$$\text{TR}(v_x, v_y) \begin{cases} x' = x + v_x \\ y' = y + v_y \end{cases},$$

per ottenere l'equazione della curva immagine ricaviamo $\begin{cases} x = x' - v_x \\ y = y' - v_y \end{cases}$ da sostituire nell'equazione $y = ax^2$. Da $(y' - v_y) = a \cdot (x' - v_x)^2$ svolgendo i calcoli si ottiene

$$y' = a(x')^2 - (2av_x)x' + a(v_x)^2 + v_y.$$

Se poniamo $-2av_x = b$ e $a(v_x)^2 + v_y = c$ l'equazione della parabola $c'$ immagine di quella data è $y = ax^2 + bx + c$, espressa attraverso un polinomio di secondo grado.

**Viceversa** Assegnata la funzione polinomiale di secondo grado $y = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$, sappiamo che il grafico di tale curva è una parabola. In particolare:

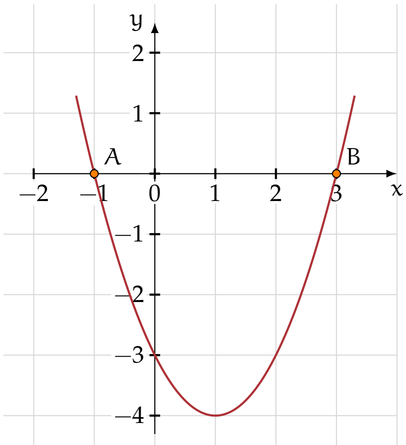
- il coefficiente $a$ indica la concavità: verso l'alto se $a > 0$, verso il basso se $a < 0$;
- il coefficiente $c$ indica l'intersezione della parabola con l'asse delle $y$;
- dalle formule $-2av_x = b$ e $a(v_x)^2 + v_y = c$ ricaviamo le coordinate del suo vertice $v_x = -\frac{b}{2a}$ e $v_y = c - a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{4ac-b^2}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$;
- risolvendo l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ determiniamo gli eventuali punti di intersezione con l'asse $x$ (gli zeri della funzione);
- assegnando alla variabile indipendente valori arbitrari, possiamo ottenere altri punti del grafico.

---

**Esempio 4.12.** Data la funzione $f : y = x^2 - 2x - 3$ tracciare nel riferimento cartesiano ortogonale il suo grafico. Il grafico di tale curva è una parabola:

- essendo il coefficiente $a = 1$, la concavità è verso l'alto;
- il coefficiente $c = -3$ corrisponde al punto $P(0, -3)$ in cui la parabola incontra l'asse delle $y$;
- essendo $a = 1$, $b = -2$ e $c = -3$ le coordinate del vertice sono $v_x = -\frac{-2}{2} = 1$ e $v_y = \frac{-12-4}{4} = -4$;
- le ascisse dei punti $(-1; 0)$ e $(3; 0)$ rappresentano gli zeri della funzione, soluzione dell'equazione $x^2 - 2x - 3 = 0$;
- altri punti della parabola si trovano assegnando alla variabile indipendente valori arbitrari: per $x = 2$ otteniamo $y = (2)^2 - 2(2) - 3 = -3$, il punto $P(2; -3)$ è un punto della parabola.

Possiamo affermare che $f$ è l'immagine di $y = x^2$ nella traslazione di vettore $\vec{v}(1; -4)$.




---

✍ *Esercizi proposti:* 4.7, 4.8

### 4.2.2 Segno di un trinomio di secondo grado per via grafica

---

**Esempio 4.13.** Studiare il segno del trinomio $x^2 - 2x - 3$.

Si tratta di stabilire per quali valori di $x$ esso assume segno positivo, per quali segno negativo e per quali eventualmente si annulla.

La richiesta è interpretabile anche come la ricerca degli insiemi soluzioni dell'equazione $x^2 - 2x - 3 = 0$ e delle disequazioni $x^2 - 2x - 3 > 0$ e $x^2 - 2x - 3 < 0$.

*Strategia risolutiva*: Tracciamo il grafico della funzione $y = x^2 - 2x - 3$ e leggiamo dal grafico gli insiemi richiesti (vedi figura precedente):

- Le ascisse dei punti A e B costituiscono l'insieme soluzione dell'equazione $x^2 - 2x - 3 = 0$ cioè $x_1 = -1 \vee x_2 = 3$;
- I valori di $x$ dell'insieme $H = \{x \in \mathbb{R} | x_A < x < x_B\}$ rendono il trinomio negativo; infatti preso un valore dell'insieme, ad esempio $x = 0$, il punto sulla parabola ha ordinata negativa $(-3)$. Segnatelo sul grafico accanto e ripetete per $x = 1$, $x = \frac{3}{2}$, $x = 2$;
- I valori di $x$ dell'insieme $K = \{x \in \mathbb{R} | x < x_A \vee x > x_B\}$ rendono il trinomio positivo; infatti preso un valore dell'insieme, ad esempio $x = \frac{7}{2}$, il punto sulla parabola ha ordinata positiva. Segnatelo sul grafico accanto e ripetete per $x = -\frac{6}{5}$.

---

❑ **Osservazione** La ricerca dell'insieme soluzione di una disequazione di secondo grado è sempre interpretabile come la ricerca del segno di un trinomio di secondo grado e quindi risolubile per via grafica. In questi casi non è necessario rappresentare in modo preciso la parabola associata al trinomio, ma basta ricordare quanto detto inizialmente sugli zeri di una funzione.

---

**Esempio 4.14.** Risolvi le seguente disequazioni utilizzando il segno del trinomio di secondo grado.

- $x^2 + x - 2 > 0$.

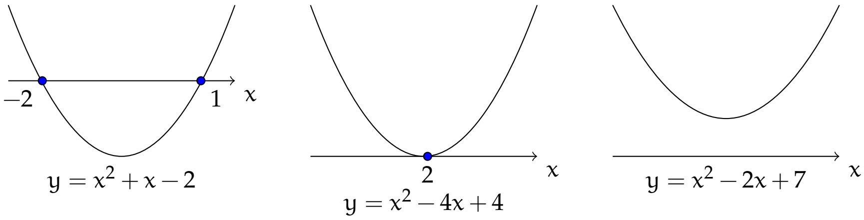
  Risolviamo l'equazione $x^2 + x - 2 = 0$ che avendo il discriminante positivo ammette due soluzioni reali distinte $x_1 = -2 \vee x_2 = 1$. I due numeri 1 e $-2$ sono gli zeri del trinomio e dunque gli zeri della funzione $y = x^2 + x - 2$; la parabola volge la concavità verso l'alto quindi possiamo grossolanamente rappresentare la sua posizione rispetto all'asse $x$ e dedurre l'insieme soluzione richiesto: I. S. $= \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \vee x > 1\}$ o con notazione insiemistica $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$;

- $x^2 - 4x + 4 \leqslant 0$.

  Risolviamo l'equazione $x^2 - 4x + 4 = 0$ che avendo il discriminante nullo ammette due soluzioni reali coincidenti $x_1 = x_2 = 2$: gli zeri del trinomio sono coincidenti nel numero 2; la parabola $y = x^2 - 4x + 4$ ha il vertice sull'asse $x$ e volge la concavità verso l'alto quindi possiamo grossolanamente rappresentare la sua posizione e dedurre l'insieme soluzione richiesto: I. S. $= \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2\}$, nessun valore reale rende il trinomio negativo.;

➡ $x^2 - 2x + 7 > 0$.

Risolviamo l'equazione $x^2 - 2x + 7 = 0$ che avendo il discriminante negativo non ammette soluzioni reali; il trinomio non ha zeri reali, la parabola $y = x^2 - 2x + 7$ volge la concavità verso l'alto e non ha punti appartenenti all'asse $x$ quindi possiamo grossolanamente rappresentare la sua posizione e dedurre l'insieme soluzione richiesto: $\text{I. S.} = \mathbb{R}$.




---

✍ *Esercizi proposti:* 4.9, 4.10, 4.11, 4.12, 4.13, 4.14, 4.15, 4.16, 4.17, 4.18, 4.19, 4.20, 4.21, 4.22, 4.23, 4.24, 4.25, 4.26

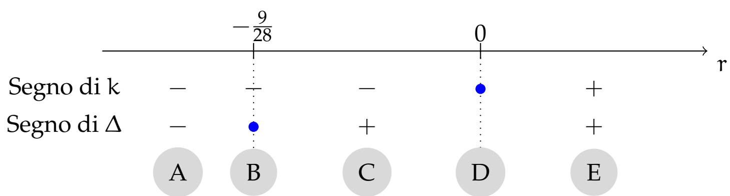
## 4.3 Segno del trinomio a coefficienti letterali

Consideriamo il trinomio $t = kx^2 + 3x - 7$ di secondo grado avente il primo coefficiente dipendente dal parametro $k$. Come possiamo stabilire il segno di questo trinomio, al variare di $k$? Sappiamo che stabilire il segno di un trinomio significa determinare i valori reali che attribuiti alla variabile indipendente $x$ rendono il trinomio positivo, nullo o negativo. Evidentemente per valori reali diversi di $k$ avremo una diversa disequazione da risolvere; dobbiamo dunque cercare di analizzare come varia il trinomio a seconda dei valori di $k$ e in seguito studiare il segno del trinomio ottenuto. Questa analisi di situazioni diverse è la *discussione del trinomio a coefficienti parametrici.*

---

**Esempio 4.15.** Stabilire il segno di $t = kx^2 + 3x - 7$ al variare di $k$.

Prendiamo in considerazione il segno del primo coefficiente e il segno del discriminante dell'equazione associata $kx^2 + 3x - 7 = 0$. Il primo coefficiente è maggiore di zero per $k > 0$. Il discriminante $\Delta = 9 + 28k$ è maggiore di zero per $k > -\frac{9}{28}$. Rappresentiamo la loro reciproca situazione:




(A) $k < -\frac{9}{28}$: il primo coefficiente è negativo così come il discriminante, la parabola volge la concavità verso il basso e non ha zeri reali: il trinomio è negativo per qualunque valore reale di $x$;

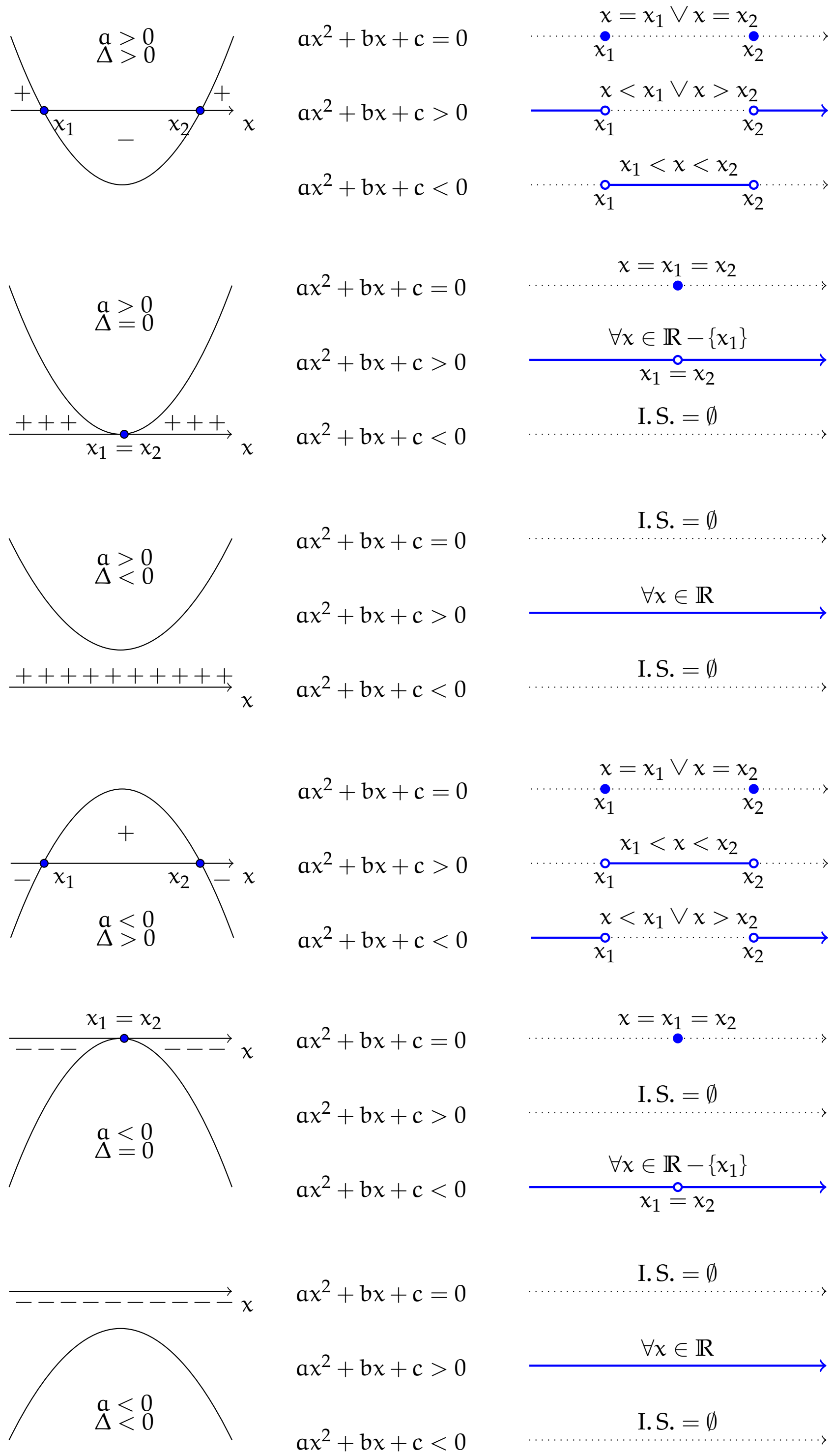



FIGURA 4.5: Risoluzione delle disequazioni di secondo grado

(B) $k = -\frac{9}{28}$: il primo coefficiente è negativo e il discriminante è uguale a zero. La parabola volge la concavità verso il basso e ha due zeri reali coincidenti $x_1 = x_2 = \frac{14}{3}$. Il trinomio si annulla per $x = \frac{14}{3}$ mentre per qualunque altro valore di $x$ è negativo;

(C) $-\frac{9}{28} < k < 0$: il primo coefficiente è negativo e il discriminante è positivo. La parabola volge la concavità verso il basso e ha due zeri reali distinti: il trinomio si annulla per $x = x_1 \vee x = x_2$; è positivo per $x_1 < x < x_2$; è negativo per $x < x_1 \vee x > x_2$;

(D) $k = 0$: il trinomio diventa un binomio di primo grado: $t = 3x - 7$ e quindi $t > 0$ per $x > \frac{7}{3}$, $t < 0$ per $x < \frac{7}{3}$, $t = 0$ per $x = \frac{7}{3}$;

(E) $k > 0$: Il primo coefficiente è positivo così come il discriminante. La parabola ha concavità verso l'alto e due zeri reali distinti: il trinomio si annulla per $x = x_1 \vee x = x_2$; è negativo per $x_1 < x < x_2$; è positivo per $x < x_1 \vee x > x_2$.

**Esempio 4.16.** Stabilite al variare del parametro $k$ l'insieme soluzione della disequazione $x^2 + kx + 1 < 0$.

Prendiamo in considerazione il primo coefficiente e il discriminante dell'equazione associata $x^2 + kx + 1 = 0$ e stabiliamo il loro segno: il primo coefficiente è indipendente dal parametro e sempre positivo, essendo il discriminante $\Delta = k^2 - 4$ si hanno soluzioni reali per $k \leqslant -2 \vee k \geqslant 2$. Rappresentiamo la loro reciproca situazione:

| r | | $-2$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| Segno di $a$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| Segno di $\Delta$ | $+$ | $\bullet$ | $-$ | $\bullet$ | $+$ |

- $k < -2 \vee k > 2$; primo coefficiente positivo e discriminante positivo. La parabola volge la concavità verso l'alto e ha due zeri reali distinti: $x = x_1 \vee x = x_2$ quindi $\text{I. S.} = \{x \in \mathbb{R} | x_1 < x < x_2\}$;
- $-2 < k < 2$; primo coefficiente positivo, il discriminante negativo. La parabola volge la concavità verso l'alto e non ha zeri reali: $\text{I. S.} = \emptyset$;
- $k = -2 \vee k = 2$; primo coefficiente positivo e discriminante uguale a zero La parabola ha concavità verso l'alto e un unico zero reale: $\text{I. S.} = \emptyset$.

✍ *Esercizi proposti:* 4.27, 4.28, 4.29, 4.30, 4.31

## 4.4 Disequazioni polinomiali di grado superiore al secondo

**Esempio 4.17.** Un numero è tale che sottraendo al suo cubo il suo triplo si ottiene un numero maggiore del triplo del suo quadrato aumentato di 4. Determinare l'insieme soluzione del problema.

La richiesta del problema implica la ricerca dell'Insieme Soluzione della disequazione $x^3 - 3x > 3x^2 + 4$, di terzo grado nella variabile $x$. Scriviamo la disequazione in forma canonica, applicando i principi di equivalenza: $x^3 - 3x^2 - 3x - 4 > 0$. Si tratta di una disequazione polinomiale di terzo grado.

Procediamo nella scomposizione in fattori del polinomio $p(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 4$. Mediante la regola di Ruffini possiamo determinare un suo zero $x = 4$ e dunque ottenere $p(x) = (x-4)(x^2+x+1)$.

Determiniamo il segno dei singoli fattori: primo fattore $f_1 > 0 \to x > 4$; secondo fattore $f_2 > 0 \to x^2 + x + 1 > 0$ disequazione di secondo grado. Il primo coefficiente è positivo e il discriminante $\Delta = 1 - 4 = -3$ è negativo; la parabola volge la concavità verso l'alto e non ha zeri reali dunque il secondo fattore è positivo per qualunque valore reale di $x$. Costruiamo la tabella dei segni:

| $x$ | | 4 | |
|---|---|---|---|
| Segno di $f_1$ | $-$ | $\bullet$ | $+$ |
| Segno di $f_2$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| Segno di $p$ | $-$ | $\bullet$ | $+$ |

$\text{I. S.} = \{x \in \mathbb{R} | x > 4\} = (4; +\infty)$.

---

**Procedura 4.1.** *Risolvere le disequazioni di grado superiore al primo:*

*a ) scomporre il polinomio di grado $n$ in fattori di primo e secondo grado;*
*b ) studiare il segno dei singoli fattori;*
*c ) costruire la tabella dei segni;*
*d ) cercare gli intervalli in cui il polinomio dato assume il segno richiesto.*

---

**Esempio 4.18.** Data la disequazione $-2x(3-2x) - 3x^2\left(2 - \frac{3}{2}x\right) \geqslant 5\left(2x^2 - \frac{3}{10}x\right)$ determinate il suo I. S.

Osserviamo che la disequazione proposta è polinomiale di terzo grado; eseguiamo i calcoli per portarla alla forma $p(x) \geqslant 0$. Si ottiene $3x^3 - 8x^2 - 3x \geqslant 0$ e con la scomposizione si ha $x \cdot (3x^2 - 8x - 3) \geqslant 0$. Procediamo con lo studio dei segni dei singoli fattori: $f_1 \geqslant 0 \to x \geqslant 0$ e $f_2 \geqslant 0 \to x \leqslant -\frac{1}{3} \vee x \geqslant 3$ e compiliamo la tabella dei segni che lasciamo al lettore.

| $x$ | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Segno di $f_1$ | | | | | | | |
| Segno di $f_2$ | | | | | | | |
| Segno di $p$ | | | | | | | |

Otteniamo: $\text{I. S.} = \left\{x \in \mathbb{R} | -\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 0 \vee x \geqslant 3\right\}$.

**Esempio 4.19.** Risolvere la disequazione: $64x^6 - 1 < 0$.

Il binomio al primo membro è una differenza di quadrati, quindi scomponendo si ottiene: $64x^6 - 1 = (8x^3-1)(8x^3+1) = (2x-1)(4x^2+2x+1)(2x+1)(4x^2-2x+1)$.

Si tratta allora di studiare il segno dei singoli fattori: $f_1 > 0 \to x > \frac{1}{2}$; $f_2 > 0 \to \forall x \in \mathbb{R}$; $f_3 > 0 \to x > -\frac{1}{2}$; $f_4 > 0 \to \forall x \in \mathbb{R}$ e di determinare il segno richiesto dopo aver costruito la tabella dei segni.

**Esempio 4.20.** Risolvere la disequazione: $x^4 - 4x^2 - 45 > 0$.

Il trinomio al primo membro è di quarto grado; sappiamo che con la sostituzione $x^2 = t$ può essere ricondotto ad un trinomio di secondo grado la cui scomposizione in fattori risulta $(t-9)\cdot(t+5)$ e quindi la disequazione assegnata diventa: $(x^2-9)\cdot(x^2+5) > 0$.

Si tratta allora di studiare il segno dei singoli fattori $f_1 > 0 \rightarrow x < -3 \vee x > 3$ e $f_2 > 0 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ per poi determinare il segno richiesto dopo aver costruito la tabella dei segni.

---

✍ *Esercizi proposti:* 4.32, 4.33, 4.34, 4.35, 4.36, 4.37, 4.38, 4.39, 4.40, 4.41, 4.42, 4.43, 4.44, 4.45, 4.46, 4.47, 4.48, 4.49, 4.50, 4.51, 4.52, 4.53, 4.54, 4.55, 4.56, 4.57

## 4.5 Disequazioni fratte

Ricordiamo che una disequazione è *frazionaria* o *fratta* quando il suo denominatore contiene l'incognita.

**Procedura 4.2.** *Soluzione di una disequazione frazionaria:*

a) *applicando il primo principio di equivalenza si trasportano tutti i termini al primo membro e si calcola il risultato dell'equazione assegnata* $E = \frac{N(x)}{D(x)}$;
b) *si determinano le Condizioni di Esistenza ponendo* $D(x) \neq 0$;
c) *impostiamo la disequazione nella forma* $\frac{N(x)}{D(x)} \geqslant 0$ *oppure* $\frac{N(x)}{D(x)} \leqslant 0$ *oppure* $\frac{N(x)}{D(x)} < 0$ *oppure* $\frac{N(x)}{D(x)} > 0$ *a seconda del quesito posto da problema;*
d) *si studia il segno del numeratore e del denominatore, ponendo* $N(x) > 0$ *oppure* $N(x) \geqslant 0$ *(a seconda della richiesta) e* $D(x) > 0$;
e) *si costruisce la tabella dei segni, segnando con un punto pieno gli zeri della frazione, se richiesti;*
f) *si individuano gli intervalli in cui la frazione assume il segno richiesto.*

Vediamo attraverso alcuni esempi come procedere.

---

**Esempio 4.21.** Data l'espressione $E = \frac{4}{4x^2-1} + \frac{1}{2x+1} + \frac{x}{1-2x}$ determinarne, al variare di $x$ in $\mathbb{R}$, il segno.

*Osservazioni preliminari*

- L'espressione assegnata è frazionaria, quindi lo studio del segno deve essere circoscritto ai valori di $x$ del Dominio dell'espressione stessa;
- studiare il segno di una espressione letterale significa stabilire in quale insieme si trovano i valori della variabile che la rendono positiva, negativa, nulla;
- ogni espressione contenente operazioni tra frazioni algebriche ha in generale come risultato una frazione algebrica.

*Strategia risolutiva*

a) determiniamo il risultato dell'operazione assegnata: $E = \frac{-2x^2+x+3}{(2x+1)\cdot(2x-1)}$;
b) determiniamo il dominio: C. E. $2x+1 \neq 0 \wedge 2x-1 \neq 0 \rightarrow D = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$;

c) impostiamo la disequazione: $\frac{-2x^2+x+3}{(2x+1)\cdot(2x-1)} \geqslant 0$ che ci permetterà di rispondere al quesito posto dal problema;

d) studiamo il segno di numeratore e denominatore:

- segno N : $-2x^2+x+3 \geqslant 0$ disequazione di secondo grado, quindi dall'equazione associata $-2x^2+x+3=0$, calcoliamo il discriminante: $\Delta = 1+24 = 25$, positivo per cui si hanno due soluzioni reali distinte; la parabola $y = -2x^2+x+3$ ha concavità verso il basso per cui essendo $x_1 = -1$ e $x_2 = \frac{3}{2}$ si ha $N \geqslant 0$ per $-1 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}$;
- segno D: il denominatore è composto da due fattori di primo grado, quindi $d_1 > 0$ per $x > -\frac{1}{2}$ e $d_2 > 0$ per $x > \frac{1}{2}$;

e) costruiamo la tabella dei segni:

| $x$ | | $-1$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $\frac{1}{2}$ | | $\frac{3}{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Segno di N | $-$ | ● | $+$ | | $+$ | | $+$ | ● | $-$ |
| Segno di $d_1$ | $-$ | | $-$ | ○ | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| Segno di $d_2$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | ○ | $+$ | | $+$ |
| Segno di E | $-$ | ● | $+$ | ○ | $-$ | ○ | $+$ | ● | $-$ |

f) dalla tabella dei segni possiamo ottenere la risposta al problema posto:

- l'espressione E si annulla per $x = -1 \vee x = \frac{3}{2}$;
- l'espressione E è positiva per $x \in A = \left\{x \in \mathbb{R} | -1 < x < -\frac{1}{2} \vee \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}\right\}$;
- l'espressione E è negativa per $x \in B = \left\{x \in \mathbb{R} | x < -1 \vee -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \vee x > \frac{3}{2}\right\}$.

**Esempio 4.22.** Determiniamo l'Insieme Soluzione della disequazione fratta: $3 - \frac{1}{2x+1} \geqslant \frac{1}{1-x}$.

a) Trasportiamo al primo membro la frazione del secondo membro $E = 3 - \frac{1}{2x+1} - \frac{1}{1-x}$ ed eseguiamo i calcoli ottenendo: $E = \frac{-6x^2+2x+1}{(2x+1)\cdot(1-x)}$;

b) determiniamo il dominio: C. E. $2x+1 \neq 0 \wedge 1-x \neq 0 \rightarrow D = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$;

c) impostiamo la disequazione: $\frac{-6x^2+2x+1}{(2x+1)\cdot(1-x)} \geqslant 0$ che ci permetterà di rispondere al quesito posto dal problema;

d) studiamo il segno del numeratore e del denominatore:

- segno N: $-6x^2+2x+1 \geqslant 0$ disequazione di secondo grado, quindi scritta l'equazione associata $-6x^2+2x+1=0$, calcoliamone il discriminante: $\frac{\Delta}{4} = 7$, positivo per cui si hanno due soluzioni $x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{7}}{6}$; essendo il primo coefficiente negativo si ha $N \geqslant 0$ per $\frac{1-\sqrt{7}}{6} \leqslant x \leqslant \frac{1+\sqrt{7}}{6}$;
- segno D: $-2x^2+x+1 > 0$ disequazione di secondo grado; il denominatore ha due zeri reali $x = -\frac{1}{2}$ e $x_2 = 1$, il primo coefficiente è negativo, pertanto $D > 0$ per $-\frac{1}{2} < x < 1$ che rispetta le C.E.: $x_1 \neq -\frac{1}{2} \wedge x_2 \neq 1$;

e) compiliamo la tabella dei segni:

| $x$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $\frac{1-\sqrt{7}}{6}$ | | $\frac{1+\sqrt{7}}{6}$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Segno di N | $-$ | | $-$ | $\bullet$ | $+$ | $\bullet$ | $-$ | | $-$ |
| Segno di D | $-$ | $\circ$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | $\circ$ | $-$ |
| Segno di E | $+$ | $\circ$ | $-$ | $\bullet$ | $+$ | $\bullet$ | $-$ | $\circ$ | $+$ |

f ) determiniamo l'insieme soluzione: $\text{I.S.} = \left\{x \in \mathbb{R} | x < -\frac{1}{2} \vee \frac{1-\sqrt{7}}{6} \leqslant x \leqslant \frac{1+\sqrt{7}}{6} \vee x > 1\right\}$.

---

✍ *Esercizi proposti:* 4.58, 4.59, 4.60, 4.61, 4.62, 4.63, 4.64, 4.65, 4.66, 4.67, 4.68, 4.69, 4.70, 4.71, 4.72, 4.47, 4.73, 4.74

## 4.6 Sistemi di disequazioni

Ricordiamo che risolvere un sistema di disequazioni significa trovare l'insieme dei numeri reali che sono le soluzioni comuni alle disequazioni che lo compongono. Indicate con $d_1, d_2, \ldots, d_n$ le disequazioni che formano il sistema e $\text{I.S.}_1, \text{I.S.}_2, \ldots, \text{I.S.}_n$ i rispettivi insieme soluzione, la soluzione del sistema indicata con I.S. è data da $\text{I.S.} = \text{I.S.}_1 \cap \text{I.S.}_{2,} \ldots \cap \text{I.S.}_n$.

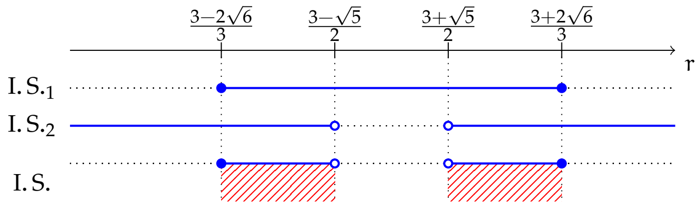
**Problema 4.23.** Nell'equazione $x^2 - (k-3)x + k^2 - 3k + 1 = 0$, determinare per quali valori del parametro $k$ si ottengono soluzioni reali e concordi.

Abbiamo già affrontato un problema di questo tipo discutendo le equazioni parametriche di secondo grado e dunque sappiamo che la richiesta del problema esige che il discriminante $(\Delta)$ sia non negativo affinché le soluzioni siano reali e che il prodotto delle stesse sia positivo. Pertanto il problema è formalizzato con un sistema di disequazioni: $\begin{cases} \Delta \geqslant 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k^2 - 6k + 9 - 4k^2 + 12k - 4 \geqslant 0 \\ k^2 - 3k + 1 > 0 \end{cases}$.

Risolviamo separatamente le due disequazioni del sistema; indicati con $\text{I.S.}_1$ e $\text{I.S.}_2$ rispettivamente gli insiemi soluzione della prima e della seconda disequazione, l'insieme soluzione del sistema è dato da $\text{I.S.} = \text{I.S.}_1 \cap \text{I.S.}_2$ (insieme intersezione degli insiemi soluzione delle due disequazioni).

- $d_1$: $-3k^2 + 6k + 5 \geqslant 0$ disequazione di secondo grado avente primo coefficiente negativo e $\frac{\Delta}{4} = 24$ positivo; la parabola $y = -3k^2 + 6k + 5 \geqslant 0$ ha concavità verso il basso e discriminante positivo, per cui essendo $x_1 = \frac{3-2\sqrt{6}}{3} \vee x_2 = \frac{3+2\sqrt{6}}{3}$ si ottiene $\text{I.S.}_1 = \left\{x \in \mathbb{R} | \frac{3-2\sqrt{6}}{3} \leqslant x \leqslant \frac{3+2\sqrt{6}}{3}\right\}$.
- $d_2$: $k^2 - 3k + 1 > 0$ disequazione di secondo grado avente il primo coefficiente positivo e $\Delta = 5$ positivo; la parabola $y = k^2 - 3k + 1 > 0$ ha concavità verso l'alto e discriminante positivo, quindi $x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ e $\text{I.S.}_2 = \left\{x \in \mathbb{R} | x < \frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Per determinare l'Insieme Soluzione del sistema rappresentiamo in un grafico gli insiemi soluzioni delle disequazioni risolte e visualizziamo l'insieme formato dai valori che soddisfano contemporaneamente sia l'una che l'altra: sull'asse reale depositiamo i valori numerici trovati e rappresentiamo su righe distinte i due insiemi soluzione: gli intervalli in cui cadono soluzioni della prima e della seconda disequazione rappresentano l'Insieme Soluzione del sistema.




$\text{I. S.}_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{3-2\sqrt{6}}{3} \leqslant x < \frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee \frac{3+\sqrt{5}}{2} < x \leqslant \frac{3+2\sqrt{6}}{3}\right\}$ o scritto utilizzando gli intervalli $\left[\frac{3-2\sqrt{6}}{3}; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}; \frac{3+2\sqrt{6}}{3}\right]$.

**Problema 4.24.** Risolvere il seguente sistema di disequazioni: $\begin{cases} 2x^3 - 9x^2 + 10x - 3 \leqslant 0 \\ \frac{x^2+x+1}{x^3-x} \geqslant 0 \\ 3 - 4x < 0 \end{cases}$.

Il sistema è formato da tre disequazioni; risolviamo separatamente ciascuna disequazione:

- $d_1$: $2x^3 - 9x^2 + 10x - 3 \leqslant 0$ di terzo grado, scomponiamo in fattori. $x = 1$ è uno zero del polinomio quindi con la regola di Ruffini otteniamo $d_1$: $(x-1) \cdot (2x^2 - 7x + 3) \leqslant 0$. L'equazione di secondo grado $2x^2 - 7x + 3 = 0$ ha soluzioni reali $x_1 = \frac{1}{2} \vee x = 3$. Si tratta allora di studiare il segno dei singoli fattori e di determinare il segno richiesto dopo aver costruito la tabella dei segni:

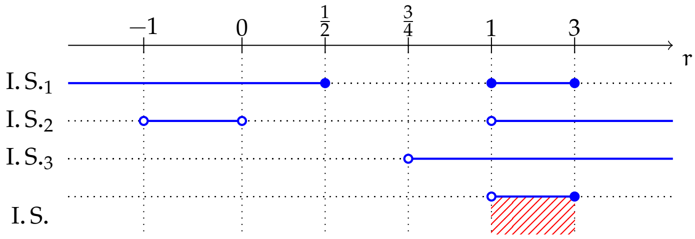
| Segno di | | $\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | $-$ | | $-$ | $\bullet$ | $+$ | | $+$ |
| $2x^2-7x+3$ | $+$ | $\bullet$ | $-$ | | $-$ | $\bullet$ | $+$ |
| $d_1$ | $-$ | $\bullet$ | $+$ | $\bullet$ | $-$ | $\bullet$ | $+$ |

  L'insieme soluzione, tenendo conto che cerchiamo i valori per i quali $d_1$ risulta minore o uguale a 0 è $\text{I. S.}_1 = \left\{x \in \mathbb{R} | x \leqslant \frac{1}{2} \vee 1 \leqslant x \leqslant 3\right\}$.
- $d_2$: $\frac{x^2+x+1}{x^3-x} \geqslant 0$ è una disequazione fratta, per prima cosa scomponiamo in fattori il denominatore: $\frac{x^2+x+1}{x(x^2-1)} \geqslant 0$. Studiamo poi il segno dei singoli fattori o divisori, tenendo conto che $x^2 + x + 1 = 0$ ha $\Delta < 0$, per cui $x^2 + x + 1$ è sempre positivo.

| Segno di | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2+x+1$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $x$ | $-$ | | $-$ | $\circ$ | $+$ | | $+$ |
| $x^2-1$ | $+$ | $\circ$ | $-$ | | $-$ | $\circ$ | $+$ |
| $d_2$ | $-$ | $\circ$ | $+$ | $\circ$ | $-$ | $\circ$ | $+$ |

  L'insieme soluzione, per $d_2 \geqslant 0$ è $\text{I. S.}_2 = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 0 \vee x > 1\}$.
- $d_3 : 3 - 4x < 0$ è di primo grado per cui l'insieme soluzione è $\text{I. S.}_3 = \left\{x \in \mathbb{R} | x > \frac{3}{4}\right\}$.

Ricordiamo che la ricerca dell'Insieme Soluzione del sistema si effettua determinando l'insieme $\text{I. S.}_1 \cap \text{I. S.}_2 \cap \text{I. S.}_3$ individuabile attraverso il grafico:




Il sistema è quindi verificato per $1 < x \leqslant 3$.

✍ *Esercizi proposti:* 4.75, 4.76, 4.77, 4.78, 4.79, 4.80, 4.81, 4.82, 4.83

## 4.7 Esercizi

### 4.7.1 Esercizi dei singoli paragrafi

#### 4.1 - Risoluzione delle disequazioni di secondo grado

**4.1** (*). Risolvi le seguenti disequazioni di secondo grado con il metodo algebrico.

a) $x^2-6x\leqslant 0$;
b) $5x^2>0$;
c) $x^2+x>0$;
d) $x^2\leqslant 0$;
e) $3x^2\leqslant -1$;
f) $x^2-9>0$.

**4.2** (*). Risolvi le seguenti disequazioni di secondo grado con il metodo algebrico.

a) $2x^2-3x+1>0$;
b) $-x^2+3x\geqslant 0$;
c) $3x^2+x-2>0$;
d) $x^2-4>0$;
e) $\frac{4}{3}x^2-\frac{1}{3}x-1<0$;
f) $x^2-8\leqslant 0$.

**4.3** (*). Risolvi le seguenti disequazioni di secondo grado con il metodo algebrico.

a) $x^2-5x+3\geqslant 0$;
b) $x^2-4x+9>0$;
c) $x^2-6x+8\leqslant 0$;
d) $x^2+3x-4\geqslant 0$;
e) $x^2-4x-9\leqslant 0$;
f) $x^2-9x+18<0$.

**4.4** (*). Risolvi le seguenti disequazioni di secondo grado con il metodo algebrico.

a) $x^2-8x+15\geqslant 0$;
b) $-2x^2\geqslant 0$;
c) $3x^2-\frac{2}{3}x-1\leqslant 0$;
d) $x^2+5>0$;
e) $x^2+6x-2>0$;
f) $2x^2+5x+4\leqslant 0$.

**4.5** (*). Risolvi le seguenti disequazioni di secondo grado con il metodo algebrico.

a) $x^2-3x-\frac{5}{2}<0$;
b) $x^2+1>0$;
c) $-x^2+5\leqslant 0$;
d) $x^2+x\geqslant 0$.

**4.6** (*). Risolvi le seguenti disequazioni di secondo grado con il metodo algebrico.

a) $(x+1)^2\geqslant 0$;
b) $x^2>1$;
c) $2x^2-6<0$;
d) $-x^2-1\leqslant 0$.

#### 4.2 - Risoluzione grafica di una disequazione di secondo grado

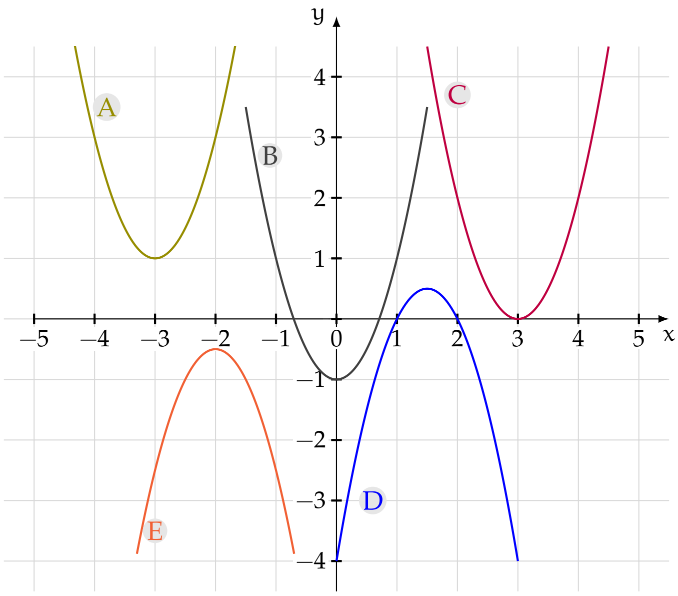
**4.7.** Rappresentare nel riferimento cartesiano ortogonale le seguenti parabole.

a) $y=-3x^2+x$;
b) $y=\frac{1}{2}x-2x+\frac{3}{2}$;
c) $y=x^2+x-1$;
d) $y=x^2-x+1$.

**4.8.** Rappresentare nel riferimento cartesiano ortogonale le seguenti parabole.

a) $y=-3x^2+3$;
b) $y=x^2+4x+3$;
c) $y=x^2+\frac{3}{5}$;
d) $y=-\frac{2}{5}x^2+4x-\frac{1}{5}$;
e) $y=-\frac{1}{2}x^2-4x-1$.

**4.9.** Per ciascun grafico di parabola $y = ax^2 + bx + c$ indica il segno del primo coefficiente e del discriminante, la natura dei suoi zeri (reali distinti, reali coincidenti, non reali), il segno della funzione.




**4.10.** Risolvere graficamente le seguenti disequazioni di secondo grado.

a) $2x^2 + 3x - 1 < 0$;
b) $x^2 - 5x + 6 \leqslant 0$;
c) $x^2 - 3x - 4 > 0$;
d) $x^2 - 6x + 5 \geqslant 0$.

**4.11.** Risolvere graficamente le seguenti disequazioni di secondo grado.

a) $6x^2 + x - 2 > 0$;
b) $15x^2 + x - 6 \leqslant 0$;
c) $-x^2 + 1 \geqslant 0$;
d) $x^2 - \frac{1}{4} > 0$.

**4.12.** Risolvere graficamente le seguenti disequazioni di secondo grado.

a) $x^2 - \frac{1}{4}x \leqslant 0$;
b) $x^2 + 2x \leqslant 0$;
c) $x^2 + 2x + 1 \leqslant 0$;
d) $x^2 + x + 1 < 0$.

**4.13 (*).** Risolvi le disequazioni di secondo grado con il metodo algebrico o con quello grafico.

a) $9 - 4x^2 \leqslant 0$;
b) $3x - 2x^2 > 0$;
c) $x^2 \geqslant 0$;
d) $2x^2 + 4 > 0$;
e) $x^2 - x - 2 > 0$;
f) $x^2 + 11x + 30 \leqslant 0$.

**4.14 (*).** Risolvi le disequazioni di secondo grado con il metodo algebrico o con quello grafico.

a) $-x^2 + 4x + 3 > 0$;
b) $x^2 + 4x + 4 < 0$;
c) $x^2 - x + 1 < 0$;
d) $x^2 - \frac{1}{9} \geqslant 0$;
e) $9x^2 + 3x - 2 \leqslant 0$;
f) $2x^2 + 5 < 0$.

**4.15** (*). Risolvi le disequazioni di secondo grado con il metodo algebrico o con quello grafico.

a ) $4x - x^2 \geqslant 0$;
b ) $9x^2 + 10x + 1 \leqslant 0$;
c ) $0,01x^2 - 1 > 0$;
d ) $1,\bar{6}x^2 - 2x \leqslant 0$.

**4.16** (*). Risolvi le disequazioni di secondo grado con il metodo algebrico o con quello grafico.

a ) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8} > 0$;
b ) $4x^2 + \frac{5}{3}x - 1 \leqslant 0$;
c ) $x^2 + x + \sqrt{2} > 0$;
d ) $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 > 0$.

**4.17** (*). Risolvi le disequazioni di secondo grado con il metodo algebrico o con quello grafico.

a ) $12x^2 - 3 \geqslant 4x(2x - 1)$;
b ) $2x^2 - 11x - 6 \geqslant 0$;
c ) $(3x + 1)^2 > (2x - 1)^2$;
d ) $(x + 1)(x - 1)^2 > x^3$.

**4.18** (*). Risolvi le disequazioni di secondo grado con il metodo algebrico o con quello grafico.

a ) $(x + 3)(x + 2) < -(x + 2)^2$;
b ) $\frac{x+1}{2} + \frac{(x+1)(x-1)}{4} > x^2 - 1$;
c ) $(x + 1)^3 - (x + 2)^2 > \frac{2x^3-1}{2}$;
d ) $(x - 2)(3 - 2x) \geqslant x - 2$.

**4.19** (*). Risolvi le disequazioni di secondo grado con il metodo algebrico o con quello grafico.

a ) $(3x + 1)\left(\frac{5}{2} + x\right) \leqslant 2x - 1$;
b ) $\frac{x^2+16}{4} + x - 1 < \frac{x-3}{2}$;
c ) $\frac{3x-2}{2} < x^2 - 2$;
d ) $\frac{x-3}{2} - \frac{x^2+2}{3} < 1 + x$.

**4.20** (*). Risolvi le disequazioni di secondo grado con il metodo algebrico o con quello grafico.

a ) $(x + 4)^2 + 8 \geqslant \frac{x-1}{3}$;
b ) $\left(\frac{x-1}{3} - \frac{x}{6}\right)^2 \leqslant (x + 1)^2$;
c ) $\frac{1}{2}\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + x\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right) > x^3 - \frac{x}{2}\left(x - \frac{2}{3}\right) - \frac{8}{27}$;
d ) $3x - 5 + (1 - 3x)^2 > (x - 2)(x + 2)$.

**4.21** (*). Risolvi le disequazioni di secondo grado con il metodo algebrico o con quello grafico.

a ) $\frac{x-2}{3} - (3x + 3)^2 > x$;
b ) $(x - 4)^2 + (2 - x)^2 - 2(2x + 17) > 4(x + 5)(3 - x) + (x + 1)^2$;
c ) $(x - 2)^3 - x^3 > x^2 - 4$;
d ) $(2 - x)^3 - (2 - x)^2 < \frac{3-4x^3}{4}$;
e ) $(x + 2000)^2 + x + 2000 < 2$.

**4.22** (*). Risolvi le disequazioni di secondo grado con il metodo algebrico o con quello grafico.

a ) $\frac{(2x-1)^3-8x}{2} - \frac{(2x+1)^2-15}{4} \leqslant 4x\,(x - 1)^2 - 6$;
b ) $\frac{(3-x)^2}{2} - 1 \geqslant -\frac{x^2-4}{4}$ R. $x \leqslant 2 - \frac{\sqrt{6}}{3} \vee x \geqslant 2 + \frac{\sqrt{6}}{3}$;
c ) $\left(\frac{x}{2} + 1\right)^2 - 2x > \frac{5}{4}\left(\frac{x}{2} - 1\right)$;
d ) $(x + 1)^2 > (x - 1)^2 + (x + 2)^2 + 4x$;
e ) $\frac{x^2}{4} + x < \frac{x+3}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1-\frac{x}{2}}{2}$.

**4.23.** Il monomio $16x^2$ risulta positivo per:
$\boxed{\text{A}}$ $x > 16$ $\boxed{\text{B}}$ $x > \frac{1}{16}$ $\boxed{\text{C}}$ $x < -4 \vee x > 16$ $\boxed{\text{D}}$ $x \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{E}}$ $x \in \mathbb{R}_0$

**4.24.** Il binomio $16 + x^2$ risulta positivo per:
$\boxed{\text{A}}$ $x > -16$ $\boxed{\text{B}}$ $-4 < x < 4$ $\boxed{\text{C}}$ $x \in \mathbb{R} - \{-4, 4\}$ $\boxed{\text{D}}$ $x \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{E}}$ $x < -4 \vee x > 4$

**4.25.** Il binomio $16 - x^2$ risulta positivo per:
$\boxed{\text{A}}$ $x > -16$ $\boxed{\text{B}}$ $-4 < x < 4$ $\boxed{\text{C}}$ $x \in \mathbb{R} - \{-4, 4\}$ $\boxed{\text{D}}$ $x \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{E}}$ $x < -4 \vee x > 4$

**4.26.** Spiegate sfruttando il metodo grafico la verità della proposizione: “nessun valore della variabile $a$ rende il polinomio $(3 + a)^2 - (2a + 1) \cdot (2a - 1) - (a^2 + 2a + 35)$ positivo”.

### 4.3 - Segno del trinomio a coefficienti letterali

**4.27 (*).** Risolvi e discuti le seguenti disequazioni.

a) $x^2 - 2kx + k^2 - 1 > 0$; b) $3x^2 - 5ax - 2a^2 < 0$.

**4.28 (*).** Risolvi e discuti le seguenti disequazioni.

a) $4x^2 - 4x + 1 - 9m^2 < 0$; b) $2x^2 - 3ax < 0$.

**4.29 (*).** Risolvi e discuti le seguenti disequazioni.

a) $x^2 - 2tx - 8t^2 > 0$; b) $(1 - s)x^2 + 9 > 0$.

**4.30 (*).** Risolvi e discuti le seguenti disequazioni.

a) $(m - 1)x^2 - mx > 0$; b) $kx^2 - (k + 1)x - 3 \geqslant 0$.

**4.31.** Trovare il segno del trinomio $t = (1 - m)x^2 - 2mx - m + 3$ al variare del parametro $m$.

### 4.4 - Disequazioni polinomiali di grado superiore al secondo

**4.32.** Data la disequazione $\left(x^2 - x\right) \cdot \left(2x^2 + 13x + 20\right) < 0$ verificare che nessun numero naturale appartiene all’insieme soluzione. C’è qualche numero intero nell’I. S.? È vero che l’I. S. è formato dall’unione di due intervalli aperti di numeri reali?

**4.33.** Dopo aver scomposto in fattori il polinomio $p(x) = 2x^4 - 5x^3 + 5x - 2$ determinare il suo segno.

**4.34.** Dato il trinomio $p(x) = 9x^2 + x^4 - 10$ stabilire se esiste almeno un numero naturale che lo renda negativo.

**4.35.** Nell’insieme dei valori reali che rendono positivo il trinomio $p(x) = 2x^5 - 12x^3 - 14x$ vi sono solo due numeri interi negativi?

**4.36.** $x \in (-1; +\infty) \Rightarrow p(x) = x^5 - 2x^2 - x + 2 > 0$. Vero o falso?

**4.37.** Nell’insieme dei valori reali che rendono negativo $p(x) = (2x - 1)^3 - (3 - 6x)^2$ appartiene un valore razionale che lo annulla. Vero o falso?

**4.38** (*). Risolvi le seguenti disequazioni di grado superiore al secondo.

a) $(1-x)(2-x)(3-x) > 0$;
b) $(2x-1)(3x-2)(4x-3) \leqslant 0$;
c) $-2x(x-1)(x+2) > 0$;
d) $\left(x^4-4x^2-45\right) \cdot \left(4x^2-4x+1\right) > 0$.

**4.39** (*). Risolvi le seguenti disequazioni di grado superiore al secondo.

a) $3x(x-2)(x+3)(2x-1) \leqslant 0$;
b) $\left(x^2+1\right)(x-1)(x+2) > 0$;
c) $\left(1-9x^2\right)\left(9x^2-3x\right)2x > 0$;
d) $\left(16x^2-1\right)\left(x^2-x-12\right) > 0$.

**4.40** (*). Risolvi le seguenti disequazioni di grado superiore al secondo.

a) $-x\left(x^2-3x-10\right)\left(x^2-9x+18\right) \leqslant 0$;
b) $x^2(x-1)\left(2x^2-x\right)\left(x^2-3x+3\right) > 0$;
c) $\left(x^2-1\right)\left(x^2-2\right)\left(x^2-3x\right) > 0$;
d) $x^3-x^2+x-1 > 0$.

**4.41** (*). Risolvi le seguenti disequazioni di grado superiore al secondo.

a) $x^3-5x^2+6 < 0$;
b) $\left(5x^3-2x^2\right)\left(3x^2-5x\right) \geqslant 0$;
c) $x^4-2x^3-x+2 > 0$;
d) $x^4+x^2-9x^2-9 \leqslant 0$.

**4.42** (*). Risolvi le seguenti disequazioni di grado superiore al secondo.

a) $25x^4-9 > 0$;
b) $x^3-1 \geqslant 2x(x-1)$;
c) $x^4-1 > x^2+1$;
d) $\left(x^2+x\right)^2+2(x+1)^2 \geqslant 0$.

**4.43** (*). Risolvi le seguenti disequazioni di grado superiore al secondo.

a) $(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2) < 0$;
b) $\left(x^2-4\right)(x-2) \geqslant 0$ R. $x \geqslant -2$;
c) $(x-7)\left(x^2-7x+10\right) < 0$;
d) $\left(x^2-4\right)\left(x^2-9\right) \geqslant 0$.

**4.44** (*). Risolvi le seguenti disequazioni di grado superiore al secondo.

a) $\left(x^4+4x^3-12x^2\right)(x+3) \geqslant 0$;
b) $(x-4)^3-(x-4)^2-2x+10 > 2$;
c) $x^3-1 \geqslant 0$;
d) $\left(x^4+4x^3-12x^2\right)(x+3) \geqslant 0$.

**4.45** (*). Risolvi le seguenti disequazioni di grado superiore al secondo.

a) $(x+3)(x+4)(x+5)(5-x)(4-x)(3-x) > 0$;
b) $(x^2-2x)(x^2+1) > 0$;
c) $(8-2x^2)(3x-x^2+4) < 0$;
d) $(6x^2-6)(100x^2+100x) < 0$.

**4.46** (*). Risolvi le seguenti disequazioni di grado superiore al secondo.

a) $(1+x^2)(3x^2+x) < 0$;
b) $(x^2+3x+3)(4x^2+3) > 0$;
c) $(125+4x^2)(128+2x^2) < 0$;
d) $(x^2+4x+4)(x^2-4x+3) > 0$.

**4.47 (*).** Risolvi le seguenti disequazioni di grado superiore al secondo.

a) $(x^2-5x+8)(x^2-2x+1)>0$;
b) $(-2x+1)(3x-x^2)>0$;
c) $(4x^2-3x)(x^2-2x-8)<0$;
d) $(4x-x^2+5)(x^2-9x+20)<0$.

**4.48 (*).** Risolvi le seguenti disequazioni di grado superiore al secondo.

a) $(5+2x)(-2x^2+14x+16)<0$;
b) $(5x-2x^2-10)(x^2+3x-28)>0$;
c) $(x^2-6x+9)(8x-7x^2)>0$;
d) $(3x^2+2x-8)(6x^2+19x+15)<0$.

**4.49 (*).** Risolvi le seguenti disequazioni di grado superiore al secondo.

a) $(3x^2-5x-2)(4x^2+8x-5)>0$;
b) $(4x-4)(2x^2-3x+2)<0$;
c) $(2x-4)(2x^2-3x-14)>0$;
d) $(-7x+6)(x^2+10x+25)<0$.

**4.50 (*).** Risolvi le seguenti disequazioni di grado superiore al secondo.

a) $(-3+3x)(x^3-4x^2)>0$;
b) $\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)>0$;
c) $(1-x)(2-x)^2\leqslant 0$;
d) $-x\left(x^2+1\right)(x+1)\geqslant 0$;
e) $(x+1)^2\left(x^2-1\right)<0$;
f) $(x^2-4)(2x-50x^2)\geqslant 0$.

**4.51 (*).** Risolvi le seguenti disequazioni di grado superiore al secondo.

a) $(x-4)(2x^2+x-1)\geqslant 0$;
b) $-3x^3+27>0$;
c) $3x^3+27>0$;
d) $x^3+3x^2+3x+1\leqslant 0$;
e) $x^3-6x+9<0$;
f) $x^5+1>x\left(x^3+1\right)>0$.

**4.52.** Risolvi le seguenti disequazioni di grado superiore al secondo.

a) $x^3-7x^2+4x+12\geqslant 0$;
b) $x^3+5x^2-2x-24<0$;
c) $6x^3+23x^2+11x-12\leqslant 0$;
d) $4x^3+4x^2-4x-4\geqslant 0$;
e) $-6x^3-30x^2+192x-216<0$;
f) $81x^4-1\leqslant 0$.

**4.53.** Risolvi le seguenti disequazioni di grado superiore al secondo.

a) $3x^5+96<0$;
b) $x^4-13x^2+36<0$;
c) $9x^4-37x^2+4\geqslant 0$;
d) $-4x^4+65x^2-16<0$;
e) $x^6-4x^3+3\geqslant 0$;
f) $x^8-x^4-2<0$.

**4.54.** Risolvi le seguenti disequazioni di grado superiore al secondo.

a) $\frac{2}{3}x^3>\frac{9}{4}$;
b) $(2x-1)^2\geqslant x^2\left(4x^2-4x+1\right)$;
c) $(x+1)\left(x^2-1\right)>\left(x^2-x\right)(x-1)^2$;
d) $-4x\left(x^2+7x+12\right)\left(x^2-25\right)(4-x)>0$;
e) $(x-5x^2)(x^4-3x^3+5x^2)\geqslant 0$;
f) $(4+7x^2)\left[x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}\right]<0$.

**4.55.** Risolvi le seguenti disequazioni di grado superiore al secondo.

a) $(x^3-9x)(x-x^2)(4x-4-x^2)>0$;
b) $x\,|x+1|\cdot(x^2-2x+1)\geqslant 0$;
c) $16x^4-1\geqslant 0$;
d) $16x^4+1\leqslant 0$;
e) $-16x^4-1>0$;
f) $-16x^4+1>0$.

**4.56.** Risolvi le seguenti disequazioni di grado superiore al secondo.

a) $1-16x^4<0$;
b) $27x^3-8\geqslant 0$;
c) $8x^3+27<0$;
d) $4x^4+1\geqslant 0$;
e) $4x^4-1\geqslant 0$;
f) $1000x^3+27>0$.

**4.57.** Risolvi le seguenti disequazioni di grado superiore al secondo.

a) $10000x^4-1\geqslant 0$;
b) $x^7+7<0$;
c) $x^3-8\geqslant 0$;
d) $9x^4-4\geqslant 0$;
e) $x^6+\sqrt{6}\leqslant 0$;
f) $0,1x^4-1000\geqslant 0$;
g) $x^4-9\geqslant 0$;
h) $x^4+9\leqslant 0$;
i) $-x^4+9\leqslant 0$.

### 4.5 - Disequazioni fratte

**4.58 (*).** Determinare l'Insieme Soluzione delle seguenti disequazioni fratte.

a) $\frac{x+2}{x-1}>0$;
b) $\frac{x+3}{4-x}>0$;
c) $\frac{x+5}{x-7}>0$;
d) $\frac{2-4x}{3x+1}\geqslant 0$;
e) $\frac{x^2-4x+3}{4-7x}\geqslant 0$;
f) $\frac{x+5}{x^2-25}>0$.

**4.59 (*).** Determinare l'Insieme Soluzione delle seguenti disequazioni fratte.

a) $\frac{x^2-1}{x-2}>0$;
b) $\frac{x^2-4x+3}{x+5}<0$;
c) $\frac{-x^2+4x-3}{x+5}>0$;
d) $\frac{x^2+1}{x^2-2x}>0$;
e) $\frac{9-x^2}{2x^2-x-15}>0$;
f) $\frac{x^2-7x}{-x^2-8}>0$.

**4.60 (*).** Determinare l'Insieme Soluzione delle seguenti disequazioni fratte.

a) $\frac{x+2}{x-1}\leqslant 0$;
b) $\frac{1}{x^2+2x+1}>0$;
c) $\frac{-3}{-x^2-4x-8}>0$;
d) $\frac{x^2+2x+3}{-x^2-4}>0$;
e) $\frac{3x-12}{x^2-9}>0$;
f) $\frac{5-x}{x^2-4}>0$.

**4.61 (*).** Determinare l'Insieme Soluzione delle seguenti disequazioni fratte.

a) $\frac{3x-x^2-2}{2x^2+5x+3}>0$;
b) $\frac{4-2x}{x^2-2x-8}>0$;
c) $\frac{x^2-4x+3}{5-10x}>0$;
d) $\frac{x^2+3x+10}{4-x^2}>0$;
e) $\frac{x^2-3x+2}{4x-x^2-5}>0$;
f) $\frac{x^2+2}{25-x^2}>0$.

**4.62 (*).** Determinare l'Insieme Soluzione delle seguenti disequazioni fratte.

a) $\frac{3x^2-2x-1}{4-2x}>0$;
b) $\frac{x+2}{x^2+4x+4}>0$;
c) $\frac{x+2}{x^2+4x+2}>0$;
d) $\frac{-x^2+2x+8}{-x-1}<0$;
e) $\frac{x^2+3x+2}{25-x^2}>0$;
f) $\frac{x^2+4x+3}{3x-6}>0$.

**4.63** (*). Determinare l'Insieme Soluzione delle seguenti disequazioni fratte.

a) $\frac{5-x}{x^2-4x+3} > 0$;
b) $\frac{1-x^2}{x^2+2x+3} < 0$;
c) $\frac{x^2-9}{x^2-5x} > 0$;
d) $\frac{x^2-x-2}{x-x^2+6} > 0$;
e) $\frac{x^2-5x+6}{-3x+7} < 0$;
f) $\frac{2x+8}{x^2+4x-12} > 0$.

**4.64** (*). Determinare l'Insieme Soluzione delle seguenti disequazioni fratte.

a) $\frac{x^2-2x-63}{4x+5-x^2} > 0$;
b) $\frac{4-x^2+3x}{x^2-x} > 0$;
c) $\frac{x^2-2x}{5-x^2} > 0$;
d) $\frac{x^2-x-2}{-3x^2+3x+18} \leqslant 0$;
e) $\frac{x^2-8x+15}{x^2+3x+2} > 0$;
f) $\frac{4x+7}{3x^2-x-2} > 0$.

**4.65** (*). Determinare l'Insieme Soluzione delle seguenti disequazioni fratte.

a) $\frac{-x^2-4x-3}{6x-x^2} > 0$;
b) $\frac{5x+x^2+4}{6x^2-6x} > 0$;
c) $\frac{9-x^2}{x^2+5x+6} \cdot \frac{6x-2x^2}{4-x^2} > 0$;
d) $\frac{2x-4x^2}{x^2+x-12} \cdot \frac{16-x^2}{5x-x^2} \leqslant 0$;
e) $\frac{1-x^2}{x^2} \leqslant \frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{2}$;
f) $\frac{x+2}{x-1} \geqslant \frac{24}{x+1} - \frac{x}{x^2-1}$.

**4.66** (*). Determinare l'Insieme Soluzione delle seguenti disequazioni fratte.

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} < \frac{2x+1}{x^2-1}$;
b) $\frac{x}{x+2} \geqslant \frac{x-4}{x^2-4}$;
c) $\frac{4x+1}{x^2-9} + \frac{1-x}{x+3} < 6 - \frac{x}{x-3}$;
d) $\frac{x+1}{2x-1} + \frac{3}{4x+10} \geqslant 1 - \frac{2x+2}{4x^2+8x-5}$;
e) $\frac{2x+5}{(2x+4)^2} \geqslant \frac{2}{2x+4}$;
f) $\frac{10x^2}{x^2+x-6} + \frac{x}{2-x} - 1 \leqslant \frac{5}{x+3}$.

**4.67** (*). Determinare l'Insieme Soluzione delle seguenti disequazioni fratte.

a) $\frac{5x+20}{5x+5} + \frac{2x-8}{2x-2} \geqslant 2$;
b) $\frac{8}{8x^2-8x-70} - \frac{4}{4x^2-4x-35} > \frac{8x+8}{4x^2-20x+21}$;
c) $\frac{4x^2-8x+19}{8x^2-36x+28} - \frac{2x-5}{4x-4} \geqslant \frac{8x+12}{8x-28}$.

**4.68** (*). Assegnate le due funzioni $f_1 = \frac{x^2+1}{2x-x^2}$ e $f_2 = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2}$ stabilire per quali valori della variabile indipendente si ha $f_1 \geqslant f_2$.

**4.69.** Spiegare perché l'espressione letterale $E = \frac{1-\frac{x^2}{x^2-1}}{2+\frac{3x-1}{1-x}}$ è sempre positiva nel suo dominio.

**4.70** (*). Per quali valori di x la funzione $y = \frac{(x-1)\cdot x-2}{5x^2-x-4}$ è maggiore o uguale a 1.

**4.71** (*). $x$, $x+2$, $x+4$ sono tre numeri naturali. Determinate in $\mathbb{N}$ il più piccolo numero che rende vera la proposizione: "il doppio del primo aumentato del prodotto degli altri due è maggiore della differenza tra il doppio del terzo e il quadrato del secondo"

**4.72.** Date chiare e sintetiche motivazioni alla verità della seguente proposizione: "il segno della frazione $f = \frac{9-x^2+3x}{2+x^2}$ non è mai positivo e la frazione non ha zeri reali".

**4.73.** Stabilire se basta la condizione $x \neq 1 \wedge x \neq -1$ per rendere positiva la frazione $f = \frac{x^3-1}{x^4-2x^2+1}$

**4.74.** Determinare per quali valori reali la frazione $f = \frac{(x+1)^2}{4x^2-12x+9}$ risulta non superiore a 1.

### 4.6 - Sistemi di disequazioni

**4.75** (*). Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni.

a) $\begin{cases} x^2-4>0 \\ x-5\leqslant 0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 4x-x^2>0 \\ 3x^2(x-3)>0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x^2-4x+3\leqslant 0 \\ x-2x^2<-10 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x^2+5x+6\leqslant 0 \\ 2x+5\leqslant 0 \end{cases}$.

**4.76** (*). Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni.

a) $\begin{cases} 3x-x^2-2\leqslant 0 \\ x^2>49 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x^2-4x+4\geqslant 0 \\ x<6 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 3x-2>0 \\ x^2-1>0 \\ 2x-x^2<0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x^2-4x+4>0 \\ x\leqslant 6 \\ 1-x^2\leqslant 0 \end{cases}$.

**4.77** (*). Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni.

a) $\begin{cases} x^2+6x+9<0 \\ x<2 \\ x^2+1>0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 4x-x^2-3<0 \\ 3x\geqslant 2 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x^2+6x+9\leqslant 0 \\ x<2 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 2x^2<8 \\ -x^2+5x>-6 \\ x^2(9-x^2)\leqslant 0 \end{cases}$.

**4.78** (*). Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni.

a) $\begin{cases} (x^2-4x+3)(2x-4)>0 \\ 2x-x^2\leqslant 1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2x^2-x-1\leqslant 0 \\ 3x+7>0 \\ x^2-10x+9\leqslant 0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} (3-x)(x^2-4)(x^2-2x-8)<0 \\ x^2-64\leqslant 0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 2x^2-x-1<0 \\ 3x+7>0 \\ x^2-10x+9\leqslant 0 \end{cases}$.

**4.79** (*). Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni.

a) $\begin{cases} x^2-10x+25>0 \\ x<7 \end{cases}$; c) $\begin{cases} \frac{1}{x}>\frac{1}{x-3} \\ 3x-1-2x^2<0 \\ \frac{x^2-6x+5}{2-x}>0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x^2-10x+25\geqslant 0 \\ x<7 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x^4-8\geqslant 1 \\ \frac{5-x}{x}<\frac{1}{2} \\ x^3-1<0 \end{cases}$.

**4.80 (*).** Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni.

a) $\begin{cases} x^2-4x+3 \leqslant 0 \\ x^2-4>0 \\ x^2+1>0 \\ x-1>0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x^2-2x+1 \geqslant 0 \\ x^2+5x \geqslant 0 \\ x^2+1>0 \\ x^2-2x+7>0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x^2-5x+6 \leqslant 0 \\ x^2-1>0 \\ x^2+1<0 \\ x-1>0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x^2-2x+1>0 \\ x^2+5x \geqslant 0 \\ x^2+x+23>0 \\ x^2-2x+7>0 \end{cases}$.

**4.81 (*).** Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni.

a) $\begin{cases} x^2-3x+2>0 \\ x^2-3x+2<0 \\ 2x^2-x-1>0 \\ x^2-2x>0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x^2-3x+2 \leqslant 0 \\ x^2-4x+4 \leqslant 0 \\ x^2-3x+2 \geqslant 0 \\ x^2-4x+4 \geqslant 0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x^2-3x+2 \leqslant 0 \\ x^2-4x+4 \leqslant 0 \\ x^2-x+10>0 \\ x^2-2x \leqslant 0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} \frac{4-x^2+3x}{x^2-x}>0 \\ \frac{x^2-x-2}{-3x^2+3x+18} \leqslant 0 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} x^3-5x^2-14x \geqslant 0 \\ \frac{2x+1}{2x}>\frac{3}{x+1} \end{cases}$.

**4.82 (*).** Dato il sistema $\begin{cases} x(x-3)>3\left(\frac{x^2}{2}-2x\right) \\ 2+x\cdot\frac{3x-7}{3} \geqslant 5-\frac{1}{3}x \end{cases}$ determina i numeri naturali che lo risolvono.

**4.83 (*).** Per quali valori di $x$ le due funzioni $f_1=x^4-x^3+x-1$ e $f_2=x^4-8x$ assumono contemporaneamente valore positivo?

### 4.7.2 Risposte

**4.1.** a) $0 \leqslant x \leqslant 6$, b) $x \neq 0$, c) $x<-1 \vee x>0$, d) $x=0$, e) $\emptyset$, f) $x_1<-3 \vee x>3$.

**4.2.** a) $x<\frac{1}{2} \vee x>1$, b) $0 \leqslant x \leqslant 3$, c) $x_1<-1 \vee x>\frac{2}{3}$, d) $x_1<-2 \vee x>2$, e) $-\frac{3}{4}<x<1$, f) $-2\sqrt{2} \leqslant x \leqslant 2\sqrt{2}$.

**4.3.** a) $x \leqslant \frac{5-\sqrt{13}}{2} \vee x \geqslant \frac{5+\sqrt{13}}{2}$, b) $\mathbb{R}$, c) $2 \leqslant x \leqslant 4$, d) $x \leqslant -4 \vee x \geqslant 1$, e) $2-\sqrt{13} \leqslant x \leqslant 2+\sqrt{13}$, f) $3<x<6$.

**4.4.** a) $x \leqslant 3 \vee x \geqslant 5$, b) $x=0$, c) $\frac{1-2\sqrt{7}}{9} \leqslant x \leqslant \frac{1+2\sqrt{7}}{9}$, d) $\mathbb{R}$, e) $x<-3-\sqrt{11} \vee x>-3+\sqrt{11}$, f) $\emptyset$.

**4.5.** a) $\frac{3-\sqrt{19}}{2}<x<\frac{3+\sqrt{19}}{2}$, b) $\mathbb{R}$, c) $x \leqslant -\sqrt{5} \vee x \geqslant \sqrt{5}$, d) $x \leqslant -1 \vee x \geqslant 0$.

**4.6.** a) $\mathbb{R}$, b) $x<-1 \vee x>1$, c) $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$, d) $\mathbb{R}$.

**4.13.** a) $x \leqslant -\frac{3}{2} \vee x \geqslant \frac{3}{2}$, b) $0 < x < \frac{3}{2}$, c) $\mathbb{R}$, d) $\mathbb{R}$, e) $x < -1 \vee x > 2$, f) $-6 \leqslant x \leqslant -5$.

**4.14.** a) $2-\sqrt{7} < x < 2+\sqrt{7}$, b) $\emptyset$ , c) $\emptyset$ , d) $x \leqslant -\frac{1}{3} \vee x \geqslant \frac{1}{3}$, e) $-\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant \frac{1}{3}$, f) $\emptyset$.

**4.15.** a) $0 \leqslant x \leqslant 4$, b) $-1 \leqslant x < -\frac{1}{9}$, c) $x < -10 \vee x > 10$, d) $0 \leqslant x < \frac{6}{5}$.

**4.16.** a) $x < -\frac{1}{2} \vee x > \frac{1}{2}$, b) $-\frac{3}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1}{3}$, c) $\mathbb{R}$, d) $\mathbb{R} - \{\sqrt{2}\}$.

**4.17.** a) $x \leqslant -\frac{3}{2} \vee x \geqslant \frac{1}{2}$, b) $x \leqslant -\frac{1}{2} \vee x \geqslant 6$, c) $x < -2 \vee x > 0$ , d) $-\frac{\sqrt{5}+1}{2} < x < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

**4.18.** a) $-\frac{5}{2} < x < -2$, b) $-1 < x < \frac{5}{3}$, c) $x < \frac{1-\sqrt{21}}{4} \vee x > \frac{1+\sqrt{21}}{4}$, d) $1 \leqslant x \leqslant 2$.

**4.19.** a) $-\frac{7}{6} \leqslant x \leqslant -1$, b) $\emptyset$, c) $x < -\frac{1}{2} \vee x > 2$, d) $\mathbb{R}$.

**4.20.** a) $\mathbb{R}$, b) $x \leqslant -\frac{8}{5} \vee x \geqslant -\frac{4}{7}$, c) $x < \frac{2}{3} \vee x > \frac{7}{9}$, d) $x < 0 \vee x > \frac{3}{8}$.

**4.21.** a) $-\frac{29}{27} < x < -1$, b) $x < -3 \vee x > 5$, c) $\frac{6-2\sqrt{2}}{7} < x < \frac{6+2\sqrt{2}}{7}$, d) I. S. $= \emptyset$, e) $-202 < x < -199$.

**4.22.** d) I. S. $= \emptyset$, e) $-1 < x < 1$.

**4.27.** a) $x < k-1 \vee x > k+1$, b) $a = 0 \to \emptyset$; $a > 0 \to -\frac{1}{3}a < x < 2a$; $a < 0 \to 2a < x < -\frac{1}{3}a$.

**4.28.** a) $m = 0 \to \emptyset$; $m > 0 \to \frac{1-3m}{2} < x < \frac{1+3m}{2}$; $m < 0 \to \frac{1+3m}{2} < x < \frac{1-3m}{2}$, b) $a = 0 \to \emptyset$; $a > 0 \to 0 < x < \frac{3}{2}a$; $a < 0 \to \frac{3}{2}a < x < 0$.

**4.29.** a) $t = 0 \to x \neq 0$; $t > 0 \to -2t < x < 4t$; $t < 0 \to 4t < x < -2t$, b) $s \leqslant 1 \to \mathbb{R}$; $s > 1 \to \frac{-3}{\sqrt{k-1}} < x < \frac{3}{\sqrt{k-1}}$.

**4.30.** a) $m = 0 \to \emptyset$; $m = 1 \to x < 0$; $0 < m < 1 \to \frac{m}{m-1} < x < 0$; $m < 0 \to 0 < x < \frac{m}{m-1}$; $m > 1 \to x < 0 \vee x > \frac{m}{m-1}$.

**4.38.** a) $x < 1 \vee 2 < x < 3$, b) $\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant \frac{3}{4} \vee x \leqslant \frac{1}{2}$, c) $x < -2 \vee 0 < x < 1$.

**4.39.** a) $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2 \vee -3 \leqslant x \leqslant 0$, b) $x < -2 \vee x > 1$, c) $x < -1/3$, d) $-\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4} \vee x < -3 \vee x > 4$.

**4.40.** a) $3 \leqslant x \leqslant 5 \vee -2 \leqslant x \leqslant 0 \vee x \geqslant 6$, b) $0 < x < \frac{1}{2} \vee x > 1$, c) $x < -\sqrt{2} \vee 1 < x < \sqrt{2} \vee -1 < x < 0 \vee x > 3$, d) $x > 1$.

**4.41.** a) $3-\sqrt{3} < x < 3+\sqrt{3} \vee x < -1$, b) $0 \leqslant x \leqslant \frac{2}{5} \vee x \geqslant \frac{5}{3}$, c) $x < 1 \vee x > 2$, d) $-3 \leqslant x \leqslant 3$.

**4.42.** a) $x < -\frac{\sqrt{15}}{5} \vee x > \frac{\sqrt{15}}{5}$, b) $x \geqslant 1$, c) $x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2}$, d) $\mathbb{R}$.

**4.43.** a) $-1 < x < \frac{1}{2} \vee x < -2$, c) $5 < x < 7 \vee x < 2$, d) $x \leqslant -3 \vee -2 \leqslant x \leqslant 2 \vee x \geqslant 3$.

**4.44.** a) $x = 0 \vee -6 \leqslant x \leqslant -3 \vee x \geqslant 2$, b) $3 < x < 4 \vee x > 6$, c) $x \geqslant 1$,
d) $-9 < x < -6 \vee -\frac{1}{2} < x < 3$.

**4.45.** a) $-5 < x < -4 \vee -3 < x < 3 \vee 4 < x < 5$, b) $x < 0 \vee x > 2$,
c) $-2 < x < -1 \vee 2 < x < 4$, d) $0 < x < 1$.

**4.46.** a) $-\frac{1}{3} < x < 0$, b) $\text{I.S.} = \mathbb{R}$, c) $\text{I.S.} = \emptyset$, d) $x < -2 \vee -2 < x < 1 \vee x > 3$.

**4.47.** a) $x < 1 \vee x > 1$, b) $0 < x < \frac{1}{2} \vee x > 3$, c) $-2 < x < 0 \vee \frac{3}{4} < x < 4$,
d) $x < -1 \vee 4 < x < 5 \vee x > 5$.

**4.48.** a) $-\frac{5}{2} < x < -1 \vee x > 8$, b) $-7 < x < 4$, c) $0 < x < \frac{8}{7}$, d) $-2 < x < -\frac{5}{3} \vee -\frac{3}{2} < x < \frac{4}{3}$.

**4.49.** a) $x < -\frac{5}{2} \vee -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2} \vee x > 2$, b) $x < 1$, c) $-2 < x < 2 \vee x > \frac{7}{2}$, d) $x > 6/7$.

**4.50.** a) $\text{I.S.} = x \in \mathbb{R} | x < 0 \vee 0 < x < 1 \vee x > 4$.

**4.51.** d) $x \leqslant -1$, e) $x < -3$.

**4.58.** a) $x < 2 \vee x > 1$, b) $-3 < x < 4$, c) $x < -5 \vee x > 7$, d) $-\frac{1}{3} < x \leqslant \frac{1}{2}$,
e) $x < \frac{4}{7} \vee 1 \leqslant x \leqslant 3$, f) $x > 5$.

**4.59.** a) $-1 < x < 1 \vee x > 2$, b) $x < -5 \vee 1 < x < 3$, c) $x < -5 \vee 1 < x < 3$,
d) $x < 0 \vee x > 2$, e) $-3 < x < -\frac{5}{2}$, f) $0 < x < 7$.

**4.60.** a) $1 < x \leqslant 2$, b) $\mathbb{R} - \{-1\}\}$, c) $\mathbb{R}$, d) $\emptyset$, e) $-3 < x < 3 \vee x > 4$,
f) $x < -2 \vee 2 < x < 5$.

**4.61.** a) $-\frac{3}{2} < x < -1 \vee 1 < x < 2$, b) $x < -2 \vee 2 < x < 4$, c) $x < \frac{1}{2} \vee 1 < x < 3$,
d) $-2 < x < 2$, e) $1 < x < 2$, f) $-5 < x < 5$.

**4.62.** a) $x < -\frac{1}{3} \vee 1 < x < 2$, b) $x > -2$, c) $x < 1 \vee 3 < x < 5$, d) $x < -2 \vee -1 < x < 4$,
e) $-5 < x < -2 \vee -1 < x < 5$, f) $-3 < x < -1 \vee x > 2$.

**4.63.** a) $x < -\frac{3}{4} \vee 1 < x < 4$, b) $x < -1 \vee x > 1$, c) $x < -3 \vee 0 < x < 3 \vee x > 5$,
d) $-2 < x < -1 \vee 2 < x < 3$, e) $2 < x < \frac{7}{3} \vee x > 3$, f) $-6 < x < -4 \vee x > 2$.

**4.64.** a) $-7 < x < -1 \vee 5 < x < 9$, b) $-1 < x < 0 \vee 1 < x < 4$,
c) $-\sqrt{5} < x < 0 \vee 2 < x < \sqrt{5}$, d) $x < -2 \vee -1 \leqslant x \leqslant 2 \vee x > 3$,
e) $x < -2 \vee -1 < x < 3 \vee x > 5$, f) $-\frac{7}{4} < x < -\frac{2}{3} \vee x > 1$.

**4.65.** a) $x < -3 \vee -1 < x < 0 \vee x > 6$, b) $x < -4 \vee -1 < x < 0 \vee x > 1$, c) $0 < x < 2$, d) $x \leqslant \frac{1}{2} \vee 3 < x \leqslant 4 \vee x > 5$ con $x \neq 0 \wedge x \neq -4$ , e) $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ con $x \neq 0$, f) $x < -1 \vee 1 < x \leqslant 10 - \sqrt{74} \vee x \geqslant 10 + \sqrt{74}$.

**4.66.** a) $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$, b) $x < -2 \vee x > 2$, c) $x < -3 \vee -\frac{13}{6} < x < 3 \vee x > 4$, d) $-\frac{5}{2} < x \leqslant -\frac{3}{2} \vee \frac{1}{2} < x \leqslant \frac{7}{2}$, e) $x \leqslant -\frac{3}{2}$ con $x \neq -2$, f) $-3 < x < 2$.

**4.67.** a) $-1 < x < 1$, b) $\frac{3}{2} < x < \frac{7}{2} \vee x < -1$, c) $\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{7}{2}$ con $x \neq 1$.

**4.68.** $-1 - \sqrt{2} \leqslant x < 0 \vee -1 + \sqrt{2} \leqslant x < 2$.

**4.70.** $-\frac{3}{2} \leqslant x < -\frac{4}{5}$.

**4.71.** 5.

**4.75.** a) $x < -2 \vee 2 < x$, b) $\frac{5}{2} < x \leqslant 3$, c) $3 < x < 4$, d) $-3 \leqslant x \leqslant -\frac{5}{2}$.

**4.76.** a) $x < -7 \vee x > 7$, b) $x > 2$, c) $x < 6$, d) $x \leqslant -1 \vee 1 \leqslant x < 2 \vee 2 < x \leqslant 6$.

**4.77.** a) $\emptyset$, b) $x = -3$, c) $\frac{2}{3} \leqslant x < 1 \vee x > 3$, d) $x = 0$.

**4.78.** a) $1 < x < 2 \vee x > 3$, b) $2 < x < 3 \vee 4 < x \leqslant 8$, c) $x = 1$, d) $\emptyset$.

**4.79.** a) $x < 5 \vee 5 < x < 7$, b) $x < 7$, c) $0 < x < \frac{1}{2} \vee 2 < x < 3$, d) $x \leqslant -\sqrt{3}$.

**4.80.** a) $2 < x \leqslant 3$, b) $\emptyset$, c) $x \leqslant -5 \vee x \geqslant 0$, d) $x \leqslant -5 \vee 0 \leqslant x < 1 \vee x > 1$.

**4.81.** a) $\emptyset$, b) $x = 2$, c) $x = 2$, d) $3 < x < 4 \vee -1 < x < 0 \vee 1 < x \leqslant 2$, e) $2 \leqslant x < -1 \vee x \geqslant 7$.

**4.82.** $3, 4, 5$.

**4.83.** $x < -1 \vee x > 2$.

# Complementi di algebra III

"Canterbury Cathedral"
Foto di Bortescristian
http://www.flickr.com/photos/bortescristian/5083747705/
Licenza: Attribuzione 2.0 Generico (CC BY 2.0)

# Equazioni di grado superiore al secondo 5

## 5.1 L'equazione di terzo grado, un po' di storia

Problema: "Trovare un numero il cui cubo, insieme con due suoi quadrati e dieci volte il numero stesso, dia come somma 20".

Il problema enunciato venne posto da Giovanni Panormita, astronomo e filosofo alla corte di Federico II, a Leonardo Pisano, detto Fibonacci, che ne tentò la soluzione nella sua opera Flos.

Con il linguaggio matematico attuale il problema si formalizza nell'equazione di terzo grado $x^3+2x^2+10x=20$; Fibonacci pervenne al valore approssimato $x=1{,}3688$ come soluzione al problema, senza indicare la via seguita per la sua determinazione. Pur tuttavia egli riuscì a dimostrare che le soluzioni di un'equazione di terzo grado non possono mai esprimersi mediante radicali quadratici neanche se sovrapposti.

Solo tra il 1540 e il 1545, ad opera dei matematici italiani Niccolò Fontana, detto Tartaglia, e Gerolamo Cardano, fu scoperta la formula risolutiva dell'equazione generale di terzo grado.

Cardano dimostra che ogni equazione di terzo grado $ax^3+bx^2+cx+d=0$ è riconducibile alla forma $y^3+py+q=0$. Operando con la sostituzione $x=y-\frac{b}{3a}$ si ricava la formula risolutiva:

$$y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$

da cui poi risale alla soluzione dell'equazione assegnata.

---

**Esempio 5.1.** Risolvere l'equazione: $x^3+3x^2+6x+5=0$.

Operiamo la sostituzione $x=y-\frac{b}{3a}$ che in questo caso è $x=y-1$; l'equazione diventa $(y-1)^3+3(y-1)^2+6(y-1)+5=0$ ed eseguendo i calcoli si ha $y^3+3y+1=0$ con $p=3$ e $q=1$. Applicando la formula risolutiva si ha

$$y=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+1}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+1}}=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-\sqrt{5}-1}{2}}$$

e quindi $x=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-\sqrt{5}-1}{2}}-1$.

**Esempio 5.2.** Risolvere l'equazione $x^3=15x+4$ applicando la formula di Cardano.

Notiamo che è $p=-15$ e $q=-4$ e dunque sotto la radice quadrata della formula si ha $\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2=(-5)^3+(-2)^2=-121$ pertanto non un numero reale, mentre è evidente la soluzione reale $x=4$. Questa circostanza ha spinto il matematico Raffaele Bombelli, ad elaborare nella sua opera "Algebra" del 1572, calcoli con radici quadrate di numeri negativi (numeri) che troveranno una sistemazione coerente nella teoria dei numeri complessi sviluppata da Fiedrich Gauss.

Vediamo come possiamo determinare l'I.S. dell'equazione di Bombelli con le nostre conoscenze. Scriviamo l'equazione nella forma canonica $p(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 15x - 4 = 0$; sappiamo che uno zero intero è $x = 4$ dunque scomponiamo dividendo $p(x) = x^3 - 15x - 4$ per il binomio $x - 4$. Potete verificare che si ottiene $x^3 - 15x - 4 = (x - 4) \cdot (x^2 + 4x + 1) = 0$ da cui, per la legge di annullamento del prodotto,

$$x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \vee x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}.$$

Poco dopo la scoperta della formula risolutiva per le equazioni di terzo grado il matematico italiano Ferrari trovò anche la formula per risolvere le equazioni di quarto grado. Le ricerche per trovare la formula che risolvesse l'equazione di quinto grado furono invece vane, non perché i matematici non furono abbastanza "ingegnosi" bensì per il fatto che, come dimostrò Galois non esistono formule che per mezzo di radici ed altre operazioni algebriche possano risolvere le equazioni dal quinto grado in poi. In altre parole esistono solo formule per le equazioni di secondo, terzo e quarto grado.

Oggigiorno, tuttavia, si preferisce non approfondire le applicazioni di queste formule. Si usa applicare solo la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado e per quelle di grado superiore al secondo si applicano i metodi che vedremo in questo capitolo oppure si preferisce applicare metodi di calcolo numerico che danno le soluzioni per approssimazioni successive.

---

## 5.2 Equazioni riconducibili al prodotto di due o più fattori

In questo capitolo ci proponiamo di determinare l'Insieme Soluzione di equazioni algebriche di grado superiore al secondo.

Ricordiamo che un'equazione algebrica si presenta nella forma $p(x) = 0$ dove $p(x)$ è un polinomio nella variabile $x$, di grado $n$, a coefficienti reali:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0.$$

---

**Esempio 5.3.** Determinare le radici reali dell'equazione $4x^3 + x^2 - 4x - 1 = 0$.

Scomponiamo in fattori il polinomio al primo membro mediante raccoglimento parziale:

$$p(x) = 4x^3 + x^2 - 4x - 1 = 4x\left(x^2 - 1\right) + \left(x^2 - 1\right) = \left(x^2 - 1\right)(4x + 1).$$

Per la legge dell'annullamento del prodotto si ottiene

$$x^2 - 1 = 0 \vee 4x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \vee x_2 = 1 \text{ e } 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}.$$

L'equazione ha dunque tre soluzioni reali distinte e $\text{I. S.} = \left\{-1; 1; -\frac{1}{4}\right\}$.

**Esempio 5.4.** Determinare le radici reali dell'equazione fratta $\frac{2x+3}{2x+1} + \frac{x^2}{x+1} = 5x + 3$.

Riduciamo allo stesso denominatore

$$\frac{2x^2 + 5x + 3 + 2x^3 + x^2 - 10x^3 - 15x^2 - 5x - 6x^2 - 9x - 3}{(2x + 1) \cdot (x + 1)} = 0.$$

Poniamo le Condizioni d'Esistenza $x \neq -\frac{1}{2} \wedge x \neq -1$. Eliminiamo il denominatore e sommiamo i monomi simili; otteniamo un'equazione di terzo grado $8x^3 + 18x^2 + 9x = 0$. Scomponiamo in fattori il polinomio $x \cdot \left(8x^2 + 18x + 9\right) = 0$. Per la legge di annullamento $x = 0 \vee x^2 + 18x + 9 = 0$. Risolvendo anche l'equazione di secondo grado con la formula risolutiva si ottengono le soluzioni $x_1 = 0 \vee x_2 = -\frac{3}{4} \vee x_3 = -\frac{3}{2}$.

❑ **Osservazione** Si dimostra che un'equazione ammette tante soluzioni, che possono essere reali e distinte, coincidenti o non reali, quante ne indica il suo grado.

Ricordiamo che uno zero di un polinomio è il valore che assegnato alla variabile rende il polinomio uguale a zero. L'obiettivo posto viene raggiunto ponendo il polinomio uguale a zero, come nell'esempio seguente.

**Esempio 5.5.** Trovare gli zeri del seguente polinomio di terzo grado $p(x) = x^3 - 7x^2 + 4x + 12$.

Scriviamo l'equazione $x^3 - 7x^2 + 4x + 12 = 0$ e cerchiamo di scomporre con il metodo di Ruffini. Sostituendo $x = -1$ si ottiene $(-1)^3 - 7(-1)^2 + 4(-1) + 12 = -1 - 7 - 4 + 12 = 0$. Possiamo allora dividere il polinomio $x^3 - 7x^2 + 4x + 12 = 0$ per il binomio $x + 1$. Applicando la regola di Ruffini si ha:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -7 & 4 & 12 \\ -1 & & -1 & 8 & -12 \\ \hline & 1 & -8 & 12 & // \end{array}$$

Il polinomio si scompone in $(x + 1)(x^2 - 8x + 12)$. Per la legge di annullamento del prodotto $x + 1 = 0 \vee x^2 - 8x + 12 = 0$. L'equazione $x + 1 = 0$ dà come soluzione $x = -1$. L'equazione $x^2 - 8x + 12 = 0$ si può risolvere con la formula risolutiva ridotta $x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 12} = 4 \pm 2$. Il polinomio assegnato ha tre zeri distinti $x_1 = -1 \vee x_2 = 2 \vee x_3 = 6$.

---

✍ *Esercizi proposti:* 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7, 5.8, 5.9, 5.10, 5.11

## 5.3 Equazioni binomie

Un'equazione binomia è un'equazione del tipo $ax^n + b = 0$ con $a \neq 0$ e con $n \in \mathbb{N}_0$. L'equazione così scritta è detta in *forma normale o canonica*. Dobbiamo distinguere i casi:

- $n$ pari e $a \cdot b < 0$. I coefiicienti $a$ e $b$ hanno segno discorde. L'equazione ammette due sole soluzioni reali ed opposte: $x_1 = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}} \vee x_2 = -\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$;
- $n$ pari e $a \cdot b > 0$. I coefiicienti $a$ e $b$ hanno lo stesso segno. L'equazione non ammette soluzioni reali;
- $n$ dispari e $b \neq 0$. L'equazione ha un'unica soluzione reale $x_1 = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$;
- $b = 0$. L'equazione è $ax^n = 0$ e le $n$ soluzioni sono coincidenti nell'unica soluzione $x = 0$. In questo caso si dice che l'unica soluzione $x = 0$ ha molteplicità $n$.

**Esempio 5.6.** Risolvere le seguenti equazioni binomie

- $3x^4 - 8 = 0$.

  L'esponente $n$ è pari, i coefficienti sono discordi: l'equazione ammette due soluzioni reali distinte: $x_1 = \sqrt[4]{\frac{8}{3}} \vee x_2 = -\sqrt[4]{\frac{8}{3}}$.

  Osserviamo che l'equazione proposta può essere risolta col metodo della scomposizione in fattori: $3x^4 - 8 = 0 \Rightarrow \left(\sqrt{3}x^2 + \sqrt{8}\right) \cdot \left(\sqrt{3}x^2 - \sqrt{8}\right) = 0$ e per la legge di annullamento del prodotto $\left(\sqrt{3}x^2 + \sqrt{8}\right) = 0 \vee \left(\sqrt{3}x^2 - \sqrt{8}\right) = 0$ la prima equazione non ha soluzioni reali, mentre per la seconda $\left(\sqrt{3}x^2 - \sqrt{8}\right) = 0 \Rightarrow x^2 = \sqrt{\frac{8}{3}} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\sqrt{\frac{8}{3}}} \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{\frac{8}{3}}$

- $-6x^4 + 9 = 13$.

  Riducendo alla forma normale troviamo $-6x^4 - 4 = 0$; moltiplicando ambo i membri per $-1$ si ottiene $6x^4 + 4 = 0$ in cui il primo membro è una somma di numeri sempre positivi sempre maggiore di zero, quindi in $\mathbb{R}$ l'equazione è impossibile e $\text{I. S.} = \emptyset$.

- $8x^3 + 3 = 4$.

  Riduciamo l'equazione alla forma normale $8x^3 - 1 = 0$. Essendo di grado dispari, l'unica soluzione è $x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$.

  Allo stesso risultato perveniamo se scomponiamo in fattori la differenza di due cubi: $8x^3 - 1 = 0 \Rightarrow (2x - 1) \cdot \left(4x^2 + 2x + 1\right) = 0$. Per la legge di annullamento del prodotto $2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \vee 4x^2 + 2x + 1 = 0$ l'equazione di secondo grado non ha soluzioni reali essendo $\Delta < 0$. Pertanto l'unica soluzione è $x = \frac{1}{2}$ e $\text{I. S.} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

- $2x^7 + 3 = 2$.

  In forma normale $2x^7 + 1 = 0$. Si trova così l'unica soluzione reale $x = \sqrt[7]{-\frac{1}{2}} = -\sqrt[7]{\frac{1}{2}}$.

- $3x \cdot \left(x^4 - 1\right) = 4 \cdot (1 + x) - (7x + 4)$.

  Sviluppando i calcoli si ottiene $3x^5 = 0 \Rightarrow x^5 = 0$ da cui $x = 0$ che ha una sola soluzione reale con molteplicità 5.

- $x^3 + 3 = 0$.

  L'equazione ha l'unica soluzione reale $x = -\sqrt[3]{3}$. Spieghiamo il risultato scomponendo la somma di cubi $(x)^3 + \left(\sqrt[3]{3}\right)^3 = 0 \Rightarrow \left(x + \sqrt[3]{3}\right)\left(x^2 - x\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{3^2}\right) = 0$, per la legge di annullamento del prodotto otteniamo: $\left(x + \sqrt[3]{3}\right) = 0 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{3}$ e $x^2 - \sqrt[3]{3}x + \sqrt[3]{3^2} = 0$ che non ha soluzioni reali essendo $\Delta < 0$.

✍ *Esercizi proposti:* 5.12, 5.13, 5.14, 5.15, 5.16, 5.17, 5.18, 5.19, 5.20

## 5.4 Equazioni trinomie

Un'equazione *trinomia* è un'equazione con tre termini del tipo $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ dove $n$ è un intero positivo e i coefficienti $a$ e $b$ sono non nulli. Sono esempi di equazioni trinomie $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$, $x^6 - 4x^3 + 3 = 0$, $x^{10} - x^5 + 6 = 0$.

Per risolvere queste equazioni è opportuno fare un cambio di incognita: ponendo $t = x^n$ l'equazione trinomia diventa di secondo grado: $at^2 + bt + c = 0$ e da questa, detta *equazione risolvente*, si ricavano i valori di $t$. Successivamente, dalla relazione $t = x^n$, si ricavano i valori di $x$.

### 5.4.1 Equazione biquadratica

Se $n = 2$ l'equazione è detta *biquadratica* e si presenta nella forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$.

---

**Esempio 5.7.** Risolvere le seguenti equazioni biquadratiche.

- $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

  L'equazione è biquadratica; facciamo un cambio di incognita ponendo $x^2 = t$; l'equazione diventa $t^2 - 5t + 4 = 0$ che ha due soluzioni reali distinte $t_1 = 1 \vee t_2 = 4$. Per determinare le soluzioni dell'equazione assegnata teniamo conto della sostituzione fatta. Da $t_1 = 1$ otteniamo $x^2 = 1$ con soluzioni $x_1 = -1 \vee x_2 = +1$ e da $t_2 = 4$ otteniamo $x^2 = 4$ con soluzioni $x_1 = -2 \vee x_2 = +2$. Pertanto l'equazione assegnata ha quattro soluzioni reali distinte e $\text{I. S.} = \{-1; +1 - 2; +2\}$.

- $2x^4 + 3x^2 - 2 = 0$.

  L'equazione è biquadratica, ponendo $x^2 = t$ diventa $2t^2 + 3t - 2 = 0$ che ha per soluzioni $t_1 = -2 \vee t_2 = \frac{1}{2}$. Ritornando alla sostituzione iniziale, da $t_1 = -2$ otteniamo $x^2 = -2 \Rightarrow \text{I. S.} = \emptyset$ e da $t_2 = \frac{1}{2}$ otteniamo $x^2 = \frac{1}{2}$ con soluzioni $x_1 = -\sqrt{\frac{1}{2}} \vee x_2 = +\sqrt{\frac{1}{2}}$ e razionalizzando $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x_2 = +\frac{\sqrt{2}}{2}$.

- $x^4 - \frac{16}{9}x^2 = 0$.

  L'equazione è biquadratica incompleta; si può determinare l'insieme soluzione raccogliendo $x^2$ a fattore comune $x^2\left(x^2 - \frac{16}{9}\right) = 0$ e per la legge di annullamento del prodotto possiamo concludere $x^2 = 0 \vee x^2 = \frac{16}{9}$ da cui $\text{I. S.} = \left\{0; -\frac{4}{3}; +\frac{4}{3}\right\}$.

---

❍ **Conclusione** L'equazione biquadratica $ax^4 + bx^2 + c = 0$

- ha quattro soluzioni reali distinte se il discriminante dell'equazione risolvente è positivo e se risultano positivi anche i rapporti $-\frac{b}{a}$ e $\frac{c}{a}$ che indicano rispettivamente la somma e il prodotto delle sue soluzioni. Infatti . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ;
- ha due soluzioni reali distinte se il discriminante dell'equazione risolvente è positivo e se risulta negativo il rapporto $\frac{c}{a}$ che indica il prodotto delle sue soluzioni. Infatti . . . . . ;
- non ha soluzioni reali se il discriminante dell'equazione risolvente è positivo e se risulta positivo il rapporto $\frac{c}{a}$ e negativo il rapporto $-\frac{b}{a}$. Infatti . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ;
- non ha soluzioni reali se il discriminante dell'equazione risolvente è negativo.

Per stabilire il numero di soluzioni di un'equazione biquadratica si può anche utilizzare la regola dei segni di Cartesio:

- $\Delta > 0$ e due variazioni si hanno 4 soluzioni reali;
- $\Delta > 0$ una permanenza e una variazione si hanno 2 soluzioni reali;
- $\Delta = 0$ e $-\frac{b}{2a} > 0$ si hanno due soluzioni reali; $-\frac{b}{2a} < 0$ nessuna soluzione reale;
- $\Delta < 0$ nessuna soluzione reale.

✍ *Esercizi proposti:* 5.21, 5.22, 5.23, 5.24, 5.25, 5.26, 5.27, 5.28, 5.29, 5.30, 5.31

### 5.4.2 Equazioni trinomie con n maggiore di 2

---

**Esempio 5.8.** Risolvere le seguenti equazioni trinomie.

- $x^6 - 4x^3 + 3 = 0$.

  Ponendo $t = x^3$ abbiamo l'equazione risolvente $t^2 - 4t + 3 = 0$, le cui soluzioni reali sono $t_1 = 1$, $t_2 = 3$; per ricavare i valori di $x$ è sufficiente risolvere le due equazioni binomie $x^3 = 1$ e $x^3 = 3$, trovando così le soluzioni reali per l'equazione assegnata $x_1 = 1 \vee x_2 = \sqrt[3]{3}$;

- $x^8 - x^4 - 2 = 0$.

  Ponendo $t = x^4$ arriviamo all'equazione $t^2 - t - 2 = 0$ da cui $t_1 = 2$ e $t_2 = -1$; pertanto le due equazioni binomie da risolvere sono: $x^4 = 2$ e $x^4 = -1$. Quindi $x^4 = 2 \Rightarrow x^2 = -\sqrt{2} \vee x^2 = \sqrt{2}$ e di queste due, solo la seconda ha soluzioni reali e precisamente $x_1 = \sqrt[4]{2}$; $x_2 = -\sqrt[4]{2}$; $x^4 = -1$ non ha soluzioni reali, concludendo: $\text{I.S.} = \left\{-\sqrt[4]{2}; +\sqrt[4]{2}\right\}$.

---

✍ *Esercizi proposti:* 5.32, 5.33

## 5.5 Equazioni che si risolvono con sostituzioni

Molte altre equazioni si possono risolvere con opportune sostituzioni.

---

**Esempio 5.9.** Risolvere la seguente equazione $\left(x^2 - 4\right)^4 - 1 = 0$.

Sostituendo $t = x^2 - 4$ l'equazione diventa $t^4 - 1 = 0$. È un'equazione binomia che ha per soluzioni $t_1 = -1$, $t_2 = +1$. Sostituendo questi valori nella relazione $t = x^2 - 4$ si ha:

$$x^2 - 4 = -1 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{3} \text{ e } x^2 - 4 = +1 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow x_{3,4} = \pm\sqrt{5}.$$

---

✍ *Esercizi proposti:* 5.34,5.35,5.36, 5.37

## 5.6 Equazioni reciproche

**Definizione 5.1.** Un'equazione è detta *reciproca di prima specie* se, posta nella forma canonica $p(x) = 0$, il polinomio $p(x)$ ha i coefficienti dei termini estremi e quelli dei termini equidistanti dagli estremi *uguali*.

Un'equazione è detta *reciproca di seconda specie* se, posta nella forma canonica $p(x) = 0$, il polinomio $p(x)$ ha i coefficienti dei termini estremi e quelli dei termini equidistanti dagli estremi *opposti*. In particolare, se $p(x)$ ha grado $2k$ (pari), il coefficiente di $x^k$ è nullo.

- $x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$ è un'equazione di terzo grado reciproca di prima specie;
- $3x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 5x + 3 = 0$ è un'equazione di quarto grado reciproca di prima specie;
- $-7x^4 + 5x^3 - 5x + 7 = 0$ è un'equazione di quarto grado reciproca di seconda specie;
- $3x^5 + 2x^4 + 6x^3 - 6x^2 - 2x - 3 = 0$ è un'equazione di quinto grado reciproca di seconda specie;
- $-2x^4 + 8x^3 + 3x^2 - 8x + 2 = 0$ è un'equazione di quarto grado, ma non è reciproca di seconda specie, in quanto il coefficiente di secondo grado dovrebbe essere nullo.

Il seguente teorema mette in luce una importante proprietà di cui godono queste equazioni.

**Teorema 5.1** (delle radici reciproche). *Se $\lambda$ è una radice non nulla di un'equazione reciproca di qualunque grado, allora anche $\frac{1}{\lambda}$ è radice dell'equazione.*

Consideriamo l'equazione reciproca di prima specie

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0.$$

*Ipotesi.* $x = \lambda$ è una radice dell'equazione;
*Tesi.* $x = \frac{1}{\lambda}$ è una radice dell'equazione.

*Dimostrazione.* Sappiamo che se $x = \lambda$ è una radice allora è vera l'uguaglianza

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots\ldots + a_1\lambda + a_0 = 0^{(*)}.$$

Sostituiamo $\frac{1}{\lambda}$ al posto della $x$ nel polinomio al primo membro, si ha:

$$p\left(\frac{1}{\lambda}\right) = a_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)^n + a_1\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n-1} + \ldots + a_1\left(\frac{1}{\lambda}\right) + a_0$$

che, mettendo in evidenza $\left(\frac{1}{\lambda}\right)^n$, diventa:

$$p\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda^n}\left(a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_1\lambda^{n-1} + a_0\lambda^n\right) = \frac{a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_1\lambda^{n-1} + a_0\lambda^n}{\lambda^n}.$$

Osservando il numeratore notiamo che è proprio quanto scritto in (*) e pertanto, essendo il denominatore diverso da zero, si ha $p\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 0$ che dimostra la tesi. □

Dimostra tu il teorema per le equazioni di seconda specie.

### 5.6.1 Equazioni di terzo grado reciproche di prima specie

Queste equazioni hanno la seguente struttura:

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_1x + a_0 = 0.$$

Una radice dell'equazione è $x = -1$, infatti sostituendo tale valore al posto della $x$ nel polinomio al primo membro si ottiene:

$$p(-1) = a_0(-1)^3 + a_1(-1)^2 + a_1(-1) + a_0 = -a_0 + a_1 - a_1 + a_0 = 0.$$

Ricordiamo che secondo la regola del resto, il valore trovato (zero) ci assicura che il polinomio al primo membro è divisibile per $x+1$; con la divisione polinomiale o con la regola di Ruffini possiamo scrivere $a_0x^3 + a_1x^2 + a_1x + a_0 = (x+1) \cdot \left(a_0x^2 + (a_1 - a_0)x + a_0\right) = 0$ da cui con la legge di annullamento del prodotto possiamo determinare le soluzioni dell'equazione assegnata.

Un modo alternativo per determinare l'Insieme Soluzione dell'equazione reciproca di prima specie consiste nel raccogliere parzialmente i due coefficienti $a_0$ e $a_1$ in modo da ottenere $a_0\left(x^3+1\right) + a_1\left(x^2+x\right) = 0$ da cui $a_0(x+1)\left(x^2-x+1\right) + a_1x(x+1) = 0$ e raccogliendo il binomio $(x+1)$ ritroviamo la fattorizzazione precedente: $(x+1)\left(a_0x^2 + (a_1-a_0)x + a_0\right) = 0$.

---

**Esempio 5.10.** Risolvere le seguenti equazioni di terzo grado di prima specie.

➡ $x^3 - 5x^2 - 5x + 1 = 0.$

Si tratta di un'equazione di terzo grado reciproca di prima specie. Una radice è $x = -1$, per cui possiamo fattorizzare il polinomio al primo membro eseguendo la divisione polinomiale e ottenere $(x+1)\left(x^2-6x+1\right) = 0$. Per la legge di annullamento del prodotto otteniamo la radice $x = -1$ già nota e, risolvendo l'equazione $x^2 - 6x + 1 = 0$ troviamo le altre radici $x_2 = 3 + 2\sqrt{2}$ e $x_3 = 3 - 2\sqrt{2}$ e quindi I. S. $= \left\{-1; 3+2\sqrt{2}; 3-2\sqrt{2}\right\}$.

Notiamo che $x_2$ e $x_3$ sono tra loro reciproche: $x_1 \cdot x_2 = 1$ cioè $(3+2\sqrt{2}) \cdot (3-2\sqrt{2}) = 1$.

➡ $3x^3 - 5x^2 - 5x + 3 = 0$

L'equazione assegnata è reciproca di terzo grado e di prima specie ammette dunque $x = -1$ come radice. Infatti $p(-1) = 3(-1)^3 - 5(-1)^2 - 5(-1) + 3 = \ldots$ Il polinomio al primo membro si può scomporre con la regola di Ruffini cioè $(x+1)\left(3x^2-8x+3\right) = 0$; per la legge di annullamento del prodotto avremo $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ come già noto e $3x^2 - 8x + 3 = 0$ con soluzioni $x_2 = \ldots$ e $x_3 = \ldots$ con insieme soluzione: I. S. $= \{\ldots\ldots\}$.

---

✍ *Esercizi proposti:* 5.38,5.39,5.40, 5.41

### 5.6.2 Equazioni di terzo grado reciproche di seconda specie

Queste equazioni hanno la seguente struttura:

$$a_0x^3 + a_1x^2 - a_1x - a_0 = 0.$$

$x = 1$ è una radice, basta verificare sostituendo tale valore al posto della $x$ nel polinomio al primo membro si ottiene:

$$p(1) = a_0(1)^3 + a_1(1)^2 - a_1(1) - a_0 = a_0 + a_1 - a_1 - a_0 = 0.$$

Procedendo come nel caso precedente si può ottenere la scomposizione in fattori del polinomio al primo membro: $(x-1)\cdot\left(a_0x^2+(a_0+a_1)x+a_0\right)=0$ e quindi determinare l'I.S. dell'equazione assegnata applicando la legge di annullamento del prodotto.

---

**Esempio 5.11.** Risolvere le seguenti equazioni di terzo grado di seconda specie

- $2x^3-7x^2+7x-2=0$.

  È un'equazione di terzo grado reciproca di seconda specie, i coefficienti infatti sono opposti a due a due. Una radice è $x_1=1$ infatti $p(1)=2-7+7-2=0$. Applicando la regola di Ruffini per scomporre il polinomio di terzo grado si ottiene $(x-1)\left(2x^2-5x+2\right)=0$. Per la legge di annullamento del prodotto abbiamo la radice $x=1$ già nota e risolvendo $\left(2x^2-5x+2\right)=0$ si ricavano le altre due radici: $x_2=2$ e $x_3=\frac{1}{2}$ e dunque $\text{I.S.}=\left\{1;2;\frac{1}{2}\right\}$.

- $2x^3-9x^2+9x-2=0$.

  L'equazione assegnata è reciproca di terzo grado e di seconda specie perché ha i coefficienti opposti a due a due,e dunque ammette $x=+1$ come radice. Infatti $p(1)=\dots$ Applichiamo la regola di Ruffini per scomporre in fattori il polinomio di terzo grado. Il polinomio si scompone in $(x-1)\left(2x^2-\dots\dots\right)=0$. Per la legge di annullamento del prodotto avremo $x-1=0\Rightarrow x=1$ come già noto e $2x^2-7x+2=0$ con soluzioni $x_2=\dots$ e $x_3=\dots$ con insieme soluzione: $\text{I.S.}=\{\dots\dots\dots\}$. L'equazione assegnata ha tre soluzioni reali di cui le due irrazionali sono l'una il reciproco dell'altra.

---

✍ *Esercizi proposti:* 5.42,5.43,5.44

### 5.6.3 Equazioni di quarto grado reciproche di prima specie

Rientrano in questa classificazione le equazioni del tipo:

$$a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0.$$

Prima di tutto osserviamo che $x=0$ non può essere una radice in quanto, se lo fosse, sarebbe nullo il termine noto, cioè $a_0=0$ e di conseguenza sarebbe nullo anche il coefficiente di $x^4$, il grado dell'equazione diventerebbe $\leqslant 3$. Questa premessa ci consente di dividere per $x^2$ ottenendo l'equazione equivalente data $a_0x^2+a_1x+a_2+\frac{a_1}{x}+\frac{a_0}{x^2}=0$, raccogliendo a fattori parziali si ha $a_0\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+a_1\left(x+\frac{1}{x}\right)+a_2=0$.

Ponendo $t=x+\frac{1}{x}$ quindi $t^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\Rightarrow t^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$ e $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$. Sostituendo nell'equazione $a_0\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+a_1\left(x+\frac{1}{x}\right)+a_2=0$ ricaviamo la seguente equazione di secondo grado equivalente alla data: $a_0\left(t^2-2\right)+a_1t+a_2=0\ \Rightarrow\ a_0t^2+a_1t+a_2-2a_0=0$.

Trovate, se esistono reali, le radici $t_1$ e $t_2$ di questa equazione, possiamo determinare le corrispondenti radici dell'equazione iniziale risolvendo le due equazioni fratte $x+\frac{1}{x}=t_1$ e $x+\frac{1}{x}=t_2$ nell'incognita $x$, rispettivamente equivalenti a $x^2-t_1x+1=0$ e a $x^2-t_2x+1=0$.

Queste ultime equazioni hanno soluzioni reali se e solo se $|t|\geqslant 2$. Infatti, risolvendo rispetto a $x$ l'equazione $x+\frac{1}{x}=t$, troviamo: $x^2-tx+1=0$ e calcolando il discriminante $\Delta=t^2-4$ vediamo che ci sono soluzioni reali se e solo se $t^2-4\geqslant 0$ ovvero se e solo se $t\leqslant -2\vee t\geqslant 2$ cioè $|t|\geqslant 2$.

**Esempio 5.12.** Risolvere le seguenti equazioni reciproche di quarto grado di prima specie.

- $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$.

  Si tratta di un'equazione di quarto grado reciproca di prima specie. Dividiamo per $x^2$, otteniamo $x^2 - 4x + 5 - 4\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$. Raccogliendo in fattori comuni come nella regola abbiamo $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 5 = 0$. Ponendo $t = x + \frac{1}{x}$ otteniamo l'equazione $\left(t^2 - 2\right) - 4t + 5 = 0$ ovvero $t^2 - 4t + 3 = 0$ da cui $t_1 = 1$ e $t_2 = 3$. Il primo valore $t_1$ non dà soluzioni reali poiché l'equazione $x + \frac{1}{x} = 1$ ha il discriminante negativo mentre l'equazione $x + \frac{1}{x} = 3$ ha due soluzioni reali distinte $x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ e $x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

- $2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0$.

  Dividiamo ambo i membri dell'equazione per $x^2$, certamente diverso da zero e otteniamo: $2x^2 + 3x - 16 + 3 \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{x^2} = 0$. Mettiamo in evidenza 2 nel primo e quinto addendo e 3 tra il secondo e quarto addendo: $2 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) - 16 = 0$. Ponendo $x + \frac{1}{x} = t$ otteniamo l'equazione $2(t^2 - 2) + 3t - 16 = 0 \Rightarrow 2t^2 + 3t - 20 = 0$ che ha come soluzioni $t_1 = -4 \vee t_2 = \frac{5}{2}$. Poiché $|t| \geqslant 2$ le equazioni $x + \frac{1}{x} = t_1$ e $x + \frac{1}{x} = t_2$ hanno entrambe soluzioni reali distinte, pertanto $\text{I. S.} = \left\{-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, \frac{1}{2}, 2\right\}$.

✍ *Esercizi proposti:* 5.45,5.46

### 5.6.4 Equazioni di quarto grado reciproche di seconda specie

Fanno parte di questa classe le equazioni del tipo:

$$a_0x^4 + a_1x^3 - a_1x - a_0 = 0$$

in cui il coefficiente di $x^2$ è nullo. Per risolvere questa equazione, raccogliamo a fattore parziale $a_0$ e $a_1$ ottenendo: $a_0\left(x^4 - 1\right) + a_1\left(x^3 - x\right) = 0$ da cui $a_0\left(x^2 - 1\right)\left(x^2 + 1\right) + a_1x\left(x^2 - 1\right) = 0$.

Raccogliendo a fattore comune totale si ha:

$$\left(x^2 - 1\right)\left[a_0\left(x^2 + 1\right) + a_1x\right] = 0 \Rightarrow (x - 1)(x + 1)\left(a_0x^2 + a_1x + a_0\right) = 0.$$

Per la legge di annullamento del prodotto si hanno quindi le due radici $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ e le eventuali radici reali dell'equazione di secondo grado $a_0x^2 + a_1x + a_0 = 0$.

**Esempio 5.13.** Risolvere l'equazione $x^4 - 8x^3 + 8x - 1 = 0$.

Si tratta di un'equazione di quarto grado reciproca di seconda specie, si osservi che il coefficiente di secondo grado è nullo e che gli altri coefficienti sono a due a due opposti. Raccogliendo a fattore comune parziale abbiamo

$$(x^4 - 1) - 8x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow (x^2 - 1)(x^2 + 1) - 8x(x^2 - 1) = 0.$$

Mettendo poi in evidenza il binomio $\left(x^2 - 1\right)$ abbiamo: $\left(x^2 - 1\right)\left(x^2 - 8x + 1\right)$. Risolvendo le equazioni $x^2 - 1 = 0$ e $x^2 - 8x + 1 = 0$, otteniamo tutte le radici:

$$x_1 = 1 \vee x_2 = -1 \vee x_3 = 4 + \sqrt{15} \vee x_4 = 4 - \sqrt{15}$$

e quindi

$$\text{I. S.} = \left\{-1; 1; 4+\sqrt{15}; 4-\sqrt{15}\right\}.$$

---

✍ *Esercizi proposti:* 5.47,5.48,5.49,5.50,5.51

### 5.6.5 Equazioni di quinto grado reciproche di prima specie

Fanno parte di questa classe le equazioni del tipo:

$$a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0.$$

Con il raccoglimento parziale otteniamo:

$$a_0\left(x^5+1\right) + a_1\left(x^4+x\right) + a_2\left(x^3+x^2\right) = 0.$$

Applichiamo ora la formula per la scomposizione della somma di potenze ottenendo

$$a_0(x+1)\left(x^4-x^3+x^2-x+1\right) + a_1x(x+1)\left(x^2-x+1\right) + a_2x^2(x+1) = 0.$$

Raccogliendo $(x+1)$ ricaviamo:

$$(x+1)\left[a_0\left(x^4-x^3+x^2-x+1\right) + a_1x\left(x^2-x+1\right) + a_2x^2\right] = 0$$

e quindi l'equazione diventa:

$$(x+1)\left[a_0x^4 + (a_1-a_0)x^3 + (a_2-a_1+a_0)x^2 + (a_1-a_0)x + a_0\right] = 0.$$

Per la legge di annullamento del prodotto si determina la soluzione reale $x=-1$ e con i metodi analizzati in precedenza si risolve l'equazione di quarto grado reciproca di prima specie:

$$\left(a_0x^4 + (a_1-a_0)x^3 + (a_2-a_1+a_0)x^2 + (a_1-a_0)x + a_0\right) = 0.$$

---

**Esempio 5.14.** Risolvere l'equazione $6x^5 + x^4 - 43x^3 - 43x^2 + x + 6 = 0$.

L'equazione è di quinto grado reciproca di prima specie. Una radice è $x_1 = -1$ e l'equazione può essere scritta come:

$$(x+1)\left(6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6\right) = 0.$$

Risolvendo l'equazione di quarto grado reciproca di prima specie

$$6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0,$$

si trovano le altre quattro radici:

$$x_2 = -2, x_3 = -\frac{1}{2}, x_4 = 3, x_5 = \frac{1}{3}$$

quindi

$$\text{I. S.} = \left\{-1; -2; -\frac{1}{2}; 3; \frac{1}{3}\right\}.$$

---

### 5.6.6 Equazioni di quinto grado reciproche di seconda specie

Fanno parte di questa classe le equazioni del tipo:

$$a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 - a_2x^2 - a_1x - a_0 = 0.$$

Con il raccoglimento parziale si ottiene

$$a_0\left(x^5 - 1\right) + a_1\left(x^4 - x\right) + a_2\left(x^3 - x^2\right) = 0.$$

Applichiamo ora la formula per la scomposizione della somma di potenze ottenendo:

$$a_0(x-1)\left(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\right) + a_1x(x-1)\left(x^2 + x + 1\right) + a_2x^2(x-1) = 0.$$

Raccogliendo il binomio $(x-1)$ si ottiene

$$(x-1)\left[a_0\left(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\right) + a_1x\left(x^2 + x + 1\right) + a_2x^2\right] = 0$$

e quindi

$$(x+1)\left[a_0x^4 + (a_1 - a_0)x^3 + (a_2 - a_1 + a_0)x^2 + (a_1 - a_0)x + a_0\right] = 0.$$

Una radice è $x = 1$ e le altre provengono dall'equazione di quarto grado reciproca di prima specie:

$$a_0x^4 + (a_1 + a_0)x^3 + (a_2 + a_1 + a_0)x^2 + (a_1 + a_0)x + a_0 = 0.$$

---

**Esempio 5.15.** Risolvere l'equazione $x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 2x - 1 = 0$.

È un'equazione di quinto grado reciproca di seconda specie. Una radice è $x_1 = 1$ e l'equazione può essere scritta come:

$$(x-1)\left(x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x + 1\right) = 0.$$

Risolvendo l'equazione di quarto grado reciproca di prima specie

$$x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0,$$

si trovano altre due radici reali:

$$x_2 = -2 + \sqrt{3} \text{ e } x_3 = -2 - \sqrt{3},$$

pertanto

$$\text{I. S.} = \left\{+1; -2 + \sqrt{3}; -2 - \sqrt{3}\right\}.$$

---

### 5.6.7 Equazioni reciproche di sesto grado

---

**Esempio 5.16.** Risolvere l'equazione $-x^6 + 6x^5 + 6x^4 - 6x^2 - 6x + 1 = 0$.

Si tratta di un'equazione di sesto grado reciproca di seconda specie (si osservi che il termine di terzo grado è nullo); l'equazione ammette per radici $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$.

Possiamo quindi dividere il polinomio per il binomio $\left(x^2 - 1\right)$, ottenendo come quoziente $-x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 6x - 1$. Si tratta allora di risolvere un'equazione di quarto grado reciproca di prima specie. Si trovano in questo modo altre due radici reali: $x_3 = \frac{7+\sqrt{5}}{2}$ e $x_4 = \frac{7-\sqrt{5}}{2}$.

---

## 5.7 Esercizi

### 5.7.1 Esercizi dei singoli paragrafi

#### 5.2 - Equazioni riconducibili al prodotto di due o più fattori

**5.1 (*).** Trovare gli zeri dei seguenti polinomi.

a) $x^3+5x^2-2x-24$;
b) $6x^3+23x^2+11x-12$;
c) $8x^3-40x^2+62x-30$;
d) $x^3+10x^2-7x-196$;
e) $x^3+\frac{4}{3}x^2-\frac{17}{3}x-2$;
f) $x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{38}{3}x+\frac{56}{3}$.

**5.2 (*).** Trovare gli zeri dei seguenti polinomi.

a) $3x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{3}{2}x$;
b) $3x^3-9x^2-9x-12$;
c) $\frac{6}{5}x^3+\frac{42}{5}x^2+\frac{72}{5}x+12$;
d) $4x^3-8x^2-11x-3$;
e) $\frac{3}{2}x^3-4x^2-10x+8$;
f) $\frac{3}{2}x^3-4x^2-10x+8$.

**5.3 (*).** Trovare gli zeri dei seguenti polinomi.

a) $-3x^3+9x-6$;
b) $\frac{1}{2}x^3-3x^2+6x-4$;
c) $4x^3+4x^2-4x-4$;
d) $\frac{2}{5}x^3+\frac{8}{5}x^2+\frac{14}{5}x-4$;
e) $-6x^3-30x^2+192x-216$;
f) $x^3-2x^2-x+2$.

**5.4 (*).** Trovare gli zeri dei seguenti polinomi.

a) $9x^3-7x+2$;
b) $x^3-7x^2+4x+12$;
c) $x^3+10x^2-7x-196$;
d) $400x^3-1600x^2$;
e) $x^6-5x^5+6x^4+4x^3-24x^2+16x+32$;
f) $8x^3-14ax^2-5a^2x+2a^3$.

**5.5.** Trovare gli zeri dei seguenti polinomi.

a) $x^4-x^3-x^2-x-2$;
b) $3x^5-19x^4+42x^3-42x^2+19x-3$;
c) $ax^3-(a^2+1-a)x^2-(a^2+1-a)x+a$.

**5.6 (*).** Determinare l'insieme soluzione delle seguenti equazioni.

a) $x^3-3x+2=0$;
b) $x^3+2x^2+2x+1=0$;
c) $x^3-6x+9=0$;
d) $x^4-2x^2+1=0$;
e) $x^3+3x^2-x-3=0$;
f) $6x^3-7x^2-x+2=0$.

**5.7 (*).** Determinare l'insieme soluzione delle seguenti equazioni.

a) $x^3-6x^2+11x-6=0$;
b) $x^3-2x^4=0$;
c) $x^4-5x^3+2x^2+20x-24=0$;
d) $x^5+1=x\cdot\left(x^3+1\right)$;
e) $\frac{x^3+2-x\cdot(2x+1)}{2x-1}=0$;
f) $2x^2-2x+3(x-1)=2x\left(2x^2-1\right)$.

**5.8 (*).** Determinare l'insieme soluzione delle seguenti equazioni.

a) $(3x+1)^2 = x\left(9x^2+6x+1\right)$;
b) $(x+1)\left(x^2-1\right) = \left(x^2+x\right)\left(x^2-2x+1\right)$;
c) $(x-1)(x^2+x+1) = x(2-3x)+5$;
d) $x^3+4x^2+4x = x^2-4$;
e) $\sqrt{3}x^4-\sqrt{27}\,x^2 = 0$;
f) $(x+1)^3-(x-1)^3 = 8$.

**5.9 (*).** Determinare l'insieme soluzione delle seguenti equazioni.

a) $\sqrt{2}x^3-(1-2\sqrt{2})x^2-x = 0$;
b) $64x^7 = 27x^4$;
c) $(x^2-4x)^{2011} = -(4x-x^2)^{2011}$;
d) $(x^2-4x)^{2012} = -(4x-x^2)^{2011}$;
e) $x^7-x^6+\sqrt{27}x^5 = 0$;
f) $3x^4-14x^3+20x^2-8x = 0$.

**5.10 (*).** Determinare l'insieme soluzione delle seguenti equazioni.

a) $\frac{3x-1}{x^2} = 1-2x+\frac{1}{x}$;
b) $\frac{x-1}{x^2+5x+4}-\frac{2x+1}{x-1}-\frac{3}{2(x^2-1)} = 0$;
c) $\frac{x^2-3x}{2x}-\frac{x-2}{x-1} = 0$;
d) $\frac{x(x-1)}{x+1} = \frac{x-1}{x^2+2x+1}$;
e) $\frac{1}{x^4-4} = \frac{3}{x^4-16}$.
f) $\frac{x^2}{x^2+1}-\frac{1}{4-x^2}+\frac{1}{x^4-3x^2-4} = 0$;

**5.11 (*).** Determinare l'insieme soluzione delle seguenti equazioni.

a) $\frac{x^4-4x^2+9}{x^4-3x^2+2}-\frac{x^2-1}{x^2-2} = \frac{x^2-2}{x^2-1}$;
b) $(x^2-1)^3+7x^3 = 3x(4-x-x^3)-(x-2)^3$;
c) $\frac{x^2-1}{x^2-3}-\frac{x^2-3}{1-x^2} = \frac{10}{3}$.

## 5.3 - Equazioni binomie

**5.12.** Determinare l'insieme soluzione delle seguenti equazioni binomie.

a) $-2x^3+16 = 0$;
b) $x^5+15 = 0$;
c) $x^4+16 = 0$;
d) $-2x^4+162 = 0$;
e) $-3x^6+125 = 0$;
f) $81x^4-1 = 0$.

**5.13 (*).** Determinare l'insieme soluzione delle seguenti equazioni binomie.

a) $27x^3+1 = 0$;
b) $81x^4+1 = 0$;
c) $81x^8-1 = 0$;
d) $\frac{16}{x^4}-1 = 0$;
e) $x^6-1 = 0$;
f) $8x^3-27 = 0$.

**5.14 (*).** Determinare l'insieme soluzione delle seguenti equazioni binomie.

a) $x^5-1 = 0$;
b) $x^4+81 = 0$;
c) $x^4-4 = 0$;
d) $3x^5+96 = 0$;
e) $49x^6-25 = 0$;
f) $\frac{1}{x^3} = 27$.

**5.15** (*). Determinare l'insieme soluzione delle seguenti equazioni binomie.

a) $x^4 - 10000 = 0$;
b) $100000x^5 + 1 = 0$;
c) $x^6 - 64000000 = 0$;
d) $x^4 + 625 = 0$;
e) $8x^3 - 27 = 0$;
f) $8x^3 + 9 = 0$.

**5.16** (*). Determinare l'insieme soluzione delle seguenti equazioni binomie.

a) $81x^4 - 16 = 0$;
b) $16x^4 - 9 = 0$;
c) $\frac{8}{x^3} - 125 = 0$;
d) $\frac{81}{x^3} = 27$;
e) $81x^4 = 1$;
f) $x^3 - \frac{1}{27} = 0$.

**5.17.** Determinare l'insieme soluzione delle seguenti equazioni binomie.

a) $\frac{x^6}{64} - 1 = 0$;
b) $\frac{64}{x^6} = 1$;
c) $x^6 = 6$;
d) $x^{10} + 10 = 0$;
e) $x^{100} = 0$;
f) $10x^5 - 10 = 0$.

**5.18** (*). Determinare l'insieme soluzione delle seguenti equazioni binomie.

a) $\frac{1}{81}x^4 - 1 = 0$;
b) $\frac{1}{x^4} - 81 = 0$;
c) $\sqrt[3]{2}\,x^6 = \sqrt[3]{24}$;
d) $\frac{3}{5}x^3 = \frac{25}{9}$;
e) $x^8 - 256 = 0$;
f) $x^{21} + 1 = 0$.

**5.19** (*). Determinare l'insieme soluzione delle seguenti equazioni binomie.

a) $\frac{1}{243}x^5 + 1 = 0$;
b) $x^3 + 3\sqrt{3} = 0$;
c) $6x^{12} - 12 = 0$;
d) $\frac{x^3}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}} = 0$;
e) $\sqrt{3}\,x^3 - 3\sqrt[3]{3} = 0$;
f) $\frac{x^4}{9} - \frac{9}{25} = 0$.

**5.20.** Determinare l'insieme soluzione delle seguenti equazioni binomie.

a) $(x-1)^4 = 16$;
b) $(x^2-1)^3 - 27 = 0$;
c) $\frac{3}{x^4-1} = \frac{5}{x^4+1}$;
d) $\frac{x^4(x^2+2)-5}{x^2-1} = 2(x^2+1)$.

### 5.4 - Equazioni trinomie

**5.21** (*). Determinare l'insieme soluzione delle seguenti equazioni biquadratiche.

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$;
b) $2x^4 - 20x^2 + 18 = 0$;
c) $x^4 - \frac{37}{9}x^2 + \frac{4}{9} = 0$;
d) $x^4 - \frac{13}{3}x^2 + \frac{4}{3} = 0$;
e) $-x^4 + \frac{17}{4}x^2 - 1 = 0$;
f) $-2x^4 + \frac{65}{2}x^2 - 8 = 0$.

**5.22** (*). Determinare l'insieme soluzione delle seguenti equazioni biquadratiche.

a) $-2x^4 + 82x^2 - 800 = 0$;
b) $-3x^4 + \frac{85}{3}x^2 - 12 = 0$;
c) $x^4 - \frac{16}{3}x^2 + \frac{16}{3} = 0$;
d) $x^4 - 7x^2 + 6 = 0$;
e) $x^4 - 10x^2 + 16 = 0$;
f) $-3x^4 + 9x^2 + 12 = 0$.

**5.23 (*).** Determinare l'insieme soluzione delle seguenti equazioni biquadratiche.

a) $-\frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{2}x^2 + 18 = 0$;
b) $x^4 + \frac{15}{4}x^2 - 1 = 0$;
c) $-8x^4 - \frac{7}{2}x^2 + \frac{9}{2} = 0$;
d) $-16x^4 - 63x^2 + 4 = 0$;
e) $x^4 - 2x^2 - 15 = 0$;
f) $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$.

**5.24 (*).** Determinare l'insieme soluzione delle seguenti equazioni biquadratiche.

a) $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$;
b) $8x^2 + \frac{6x^2+x-4}{x^2-1} = 4 - \frac{3+4x}{1+x}$.

**5.25.** È vero che l'equazione $4x^4 - 4 = 0$ ha quattro soluzioni reali a due a due coincidenti? Rispondi senza risolvere l'equazione.

**5.26.** È vero che l'equazione $-x^4 + 2x^2 - 1 = 0$ ha quattro soluzioni reali a due a due coincidenti? Rispondi senza risolvere l'equazione.

**5.27.** Perché le seguenti equazioni non hanno soluzioni reali?
$\boxed{A}$ $x^4 + \frac{37}{4}x^2 + \frac{9}{4} = 0$ $\boxed{B}$ $x^4 - x^2 + 3 = 0$ $\boxed{C}$ $-2x^4 - x^2 - 5 = 0$ $\boxed{D}$ $-x^4 - 5x^2 - 4 = 0$

**5.28 (*).** Senza risolvere le seguenti equazioni, dire se ammettono soluzioni reali:
$\boxed{A}$ $2x^4 + 5x^2 - 4 = 0$ $\boxed{B}$ $2x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ $\boxed{C}$ $x^4 - 5x^2 + 1 = 0$ $\boxed{D}$ $-4x^4 + 5x^2 - 1 = 0$

**5.29 (*).** Data l'equazione $x^2 \cdot \left(x^2 - 2a + 1\right) = a \cdot (1 - a)$ determinare per quali valori del parametro $a$ si hanno quattro soluzioni reali.

**5.30.** È vero che la somma delle radici dell'equazione $ax^4 + bx^2 + c = 0$ è nulla?

**5.31.** Data l'equazione $ax^4 + bx^2 + c = 0$ verifica le seguenti uguaglianze relative alle soluzioni reali:
$\boxed{A}$ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = -\frac{2b}{a}$ $\boxed{B}$ $x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot x_3^2 \cdot x_4^2 = \frac{c}{a}$

### 5.5 - Equazioni che si risolvono con sostituzioni

**5.32.** Determinare l'insieme soluzione delle seguenti equazioni trinomie.

a) $x^6 + 13x^3 + 40 = 0$;
b) $x^8 - 4x^4 + 3 = 0$;
c) $-x^6 + 29x^3 - 54 = 0$;
d) $\frac{1}{2}x^{10} - \frac{3}{2}x^5 + 1 = 0$;
e) $-3x^{12} - 3x^6 + 6 = 0$;
f) $2x^8 + 6x^4 + 4 = 0$.

**5.33 (*).** Determinare l'insieme soluzione delle seguenti equazioni trinomie.

a) $-x^8 - 6x^4 + 7 = 0$;
b) $-2x^6 + \frac{65}{4}x^3 - 2 = 0$;
c) $-\frac{3}{2}x^{10} + \frac{99}{2}x^5 - 48 = 0$;
d) $-\frac{4}{3}x^{14} - \frac{8}{9}x^7 + \frac{4}{9} = 0$.

**5.34 (*).** Risolvi con le opportune sostituzioni le seguenti equazioni.

a) $\left(x^3 + 1\right)^3 - 8 = 0$;
b) $2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 - 3\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - 1 = 0$;
c) $\left(x^2 + 1\right)^2 - 6\left(x^2 + 1\right) + 8 = 0$;
d) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{16}{9}$;
e) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 16\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$;
f) $\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 - 12\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) + 27 = 0$.

**5.35** (*). Risolvi con le opportune sostituzioni le seguenti equazioni.

a ) $(2x-1)^3 = 8$;
b ) $(x+1)^3 + 6(x+1)^2 - (x+1) - 30 = 0$;
c ) $(x^2+1)^3 - 4(x^2+1)^2 - 19(x^2+1) - 14 = 0$;
d ) $\frac{3x}{x+1} - \left(\frac{3x}{x+1}\right)^3 = 0$;
e ) $(x-1)^2 + \frac{x-3}{(x-1)^2} = \frac{x+6}{(1-x)^2}$;
f ) $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4 - 5\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 + 4 = 0$.

**5.36.** Risolvi con le opportune sostituzioni le seguenti equazioni.

a ) $(x^3+2)^5 = 1$;
b ) $\left(\frac{x}{x-1}\right)^4 - 13\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + 36 = 0$;
c ) $\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^4 - 10\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2 + 9 = 0$;
d ) $\left(x-\sqrt{2}\right)^6 - 4\left(x-\sqrt{2}\right)^3 + 3 = 0$;
e ) $\left(\frac{x+1}{x}\right)^{10} - 33\left(\frac{x+1}{x}\right)^5 + 32 = 0$;
f ) $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 - 13 + 36\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 = 0$.

**5.37.** Risolvi con le opportune sostituzioni le seguenti equazioni.

a ) $\frac{x-3}{x+3} + 2 = 15\left(\frac{x+3}{x-3}\right)$;
b ) $\left(x^2-1\right)^3 + \frac{8}{\left(x^2-1\right)^3} = 9$;
c ) $\left(\frac{1}{x^2-1}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{x^2-1}\right)^3 - 4\left(\frac{1}{x^2-1}\right)^3 + 12 = 0$.

### 5.6 - Equazioni reciproche

**5.38** (*). Risolvi le seguenti equazioni reciproche di prima specie.

a ) $3x^3 + 13x^2 + 13x + 3 = 0$;
b ) $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$;
c ) $5x^3 - 21x^2 - 21x + 5 = 0$;
d ) $12x^3 + 37x^2 + 37x + 12 = 0$;
e ) $10x^3 - 19x^2 - 19x + 10 = 0$;
f ) $15x^3 - 19x^2 - 19x + 15 = 0$.

**5.39** (*). Risolvi le seguenti equazioni reciproche di prima specie.

a ) $4x^3 + 13x^2 - 13x = 4$;
b ) $4x^3 - 13x^2 = 13x - 4$;
c ) $3x(10x-19) + 9x(x-2) = 10(x+1)(x^2-x+1)$;
d ) $2x^3 - (3\sqrt{2}+2)x^2 - (3\sqrt{2}+2)x + 2 = 0$.

**5.40** (*). Risolvi le seguenti equazioni reciproche di prima specie.

a ) $x^3 + x^2(2\sqrt{2}+1) + x(2\sqrt{2}+1) + 1 = 0$;
b ) $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$;
c ) $ax^3 + (a^2+a+1)x^2 + (a^2+a+1)x + 1 = 0$.

**5.41** (*). Dopo aver verificato che $x = 3$ è radice dell'equazione $3x^3 - 13x^2 + 13x - 3 = 0$, verificate che l'equazione ammette come soluzione $x = \frac{1}{3}$.

**5.42.** Determina il valore di verità delle seguenti proposizioni:

a ) l'equazione $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ammette sempre $x = -1$ come soluzione;

b) se nell'equazione $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ si ha $a = d$ e $b = c$ allora $x = -1$ è una soluzione;
c) in una equazione reciproca di terzo grado la somma dei coefficienti è nulla;
d) se in $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ si ha $a + d = 0$ e $b + c = 0$ allora $x = 1$ appartiene all'I. S.

**5.43 (*).** Risolvi le seguenti equazioni reciproche di seconda specie.

a) $6x^3 - 19x^2 + 19x - 6 = 0$;
b) $7x^3 - 57x^2 + 57x - 7 = 0$;
c) $3x^3 + 7x^2 - 7x - 3 = 0$;
d) $12x^3 + 13x^2 - 13x - 12 = 0$;
e) $10x^3 + 19x^2 - 19x - 10 = 0$;
f) $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$.

**5.44 (*).** Risolvi le seguenti equazioni reciproche di seconda specie.

a) $\frac{x^3-1}{x} = \frac{21}{4} \cdot (1 - x)$;
b) $5x^3 + (6\sqrt{5} - 5)x^2 + x(5 - 6\sqrt{5}) - 5 = 0$;
c) $x^3 + 13x^2 - 13x - 1 = 0$;
d) $4x^3 + (5\sqrt{5} - 1)x^2 + x(1 - 5\sqrt{5}) = 4$.

**5.45.** Data l'equazione $a_0\left(t^2 - 2\right) + a_1 t + a_2 = 0 \;\rightarrow\; a_0 t^2 + a_1 t + a_2 - 2a_0 = 0$ stabilire quale condizione deve sussistere tra i coefficienti affinché esistano valori reali dell'incognita $t$.

**5.46 (*).** Risolvi le seguenti equazioni di quarto grado reciproche di prima specie.

a) $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$;
b) $x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 5x + 1 = 0$;
c) $x^4 + 2x^3 - 13x^2 + 2x + 1 = 0$;
d) $x^4 - \frac{5}{6}x^3 - \frac{19}{3}x^2 - \frac{5}{6}x + 1 = 0$.

**5.47 (*).** Risolvi le seguenti equazioni di quarto grado reciproche di seconda specie.

a) $x^4 - 3x^3 + 3x - 1 = 0$;
b) $4x^4 - 5x^3 + 5x - 4 = 0$;
c) $3x^4 + 7x^3 - 7x - 3 = 0$;
d) $x^4 - 7x^3 + 7x - 1 = 0$.

**5.48 (*).** Risolvi le seguenti equazioni di quarto grado reciproche di seconda specie.

a) $5x^4 - 11x^3 + 11x - 5 = 0$;
b) $6x^4 - 13x^3 + 13x - 6 = 0$;
c) $7x^4 - 15x^3 + 15x - 7 = 0$;
d) $x^3(x - 4) = 1 - 4x$.

**5.49 (*).** Risolvi le seguenti equazioni di quarto grado reciproche di seconda specie.

a) $\frac{x-5}{5x-1} + \frac{1}{x^3} = 0$;
b) $x^4 - x^3 + x - 1 = 0$;
c) $\frac{x^4+2x-1}{8x^3} - \frac{1+8x^2}{4x^2} + \frac{x-1}{x} + \frac{1+x}{x^2} = 0$.

**5.50.** Quale condizione deve sussistere tra i coefficienti dell'equazione $a_0 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ affinché siano reali le sue soluzioni?

**5.51 (*).** Determinare per quale valore di $k$, l'equazione $\left(2k - \sqrt{2}\right) x^4 + 5x^3 - 5x - 2\sqrt{2} = 0$ è reciproca. È vero che I. S. $= \{+1; -1\}$

### 5.7.2 Esercizi riepilogativi

**5.52 (*).** Risolvi le seguenti equazioni di grado superiore al secondo.

a) $6x^3+7x^2-7x-6=0$;
b) $2x^3+5x^2+5x+2=0$;
c) $x^3-3x^2+3x-1=0$;
d) $3x^3-4x^2+4x-3=0$;
e) $2x^4-5x^3+5x-2=0$;
f) $-5x^4+3x^3-3x+5=0$.

**5.53 (*).** Risolvi le seguenti equazioni di grado superiore al secondo.

a) $2x^5-3x^4+4x^3-4x^2+3x-2=0$;
b) $-2x^4+8x^3-8x+2=0$;
c) $2x^3-5x^2-5x+2=0$;
d) $3x^3-6x^2-6x+3=0$;
e) $5x^3-7x^2+7x-5=0$;
f) $4x^3-20x^2+20x-4=0$.

**5.54 (*).** Risolvi le seguenti equazioni di grado superiore al secondo.

a) $5x^3-5x^2-5x+5=0$;
b) $4x^3-9x^2+9x-4=0$;
c) $\frac{3}{2}x^3+\frac{7}{4}x^2-\frac{7}{4}x-\frac{3}{2}=0$;
d) $3x^3-2x^2+2x-3=0$;
e) $-2x^3+10x^2+10x-2=0$;
f) $x^4-\frac{9}{4}x^3-\frac{13}{2}x^2-\frac{9}{4}x+1=0$.

**5.55 (*).** Risolvi le seguenti equazioni di grado superiore al secondo.

a) $x^4-4x^3+6x^2-4x+1=0$;
b) $x^4+\frac{10}{3}x^3+2x^2+\frac{10}{3}x+1=0$;
c) $x^4-4x^3+2x^2-4x+1=0$;
d) $x^4-x^3+x-1=0$;
e) $x^4-6x^3+6x-1=0$;
f) $x^4-3x^3+2x^2-3x+1=0$.

**5.56 (*).** Risolvi le seguenti equazioni di grado superiore al secondo.

a) $x^4-5x^3-12x^2-5x+1=0$;
b) $3x^4-x^3+x-3=0$;
c) $2x^4-5x^3+4x^2-5x+2=0$;
d) $2x^4-x^3+4x^2-x+2=0$;
e) $3x^4-7x^3+7x-3=0$;
f) $3x^4-6x^3+6x-3=0$.

**5.57 (*).** Risolvi le seguenti equazioni di grado superiore al secondo.

a) $2x^4-6x^3+4x^2-6x+2=0$;
b) $x^4+8x^3-8x-1=0$;
c) $6x^4-37x^3+37x-6=0$;
d) $x^5-3x^4+2x^3+2x^2-3x+1=0$;
e) $x^5-2x^4-5x^3-5x^2-2x+1=0$;
f) $x^5+3x^4+x^3-x^2-3x-1=0$.

**5.58 (*).** Risolvi le seguenti equazioni di grado superiore al secondo.

a) $x^5+x^4+x^3-x^2-x-1=0$;
b) $x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1=0$;
c) $x^5-5x^3-5x^2+1=0$;
d) $x^5+3x^4-2x^3+2x^2-3x-1=0$;
e) $2x^5-2x^4+2x^3+2x^2-2x+2=0$;
f) $x^6-x^5-5x^4+5x^2+x-1=0$.

**5.59 (*).** Risolvi le seguenti equazioni di grado superiore al secondo.

a) $x^6 - x^5 - x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 1 = 0$;
b) $x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 1 = 0$;
c) $x^5 - \frac{11}{4}x^4 - \frac{55}{8}x^3 + \frac{55}{8}x^2 + \frac{11}{4}x - 1 = 0$;
d) $x^5 - 4x^4 + \frac{13}{4}x^3 + \frac{13}{4}x^2 - 4x + 1 = 0$;
e) $x^6 + \frac{13}{6}x^5 + x^4 - x^2 - \frac{13}{6}x - 1 = 0$;
f) $x^6 + \frac{16}{3}x^5 + \frac{23}{3}x^4 - \frac{23}{3}x^2 - \frac{16}{3}x - 1 = 0$.

**5.60 (*).** Risolvi le seguenti equazioni di grado superiore al secondo.

a) $x^6 + x^4 - x^2 - 1 = 0$;
b) $x^6 - 4x^5 - x^4 + 8x^3 - x^2 - 4x + 1 = 0$;
c) $x^6 + 2x^4 + 2x^2 + 1 = 0$;
d) $3(2x-2)^3 + (10x-5)^2 - 25 = 0$.

**5.61 (*).** Risolvi le seguenti equazioni di grado superiore al secondo.

a) $\frac{6x^2-2}{x^2+1} = \frac{6}{x^4-5x^2-6} + \frac{5x}{6-x^2}$;
b) $x^4 + 5x(x+1)^2 + (1-2x)(1+2x) = 0$;
c) $\frac{9x^2(x+4)}{9x+1+\sqrt{10}} = \frac{9x+1-\sqrt{10}}{x-6}$;
d) $\frac{x^2(x+4)}{x-1} - \frac{8x+1}{x+1} - \frac{2x}{x^2-1} = 0$.

**5.62 (*).** Nell'equazione $(2-a)x^5 - x^4 + (3+a)x^3 + 2bx^2 + x + 5b = 0$ determinare $a$ e $b$ in modo che l'equazione sia reciproca.

### 5.7.3 Risposte

**5.1.** a) $-4; -3; 2$, b) $\frac{1}{2}; -3; -\frac{4}{3}$, c) $\frac{5}{2}; 1; \frac{3}{2}$, d) $4; -7$, e) $-3, -\frac{1}{3}, +2$, f) $-4, +\frac{7}{3}, +2$.

**5.2.** a) $0, +\frac{1}{2}, +1$, b) $+4$, c) $-5$, d) $3; -\frac{1}{2}$, e) $4, \frac{2}{3}, -2$, f) $2; 1; -\frac{1}{2}$.

**5.3.** a) $1, -2$, b) $2$, c) $1, -1$, d) $5, 1, -2$, e) $2, -9$, f) $1; -1; 2$.

**5.4.** a) $-1; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}$, b) $-1; 6; 2$.

**5.6.** a) $\{-2; 1\}$, b) $\{-1\}$, c) $\{-3\}$, d) $\{-1; 1\}$, e) $\{-3; -1; 1\}$, f) $\left\{-\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; 1\right\}$.

**5.7.** a) $\{1; 2; 3\}$, b) $\left\{0; \frac{1}{2}\right\}$, c) $\{2; -2; 3\}$, d) $\{-1; +1\}$, e) $\{-1; 1; 2\}$, f) $\{-1\}$.

**5.8.** a) $\left\{-\frac{1}{3}; 1\right\}$, b) $\left\{\pm 1; 1 \pm \sqrt{2}\right\}$, c) $\left\{-3; \pm\sqrt{2}\right\}$, d) $\{-2\}$, e) $\left\{-\sqrt{3}; 0; +\sqrt{3}\right\}$.

**5.9.** a) $\left\{0; \sqrt{2}-1; -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)\right\}$, b) $\left\{0, \frac{3}{4}\right\}$, c) $\mathbb{R}$, d) $\{0; 4; 2 \pm \sqrt{5}\}$, e) $\{0\}$, f) $\left\{0; \frac{2}{3}; 2\right\}$.

**5.10.** a) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$, b) $\left\{-\frac{3}{2}; -2\right\}$, c) $\{0; 3 \pm \sqrt{2}\}$, d) $\left\{1; \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$, e) $\emptyset$, f) $\{\pm 1; \pm\sqrt{2}\}$.

**5.11.** b) $\left\{\pm\sqrt{1+\sqrt{5}}\right\}$, c) $\{1; -\sqrt[3]{9}\}$, d) $\{0; \pm 2\}$.

**5.12.** a) $\{2\}$, b) $\{-\sqrt[5]{15}\}$, c) $\emptyset$, d) $\{-3; +3\}$, e) $\left\{\pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[6]{3}}\right\}$, f) $\left\{\pm\frac{1}{3}\right\}$.

**5.13.** a) $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$, b) $\emptyset$, c) $\left\{-\frac{\sqrt{3}}{3}, +\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$, d) $\{-2; +2\}$, e) $\{-1; 1\}$, f) $\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

**5.14.** a) $\{1\}$, b) $\emptyset$, c) $\left\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right\}$, d) $\{-2\}$, e) $\left\{-\sqrt[3]{\frac{5}{7}}, \sqrt[3]{\frac{5}{7}}\right\}$, f) $\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

**5.15.** a) $\{\pm 10\}$, b) $\left\{-\frac{1}{10}\right\}$, c) $\{\pm 20\}$, d) $\emptyset$, e) $\left\{\frac{3}{2}\right\}$, f) $I.S = \left\{-\frac{1}{2}\sqrt[3]{9}\right\}$.

**5.16.** a) $\left\{\pm\frac{2}{3}\right\}$, b) $\left\{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

**5.18.** c) $\left\{\pm 2^{\frac{1}{9}} 3^{\frac{1}{18}}\right\}$, d) $I.S = \left\{\frac{5}{3}\right\}$.

**5.19.** e) $\left\{3^{\frac{5}{18}}\right\}$, f) $\left\{\pm 3\frac{\sqrt{5}}{5}\right\}$.

**5.21.** a) $\{\pm 3; \pm 2\}$, b) $\{\pm 1; \pm 3\}$, c) $\left\{\pm 2; \pm\frac{1}{3}\right\}$, d) $\left\{\pm 2; \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$, e) $\left\{\pm 2; \pm\frac{1}{2}\right\}$, f) $\left\{\pm 4; \pm\frac{1}{2}\right\}$.

**5.22.** a) $\{\pm 4; \pm 5\}$, b) $\left\{\pm 3; \pm\frac{2}{3}\right\}$, c) $\left\{\pm 2; \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\right\}$, d) $\left\{\pm 1; \pm\sqrt{6}\right\}$, e) $\left\{\pm\sqrt{2}; \pm 2\sqrt{2}\right\}$, f) $\{-2; 2\}$.

**5.23.** a) $\{\pm 3\}$, b) $\left\{\pm\frac{1}{2}\right\}$, c) $\left\{\pm\frac{3}{4}\right\}$, d) $\left\{\pm\frac{1}{4}\right\}$, e) $\{\pm sqrt5\}$, f) $\left\{\pm\sqrt{3}\right\}$.

**5.24.** b) $\left\{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

**5.28.** si, no, si, no.

**5.29.** $a > 1$.

**5.32.** a) $\left\{-2; -\sqrt[3]{5}\right\}$, b) $\left\{\pm 1; \pm\sqrt[4]{3}\right\}$, c) $\left\{3; \sqrt[3]{2}\right\}$, d) $\left\{1; \sqrt[5]{2}\right\}$, e) $\{\pm 1\}$, f) $\emptyset$.

**5.33.** a) $\{\pm 1\}$, b) $\left\{2; \frac{1}{2}\right\}$, c) $\{1; 2\}$, d) $\left\{-1; \sqrt[7]{\frac{1}{3}}\right\}$.

**5.34.** a) $\{1\}$, b) $\left\{\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}\right\}$, c) $\left\{\pm\sqrt{3}; \pm 1\right\}$, d) $\emptyset$, e) $\left\{8 \pm 3\sqrt{7}\right\}$, f) $\left\{\pm\frac{2\sqrt{21}}{3}; \pm\frac{\sqrt{30}}{3}\right\}$.

**5.35.** a) $\left\{\frac{3}{2}\right\}$, b) $\{-6; -4; 1\}$, c) $\left\{\pm\sqrt{6}\right\}$, d) $\left\{-\frac{1}{4}; 0; \frac{1}{2}\right\}$, e) $\left\{1 \pm \sqrt{3}\right\}$, f) $\left\{0; 3, \frac{1}{3}\right\}$.

**5.38.** a) $\left\{-1; -\frac{1}{3}; -3\right\}$, b) $\left\{-1; 2; \frac{1}{2}\right\}$, c) $\left\{-1; 5; \frac{1}{5}\right\}$, d) $\left\{-\frac{4}{3}; -1; -\frac{3}{4}\right\}$, e) $\left\{-1; \frac{2}{5}; \frac{5}{2}\right\}$, f) $\left\{-1; \frac{3}{5}; \frac{5}{3}\right\}$.

**5.39.** a) $\left\{-4; -\frac{1}{4}; 1\right\}$, b) $\left\{-1; 4; \frac{1}{4}\right\}$, c) $\left\{-1; \frac{49\pm\sqrt{2001}}{20}\right\}$, d) $\left\{-1; -\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

**5.40.** a) $\{-1; \sqrt{2} - 1; -\sqrt{2} + 1\}$, b) $\{-1; \sqrt{3} + 2; 2 - \sqrt{3}\}$, c) $\left\{-1; -a; -\frac{1}{a}\right\}$.

**5.43.** a) $\left\{1; \frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right\}$, b) $\left\{1; 7; \frac{1}{7}\right\}$, c) $\left\{-3; -\frac{1}{3}; 1\right\}$, d) $\left\{-\frac{4}{3}; -\frac{3}{4}; 1\right\}$, e) $\left\{-\frac{5}{2}; -\frac{2}{5}; 1\right\}$, f) $\left\{2 \pm \sqrt{3}; -1\right\}$.

**5.44.** a) $\left\{1; \frac{-25\pm\sqrt{561}}{8}\right\}$, b) $\left\{1; -\sqrt{5}; -\frac{\sqrt{5}}{5}\right\}$, c) $\left\{1; -7 \pm 4\sqrt{3}\right\}$, d) $\left\{1; -\sqrt{5}-1; \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}\right\}$.

**5.46.** a) $\left\{1; \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$, b) $\left\{-3 \pm 2\sqrt{2}\right\}$, c) $\left\{\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}; \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$, d) $\left\{3; \frac{1}{3}; 2 - \frac{1}{2}\right\}$.

**5.47.** a) $\left\{\pm 1; \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$, b) $\{\pm 1\}$, c) $\left\{\pm 1; \frac{-7\pm\sqrt{13}}{6}\right\}$, d) $\left\{\pm 1; \frac{7\pm 3\sqrt{5}}{2}\right\}$.

**5.48.** a) $\left\{\pm 1; \frac{11\pm\sqrt{21}}{10}\right\}$, b) $\left\{\pm 1; \frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right\}$, c) $\left\{\pm 1; \frac{15\pm\sqrt{29}}{14}\right\}$, d) $\left\{\pm 1; 2 \pm \sqrt{3}\right\}$.

**5.49.** a) $\left\{\pm 1; \frac{5\pm\sqrt{21}}{2}\right\}$, b) $\{\pm 1\}$, c) $\{\pm 1; 4 \pm \sqrt{15}\}$.

**5.51.** a) $k = \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

**5.52.** a) $\left\{-\frac{3}{2}; -\frac{2}{3}; 1\right\}$, b) $\{-1\}$, c) $\{1\}$, d) $\{1\}$, e) $\left\{\frac{1}{2}; 2; \pm 1\right\}$, f) $\{\pm 1\}$.

**5.53.** a) $\{1\}$, b) $\left\{2 \pm \sqrt{3}; \pm 1\right\}$, c) $\left\{-1; \frac{7\pm\sqrt{33}}{4}\right\}$, d) $\left\{-1; \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$, e) $\{1\}$, f) $\left\{x = 1; x = 2 \pm \sqrt{3}\right\}$.

**5.54.** a) $\{\pm 1\}$, b) $\{1\}$, c) $\left\{1; \pm\frac{2}{3}\right\}$, d) $\{1\}$, e) $\left\{1; 3 \pm 2\sqrt{2}\right\}$, f) $\left\{-1; 4; \frac{1}{4}\right\}$.

**5.55.** a) $\{\pm 1\}$, b) $\left\{-3; -\frac{1}{3}\right\}$, c) $\left\{2 \pm \sqrt{3}\right\}$, d) $\{\pm 1\}$, e) $\left\{\pm 1; 3 \pm 2\sqrt{2}\right\}$, f) $\left\{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$.

**5.56.** a) $\left\{-1; \frac{7\pm 3\sqrt{5}}{2}\right\}$, b) $\{\pm 1\}$, c) $\left\{2; \frac{1}{2}\right\}$, d) $\emptyset$, e) $\left\{\pm 1; \frac{7\pm\sqrt{13}}{6}\right\}$, f) $\{\pm 1\}$.

**5.57.** a) $\left\{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$, b) $\left\{\pm 1; -4 \pm \sqrt{15}\right\}$, c) $\left\{\pm 1; +6; \frac{1}{6}\right\}$, d) $\{\pm 1\}$, e) $\left\{-1; 2 \pm \sqrt{3}\right\}$, f) $\left\{1; \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$.

**5.58.** a) $\{1\}$, b) $\{1\}$, c) $\left\{-1; \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$, d) $\left\{1; -2 \pm \sqrt{3}\right\}$, e) $\{-1\}$, f) $\left\{\pm 1; \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$.

**5.59.** a) $\{\pm 1\}$, b) $\{\pm 1\}$, c) $\left\{1; 4; \frac{1}{4}; -2; -\frac{1}{2}\right\}$, d) $\left\{-1; 2; \frac{1}{2}\right\}$, e) $\left\{\pm 1; x = \pm\frac{3}{2}\right\}$, f) $\left\{\pm 1 - 3; -\frac{1}{3}\right\}$.

**5.60.** a) $\{\pm 1\}$, b) $\left\{\pm 1; 2 \pm \sqrt{3}\right\}$, c) $\emptyset$, d) $\left\{1; \pm\frac{3}{2}\right\}$.

**5.61.** a) $\left\{2; \frac{1}{2}; -3; -\frac{1}{3}\right\}$, b) $\left\{-2 \pm \sqrt{3}\right\}$, c) $\left\{\frac{7\pm 3\sqrt{5}}{2}; \frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}\right\}$, d) $\left\{-3 \pm 2\sqrt{2}\right\}$.

# 6 Sistemi non lineari

## 6.1 Sistemi di secondo grado

Ricordiamo che un sistema di equazioni non è altro che l'insieme di più equazioni con le stesse incognite. L'insieme delle soluzioni è dato dall'intersezione degli insiemi delle soluzioni delle singole equazioni.

**Definizione 6.1.** Il *grado di un sistema di equazioni*, se le equazioni che formano il sistema sono costituite da polinomi, è dato dal prodotto dei gradi delle equazioni che lo compongono.

---

**Esempio 6.1.** Determinare il grado dei seguenti sistemi di equazioni

- $\begin{cases} -2x+3y=4 \\ 3x+5y-2=0 \end{cases}$ entrambe le equazioni sono di primo grado; il sistema è di primo grado;
- $\begin{cases} 2x-y=0 \\ x^2+6y^2-9=0 \end{cases}$ la prima equazione è di primo grado, la seconda di secondo grado; il sistema è di secondo grado;
- $\begin{cases} x^2+y^2=0 \\ y=3x^2-2x+6=0 \end{cases}$ entrambe le equazioni sono di secondo grado; il sistema è di quarto grado.

---

I sistemi di secondo grado sono dunque composti da un'equazione di secondo grado e da una di primo grado.

### 6.1.1 Sistemi di secondo grado numerici

---

**Esempio 6.2.** Risolvere il seguente sistema $\begin{cases} 2x-y=0 \\ x^2+6y^2-9=0 \end{cases}$.

Utilizziamo il metodo di sostituzione che abbiamo già visto per i sistemi di primo grado.

- Ricaviamo una delle due incognite dall'equazione di primo grado e sostituiamo nell'equazione di secondo grado:

$$\begin{cases} y=2x \\ x^2+6\cdot(2x)^2-9=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x \\ x^2+24x^2-9=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x \\ 25x^2-9=0 \end{cases};$$

- risolviamo l'equazione di secondo grado in una sola incognita. Questa equazione è detta equazione risolvente del sistema: $25x^2-9=0 \Rightarrow x_1=-\frac{3}{5} \vee x_2=\frac{3}{5}$;

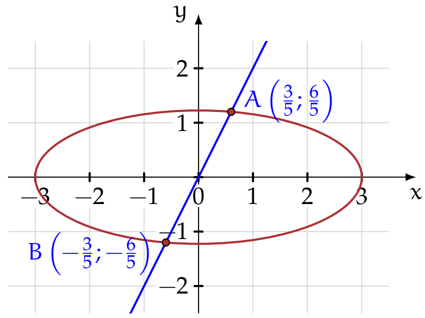
- Si sostituiscono i valori trovati per la $x$ nella equazione di primo grado per trovare i valori corrispondenti della $y$. Le coppie $(x_1; y_1)$ e $(x_2; y_2)$ se ci sono, si dicono soluzioni del sistema.

$$\begin{cases} y = 2x \\ 25x^2 - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{3}{5} \\ y_1 = 2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{6}{5} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2 = +\frac{3}{5} \\ y_2 = 2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right) = +\frac{6}{5} \end{cases}$$

quindi con soluzioni

$$\left(-\frac{3}{5}; -\frac{6}{5}\right) \vee \left(\frac{3}{5}; \frac{6}{5}\right).$$

Le soluzioni del sistema possono essere interpretate geometricamente come i punti di intersezione tra la retta rappresentata dall'equazione $y = 2x$ e la curva rappresentata dall'equazione $x^2 + 6y^2 = 9$. Con qualsiasi software che disegni funzioni inseriamo le due equazioni e otteniamo la seguente figura. La curva rappresentata dalla seconda equazione è una ellisse; i punti A e B, intersezione tra retta ed ellisse, corrispondono alle soluzioni del sistema.




**Esempio 6.3.** Risolvere il seguente sistema: $\begin{cases} x - y = -2 \\ x^2 + y - 3x - 1 = 0 \end{cases}$.

Isoliamo la $y$ dell'equazione di primo grado e sostituiamo nell'equazione di secondo grado

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ x^2 + (x + 2) - 3x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + 2 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

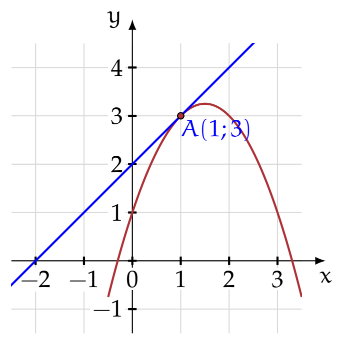
L' *equazione risolvente del sistema*. $x^2 - 2x + 1 = 0$ ha il discriminante uguale a zero e due soluzioni reali coincidenti: $x_1 = x_2 = 1$.

Il sistema ha due soluzioni reali coincidenti,

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 2 = 3 \end{cases}$$

quindi con soluzione $(1; 3)$.

Le soluzioni del sistema possono essere interpretate geometricamente come i punti di incontro tra la retta rappresentata dall'equazione $y = x + 2$ e la parabola rappresentata dall'equazione $y = -x^2 + 3x + 1$. La soluzioni saranno due punti reali coincidenti. Questo punto è detto punto di tangenza tra retta e parabola.



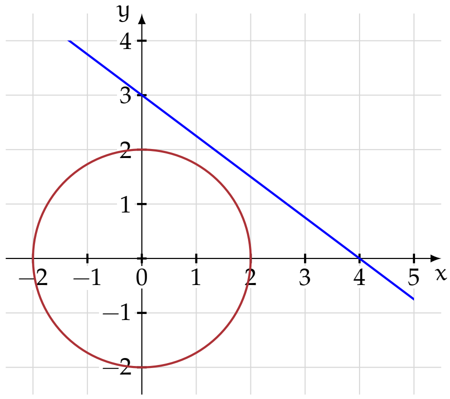
**Esempio 6.4.** Risolvere il seguente sistema: $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ 3x+4y=12 \end{cases}$.

Isoliamo $y$ nell'equazione di primo grado e sostituiamola nell'equazione di secondo grado

$$\begin{cases} y=-\frac{3}{4}x+3 \\ x^2+\left(-\frac{3}{4}x+3\right)^2-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{3}{4}x+3 \\ x^2+\frac{9}{16}x^2-\frac{9}{2}x+9-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{3}{4}x+3 \\ \frac{25}{16}x^2-\frac{9}{2}x+5=0 \end{cases}.$$

Risolviamo l'equazione di secondo grado in una sola incognita $\frac{25}{16}x^2-\frac{9}{2}x+5=0$ e verifichiamo che $\Delta=\frac{81}{4}-\frac{125}{4}$ è negativo, quindi l'equazione non ha soluzioni reali e $\text{I. S.}=\emptyset$. Il sistema non ha soluzioni reali e si dice *impossibile*.

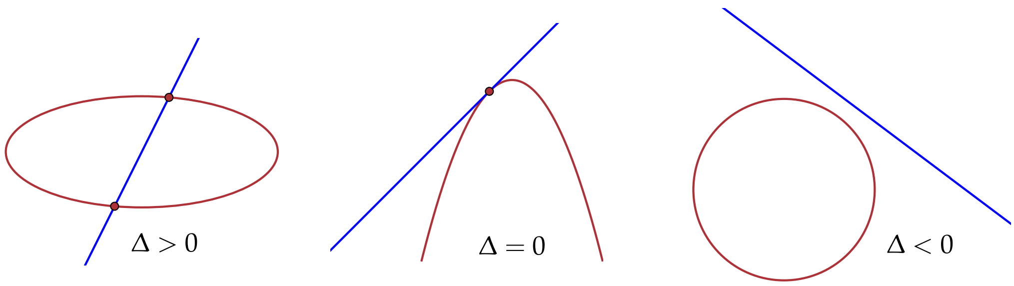
Le soluzioni del sistema possono essere interpretate geometricamente come i punti di incontro tra la retta rappresentata dall'equazione $y=-\frac{3}{4}x+3$ e la curva rappresentata dall'equazione $x^2+y^2=4$. Nella rappresentazione grafica ottenuta con un software che disegna funzioni le figure geometriche ottenute non hanno punti d'incontro. La curva rappresentata dalla prima equazione è una circonferenza; retta e circonferenza non hanno punti di intersezione.




---

❍ **Conclusione** Un sistema di secondo grado, con equazione risolvente di secondo grado, rappresenta sempre l'intersezione tra una retta e una curva di secondo grado (circonferenza, parabola, ellisse o iperbole). Le soluzioni del sistema rappresentano i punti di incontro tra retta e curva. In base al segno del discriminante dell'equazione risolvente abbiamo:

- $\Delta>0$ le soluzioni del sistema sono le coordinate di due punti distinti;
- $\Delta=0$ le soluzioni del sistema sono le coordinate di due punti coincidenti;
- $\Delta<0$ il sistema non ha soluzioni reali. Retta e curva non hanno punti in comune.




Se l'equazione risolvente risulta essere una equazione di *primo grado* o una *uguaglianza* vera o falsa, allora:

- se si ottiene una uguaglianza vera, il sistema è indeterminato;

- se si ottiene una uguaglianza falsa il sistema è impossibile;
- se l'equazione risolvente è di primo grado determinata, da essa si ricava il valore dell'incognita e si sostituisce tale valore nell'altra equazione. Il sistema ha una sola soluzione (in questo caso non si parla di due soluzioni coincidenti, come nel caso precedente di $\Delta = 0$).

---

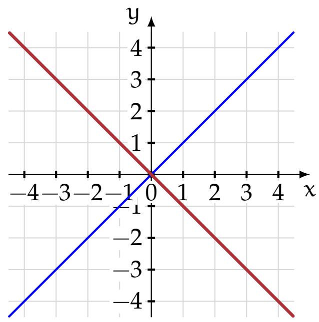
**Esempio 6.5.** Risolvere il sistema $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$.

Isoliamo la $y$ dell'equazione di primo grado e sostituiamo nell'equazione di secondo grado.

$$\begin{cases} y = -x \\ x^2 - (-x)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ x^2 - x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

L' *equazione risolvente del sistema* in questo caso è una *identità* (uguaglianza vera) e tutte le coppie formate da numeri opposti (la prima equazione ci vincola ad avere $y = -x$ ) sono soluzioni del sistema: $\forall k \in \mathbb{R} \Rightarrow$ I.S. $= (k; -k)$. Il sistema ha infinite coppie di numeri reali che lo soddisfano e si dice *indeterminato*.

La figura è quella che otteniamo se inseriamo le due equazioni in un software che disegna funzioni. La curva di secondo grado è formata dalle due rette $x + y = 0$ e $x - y = 0$ e la seconda equazione rappresenta la retta a che si sovrappone alla precedente.



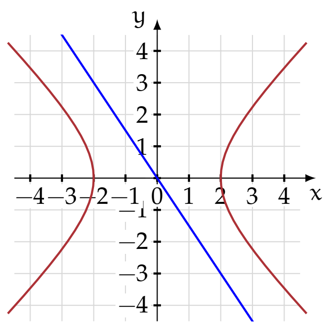
**Esempio 6.6.** Risolvere il sistema $\begin{cases} \frac{3}{2}x + y = 0 \\ x^2 - y^2 = 4 \end{cases}$.

Isoliamo la $y$ dell'equazione di primo grado e sostituiamo nell'equazione di secondo grado

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{2}x \\ x^2 - \left(-\frac{3}{2}x\right)^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{2}x \\ x^2 - \frac{9}{4}x^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{2}x \\ -\frac{5}{4}x^2 = 4 \end{cases}.$$

L' equazione risolvente del sistema $-\frac{5}{4}x^2 = 4$ non ha soluzioni, quindi il sistema è *impossibile*.

La figura è quella che otteniamo se inseriamo le due equazioni in un software che disegna le funzioni. L'equazione di secondo grado rappresenta una curva detta iperbole e la seconda equazione rappresenta la retta; vediamo che curva e retta non hanno punti di intersezione.



**Esempio 6.7.** Risolvere il sistema $\begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ -x + y = -1 \end{cases}$.

Isoliamo la $y$ dell'equazione di primo grado e sostituiamo nell'equazione di secondo grado

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ x^2 - (x-1)^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ x^2 - x^2 + 2x - 1 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ 2x = 5 \end{cases}.$$

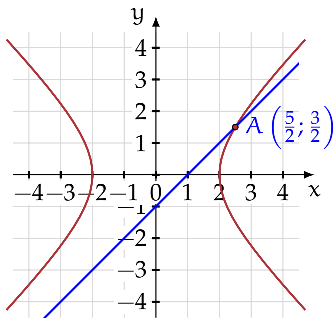
L' *equazione risolvente del sistema* in questo caso è l'equazione di primo grado $2x - 5 = 0$, la cui soluzione è $x = \frac{5}{2}$. Si sostituisce il valore trovato nell'altra equazione e troviamo la soluzione del sistema che in questo caso è unica:

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ 2x = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

quindi con soluzione

$$\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

La figura è quella che otteniamo se inseriamo le due equazioni in un applicativo che disegna funzioni. L'equazione di secondo grado rappresenta una curva detta iperbole e la seconda equazione rappresenta una retta; vediamo che curva e retta hanno un solo punto di intersezione.




✍ *Esercizi proposti:* 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6, 6.7.

### 6.1.2 Sistemi di secondo grado letterali

**Esempio 6.8.** Discutere e risolvere il seguente sistema: $\begin{cases} y - kx = -2 \\ y - x^2 = 2 \end{cases}$.

Si risolve come nel caso degli analoghi sistemi numerici. Bisognerà, nell'equazione risolvente, discutere per quali valore del parametro si otterranno soluzioni reali. Ricaviamo la y dalla prima equazione e sostituiamo nella seconda equazione:

$$\begin{cases} y = kx - 2 \\ kx - 2 - x^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = kx - 2 \\ -x^2 + kx - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = kx - 2 \\ x^2 - kx + 4 = 0 \end{cases}.$$

Discutiamo e risolviamo l'equazione di secondo grado

$$\Delta = k^2 - 16 \Rightarrow \begin{array}{l} \Delta > 0 \Rightarrow k < -4 \lor k > 4 \Rightarrow x_1 = \frac{k - \sqrt{k^2-16}}{2} \lor x_2 = \frac{k + \sqrt{k^2-16}}{2} \\ \Delta = 0 \Rightarrow k = -4 \lor k = 4 \Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{k}{2} \\ \Delta < 0 \Rightarrow -4 < k < 4 \Rightarrow \text{I. S.} = \emptyset \end{array}.$$

Ricaviamo i valori della x che sostituiamo nella prima equazione:

$$\begin{cases} y-kx=-2 \\ y-x^2=2 \end{cases} \quad \text{se } k \leqslant -4 \vee k \geqslant 4 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{k-\sqrt{k^2-16}}{2} \\ y_1 = \frac{k^2-4-k\sqrt{k^2-16}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2 = \frac{k+\sqrt{k^2-16}}{2} \\ y_2 = \frac{k^2-4+k\sqrt{k^2-16}}{2} \end{cases}.$$

---

✍ *Esercizi proposti:* 6.8, 6.9.

### 6.1.3 Sistemi frazionari

Si dice frazionario un sistema in cui almeno una delle equazioni che lo compongono è frazionaria; per questo motivo occorre procedere alla definizione del Dominio in cui si ricercano le soluzioni del sistema.

---

**Esempio 6.9.** Risolvere il seguente sistema $\begin{cases} 2x-y=2 \\ \frac{x}{y+2}=\frac{x}{2y+5} \end{cases}$.

Determiniamo le condizioni di esistenza di $\frac{x}{y+2}=\frac{x}{2y+5}$: C. E. $y \neq -2 \wedge y \neq -\frac{5}{2}$.
Trasformiamo l'equazione frazionaria nella sua forma canonica di equazione intera:

$$\begin{aligned} &\frac{x}{y+2}=\frac{x}{2y+5} \\ \Rightarrow &x\cdot(2y+5)-x\cdot(y+2)=0 \\ \Rightarrow &2xy+5x-xy-2x=0 \\ \Rightarrow &xy+3x=0. \end{aligned}$$

Il sistema diventa:

$$\begin{cases} y=2x-2 \\ xy+3x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x-2 \\ x(2x-2)+3x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x-2 \\ 2x^2+x=0 \end{cases}.$$

$2x^2+x=0$ è l'equazione risolvente; ha soluzioni $x_1=0 \vee x_2=-\frac{1}{2}$.
Sostituiamo le soluzioni trovate nell'equazione di primo grado e otteniamo le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x_1=0 \\ y_1=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=-\frac{1}{2} \\ y_2=-3 \end{cases} \Rightarrow (0;-2) \vee \left(-\frac{1}{2};-3\right).$$

La soluzione $(0;-2)$ non soddisfa le C. E. Il sistema ha soluzione $\left(-\frac{1}{2};-3\right)$.

---

✍ *Esercizi proposti:* 6.10, 6.11

#### Sistemi di secondo grado in tre incognite

Quanto detto si può estendere ai sistemi di secondo grado di tre o più equazioni con altrettante incognite. Per risolvere uno di tali sistemi si cercherà, operando successive sostituzioni a partire dalle equazioni di primo grado, di ottenere un'equazione di secondo grado in una sola incognita (equazione risolvente del sistema).

A partire dalle eventuali soluzioni di tale equazione, si determineranno poi le soluzioni del sistema.

---

**Esempio 6.10.** Risolvere il sistema $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ 3x+4y-2z=1 \\ xy-y^2+z-5y=0 \end{cases}$.

Isoliamo $z$ dalla prima equazione, che è di primo grado, e sostituiamo nelle altre equazioni:

$$\begin{cases} z=2x+y \\ 3x+4y-2(2x+y)=1 \\ xy-y^2+(2x+y)-5y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=2x+y \\ 3x+4y-4x-2y=1 \\ xy-y^2+2x-4y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=2x+y \\ -x+2y-1=0 \\ xy-y^2+2x-4y=0 \end{cases}.$$

Ricaviamo $x$ dalla seconda equazione e la sostituiamo nelle altre equazioni:

$$\begin{cases} z=2(2y-1)+y \\ x=2y-1 \\ 2y^2-y-y^2+4y-2-4y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=5y-2 \\ x=2y-1 \\ y^2-y-2=0 \end{cases}.$$

L'equazione $y^2-y-2=0$ è l'equazione risolvente del sistema, le sue soluzioni sono $y_1=2 \vee y_2=-1$.

Sostituiamo i valori trovati per la $y$ nelle altre equazioni per trovare i valori corrispondenti della $x$ e della $z$:

$$\begin{cases} z=5(2)-2=8 \\ x=2(2)-1=3 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} z=5(-1)-2=-7 \\ x=2(-1)-1=-3 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow (3;2;8) \vee (-3;-1;-7).$$

---

✍ *Esercizi proposti:* 6.12, 6.13

## 6.2 Sistemi simmetrici

Un sistema di due equazioni in due incognite si dice *simmetrico* se non cambia scambiando le incognite.

Per esempio, nel sistema

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2+3xy+5=0 \end{cases}$$

se scambiamo la $x$ con la $y$ otteniamo

$$\begin{cases} y+x=1 \\ y^2+x^2+3yx+5=0 \end{cases}$$

che è identico al precedente.

Risolviamo il sistema, le soluzioni sono

$$\begin{cases} x_1=-2 \\ y_1=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=3 \\ y_2=-2 \end{cases}$$

e come si può notare $x$ e $y$ vengono scambiate anche nella soluzione.

In generale se il sistema è simmetrico trovata una coppia soluzione $(a;b)$ l'altra è $(b;a)$.

### 6.2.1 Sistemi simmetrici di secondo grado

Il sistema simmetrico fondamentale è del tipo $\begin{cases} x+y=s \\ xy=p \end{cases}$; esso risolve il problema di trovare due numeri, nota la loro somma e il loro prodotto.

Ricordiamo che nell'equazione di secondo grado $x^2+bx+c=0$, la somma delle radici è $-b$, mentre il prodotto è $c$. Pertanto, basta risolvere la seguente equazione, *detta equazione risolvente:* $t^2-st+p=0$ con $s=-b$ e $p=c$.

In base al segno del discriminante abbiamo:

- $\Delta>0$ l'equazione risolvente ha due soluzioni distinte $t_1$ e $t_2$, le soluzioni del sistema sono: $\begin{cases} x_1=t_1 \\ y_1=t_2 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=t_2 \\ y_2=t_1 \end{cases}$;
- $\Delta=0$ l'equazione risolvente ha radici coincidenti $t_1=t_2$, le soluzioni del sistema sono: $\begin{cases} x_1=t_1 \\ y_1=t_1 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=t_1 \\ y_2=t_1 \end{cases}$;
- $\Delta<0$ l'equazione non ammette soluzioni reali. Il sistema è impossibile.

---

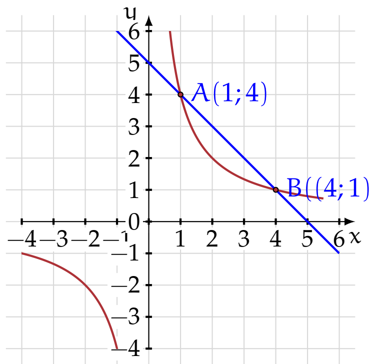
**Esempio 6.11.** Risolvere il seguente sistema $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=4 \end{cases}$.

L'equazione risolvente è $t^2-5t+4=0$ le cui soluzioni sono: $t_1=1 \vee t_2=4$.

Le soluzioni del sistema sono le seguenti:

$$\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=4 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=4 \\ y_2=1 \end{cases}.$$

Possiamo interpretare i risultati ottenuti nel piano cartesiano: la retta di equazione $x+y=5$ interseca l'iperbole equilatera $xy=4$ nei due punti $A(1;4)$ e $B(4;1)$.



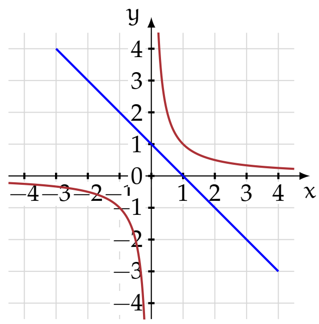

**Esempio 6.12.** Risolvere il seguente sistema $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=4 \end{cases}$.

L'equazione risolvente è

$$t^2-t+4=0$$

con il discriminante negativo e dunque senza soluzioni reali. Il sistema è impossibile.

Possiamo interpretare i risultati ottenuti nel piano cartesiano: la retta di equazione $x+y=1$ non interseca l'iperbole equilatera $xy=4$.



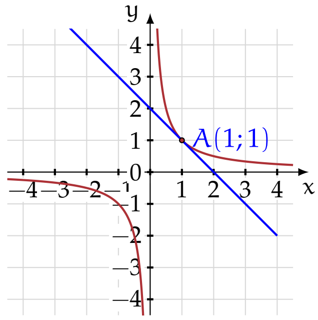
**Esempio 6.13.** Risolvere il seguente sistema $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases}$.

L'equazione risolvente è $t^2-2t+1=0$ le cui soluzioni sono: $t_1=t_2=1$.

Il sistema ha due soluzioni coincidenti:

$$\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=1 \\ y_2=1 \end{cases}.$$

Possiamo interpretare i risultati ottenuti nel piano cartesiano: la retta di equazione $x+y=2$ è tangente all'iperbole equilatera $xy=1$ nel punto $(1;1)$.




*Esercizi proposti:* 6.14, 6.15, 6.16, 6.17, 6.18, 6.19

### 6.2.2 Sistemi simmetrici riconducibili al sistema simmetrico fondamentale

In questa categoria rientrano i sistemi simmetrici che, mediante artifici, possono essere trasformati in sistemi simmetrici del tipo precedente.

**Esempio 6.14.** Risolvere il sistema $\begin{cases} x+y=a \\ x^2+y^2+bx+by=c \end{cases}$.

È possibile trasformare il sistema in un sistema simmetrico fondamentale.

Ricordando l'identità $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$, il sistema può essere riscritto così:

$$\begin{cases} x+y=a \\ (x+y)^2-2xy+b(x+y)=c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=a \\ a^2-2xy+ba=c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=a \\ xy=\frac{a^2+ab-c}{2} \end{cases}.$$

Posto $a=s$ e $p=\frac{a^2+ab-c}{2}$ il sistema diventa

$$\begin{cases} x+y=s \\ xy=p \end{cases}.$$

**Esempio 6.15.** Risolvere il sistema $\begin{cases} x+y=7 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$

Ricordando l'identità $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$, il sistema può essere riscritto così:

$$\begin{cases} x+y=7 \\ (x+y)^2-2xy=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=7 \\ (7)^2-2xy=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=7 \\ -2xy=25-49 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=7 \\ xy=12 \end{cases}.$$

L'equazione risolvente è $t^2-7t+12=0$ le cui soluzioni sono $t_1=3 \vee t_2=4$.

Le soluzioni del sistema sono:

$$\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=4 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=4 \\ y_2=3 \end{cases}.$$

**Esempio 6.16.** Risolvere il sistema $\begin{cases} -3x-3y=-5 \\ 2x^2+2y^2=10 \end{cases}$

Dividendo per $-3$ la prima equazione, per 2 la seconda e ricordando l'identità

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$$

si ha:

$$\begin{cases} x+y=\frac{5}{3} \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=\frac{5}{3} \\ (x+y)^2-2xy=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=\frac{5}{3} \\ \left(\frac{5}{3}\right)^2-2xy=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=\frac{5}{3} \\ xy=-\frac{10}{9} \end{cases}.$$

L'equazione risolvente è $t^2-\frac{5}{3}t-\frac{10}{9}=0$ le cui soluzioni sono: $t_1=\frac{5-\sqrt{65}}{6} \vee t_2=\frac{5+\sqrt{65}}{6}$. Le soluzioni del sistema sono le seguenti:

$$\begin{cases} x_1=\frac{5-\sqrt{65}}{6} \\ y_1=\frac{5+\sqrt{65}}{6} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\frac{5+\sqrt{65}}{6} \\ y_2=\frac{5-\sqrt{65}}{6} \end{cases}.$$

---

✍ *Esercizi proposti:* 6.20, 6.21, 6.22, 6.23, 6.24

### 6.2.3 Sistemi non simmetrici riconducibili a sistemi simmetrici

Rientrano in questa classe i sistemi che, pur non essendo simmetrici, possono essere trasformati, mediante opportune sostituzioni, in sistemi simmetrici. Naturalmente questi sistemi si possono risolvere anche con la procedura solita di sostituzione per i sistemi di secondo grado.

---

**Esempio 6.17.** Risolvere il sistema $\begin{cases} x-y=8 \\ xy=-15 \end{cases}$.

Mediante la sostituzione $y'=-y$ otteniamo $\begin{cases} x+y'=8 \\ xy'=15 \end{cases}$ che è un sistema simmetrico fondamentale.

L'equazione risolvente è $t^2-8t+15=0$ le cui soluzioni sono $t_1=3 \vee t_2=5$, pertanto il sistema ha le soluzioni

$$\begin{cases} x_1=3 \\ y_1{}'=5 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=5 \\ y_2{}'=3 \end{cases}.$$

Dall'uguaglianza $y'=-y \Rightarrow y=-y'$ otteniamo le soluzioni del sistema dato

$$\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=-5 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=5 \\ y_2=-3 \end{cases}.$$

**Esempio 6.18.** Risolvere il sistema $\begin{cases} 2x-3y=8 \\ xy=2 \end{cases}$.

Mediante la sostituzione $x'=2x$ e $y'=-3y$ da cui $x=\frac{x'}{2}$ e $y=-\frac{y'}{3}$ otteniamo

$$\begin{cases} x'+y'=8 \\ \frac{x'}{2}\cdot\left(-\frac{y'}{3}\right)=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'+y'=8 \\ x'y'=-12 \end{cases}$$

che è un sistema simmetrico fondamentale.

Risolviamo il sistema simmetrico $\begin{cases} x'+y'=8 \\ x'y'=-12 \end{cases}$ con la procedura nota. L'equazione risolvente è $t^2-8t-12=0$ le cui soluzioni sono $t_{1,2}=4\pm2\sqrt{3}$; pertanto il sistema ha le soluzioni:

$$\begin{cases} x'_1=4-2\sqrt{7} \\ y'_1=4+2\sqrt{7} \end{cases} \vee \begin{cases} x'_2=4+2\sqrt{7} \\ y'_2=4-2\sqrt{7} \end{cases}.$$

Dalle sostituzioni $x=\frac{x'}{2}$ e $y=-\frac{y'}{3}$ otteniamo le soluzioni del sistema iniziale

$$\begin{cases} x_1=\frac{4-2\sqrt{7}}{2}=2-\sqrt{7} \\ y_1=\frac{-4-2\sqrt{7}}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=\frac{4+2\sqrt{7}}{2}=2+\sqrt{7} \\ y_2=\frac{-4+2\sqrt{7}}{3} \end{cases}.$$

**Procedura di sostituzione** Ricaviamo una delle due incognite dall'equazione di primo grado e sostituiamola nell'altra equazione

$$\begin{cases} 2x-3y=8 \\ xy=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{2x-8}{3} \\ xy=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{2x-8}{3} \\ x\left(\frac{2x-8}{3}\right)=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{2x-8}{3} \\ 2x^2-8x-6=0 \end{cases}.$$

Risolviamo l'equazione $2x^2-8x-6=0$ avente come soluzioni $x_1=2-\sqrt{7}\vee x_2=2+\sqrt{7}$. Applicando la formula ridotta otteniamo: $x_1=2-\sqrt{7}\vee x_2=2+\sqrt{7}$. Sostituiamo i valori trovati e ricaviamo i valori della $y$:

$$\begin{cases} x_1=2-\sqrt{7} \\ y_1=\frac{-4-2\sqrt{7}}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=2+\sqrt{7} \\ y_2=\frac{-4+2\sqrt{7}}{3} \end{cases}.$$

---

✍ *Esercizio proposto:* 6.25

### 6.2.4 Sistemi simmetrici di grado superiore al secondo

Introduciamo le seguenti trasformazioni dette formule di Waring, dal nome del matematico che le ha formulate per primo. Con tali formule, si possono trasformare le potenze di un binomio in relazioni tra somme e prodotti delle due variabili che lo compongono. Indicate come $s$ somma delle variabili e $p$ il loro prodotto queste sono le prime formule fino alla potenza quinta.

- $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=s^2-2p$;
- $a^3+b^3=(a+b)^3-3a^2b-3ab^2=(a+b)^3-3ab(a+b)=s^3-3ps$;
- $a^4+b^4=s^4-4ps^2+2p^2$;
- $a^5+b^5=s^5-5ps^3+5p^2s$.

---

**Esempio 6.19.** Risolvere il sistema $\begin{cases} x+y=1 \\ x^3+y^3-2xy=3 \end{cases}$.

Applicando l'identità $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$, il sistema può essere riscritto così:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ (x+y)^3-3xy(x+y)-2xy=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ 1-5xy=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ xy=-\frac{2}{5} \end{cases}.$$

Da cui l'equazione risolvente $t^2-t-\frac{2}{5}=0 \Rightarrow 5t^2-5t-2=0$ con $t_1=\frac{5-\sqrt{65}}{10}$ e $t_2=\frac{5+\sqrt{65}}{10}$. Le soluzioni del sistema sono: $\left(\frac{5-\sqrt{65}}{10};\frac{5+\sqrt{65}}{10}\right),\left(\frac{5+\sqrt{65}}{10};\frac{5-\sqrt{65}}{10}\right)$.

**Esempio 6.20.** Risolvere il sistema $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^4+y^4=\frac{7}{2} \end{cases}$.

Ricordando l'identità $x^4+y^4 = (x+y)^4-4xy(x+y)^2+2x^2y^2$, il sistema può essere riscritto così:

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ (x+y)^4-4xy(x+y)^2+2x^2y^2=\frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ 2x^2y^2-4xy-\frac{5}{2}=0 \end{cases}.$$

Introduciamo l'incognita ausiliaria $u = xy$. L'equazione $2x^2y^2-4xy-\frac{5}{2}=0$ diventa $2u^2-4u-\frac{5}{2}=0$ che ha come soluzioni $u_1=-\frac{1}{2} \vee u_2=\frac{5}{2} \Rightarrow xy=-\frac{1}{2} \vee xy=\frac{5}{2}$.

Il sistema assegnato è equivalente a due insiemi

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-\frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x+y=-1 \\ xy=\frac{5}{2} \end{cases}$$

e dunque il suo insieme soluzione $S$ si ottiene dall'unione dell'insieme soluzione dei due sistemi $S=S_1 \cup S_2$.

Il primo sistema

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

ha equazione risolvente $t^2+t-\frac{1}{2}=0$ con

$$t_1=\frac{-1-\sqrt{3}}{2} \text{ e } t_2=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}.$$

Il sistema ha soluzioni

$$\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}; \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}; \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)$$

e quindi

$$S_1=\left\{\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}; \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}; \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)\right\}.$$

Il secondo sistema $\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=\frac{5}{2} \end{cases}$ ha equazione risolvente $t^2+t+\frac{5}{2}=0$, che ha $\Delta<0$, l'insieme soluzione è vuoto. Anche il sistema non ha soluzioni reali, quindi $S_2=\emptyset$. L'insieme soluzione del sistema assegnato $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^4+y^4=\frac{7}{2} \end{cases}$ è $S=S_1\cup\emptyset=S_1$.

---

✍ *Esercizi proposti:* 6.26, 6.27, 6.28, 6.29, 6.30, 6.31, 6.32, 6.33, 6.34, 6.35

## 6.3 Sistemi omogenei di quarto grado

Un sistema si dice omogeneo se le equazioni, con l'eccezione dei termini noti, hanno tutti i termini con lo stesso grado. I sistemi omogenei di quarto grado sono quindi nella forma:

$$\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2=d \\ a'x^2+b'xy+c'y^2=d' \end{cases}.$$

**Primo caso** $d = 0 \wedge d' = 0$.

Il sistema si presenta nella forma $\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = 0 \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 = 0 \end{cases}$. Un sistema di questo tipo ha sempre almeno la soluzione nulla $(0; 0)$.

Per trovare le soluzioni del sistema poniamo $y = tx$ sostituendo abbiamo:

$$\begin{cases} ax^2 + btx^2 + ct^2x^2 = 0 \\ a'x^2 + b'tx^2 + c't^2x^2 = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x^2(a + bt + ct^2) = 0 \\ x^2(a' + b't + c't^2) = 0 \end{cases}.$$

Supponendo $x \neq 0$ e che quindi che può assumere tutti i valori $k \in \mathbb{R}_0$ possiamo dividere le due equazioni per $x^2$, otteniamo così due equazioni nell'incognita $t$ che possiamo risolvere. Se le due equazioni ammettono qualche soluzione comune allora il sistema ammette infinite soluzioni. Le soluzioni sono del tipo $x = k$ e $y = kt$, dove $t$ è la soluzione comune di cui si è detto prima.

---

**Esempio 6.21.** Risolvere il seguente sistema $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ -x^2 + 5xy - 6y^2 = 0 \end{cases}$.

Applichiamo la sostituzione $y = tx$, il sistema diventa $\begin{cases} x^2 - 3tx^2 + 2t^2x^2 = 0 \\ -x^2 + 5tx^2 - 6t^2x^2 = 0 \end{cases}$.

Dividendo per $x^2$ otteniamo $\begin{cases} 1 - 3t + 2t^2 = 0 \\ 1 - 5t + 6t^2 = 0 \end{cases}$.

La prima equazione è risolta per $t_1 = 1 \vee t_2 = \frac{1}{2}$, mentre la seconda equazione è risolta per $t_3 = \frac{1}{2} \vee t_4 = \frac{1}{3}$. Le due equazioni hanno una radice in comune $t = \frac{1}{2}$.

Pertanto oltre alla soluzione $(0; 0)$ il sistema ammette infinite soluzioni che possono essere scritte nella forma $\begin{cases} x = k \\ y = \frac{1}{2}k \end{cases}$.

---

**Secondo caso** $d = 0 \wedge d' \neq 0$.

Il sistema si presenta nella forma $\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = 0 \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 = d' \end{cases}$.

Ponendo $y = tx$ si ha $\begin{cases} ax^2 + btx^2 + ct^2x^2 = 0 \\ a'x^2 + b'tx^2 + c't^2x^2 = d' \end{cases}$.

Dividendo per $x^2$ la prima equazione si ha $\begin{cases} a + bt + ct^2 = 0 \\ x^2(a' + b't + c't^2) = d' \end{cases}$.

Si risolve la prima equazione nell'incognita $t$; si sostituiscono i valori trovati nella seconda equazione e si ricavano i valori di $x$ e di seguito i valori di $y$ con $y = tx$.

**Esempio 6.22.** Risolvere il sistema $\begin{cases} x^2 - xy - 6y^2 = 0 \\ -x^2 + 2xy - 3y^2 = -6 \end{cases}$.

Sostituendo $y = tx$ il sistema diventa

$$\begin{cases} 1 - t - 6t^2 = 0 \\ x^2(-1 + 2t - 3t^2) = -6 \end{cases}.$$

La prima equazione ha per soluzioni $t_1 = \frac{1}{3}$ e $t_2 = -\frac{1}{2}$.

Sostituendo $t = \frac{1}{3}$ nella seconda equazione si ha $x_{1,2} = \pm 3$ e sapendo che $y = tx$ si ottengono le coppie

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2 = -3 \\ y_2 = -1 \end{cases}.$$

Sostituendo $t = -\frac{1}{2}$ si ha $x_3 = -\frac{2\sqrt{6}}{11} \vee x_4 = \frac{2\sqrt{6}}{11}$ e sapendo che $y = tx$ si ottengono le coppie

$$\begin{cases} x_3 = -\frac{2\sqrt{6}}{11} \\ y_3 = \frac{\sqrt{6}}{11} \end{cases} \vee \begin{cases} x_4 = -2\frac{\sqrt{6}}{11} \\ y_4 = -\frac{\sqrt{6}}{11} \end{cases}.$$

L'insieme soluzione del sistema è

$$\text{I. S.} = \{(x_1; y_1), (x_2; y_2), (x_3; y_3), (x_4; y_4)\}.$$

**Terzo caso** $d \neq 0 \wedge d' \neq 0$.

Il sistema si presenta nella forma $\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = d \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 = d' \end{cases}$.

Ponendo $y = tx$ si ha

$$\begin{cases} x^2(a + bt + ct^2) = d \\ x^2(a' + b't + c't^2) = d' \end{cases}.$$

Dividendo membro a membro le due equazioni, sotto la condizione $x \neq 0 \wedge a' + b't + c't^2 \neq 0$ otteniamo

$$\begin{aligned} &\frac{a + bt + ct^2}{a' + b't + c't^2} = \frac{d}{d'} \\ \Rightarrow &d'(a + bt + ct^2) = d(a' + b't + c't^2) \\ \Rightarrow &(cd' - c'd)t^2 + (bd' - b'd)t + ad' - a'd = 0 \end{aligned}$$

che è una equazione di secondo grado nell'incognita $t$.

Se l'equazione ha come soluzioni $t_1$ e $t_2$ dobbiamo poi risolvere i sistemi

$$\begin{cases} y = t_1 x \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 = d' \end{cases} \vee \begin{cases} y = t_2 x \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 = d' \end{cases}.$$

---

**Esempio 6.23.** Risolvere il sistema $\begin{cases} x^2+3xy-y^2=-68 \\ -2x^2+xy+3y^2=88 \end{cases}$.

Sostituendo $y=tx$ il sistema diventa $\begin{cases} x^2(1+3t-t^2)=-68 \\ x^2(-2+t+3t^2)=88 \end{cases}$.

Dividendo membro a membro con la condizione $x\neq 0 \wedge 3t^2+t-2\neq 0$ cioè $x\neq 0$, $t\neq -1$ e $t\neq \frac{2}{3}$ si ha $\frac{1+3t-t^2}{-2+t+3t^2}=-\frac{68}{88}$, da cui l'equazione $29t^2+83t-12=0$ con soluzioni $t_1=\frac{4}{29} \vee t_2=-3$.

A questo punto dobbiamo risolvere i due sistemi:

$$\begin{cases} y=\frac{4}{29}x \\ -2x^2+xy+3y^2=88 \end{cases} \vee \begin{cases} y=-3x \\ -2x^2+xy+3y^2=88 \end{cases}.$$

Il primo sistema è impossibile, il secondo ha soluzioni

$$\begin{cases} x_1=-2 \\ y_1=6 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=2 \\ y_2=-6 \end{cases}.$$

L'insieme soluzione del sistema è $\text{I.S.}=\{(-2;6),(2;-6)\}$.

---

✍ *Esercizi proposti:* 6.36, 6.37, 6.38, 6.39, 6.40, 6.41, 6.42, 6.43, 6.44, 6.45, 6.46, 6.47, 6.48.

## 6.4 Problemi che si risolvono con sistemi di grado superiore al primo

Riprendiamo un problema già discusso. Considerare più variabili ci permette di facilitare il processo di traduzione in linguaggio matematico.

**Problema 6.24.** Il trapezio isoscele $ABCD$ è inscritto in una semicirconferenza di diametro $AB$ di misura 25 cm; determinare le misure dei lati del trapezio sapendo che il perimetro è 62 cm.

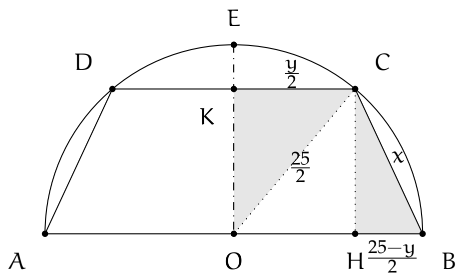
*Dati:* $\overline{AB}=25; 2p=62;$ $AB \parallel DC; AD\equiv CB$.

*Obiettivo:* $\overline{CB}; \overline{DC}$.

*Dati impliciti:* $\overline{KO}=\overline{CH}; \overline{CO}=\frac{25}{2};$ $\overline{KC}=\frac{\overline{DC}}{2}; \overline{HB}=\frac{25-y}{2};$ $\widehat{CKO}=90°; \widehat{CHB}=90°$.

*Incognite:* $\overline{CB}=x; \overline{DC}=y$.

*Vincoli:* $\begin{cases} 0<x<\frac{25}{2}\sqrt{2} \\ 0<y<25 \end{cases}$.




*Relazioni tra dati e incognite:* $\begin{cases} y+2x+25=62 \\ \left(\frac{25}{2}\right)^2-\left(\frac{y}{2}\right)^2=x^2-\left(\frac{25-y}{2}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-2x+37 \\ x^2-25x+150=0 \end{cases}$.

*Soluzioni:* $\begin{cases} x_1=15 \\ y_1=7 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2=10 \\ y_2=17 \end{cases}$.

*Verifica:* Entrambe le soluzioni sono accettabili.

La risoluzione del problema si basa sulla equazione di primo grado $y + 2x + 25 = 62$ che definisce il perimetro, sulla congruenza dei segmenti $\overline{KO}$ e $\overline{CH}$ facilmente dimostrabile in quanto stessa distanza tra due rette parallele, l'applicazione del teorema di Pitagora ai triangoli CKB e CHB rettangoli per costruzione. Naturalmente tutte le informazioni ausiliare vanno dimostrate, ma data la loro facilità le lasciamo al lettore.

Importante è impostare le condizioni sulle incognite che devono essere maggiori di 0 ma anche $x < \frac{25}{2}\sqrt{2}$ perché il trapezio non diventi un triangolo e $y < 25$ perché la base minore sia realmente minore. L'ultimo passo consiste nella verifica delle soluzioni, che nel nostro caso sono entrambe accettabili. Si hanno dunque due trapezi inscritti in quella semicirconferenza che avranno il perimetro di 62 cm.

**Problema 6.25.** L'azienda Profit intende fare una ristrutturazione riducendo il numero degli operai. Oggi spende per gli operai (tutti con lo stesso stipendio) 800 € al giorno. Se si licenziassero 5 dipendenti e si riducesse lo stipendio di 2 € al giorno si avrebbe un risparmio giornaliero di 200 €. Quanti sono gli operai attualmente occupati nell'azienda?

*Dati*:
spesa per salari al giorno = 800 €;
riduzione salario giornaliero = 2 €;
riduzione numero operai = 5 unità;
risparmio dopo il licenziamento e la riduzione di stipendio = 200 €.

*Obiettivo*: numero operai occupati prima della ristrutturazione

*Incognite*:
$x$ = numero operai prima della ristrutturazione;
$y$ = salario percepito da ogni operaio prima della ristrutturazione.

*Vincoli*: $\begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ y \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$

*Altre Informazioni*:
Numero operai dopo la ristrutturazione $= x - 5$;
salario dopo la ristrutturazione $= y - 2$;
spesa per stipendi dopo la ristrutturazione $= 800 - 200 = 600$ €.

*Relazioni tra dati e incognite*:

$$\begin{cases} xy = 800 \\ (x-5)(y-2) = 600 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 800 \\ xy - 2x - 5y + 10 = 600 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 800 \\ 2x + 5y = 210 \end{cases}$$

*Soluzioni*: $\begin{cases} x_1 = 25 \\ y_1 = 32 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2 = 80 \\ y_2 = 10 \end{cases}$

*Verifica*: Entrambe le soluzioni sono accettabili.

Naturalmente c'è una grande differenza tra percepire 32 €/giorno di salario o 10 €/giorno, come avere impiegati 25 o 80 operai. Il problema va meglio definito. Basterebbe per questo un vincolo che ci dice qual è la paga minima giornaliera di un operaio.

**Problema 6.26.** Un numero $k \in \mathbb{N}$ è composto da tre cifre. Il prodotto delle tre cifre è 42. Se si scambia la cifra delle decine con quella delle centinaia si ottiene un numero che supera $k$ di 360. Se si scambia la cifra della unità con quella delle centinaia si ottiene un numero minore di 99 rispetto al numero $k$. Trovare $k$.

*Dati*:
il numero $k$ è composto da tre cifre;
prodotto delle tre cifre $= 42$;
scambiando la cifra delle decine con quella delle centinaia otteniamo $l = k + 360$;
scambiando la cifra delle unità con quella delle centinaia otteniamo $m = k - 99$.

*Obiettivo*: trovare il numero $k$.

*Incognite*: $x =$ cifra che rappresenta il numero delle centinaia; $y =$ cifra che rappresenta il numero delle decine; $z =$ cifra che rappresenta il numero delle unità.

*Vincoli*: $\begin{cases} x \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \\ y, z \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \end{cases}$.

*Altre Informazioni*: $k = 100x + 10y + z$; $l = 100y + 10x + z$; $m = 100z + 10y + x$.

*Relazioni tra dati e incognite*:

$$\begin{cases} x \cdot y \cdot z = 42 \\ 100y + 10x + z = 100x + 10y + z + 360 \\ 100z + 10y + x = 100x + 10y + z - 99 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \cdot y \cdot z = 42 \\ x - y = -4 \\ x - z = 1 \end{cases}.$$

*Soluzioni*: $\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 7 \\ z_1 = 2 \end{cases}$.

*Verifica*: La soluzione soddisfa le condizioni il numero cercato è 372.

✍ *Esercizi proposti:* 6.49, 6.50, 6.51, 6.52, 6.53, 6.54, 6.55, 6.56, 6.47, 6.58, 6.59, 6.60, 6.61, 6.62, 6.63, 6.64, 6.65, 6.66, 6.67, 6.68, 6.69, 6.70, 6.71.

## 6.5 Esercizi

### 6.5.1 Esercizi dei singoli paragrafi

#### 6.1 - Sistemi di secondo grado

**6.1** (*). Risolvere i seguenti sistemi di secondo grado.

a) $\begin{cases} x^2+2y^2=3 \\ x+y=2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 4x^2+2y^2-6=0 \\ x=y \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 3x^2-4y^2-x=0 \\ x-2y=1 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 2x^2-6xy=x \\ 3x+5y=-2 \end{cases}$.

**6.2** (*). Risolvere i seguenti sistemi di secondo grado.

a) $\begin{cases} y^2-3y=2xy \\ y=x-3 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x+2y=-1 \\ x+5y^2=23 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} xy-x^2+2y^2=y-2x \\ x+y=0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x-5y=2 \\ x^2+2y^2=4 \end{cases}$.

**6.3** (*). Risolvere i seguenti sistemi di secondo grado.

a) $\begin{cases} 3x-y=2 \\ x^2+2xy+y^2=0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+3y=10 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x^2-4xy+4y^2-1=0 \\ x=y+2 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x+y=2 \end{cases}$.

**6.4** (*). Risolvere i seguenti sistemi di secondo grado.

a) $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2-3x+2y=3 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 5x^2-y^2+4y-2x+2=0 \\ x-y=1 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 3x+y=2 \\ x^2-y^2=1 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ 4x-3y+7=0 \end{cases}$.

**6.5** (*). Risolvere i seguenti sistemi di secondo grado.

a) $\begin{cases} x+2y=3 \\ x^2-4xy+2y^2+x+y-1=0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2x^2+xy-7x-2y=-6 \\ 2x+y=3 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x^2-4xy+4y^2-1=0 \\ x=y+2 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x-2y-7=0 \\ x^2-xy=4 \end{cases}$.

**6.6** (*). Risolvere i seguenti sistemi di secondo grado.

a) $\begin{cases} x+y=0 \\ x^2+y^2-x-10=0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x^2-4y^2=0 \\ 4x-7y=2 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x^2+2y^2-3xy-x+2y-4=0 \\ 2x-3y+4=0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x-2y=1 \\ x^2+y^2-2x=1 \end{cases}$.

**6.7 (*).** Risolvere i seguenti sistemi di secondo grado.

a) $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2-2xy-2y-2=0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 9x^2-12xy+4y^2-2x+6y=8 \\ x-2y=2 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 3x+y=4 \\ x^2-y^2=1 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} \frac{1}{2}(2y-x)(y+x)-(x+y)^2+\frac{3}{2}x(x+y+1)+2(y-1)=0 \\ \frac{2}{3}(x-3)^2+4\left(x-\frac{3}{2}\right)=2(xy+1) \end{cases}$.

**6.8 (*).** Risolvere i seguenti sistemi, dopo aver eseguito la discussione sul parametro.

a) $\begin{cases} x+y=3 \\ x^2+y^2=k \end{cases}$;

b) $\begin{cases} ky+2x=4 \\ xy=2 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} y=kx-1 \\ y^2-kx^2+1=0 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} y=kx-2k \\ x^2-2y-x=2 \end{cases}$.

**6.9 (*).** Risolvere i seguenti sistemi, dopo aver eseguito la discussione sul parametro.

a) $\begin{cases} y=x+k \\ y=3x^2+2x \end{cases}$;

b) $\begin{cases} y=-x+k \\ x^2-y^2-1=0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} y+x-k=0 \\ xy+2kx-3ky-6k^2=0 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} y-x+k=0 \\ y-x^2+4x-3=0 \end{cases}$.

**6.10 (*).** Trovare le soluzioni dei seguenti sistemi frazionari.

a) $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ \frac{x+2y}{x-1}=2 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \frac{x+2y}{x-y}=4 \\ x^2+y^2+3x-2y=1 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} \frac{2x+y}{x+2y}=3 \\ xy+3y=1 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} \frac{3x-2y}{x}=\frac{1-x}{y-1} \\ 2x-y=1 \end{cases}$.

**6.11 (*).** Trovare le soluzioni dei seguenti sistemi frazionari.

a) $\begin{cases} \frac{x+y}{x-2}=y+\frac{1}{3} \\ y=2x+2 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \frac{2x+1}{y-2}=\frac{y-1}{x+1} \\ 2x+2y=3 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} \frac{y-1}{x+y}=x \\ x-y=0 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} \frac{x+1}{2y-1}=y \\ 2y-x=-4 \end{cases}$.

**6.12.** Risolvere i seguenti sistemi di secondo grado in tre incognite.

a) $\begin{cases} x-3y-z=-4 \\ 3x+2y+z=6 \\ 4x^2+2xz+y^2=6 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x-y+3z=9 \\ x^2-y+z^2=1 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x-y+z=0 \\ x^2-y+z=3 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x-y+2z=3 \\ 2x-2y+z=1 \\ x^2-y^2+z=12 \end{cases}$.

**6.13 (*).** Risolvere i seguenti sistemi di secondo grado in tre incognite.

a) $\begin{cases} 2x-3y=-3 \\ 5y+2z=1 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x-2y+z=3 \\ x+2y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=29 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y+3z=9 \\ x^2-y+z=12 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y+z=0 \\ x^2+xy-z=0 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} x-y-z=-1 \\ x+y+z=1 \\ x+y^2+z^2=32 \end{cases}$.

## 6.2 - Sistemi simmetrici

**6.14 (*).** Risolvere i seguenti sistemi simmetrici di secondo grado.

a) $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=3 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=7 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x+y=-5 \\ xy=-6 \end{cases}$.

**6.15 (*).** Risolvere i seguenti sistemi simmetrici di secondo grado.

a) $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=-4 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x+y=-4 \\ xy=4 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x+y=6 \\ xy=9 \end{cases}$.

**6.16 (*).** Risolvere i seguenti sistemi simmetrici di secondo grado.

a) $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=10 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x+y=7 \\ xy=12 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=2 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x+y=12 \\ xy=-13 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} x+y=\frac{6}{5} \\ xy=\frac{9}{25} \end{cases}$;

f) $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=50 \end{cases}$.

**6.17 (*).** Risolvere i seguenti sistemi simmetrici di secondo grado.

a) $\begin{cases} x+y=-5 \\ xy=-14 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=-14 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x+y=\frac{1}{4} \\ xy=-\frac{3}{8} \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=-10 \end{cases}$.

**6.18 (*).** Risolvere i seguenti sistemi simmetrici di secondo grado.

a) $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x+y=\frac{5}{2} \\ xy=-\frac{7}{2} \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x+y=-5 \\ xy=2 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x+y=\frac{4}{3} \\ xy=-\frac{1}{2} \end{cases}$.

**6.19** (*). Risolvere i seguenti sistemi simmetrici di secondo grado.

a) $\begin{cases} x+y=\frac{5}{2} \\ xy=-\frac{9}{2} \end{cases}$; c) $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=-3 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=-\frac{1}{3} \end{cases}$; d) $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=-50 \end{cases}$.

**6.20** (*). Risolvere i seguenti sistemi riconducibili al sistema simmetrico fondamentale.

a) $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x+y=2 \\ x^2+y^2+x+y=1 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x+y=2 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$; e) $\begin{cases} x+y=4 \\ x^2+y^2=8 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x+y=3 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$; f) $\begin{cases} x+y=2 \\ x^2+y^2-3xy=4 \end{cases}$.

**6.21** (*). Risolvere i seguenti sistemi riconducibili al sistema simmetrico fondamentale.

a) $\begin{cases} x+y=-12 \\ x^2+y^2=72 \end{cases}$; c) $\begin{cases} -4x-4y=-44 \\ 2x^2+2y^2-3xy=74 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2x+2y=-2 \\ (y-x)^2-xy=101 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x+y=3 \\ x^2+y^2-4x-4y=5 \end{cases}$.

**6.22** (*). Risolvere i seguenti sistemi riconducibili al sistema simmetrico fondamentale.

a) $\begin{cases} x+y=7 \\ x^2+y^2=29 \end{cases}$; c) $\begin{cases} \frac{x+y}{2}=\frac{3}{4} \\ 3x^2+3y^2=\frac{15}{4} \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2x+2y=-2 \\ 4x^2+4y^2=52 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x+y=-3 \\ x^2+y^2-5xy=37 \end{cases}$.

**6.23** (*). Risolvere i seguenti sistemi riconducibili al sistema simmetrico fondamentale.

a) $\begin{cases} x+y=-6 \\ x^2+y^2-xy=84 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x+y=-7 \\ x^2+y^2-6xy-3x-3y=44 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x+y=-5 \\ x^2+y^2-4xy+5x+5y=36 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x^2+y^2=-1 \\ x+y=6 \end{cases}$.

**6.24** (*). Risolvere i seguenti sistemi riconducibili al sistema simmetrico fondamentale.

a) $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+y=-7 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x^2+y^2-4xy-6x-6y=1 \\ x+y=1 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x^2+y^2=18 \\ x+y=6 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x^2+y^2=8 \\ x+y=3 \end{cases}$.

**6.25** (*). Risolvere i seguenti sistemi riconducibili a sistemi simmetrici.

a) $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=-12 \\ xy=\frac{1}{35} \end{cases}$; c) $\begin{cases} -2x+y=3 \\ xy=1 \end{cases}$.

**6.26** (*). Risolvere i seguenti sistemi di grado superiore al secondo.

a) $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^3+y^3=-1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x+y=-2 \\ x^3+y^3-xy=-5 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} xy=-2 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x+y=8 \\ x^3+y^3=152 \end{cases}$.

**6.27** (*). Risolvere i seguenti sistemi di grado superiore al secondo.

a) $\begin{cases} x^3+y^3=9 \\ x+y=3 \end{cases}$; c) $\{ x^3-y^3=351xy=-14$;

b) $\begin{cases} x^3+y^3=-342 \\ x+y=-6 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x^3+y^3=35 \\ x+y=5 \end{cases}$.

**6.28** (*). Risolvere i seguenti sistemi di grado superiore al secondo.

a) $\begin{cases} x^4+y^4=2 \\ x+y=0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x^3+y^3=-35 \\ xy=6 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x^4+y^4=17 \\ x+y=-3 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x^3+y^3=-26 \\ xy=-3 \end{cases}$.

**6.29** (*). Risolvere i seguenti sistemi di grado superiore al secondo.

a) $\begin{cases} x+y=3 \\ x^4+y^4=17 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x+y=3 \\ x^4+y^4=2 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x+y=-1 \\ 8x^4+8y^4=41 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x+y=5 \\ x^4+y^4=257 \end{cases}$.

**6.30** (*). Risolvere i seguenti sistemi di grado superiore al secondo.

a) $\begin{cases} x^4+y^4=2 \\ xy=1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^5+y^5=-211 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x^4+y^4=17 \\ xy=-2 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x^5+y^5=64 \\ x+y=4 \end{cases}$.

**6.31** (*). Risolvere i seguenti sistemi di grado superiore al secondo.

a) $\begin{cases} x^5+y^5=-2882 \\ x+y=-2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x^5+y^5=31 \\ xy=-2 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x^5+y^5=2 \\ x+y=0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x^4+y^4=337 \\ xy=12 \end{cases}$.

**6.32** (*). Risolvere i seguenti sistemi di grado superiore al secondo.

a) $\begin{cases} x^3+y^3=\frac{511}{8} \\ xy=-2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x^2+y^2=34 \\ xy=15 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ xy=2 \end{cases}$; d) $\begin{cases} xy=1 \\ x^2+y^2+3xy=5 \end{cases}$.

**6.33** (*). Risolvere i seguenti sistemi di grado superiore al secondo.

a) $\begin{cases} xy=12 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ xy=3 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} xy=1 \\ x^2+y^2-4xy=-2 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x^2+y^2=18 \\ xy=9 \end{cases}$.

**6.34** (*). Risolvere i seguenti sistemi di grado superiore al secondo.

a) $\begin{cases} x^2+y^2+3xy=10 \\ xy=6 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x^2+y^2-6xy+3x+3y=2 \\ xy=2 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x^2+y^2+5xy-2x-2y=3 \\ xy=1 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x^2+y^2=8 \\ xy=-3 \end{cases}$.

**6.35** (*). Risolvere i seguenti sistemi di grado superiore al secondo.

a) $\begin{cases} x^2+y^2+5xy+x+y=-6 \\ xy=-2 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x+y=-\frac{1}{3} \\ x^5+y^5=-\frac{31}{243} \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x^2+y^2+5xy+x+y=-\frac{25}{4} \\ xy=-2 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x+y=1 \\ x^5+y^5=-2 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} x+y=1 \\ x^5+y^5+7xy=17 \end{cases}$.

### 6.3 - Sistemi omogenei di quarto grado

**6.36** (*). Risolvi i seguenti sistemi omogenei.

a) $\begin{cases} x^2-2xy+y^2=0 \\ x^2+3xy-2y^2=0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x^2-6xy+8y^2=0 \\ x^2+4xy-5y^2=0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 3x^2-2xy-y^2=0 \\ 2x^2+xy-3y^2=0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 2x^2+xy-y^2=0 \\ 4x^2-2xy-6y^2=0 \end{cases}$.

**6.37** (*). Risolvi i seguenti sistemi omogenei.

a) $\begin{cases} x^2-5xy+6y^2=0 \\ x^2-4xy+4y^2=0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x^2-5xy+6y^2=0 \\ x^2+2xy-8y^2=0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 0 \\ x^2 + 5xy + 6y^2 = 0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x^2 + 7xy + 12y^2 = 0 \\ 2x^2 + xy + 6y^2 = 0 \end{cases}$.

**6.38 (*).** Risolvi i seguenti sistemi omogenei.

a) $\begin{cases} x^2 + 6xy + 8y^2 = 0 \\ 2x^2 + 12xy + 16y^2 = 0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 0 \\ x^2 + 3xy + 2y^2 = 0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} -4x^2 - 7xy + 2y^2 = 0 \\ 12x^2 + 21xy - 6y^2 = 0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x^2 + 4xy = 0 \\ x^2 + 2xy - 4y^2 - 4 = 0 \end{cases}$.

**6.39 (*).** Risolvi i seguenti sistemi omogenei.

a) $\begin{cases} x^2 - 8xy + 15y^2 = 0 \\ x^2 - 2xy + y^2 = 1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x^2 + 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 - 3xy - y^2 = 3 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 4x^2 - y^2 = 0 \\ x^2 - y^2 = -3 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x^2 - 4xy + 4y^2 = 0 \\ 2x^2 - y^2 = -1 \end{cases}$.

**6.40 (*).** Risolvi i seguenti sistemi omogenei.

a) $\begin{cases} 6x^2 + 5xy + y^2 = 12 \\ x^2 + 4xy + y^2 = 6 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = 0 \\ x^2 - 4xy + y^2 = 6 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x^2 - 3xy + 5y^2 = 1 \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases}$.

**6.41 (*).** Risolvi i seguenti sistemi omogenei.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - 3xy + y^2 = 11 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 4x^2 - xy - y^2 = -\frac{1}{2} \\ x^2 + 2xy - y^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x^2 + 5xy + 4y^2 = 10 \\ x^2 - 2xy - 3y^2 = -11 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x^2 - xy - 8y^2 = -8 \\ x^2 - 2y^2 - xy = 16 \end{cases}$.

**6.42.** Risolvi i seguenti sistemi omogenei.

a) $\begin{cases} x^2 - 6xy - y^2 = 10 \\ x^2 + xy = -2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x^2 + 3xy + 2y^2 = 8 \\ 3x^2 - y^2 + xy = -4 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 4x^2 - 3xy + y^2 = 32 \\ x^2 + 3y^2 - 9xy = 85 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x^2 + 5xy - 7y^2 = -121 \\ 3xy - 3x^2 - y^2 = -7 \end{cases}$.

**6.43 (*).** Risolvi i seguenti sistemi particolari.

a) $\begin{cases} x^2 - 5xy - 3y^2 = 27 \\ -2x^2 - 2y^2 + 4xy = -50 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2x^2 - 4xy - 3y^2 = 18 \\ xy - 2x^2 + 3y^2 = -18 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 9x^2 + 5y^2 = -3 \\ x^2 + 4xy - 3y^2 = 8 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x^2 + 2xy = -\frac{7}{4} \\ x^2 - 4xy + 4y^2 = \frac{81}{4} \end{cases}$.

**6.44 (*).** Risolvi i seguenti sistemi particolari.

a) $\begin{cases} x^2+4xy+4y^2-16=0 \\ x^2-xy+4y^2-6=0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x^2-2xy+y^2-1=0 \\ x^2-2xy-y^2=1 \end{cases}$.

**6.45.** Risolvi i seguenti sistemi particolari.

a) $\begin{cases} x^2-y^2=0 \\ 2x+y=3 \end{cases}$; c) $\begin{cases} (x+y-1)(x-y+1)=0 \\ x-2y=1 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} (x-2y)(x+y-2)=0 \\ 3x+6y=3 \end{cases}$; d) $\begin{cases} (x-3y)(x+5y-2)=0 \\ (x-2)(x-y+4)=0 \end{cases}$.

**6.46 (*).** Risolvi i seguenti sistemi particolari.

a) $\begin{cases} (x^2-3x+2)(x+y)=0 \\ x-y=2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} (4x^2-9y^2)(x^2-2xy+y^2-9)=0 \\ 2x-y=2 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} (x-y)(x+y+1)(2x-y-1)=0 \\ (x-3y-3)(x+y-2)=0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x^2+6xy+9y^2-4=0 \\ (x^2-y^2)(2x-y-4)=0 \end{cases}$.

**6.47 (*).** Risolvi i seguenti sistemi particolari.

a) $\begin{cases} x^2-2xy-8y^2=0 \\ (x+y)(x-3)=0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} (2x^2-3xy+y^2)(x-y-1)=0 \\ (x^2-4xy+3y^2)(12x^2-xy-y^2)=0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} (x-2y-2)(x^2-9y^2)=0 \\ (4x^2-4xy+y^2)(y+2)(x-y)=0 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x^4-y^4=0 \\ x^2-(y^2-6y+9)=0 \end{cases}$.

**6.48 (*).** Risolvi i seguenti sistemi particolari.

a) $\begin{cases} (y^2-4y+3)(x^2+2x-15)=0 \\ (x^2-3xy+2y^2)(9x^2-6xy+y^2)=0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} (x-y)(x+4y-4)(x+y-1)(3x-5y-2)=0 \\ (3x+y-3)(x^2-4y^2)=0 \end{cases}$.

### 6.4 - Problemi che si risolvono con sistemi di grado superiore al primo

**6.49 (*).** La differenza tra due numeri è $\frac{11}{4}$ e il loro prodotto $\frac{21}{8}$. Trova i due numeri.

**6.50 (*).** Trovare due numeri positivi sapendo che la metà del primo supera di 1 il secondo e che il quadrato del secondo supera di 1 la sesta parte del quadrato del primo.

**6.51 (*).** Data una proporzione tra numeri naturali conosciamo i due medi che sono 5 e 16. Sappiamo anche che il rapporto tra il prodotto degli estremi e la loro somma è uguale a $\frac{10}{3}$. Trovare i due estremi.

**6.52 (*).** La differenza tra un numero di due cifre con quello che si ottiene scambiando le cifre è uguale a 36. La differenza tra il prodotto delle cifre e la loro somma è uguale a 11. Trovare il numero.

**6.53** (*). Oggi la differenza delle età tra un padre e sua figlia è 26 anni, mentre due anni fa il prodotto delle loro età era 56. Determina l'età del padre e della figlia.

**6.54** (*). La somma delle età di due fratelli oggi è 46 anni, mentre fra due anni la somma dei quadrati delle loro età sarà 1250. Trova l'età dei due fratelli.

**6.55** (*). Nella produzione di un oggetto la macchina A impiega 5 minuti in più rispetto alla macchina B. Determinare il numero di oggetti che produce ciascuna macchina in 8 ore se in questo periodo la macchina A ha prodotto 16 oggetti in meno rispetto alla macchina B.

**6.56** (*). In un rettangolo la differenza tra i due lati è uguale a 2 cm. Se si diminuiscono entrambi i lati di 1 cm si ottiene un'area di $0,1224\,\text{m}^2$. Calcolare il perimetro del rettangolo.

**6.57** (*). Trova due numeri sapendo che la somma tra i loro quadrati è 100 e il loro rapporto $\frac{3}{4}$.

**6.58** (*). Ho comprato due tipi di vino. In tutto 30 bottiglie. Per il primo tipo ho speso 54 € e per il secondo 36 €. Il prezzo di una bottiglia del secondo tipo costa 2,5 € in meno di una bottiglia del primo tipo. Trova il numero delle bottiglie di ciascun tipo che ho acquistato e il loro prezzo unitario.

**6.59** (*). In un triangolo rettangolo di area $630\,\text{m}^2$, l'ipotenusa misura 53 m. Determinare il perimetro.

**6.60** (*). Un segmento di 35 cm viene diviso in due parti. La somma dei quadrati costruiti su ciascuna delle due parti è $625\,\text{cm}^2$. Quanto misura ciascuna parte?

**6.61** (*). Se in un rettangolo il perimetro misura 16,8 m e l'area $17,28\,\text{m}^2$, quanto misura la sua diagonale?

**6.62** (*). In un triangolo rettangolo la somma dei cateti misura 10,5 cm, mentre l'ipotenusa è 7,5 cm. Trovare l'area.

**6.63** (*). Quanto misura un segmento diviso in due parti, tali che una parte è $\frac{3}{4}$ dell'altra, sapendo che la somma dei quadrati costruiti su ognuna delle due parti è uguale a $121\,\text{cm}^2$?

**6.64** (*). In un trapezio rettangolo con area di $81\,\text{m}^2$ la somma della base minore e dell'altezza è 12 m mentre la base minore è $\frac{1}{5}$ della base maggiore. Trovare il perimetro del rettangolo.

**6.65** (*). La differenza tra le diagonali di un rombo è 8 cm, mentre la sua area è $24\,\text{cm}^2$. Determinare il lato del rombo.

**6.66** (*). Sappiamo che in un trapezio rettangolo con area di $40\,\text{cm}^2$ la base minore è 7 cm, mentre la somma della base maggiore e dell'altezza è 17 cm. Trovare il perimetro del rettangolo.

**6.67** (*). Un rettangolo ha l'area uguale a quella di un quadrato. L'altezza del rettangolo è 16 cm, mentre la sua base è di 5 cm maggiore del lato del quadrato. Determinare il lato del quadrato.

**6.68** (*). La differenza tra i cateti di un triangolo rettangolo è 7k, mentre la sua area è $60k^2$. Calcola il perimetro. $(k > 0)$

**6.69** (*). L'area di un rettangolo che ha come lati le diagonali di due quadrati misura $90k^2$. La somma dei lati dei due quadrati misura 14k. Determinare i lati dei due quadrati. $(k > 0)$

**6.70** (*). Nel rettangolo ABCD la differenza tra altezza e base è 4k. Se prolunghiamo la base AB dalla parte di B di 2k fissiamo il punto E e congiungiamo B con E. Trovare il perimetro del trapezio AECD sapendo che la sua area è $28k^2$ con $k > 0$.

**6.71** (*). In un triangolo isoscele la base è $\frac{2}{3}$ dell'altezza e l'area è $12k^2$. Trova il perimetro del triangolo.

### 6.5.2 Risposte

**6.1.** a) $(1;1) \vee \left(\frac{5}{3};\frac{1}{3}\right)$, b) $(-1;-1) \vee \left(\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$, c) $(1;1) \vee (-1;-1)$, d) $\left(0;-\frac{2}{5}\right) \vee \left(-\frac{1}{4};-\frac{1}{4}\right)$.

**6.2.** a) $(3;0) \vee (-6;-9)$, b) $(0;0)$, c) $\left(-\frac{29}{5},\frac{12}{5}\right) \vee (3,-2)$, d) $\left(-\frac{46}{27},-\frac{20}{27}\right) \vee (2,0)$.

**6.3.** a) $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$, b) $(3;1) \vee (5;3)$, c) $\emptyset$, d) $(1;1)$.

**6.4.** a) $(0;1) \vee \left(\frac{7}{2};-\frac{5}{2}\right)$, b) $\emptyset$, c) $\left(-\frac{3}{2};-\frac{5}{2}\right) \vee \left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$, d) $(-4;-3) \vee \left(\frac{44}{25};\frac{117}{25}\right)$.

**6.5.** a) $(1;1) \vee \left(\frac{10}{7};\frac{11}{14}\right)$, b) $(3;1) \vee (5;-3)$, c) $\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = -2x+3$, d) $(1;-3) \vee \left(-8;-\frac{15}{2}\right)$.

**6.6.** a) $(-2;2) \vee \left(\frac{5}{2};-\frac{5}{2}\right)$, b) $(4;4) \vee (-5;-2)$, c) $(4;2) \vee \left(\frac{4}{15};-\frac{2}{15}\right)$, d) $\left(1+\frac{2\sqrt{10}}{5};\frac{\sqrt{10}}{5}\right) \vee \left(1-\frac{2\sqrt{10}}{5};-\frac{\sqrt{10}}{5}\right)$.

**6.7.** a) $\left(\frac{1+\sqrt{13}}{4};\frac{3-\sqrt{13}}{4}\right) \vee \left(\frac{1-\sqrt{13}}{4};\frac{3+\sqrt{13}}{4}\right)$, b) $\left(\frac{-9+\sqrt{241}}{8};\frac{-25+\sqrt{241}}{16}\right) \vee \left(\frac{9-\sqrt{241}}{8};\frac{-25-\sqrt{241}}{16}\right)$, c) $\left(\frac{6-\sqrt{2}}{4};\frac{-2+3\sqrt{2}}{4}\right) \vee \left(\frac{6+\sqrt{2}}{4};\frac{-2-3\sqrt{2}}{4}\right)$, d) $\left(\frac{6-8\sqrt{3}}{13};\frac{17+12\sqrt{3}}{26}\right) \vee \left(\frac{6+8\sqrt{3}}{13};\frac{17-12\sqrt{3}}{26}\right)$.

**6.8.** a) $k \geqslant \frac{9}{2}.\ \left(\frac{3-\sqrt{2k-9}}{2};\frac{3+\sqrt{2k-9}}{2}\right) \vee \left(\frac{3+\sqrt{2k-9}}{2};\frac{3-\sqrt{2k-9}}{2}\right)$,
d) $\forall k \in \mathbb{R}:\ (2;0) \vee (2k-1;2k^2-3k)$.

**6.9.** a) $k \geqslant -\frac{1}{12}:\ \left(\frac{-1-\sqrt{12k+1}}{6};\frac{6k-1-\sqrt{12k+1}}{6}\right) \vee \left(\frac{-1+\sqrt{12k+1}}{6};\frac{6k-1+\sqrt{12k+1}}{6}\right)$,
d) $\forall k \in \mathbb{R}:\ (3k;-2k)$.

**6.10.** a) $x \neq 1:\ (2;0) \vee \left(-\frac{6}{5};-\frac{8}{5}\right)$, b) $x \neq y:\ \left(\frac{2}{5};\frac{1}{5}\right) \vee (-2;-1)$, c) $x \neq -2y:\ \emptyset$,
d) $x \neq 0 \wedge y \neq 1:\ (4;7)$.

**6.11.** a) $x \neq 2:\ (-1;0) \vee \left(\frac{10}{3};\frac{26}{3}\right)$, b) $x \neq -1 \wedge y \neq 2:\ \left(-\frac{5}{2};4\right)$, c) $x \neq -y:\ \emptyset$,
d) $y \neq \frac{1}{2}:\ (2;-1) \vee \left(9;\frac{5}{2}\right)$.

**6.12.** a) $(1;2;-1)$, b) $\emptyset$, c) $\forall z \in \mathbb{R}(-1;z-2;z)$, d) $\left(-\frac{47}{3};-\frac{46}{3};\frac{5}{3}\right)$.

**6.13.** a) $\emptyset$, b) $(5;0;-2) \vee (-2;0;5)$, c) $\left(-4;\frac{25}{2};\frac{17}{2}\right) \vee \left(3;-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$, d) $(-1;-2;3) \vee \left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};0\right)$,
e) $\left(0;\frac{3\sqrt{7}+1}{2};-\frac{3\sqrt{7}-1}{2}\right) \vee \left(0;-\frac{3\sqrt{7}-1}{2};\frac{3\sqrt{7}+1}{2}\right)$.

**6.14.** a) $(3;1) \vee (1;3)$, b) $\emptyset$, c) $(3;2) \vee (2;3)$, d) $(1;-6) \vee (-6;1)$.

**6.15.** a) $(2;1) \vee (1;2)$, b) $(4;-1) \vee (-1;4)$, c) $(-2;-2)$, d) $(3;3)$.

**6.16.** a) $\emptyset$, b) $(4;3) \vee (3;4)$, c) $\emptyset$, d) $(13;-1) \vee (-1;13)$, e) $\left(\frac{3}{5};\frac{3}{5}\right)$, f) $\emptyset$.

**6.17.** a) $(2;-7)\vee(-7;2)$, b) $(7;-2)\vee(-2;7)$, c) $\left(\frac{3}{4};-\frac{1}{2}\right)\vee\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$, d) $\left(1+\sqrt{11};1-\sqrt{11}\right)\vee\left(1-\sqrt{11};1+\sqrt{11}\right)$.

**6.18.** a) $(0;4)\vee(4;0)$, b) $\left(\frac{7}{2};-1\right)\vee\left(-1;\frac{7}{2}\right)$, c) $\left(\frac{-5+\sqrt{17}}{2};\frac{-5-\sqrt{17}}{2}\right)\vee\left(\frac{-5-\sqrt{17}}{2}y=\frac{-5+\sqrt{17}}{2}\right)$, d) $\left(\frac{4+\sqrt{34}}{6};\frac{4-\sqrt{34}}{6}\right)\vee\left(\frac{4-\sqrt{34}}{6}y=\frac{4+\sqrt{34}}{6}\right)$.

**6.19.** a) $\left(\frac{5+\sqrt{97}}{4}y=\frac{5-\sqrt{97}}{4}\right)\vee\left(\frac{5-\sqrt{97}}{4}y=\frac{5+\sqrt{97}}{4}\right)$, b) $\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{3};\frac{3-2\sqrt{3}}{3}\right)\vee\left(\frac{3-2\sqrt{3}}{3};\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right)$, c) $\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2};\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)\vee\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2};\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$, d) $\left(2+3\sqrt{6};2-3\sqrt{6}\right)\vee\left(2-3\sqrt{6};2+3\sqrt{6}\right)$.

**6.20.** a) $(1,0)\vee(0,1)$, b) $(1,1)$, c) $(1,2)\vee(2,1)$, d) $\emptyset$, e) $(2,2)$, f) $(0,2)\vee(2,0)$.

**6.21.** a) $(-6,-6)$, b) $(-5,4)\vee(4,-5)$, c) $(3,8)\vee(8,3)$, d) $(-1,4)\vee(4,-1)$.

**6.22.** a) $(2,5)\vee(5,2)$, b) $(-3,2)\vee(2,-3)$, c) $\left(\frac{1}{2};1\right)\vee\left(1;\frac{1}{2}\right)$, d) $(-4;1)\vee(1;-4)$.

**6.23.** a) $(-8;2)\vee(2;-8)$, b) $(-6;1)\vee(1;-6)$, c) $\left(-\frac{1}{2};-\frac{13}{2}\right)\vee\left(-\frac{13}{2};-\frac{1}{2}\right)$, d) $\emptyset$.

**6.24.** a) $\emptyset$, b) $(3;3)$, c) $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\vee\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, d) $\left(\frac{3+\sqrt{7}}{2};\frac{3-\sqrt{7}}{2}\right)\vee\left(\frac{3-\sqrt{7}}{2};\frac{3+\sqrt{7}}{2}\right)$.

**6.25.** a) $(-1;-2)\vee(2;1)$, b) $\left(-\frac{1}{7};-\frac{1}{5}\right)\vee\left(-\frac{1}{5};-\frac{1}{7}\right)$, c) $\left(\frac{-3-\sqrt{17}}{4};\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)\vee\left(\frac{-3+\sqrt{17}}{4};\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$.

**6.26.** a) $(-1;0)\vee(0;-1)$, b) $\left(\frac{-3-\sqrt{17}}{2};\frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right)\vee\left(\frac{-3+\sqrt{17}}{2};\frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right)$, c) $\left(\frac{-5-\sqrt{10}}{5};\frac{-5+\sqrt{10}}{5}\right)\vee\left(\frac{-5+\sqrt{10}}{5};\frac{-5-\sqrt{10}}{5}\right)$, d) $(3;5)\vee(5;3)$.

**6.27.** a) $(1;2)\vee(2;1)$, b) $(-7;1)\vee(1;-7)$, c) $(2;-7)\vee(7;-2)$, d) $(2;3)\vee(3;2)$.

**6.28.** a) $(-1;1)\vee(1;-1)$, b) $(-2;-1)\vee(-1;-2)$, c) $(-3;-2)\vee(-2;-3)$, d) $(-3;1)\vee(1;-3)$.

**6.29.** a) $(1;2)\vee(2;1)$, b) $\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)\vee\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$, c) $\emptyset$, d) $(1;4)\vee(4;1)$.

**6.30.** a) $(1;1)$, b) $(1;-2)\vee(-2;1)\vee(-1;2)\vee(2;-1)$, c) $(-3;2)\vee(2;-3)$, d) $(2;2)$.

**6.31.** a) $(-5;3)\vee(3;-5)$, b) $\emptyset$, c) $(-1;2)\vee(2;-1)$, d) $(-4;-3)\vee(-3;-4)\vee(3;4)\vee(4;3)$.

**6.32.** a) $\left(-\frac{1}{2};4\right)\vee\left(4;-\frac{1}{2}\right)$, b) $(-2;-1)\vee(-1;-2)\vee(1;2)\vee(2;1)$, c) $(-5;-3)\vee(-3;-5)\vee(3;5)\vee(5;3)$, d) $(-1;-1)\vee(1;1)$.

**6.33.** a) $(-4;-3)\vee(-3;-4)\vee(3;4)\vee(4;3)$, b) $(-1;-1)\vee(1;1)$, c) $\emptyset$, d) $(-3;-3)\vee(3;3)$.

**6.34.** a) $\emptyset$, b) $(1;1)$, c) $(-3-\sqrt{7};-3+\sqrt{7}) \vee (-3+\sqrt{7};-3-\sqrt{7}) \vee (1;2) \vee (2;1)$,
d) $\left(\frac{\sqrt{14}+\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}-\sqrt{14}}{2}\right) \vee \left(\frac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2}\right) \vee \left(\frac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2}\right) \vee \left(\frac{\sqrt{14}+\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}-\sqrt{14}}{2}\right)$.

**6.35.** a) $(-2;1) \vee (1;-2) \vee (-\sqrt{2};\sqrt{2}) \vee (\sqrt{2};-\sqrt{2})$, b) $\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right) \vee \left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$,
c) $\left(\frac{-1+\sqrt{33}}{4};\frac{-1-\sqrt{33}}{4}\right) \vee \left(\frac{-1-\sqrt{33}}{4};\frac{-1+\sqrt{33}}{4}\right)$, d) $\emptyset$, e) $(-1;2) \vee (2;-1)$.

**6.36.** a) $(0;0)$, b) $(t;t)$, c) $(0;0)$, d) $(t;-t)$.

**6.37.** a) $(2t;t)$, b) $(2t;t)$, c) $(-2t;t)$, d) $(0;0)$.

**6.38.** a) $(-4t;t) \vee (-2t;t)$, b) $(k;4k) \vee (k;-\frac{12}{k})$, c) $(-t;t)$, d) $(-4;1) \vee (4;-1)$.

**6.39.** a) $\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right) \vee \left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right) \vee \left(-\frac{5}{4};-\frac{1}{4}\right) \vee \left(\frac{5}{4};\frac{1}{4}\right)$, b) $(1;2) \vee (-1;-2) \vee (-1;2) \vee (1;-2)$,
c) $(-1;1) \vee (1;-1) \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \vee \left(\frac{2\sqrt{3}}{3};-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, d) $\emptyset$.

**6.40.** a) $(1;1) \vee (-1;-1) \vee (\sqrt{6};-4\sqrt{6}) \vee (-\sqrt{6};4\sqrt{6})$, b) $(1;-1) \vee (-1;1)$,
c) $(\sqrt{3};0) \vee (-\sqrt{3};0) \vee (0;\sqrt{3}) \vee (0;-\sqrt{3})$, d) $(1;0) \vee (-1;0) \vee \left(\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \vee \left(-\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

**6.41.** a) $(1;-2) \vee (-1;2) \vee (-2;1) \vee (2;-1)$, b) $(2;-3) \vee (-2;3)$,
c) $\left(\frac{1}{2};1\right) \vee \left(-\frac{1}{2};-1\right)$, d) $(4;-2) \vee (-4;2) \vee (6;2) \vee (-6;-2)$.

**6.42.** a) $(-1;3) \vee (1;-3)$, b) $(1;-4) \vee (-1;4) \vee (-1;-7) \vee (1;7)$,
c) $(0;2) \vee (0;-2) \vee \left(\frac{10}{3};-\frac{14}{3}\right) \vee \left(-\frac{10}{3};\frac{14}{3}\right)$, d) $(2;5) \vee (-2;-5) \vee \left(-\frac{18}{7};-\frac{37}{7}\right) \vee \left(\frac{18}{7};\frac{37}{7}\right)$.

**6.43.** a) $(3;-2) \vee (-3;2) \vee \left(\frac{34}{7};-\frac{1}{7}\right) \vee \left(-\frac{34}{7};\frac{1}{7}\right)$, b) $\emptyset$, c) $(-3;0) \vee (3;0)$,
d) $\left(\frac{1}{2};-2\right) \vee \left(-\frac{1}{2};2\right) \vee \left(\frac{7}{4};-\frac{11}{8}\right) \vee \left(-\frac{7}{4};\frac{11}{8}\right)$.

**6.44.** a) $(-2;-1) \vee (2;1)$, b) $(-1;0) \vee (1;0)$.

**6.45.** a) $(1;1) \vee (3;-3)$, b) $(3;-1) \vee \left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$, c) $(1;0) \vee (-3;-2)$,
d) $(2;0) \vee \left(2;\frac{2}{3}\right) \vee (-6;-2) \vee (-3;1)$.

**6.46.** a) $(1;-1)_{\text{doppia}} \vee (2;0)$, b) $(0;-1)_{\text{doppia}} \vee \left(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right) \vee (1;1)_{\text{doppia}}$, c) $(5;8) \vee \left(\frac{3}{2};1\right) \vee$ $(-1;-4) \vee \left(\frac{3}{4};-\frac{1}{2}\right)$, d) $(1;-1) \vee (2;0) \vee (-1;1) \vee \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right) \vee \left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right) \vee \left(\frac{10}{7};-\frac{8}{7}\right)$.

**6.47.** a) $(0;0)_{\text{doppia}} \vee \left(3;-\frac{3}{2}\right) \vee \left(3;\frac{3}{4}\right)$, b) $(t;t) \vee \left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right) \vee \left(\frac{1}{5};-\frac{4}{5}\right) \vee \left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$,
c) $(0;0)_{\text{tripla}} \vee (-2;-2)_{\text{doppia}} \vee \left(-\frac{2}{3},-\frac{4}{3}\right)_{\text{doppia}} \vee (6;-2) \vee (-6;-2)$, d) $\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right) \vee \left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$.

**6.48.** a) $(1;1) \vee (2;1) \vee (3;3)_{\text{doppia}} \vee (6;3) \vee \left(\frac{1}{3};1\right) \vee (1;3) \vee (-5;-5) \vee \left(-5;-\frac{5}{2}\right) \vee \left(3;\frac{3}{2}\right) \vee$ $(-5;-15) \vee (3;9)$, b) $(0;0)_{\text{doppia}} \vee \left(\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right) \vee (1;0) \vee \left(\frac{8}{11},\frac{9}{11}\right) \vee \left(\frac{17}{18};\frac{1}{6}\right) \vee \left(\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right) \vee$ $(-4;2)(2;-1) \vee \left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right) \vee \left(\frac{4}{11};-\frac{2}{11}\right) \vee (4;2)$.

**6.49.** $\left(-\frac{3}{4}; -\frac{7}{2}\right) \vee \left(\frac{7}{2}; -\frac{3}{4}\right)$.

**6.50.** $(12; 5)$.

**6.51.** $(4; 20) \vee (20, 4)$.

**6.52.** 73.

**6.53.** $(30; 4)$.

**6.54.** $(23; 23)$.

**6.55.** $(32; 48)$.

**6.56.** $2p = 144\,\text{cm}$.

**6.57.** $(-6; -8) \vee (6, 8)$.

**6.58.** $(12; 18)$.

**6.59.** $2p = 126\,\text{m}$.

**6.60.** [15 cm e 20 cm].

**6.61.** Diagonale $= 6\,\text{m}$.

**6.62.** Area $= 13,5\,\text{cm}^2$.

**6.63.** $15,4\,\text{cm}$.

**6.64.** $2p_1 = 42 \vee 2p_2 = 57 + 3\sqrt{145}$.

**6.65.** $2\sqrt{10}\,\text{cm}$.

**6.66.** $2p = 24 + 2\sqrt{13}$.

**6.67.** $20\,\text{cm}$.

**6.68.** $2p = 40k$.

**6.69.** $l_1 = 5k \vee l_2 = 9k$.

**6.70.** $2p = 15 + k\sqrt{53}$.

**6.71.** $2p = 4k(1 + \sqrt{10})$.

# 7 Equazioni e disequazioni con moduli

## 7.1 Valore assoluto

Il valore assoluto o modulo di un numero $a$, indicato con $|a|$, è lo stesso numero $a$ se $a$ è maggiore o uguale a zero, il suo opposto, cioè $-a$, se $a$ è minore di zero. In sintesi scriviamo:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ se } a \geqslant 0 \\ -a, \text{ se } a < 0 \end{cases}$$

Per esempio $|+7| = 7$; $|-3| = -(-3) = 3$; $|0| = 0$; $|-1| = 1$; $|1| = 1$.

Nello stesso modo definiamo il valore assoluto di una espressione algebrica. Il valore assoluto o modulo dell'espressione algebrica $E = x^2 - 3x$, indicato con $\left|x^2 - 3x\right|$, è una funzione definita per casi, cioè definita da espressioni diverse su sottoinsiemi diversi del dominio,

$$f(x) = \left|x^2 - 3x\right| = \begin{cases} x^2 - 3x \text{ se } x^2 - 3x \geqslant 0 \\ -\left(x^2 - 3x\right) \text{ se } x^2 - 3x < 0 \end{cases}.$$

Risolvendo la disequazione $x^2 - 3x \geqslant 0$ si esplicitano i due sottoinsiemi in cui sono definite le due espressioni algebriche:

$$f(x) = \left|x^2 - 3x\right| = \begin{cases} x^2 - 3x \text{ se } x \leqslant 0 \vee x \geqslant 3 \\ -x^2 + 3x \text{ se } 0 < x < 3 \end{cases}.$$

In generale, la funzione valore assoluto di un'espressione algebrica, detta *argomento del valore assoluto*, viene esplicitata in due casi:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{ se } f(x) \geqslant 0 \\ -f(x), \text{ se } f(x) < 0 \end{cases}.$$

---

**Esempio 7.1.** Per la funzione $f(x) = \left|\sqrt{3} + 3x\right|$ trovare le espressioni algebriche che descrivono i due casi.

Per definizione si ha:

$$f(x) = \left|\sqrt{3} + 3x\right| = \begin{cases} \sqrt{3} + 3x \text{ se } \sqrt{3} + 3x \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\sqrt{3} - 3x \text{ se } \sqrt{3} + 3x < 0 \Rightarrow x < -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}.$$

**Esempio 7.2.** Data la funzione $f(x) = \left|x^2 - 4\right| + |x + 1| - 2x$ descriverla per casi, eliminando i valori assoluti.

Dobbiamo studiare i segni dei due binomi in valore assoluto

$$x^2 - 4 \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant -2 \vee x \geqslant 2$$

e

$$x + 1 \geqslant 0 \Rightarrow x > -1.$$

La situazione è rappresentata con maggiore chiarezza nel grafico.

| Segno di | | $-2$ | | $1$ | | $2$ | | $r$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-4$ | $+$ | $\bullet$ | $-$ | | $-$ | $\bullet$ | $+$ | |
| $x-1$ | $-$ | | $-$ | $\bullet$ | $+$ | | $+$ | |

- Nell'intervallo $x < -2$ il primo argomento di valore assoluto è positivo e il secondo è negativo;
- nell'intervallo $-2 \leqslant x < -1$ tutti e due gli argomenti di valore assoluto sono negativi;
- nell'intervallo $-1 \leqslant x < 2$ il primo argomento di valore assoluto è negativo, il secondo è positivo;
- nell'intervallo $x \geqslant 2$ entrambi gli argomenti sono positivi.

In sintesi

$$f(x) = \begin{cases} (x^2-4)-(x+1)-2 \text{ se } x < -2 \\ -(x^2-4)-(x+1)-2x \text{ se } -2 \leqslant x < -1 \\ -(x^2-4)+(x+1)-2x \text{ se } -1 \leqslant x < 2 \\ +(x^2-4)+(x+1)-2x \text{ se } x > 2 \end{cases} .$$

✍ *Esercizi proposti:* 7.1, 7.2, 7.3.

## 7.2 Equazioni in una incognita in valore assoluto

### 7.2.1 Equazioni nelle quali l'incognita è presente solo all'interno del modulo

**Equazioni con valore assoluto del tipo $|f(x)| = k$ con $k \geqslant 0$**

**Esempio 7.3.** Risolvere la seguente equazione $\left|x^2-7\right| = 3$.

Ricordiamo che $\left|x^2-7\right| = x^2-7$ se $x^2-7 \geqslant 0$ mentre $\left|x^2-7\right| = -x^2+7$ se $x^2-7 < 0$.

Pertanto l'equazione diventa $x^2-7=3$ se $x^2-7 \geqslant 0$ e $-x^2+7=3$ se $x^2-7<0$.

Il tutto si trasforma nell'unione dei due sistemi

$$\begin{cases} x^2-7 \geqslant 0 \\ x^2-7=3 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2-7<0 \\ -x^2+7=3 \end{cases} .$$

Moltiplicando per $-1$ l'equazione del secondo sistema otteniamo:

$$\begin{cases} x^2-7 \geqslant 0 \\ x^2-7=3 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2-7<0 \\ x^2-7=-3 \end{cases} .$$

Si vede abbastanza facilmente che sia nel primo che nel secondo sistema le due disequazioni sono sempre verificate. Infatti, nel primo sistema l'equazione $x^2-7=3$ verifica automaticamente la disequazione $x^2-7 \geqslant 0$ in quanto è richiesto che $x^2-7$ sia uguale a 3, pertanto è necessariamente positivo.

Stesso ragionamento vale per il secondo sistema. In altre parole, per risolvere la disequazione data è sufficiente risolvere le due equazioni $\left(x^2-7=3\right) \vee \left(x^2-7=-3\right)$ unendone le soluzioni:

$$x^2-7=3 \Rightarrow x^2=10 \Rightarrow x_1=-\sqrt{10} \vee x_2=\sqrt{10}$$

e

$$x^2 - 7 = -3 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_3 = -2 \vee x_4 = 2.$$

L'insieme delle soluzioni è quindi: $\{-\sqrt{10}, \sqrt{10}, -2, +2\}$.

---

**Procedura risolutiva** Per risolvere un'equazione del tipo $|f(x)| = k$ con $k \in \mathbb{R} \wedge k \geqslant 0$ è sufficiente risolvere la doppia equazione $f(x) = \pm k$.

---

**Esempio 7.4.** Risolvere la seguente equazione $\left|x^2 - x\right| = 1$.

L'equazione $\left|x^2 - x\right| = 1$ si risolve unendo le soluzioni delle equazioni $x^2 - x = 1$ e $x^2 - x = -1$. cioè:

$$x^2 - x = 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

e

$$x^2 - x = -1 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \to \emptyset.$$

L'Insieme Soluzione è

$$\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

---

#### Equazioni con valore assoluto del tipo $|f(x)| = k$ con $k < 0$

Se $k < 0$ l'equazione è impossibile. In questo caso $|f(x)| = k$ è una contraddizione, in quanto un valore assoluto di una espressione dà un valore sempre positivo.

---

**Esempio 7.5.** Risolvere la seguente equazione $|x - 7| = -1$. Impostiamo la ricerca delle soluzioni con il metodo generale presentato prima.

$$\begin{cases} x - 7 \geqslant 0 \\ x - 7 = -1 \end{cases} \cup \begin{cases} x - 7 < 0 \\ x - 7 = 1 \end{cases}.$$

Entrambi i sistemi non hanno soluzioni reali. L'equazione è impossibile.

---

✍ *Esercizi proposti:* 7.3, 7.4, 7.5, 7.6, 7.7.

### 7.2.2 Equazioni nelle quali l'incognita si trova anche fuori dal modulo

---

**Esempio 7.6.** Risolvere la seguente equazione $|-1 + 3x| = 7x + 4$.

L'equazione presenta un valore assoluto al primo membro.

Tenendo conto che

$$|-1 + 3x| = \begin{cases} -1 + 3x \text{ se } -1 + 3x \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant \frac{1}{3} \\ 1 - 3x \text{ se } -1 + 3x < 0 \Rightarrow x < \frac{1}{3} \end{cases},$$

l'equazione si trasforma nell'unione dei sistemi

$$\begin{cases} x \geqslant \frac{1}{3} \\ -1 + 3x = 7x + 4 \end{cases} \cup \begin{cases} x < \frac{1}{3} \\ 1 - 3x = 7x + 4 \end{cases}.$$

Risolvendo si ha

$$\begin{cases} x \geqslant \frac{1}{3} \\ 4x = -5 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{5}{4} \cup \begin{cases} x < \frac{1}{3} \\ 10x = 3 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3}{10}.$$

La soluzione $-\frac{5}{4}$ non è accettabile in quanto non è maggiore di $\frac{1}{3}$. Pertanto rimane la soluzione $x = \frac{3}{10}$.

**Esempio 7.7.** Risolvere la seguente equazione $|-2x+5| = x-3$.

Esplicito i due casi dell'argomento

$$|-2x+5| = \begin{cases} -2x+5, \text{ se } -2x+5 \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant \frac{5}{2} \\ 2x-5, \text{ se } -2x+5 < 0 \Rightarrow x > \frac{5}{2} \end{cases}.$$

L'equazione si trasforma nell'unione dei sistemi:

$$\begin{cases} x \leqslant \frac{5}{2} \\ -2x+5 = x-3 \end{cases} \cup \begin{cases} x > \frac{5}{2} \\ 2x-5 = x-3 \end{cases}.$$

Risolvo ciascun sistema

$$\begin{cases} x \leqslant \frac{5}{2} \\ -3x = -8 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{8}{3} \cup \begin{cases} x > \frac{5}{2} \\ x = 2 \end{cases}$$

e verifico che entrambi sono impossibili, cioè $\mathrm{I.S.}_1 = \emptyset$ e $\mathrm{I.S.}_2 = \emptyset$.

Unisco i due insiemi soluzione $\mathrm{I.S.}_1 \cup \mathrm{I.S.}_2 = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$: l'equazione è impossibile.

**Esempio 7.8.** Risolvere la seguente equazione $|2x-1| = x+2$.

L'equazione si trasforma nell'unione dei due sistemi

$$\begin{cases} 2x-1 \geqslant 0 \\ 2x-1 = x+2 \end{cases} \cup \begin{cases} 2x-1 < 0 \\ -2x+1 = x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant \frac{1}{2} \\ x = 3 \end{cases} \cup \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Quindi le soluzioni sono $x = 3 \vee x = -\frac{1}{2}$.

---

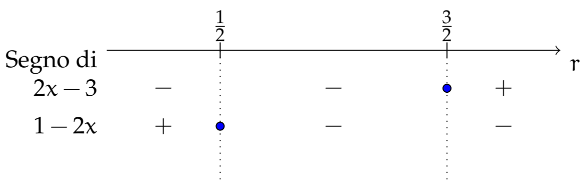
✍ *Esercizi proposti:* 7.8, 7.9, 7.10, 7.11, 7.12, 7.13, 7.14, 7.15.

## 7.3 Equazioni con più espressioni in valore assoluto

---

**Esempio 7.9.** Risolvere la seguente equazione $|2x-3| - |1-2x| + x = 4$.

L'equazione presenta due espressioni in valore assoluto; ciascuna espressione sarà sviluppata in due modi diversi dipendenti dal segno assunto dai rispettivi argomenti. Si presenteranno allora quattro casi e l'insieme soluzione dell'equazione sarà ottenuto dall'unione delle soluzioni dei singoli casi. Per semplificare il procedimento possiamo studiamo il segno di ciascun argomento e poi confrontiamo i segni con uno schema grafico:



Si presentano tre casi:

- Caso I: $\begin{cases} x \leqslant \frac{1}{2} \\ -(2x-3)-(1-2x)+x=4 \end{cases}$;
- Caso II: $\begin{cases} \frac{1}{2} \leqslant x < \frac{3}{2} \\ -(2x-3)+(1-2x)+x=4 \end{cases}$;
- Caso III: $\begin{cases} x \geqslant \frac{3}{2} \\ (2x-3)+(1-2x)+x=4 \end{cases}$.

In ogni sistema la prima condizione è la disequazione che vincola il segno degli argomenti e la seconda è l'equazione che risulta in base al segno definito. Risolviamo.

Caso I:

$$\begin{cases} x \leqslant \frac{1}{2} \\ -(2x-3)-(1-2x)+x=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant \frac{1}{2} \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{I.S.}_1 = \emptyset.$$

Il sistema è impossibile in quanto 2 non è minore di $\frac{1}{2}$.

Caso II:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2} \\ -(2x-3)+(1-2x)+x=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2} \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{I.S.}_2 = \emptyset.$$

Il sistema è impossibile in quanto 0 non appartiene all'intervallo considerato.

Caso III:

$$\begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ (2x-3)+(1-2x)+x=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x=6 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{I.S.}_3 = \{6\}.$$

La soluzione in questo caso è accettabile.

Conclusione: $\mathrm{I.S.} = \mathrm{I.S.}_1 \cup \mathrm{I.S.}_2 \cup \mathrm{I.S.}_3 = \{6\}$.

**Esempio 7.10.** Risolvere la seguente equazione $\left|x^2-4\right|-3x=|x-1|$.

Confrontiamo il segno di ciascun argomento servendoci dello schema:

| Segno di | | $-2$ | | $1$ | | $2$ | | r |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-4$ | $+$ | • | $-$ | | $-$ | • | $+$ | |
| $x-1$ | $-$ | | $-$ | • | $+$ | | $+$ | |

In questo esempio dobbiamo esaminare 4 casi che si esplicitano nei sistemi:

- Caso I:

$$\begin{cases} x \leqslant -2 \\ x^2-4-3x=-x+1 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 1-\sqrt{6} \vee x_2 = 1+\sqrt{6} \Rightarrow \mathrm{I.S.}_1 = \emptyset.$$

- Caso II:

$$\begin{cases} -2 < x < 1 \\ -x^2+4-3x=-x+1 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -3 \vee x_2 = 1 \Rightarrow \mathrm{I.S.}_2 = \emptyset.$$

- Caso III:

$$\begin{cases} 1 \leqslant x < 2 \\ -x^2+4-3x=x-1 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -5 \vee x_2 = 1 \Rightarrow \mathrm{I.S.}_3 = \{1\}.$$

➡ Caso IV:

$$\begin{cases} x \geqslant 2 \\ x^2 - 4 - 3x = x - 1 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 2 - \sqrt{7} \vee x_2 = 2 + \sqrt{7} \Rightarrow \text{I. S.}_4 = \left\{2 + \sqrt{7}\right\}.$$

Conclusione: $\text{I. S.} = \text{I. S.}_1 \cup \text{I. S.}_2 \cup \text{I. S.}_3 \cup \text{I. S.}_4 = \left\{1; 2 + \sqrt{7}\right\}$.

---

**Procedura 7.1.** *Risoluzione di una equazione con valori assoluti:*

*a)* *l'incognita è presente solo nell'argomento del modulo: $|f(x)| = k$, l'equazione si risolve ponendo: $f(x) = \pm k$. Se $k < 0$ l'equazione è impossibile;*

*b)* *l'incognita si trova anche al di fuori del modulo; in questo caso si analizza il segno dell'argomento del modulo e si risolvono i due sistemi dove la prima condizione è la disequazione che vincola il segno dell'argomento e la seconda è l'equazione che risulta in base al segno definito. L'insieme soluzione dell'equazione è dato dall'unione dell'Insieme Soluzione dei due sistemi;*

*c)* *se è presente più di un modulo, si studia il segno di ogni argomento e dallo schema che ne segue si costruiscono e quindi si risolvono i sistemi in cui la prima condizione è la disequazione che vincola il segno degli argomenti e la seconda è l'equazione in base al segno definito. Anche in questo caso l'Insieme Soluzione dell'equazione è dato dall'unione dell'Insieme Soluzione di ogni sistema.*

✍ *Esercizi proposti:* 7.16, 7.17, 7.18, 7.19, 7.20, 7.21, 7.22, 7.23, 7.24, 7.25, 7.26, 7.27, 7.28, 7.29.

## 7.4 Disequazioni in valore assoluto

Le disequazioni con i moduli si risolvono in modo analogo alle equazioni con moduli.

### 7.4.1 Disequazioni in cui l'incognita si trova solo nel modulo

**Primo caso:** disequazioni nella forma $|f(x)| < k$ con $k > 0$.

La disequazione si sdoppia nell'unione dei due sistemi

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ f(x) < k \end{cases} \cup \begin{cases} f(x) < 0 \\ f(x) > -k \end{cases},$$

con soluzioni $0 \leqslant f(x) \vee -k < f(x) < 0$ cioè:

$$-k < f(x) < k \text{ oppure } \begin{cases} f(x) < k \\ f(x) > -k \end{cases}.$$

---

**Esempio 7.11.** Risolvere la seguente disequazione $\left|x^2 - 1\right| < 3$.

La disequazione diventa $-3 < x^2 - 1 < 3$ oppure

$$\begin{cases} x^2 - 1 < 3 \\ x^2 - 1 > -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 < 4 \\ x^2 > -2 \end{cases}.$$

La prima disequazione $x^2 < 4$ è verificata per $-2 < x < 2$.

La seconda è sempre verificata perché il quadrato $x^2$ è sempre maggiore di un numero negativo. L'insieme soluzione della disequazione assegnata è quindi $-2 < x < 2$.

---

**Secondo caso:** disequazioni nella forma $|f(x)| > k$ con $k > 0$.

Per il procedimento svolto nel caso precedente queste disequazioni si trasformano sempre nelle disequazioni

$$f(x) < -k \vee f(x) > k.$$

---

**Esempio 7.12.** Risolvere la seguente equazione $\left|x^2 - 4\right| > 4$.

L'equazione diventa $x^2 - 4 < -4 \vee x^2 - 4 > 4$, spostando $-4$ al secondo membro otteniamo $x^2 < 0 \vee x^2 > 8$.

La prima disequazione $x^2 < 0$ non ha soluzioni in quanto il quadrato $x^2$ non può essere minore di 0. La seconda ha per soluzioni $x < -2\sqrt{2} \vee x > 2\sqrt{2}$.

---

### 7.4.2 Disequazioni in cui l'incognita si trova anche fuori dal modulo

---

**Esempio 7.13.** Risolvere la seguente disequazione $\left|x^2 - x\right| < 2x^2 + 3x - 1$.

Studiamo il segno dell'argomento del modulo

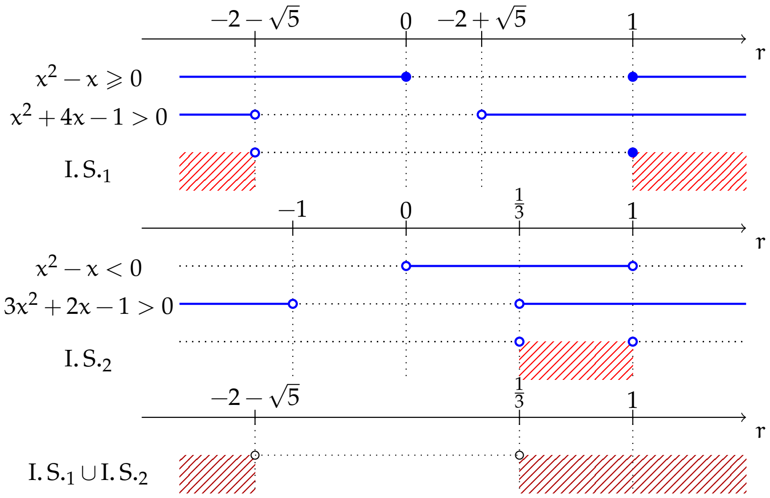
$$x^2 - x \geqslant 0 \Rightarrow x(x-1) \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 0 \vee x \geqslant 1.$$

La disequazione assegnata si sdoppia nell'unione di due sistemi:

$$\begin{cases} x \leqslant 0 \vee x \geqslant 1 \\ x^2 - x < 2x^2 + 3x - 1 \end{cases} \cup \begin{cases} 0 < x < 1 \\ -x^2 + x < 2x^2 + 3x - 1 \end{cases}.$$

Semplificando le disequazioni si ha:

$$\begin{cases} x \leqslant 0 \vee x \geqslant 1 \\ x^2 + 4x - 1 > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 3x^2 + 2x - 1 > 0 \end{cases}.$$



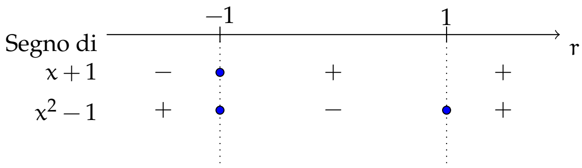

L'insieme soluzione è $x < -2 - \sqrt{5} \vee x > \frac{1}{3}$.

---

### 7.4.3 Disequazioni con più valori assoluti

**Esempio 7.14.** Risolvere la seguente disequazione $|x+1| \geqslant \left|x^2-1\right|$.

Studiamo il segno di ciascun argomento e poi confrontiamo i segni con uno schema grafico:




Si presentano tre casi:

$$\begin{cases} x < -1 \\ -(x-1) \geqslant x^2-1 \end{cases} \cup \begin{cases} -1 \leqslant x < 1 \\ x+1 \geqslant -\left(x^2-1\right) \end{cases} \cup \begin{cases} x \geqslant 1 \\ x+1 \geqslant x^2-1 \end{cases}.$$

Risolviamo il primo sistema:

$$\begin{cases} x < -1 \\ x^2+x \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -1 \\ -1 \leqslant x \leqslant 0 \end{cases}.$$

In questo caso non si hanno soluzioni.

Risolviamo il secondo sistema:

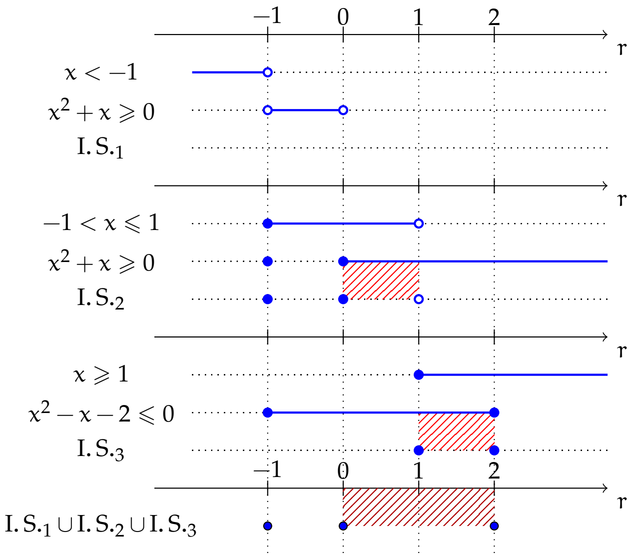
$$\begin{cases} -1 \leqslant x < 1 \\ x^2+x \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leqslant x < 1 \\ x \leqslant -1 \vee x \geqslant 0 \end{cases}.$$

In questo caso le soluzioni sono: $0 \leqslant x < 1 \vee x \geqslant 0$.

Risolviamo il terzo sistema:

$$\begin{cases} x \geqslant 1 \\ x^2-x-2 \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant 1 \\ -1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}.$$

In questo caso le soluzioni sono: $1 \leqslant x \leqslant 2$.



Unendo tutte le soluzioni si ha: $x = -1 \vee 0 \leqslant x \leqslant 2$.

---

✍ *Esercizi proposti:* 7.30, 7.31, 7.32, 7.33, 7.34, 7.35, 7.36.

## 7.5 Esercizi

### 7.5.1 Esercizi dei singoli paragrafi

#### 7.1 - Valore assoluto

**7.1.** Scrivi l'espressione algebrica che descrive i casi della funzione.

a) $f(x) = |-2x+5|$;
b) $f(x) = |x-1|$;
c) $f(x) = |-x|$;
d) $f(x) = \left|-x^2+4\right|$;
e) $f(x) = \left|x^2+1\right|$;
f) $f(x) = \left|x^2-3x+1\right|$.

**7.2.** Scrivi l'espressione algebrica che descrive i casi della funzione.

a) $f(a) = |2a-2|$;
b) $f(p) = \left|3p^2-\frac{1}{2}\right|$;
c) $f(a) = \left|-2a^2-1\right|$;
d) $f(x) = \left|\frac{1}{x-1}\right|$;
e) $f(x) = \left|\frac{2x}{x-2}\right|$;
f) $f(x) = \left|\frac{x+1}{2x-1}\right|$.

**7.3 (*).** Scrivi l'espressione algebrica che descrive i casi della funzione.

a) $f(x) = |x+1| + |x-1|$;
b) $f(x) = |3x-2| - |7x+1|$;
c) $f(x) = -|x+2| + |x-2| - x$;
d) $f(x) = \left|x^2+1\right| - \left|x^2-1\right|$;
e) $f(x) = \left|\frac{1}{x}\right| - |x|$;
f) $f(x) = \left|\frac{x+2}{x-1}\right| + \left|x^2+4x+3\right| + 1$.

#### 7.2 - Equazioni in una incognita in valore assoluto

**7.4 (*).** Risolvi le seguenti equazioni che hanno l'incognita solo nel valore assoluto.

a) $\left|x-2x^2\right| = 1$;
b) $\left|-x^2-4\right| = 9$;
c) $\left|x^2-x\right| = -3$;
d) $\left|x^2+1\right| = 0$.

**7.5 (*).** Risolvi le seguenti equazioni che hanno l'incognita solo nel valore assoluto.

a) $|2x+1| = 2$;
b) $\left|x^2-3x+1\right| = 1$;
c) $\left|x^2+1\right| = 3$;
d) $\left|x^2-1\right| = 3$.

**7.6 (*).** Risolvi le seguenti equazioni che hanno l'incognita solo nel valore assoluto.

a) $\left|x^2-7\right| = 3$;
b) $6\left|x^2-1\right| = 0$;
c) $\left|\frac{1}{3}-\frac{1}{x^2}\right| = -1$;
d) $\left|\frac{1}{3}-\frac{1}{x^2}\right| = 1$.

**7.7 (*).** Risolvi le seguenti equazioni che hanno l'incognita solo nel valore assoluto.

a) $\frac{5}{|x^2-1|} = 1$;
b) $\left|\frac{x^2-5x+1}{2x^2+3x-1}\right| = 1$;
c) $4\left|x^2-x\right| = 1$;
d) $\frac{4}{|x^2-x|} = 1$.

**7.8 (*).** Risolvi le seguenti equazioni con valore assoluto.

a) $|x-1| = x$;
b) $\left|x^2-4\right| = 3x-1$;
c) $|2-x| = 4-x^2$;
d) $\left|x^2+2\right| = 1-x^2$.

**7.9 (*).** Risolvi le seguenti equazioni con valore assoluto.

a) $\left|-x^2+2x-3\right| = x+1$;
b) $\left|-x^2+4x-7\right| = 3-2x$;
c) $|2-4x| = 4(x-1)(x+2)$;
d) $\left|x^2-4x+3\right| = 4x-6$.

i

**7.10 (*).** Risolvi le seguenti equazioni con valore assoluto.

a) $|1-2x| = 5x-7$;
b) $\left|x^3-x^2\right| = x-1$;
c) $\left|x^2-3x+2\right| = x+1$;
d) $\left|x^2+1\right| = 3+x$.

**7.11 (*).** Risolvi le seguenti equazioni con valore assoluto.

a) $\left|-x^2-4x-8\right| = 3x-2-x^2$;
b) $\left|2x^2-3x\right| = -x$;
c) $\left|x^3-4x^2\right| = 1-4x$;
d) $\left|x^4-3x^2\right| = x^2-2$.

**7.12 (*).** Risolvi le seguenti equazioni con valore assoluto.

a) $\left|x^4-5x^2\right| = 5-x^2$;
b) $\left|9-x^2\right| = x^2-3x+4$;
c) $\left|x^2-2x-5\right| = 4-\frac{1}{4}x^2$;
d) $\left|x^2-3x+2\right| = 2x-4$.

**7.13 (*).** Risolvi le seguenti equazioni con valore assoluto.

a) $|x+5| = x^2-1$;
b) $|2x-6| = 7-2x^2$;
c) $\left|x^2-4\right| = x+8$;
d) $\left|x^2+1\right| = 5-x$.

**7.14 (*).** Risolvi le seguenti equazioni con valore assoluto.

a) $\left|x^4-x^2\right| = x^2+8$;
b) $\left|x^4-9\right| = x^2$;
c) $\left|1-x^2\right| = 4x^2+x$;
d) $\left|x^2-3x+2\right| = 2x-4$.

**7.15 (*).** Risolvi le seguenti equazioni con valore assoluto.

a) $\left|x^2-1\right| = x^2-1$;
b) $\left|x^2-5x+6\right| = 3x^2-x$;
c) $\left|x^2-3\right| = x^2-6x+9$;
d) $|1-3x| = \frac{(x-3)^2}{1-2x}$;
e) $\left|\frac{1-3x}{1-2x}\right| = \frac{x^2-3x+2}{1-2x}$.

### 7.3 - Equazioni con più espressioni in valore assoluto

**7.16** (*). Risolvi le seguenti equazioni con più valori assoluti.

a) $|x-2|+|5-2x|=x-1$;
b) $\left|x^2-4x+3\right|=1-2\left|4-x^2\right|$;
c) $|x-1|=x^2-x+\left|3-x^2\right|$;
d) $|3x-2|=x^2-\left|x^2-x\right|+3$.

**7.17** (*). Risolvi le seguenti equazioni con più valori assoluti.

a) $\left|3x-x^2-2\right|=\frac{1}{2}+x^2-x-2\left|1-x^2\right|$;
b) $|2x-5|+\left|x^2-1\right|=x-2$;
c) $|x-2|=\left|x^2-4\right|$;
d) $|x-2|=\left|x^2-4\right|+1$.

**7.18** (*). Risolvi le seguenti equazioni con più valori assoluti.

a) $|x-2|=\left|x^2-4\right|+4$;
b) $|x-2|=\left|x^2-4\right|+5$;
c) $\left|x^2-3x\right|=x\,|x|$;
d) $|x-1|\,(x+1)=|2x-4|$.

**7.19** (*). Risolvi le seguenti equazioni con più valori assoluti.

a) $\left|x^2-5x+6\right|=(3-x)\left|x^2+x-2\right|$;
b) $|x|^2-|x|=2$;
c) $|x|^2+3\,|x|+2=0$;
d) $|x|^2-5\,|x|+6=0$.

**7.20** (*). Risolvi le seguenti equazioni con più valori assoluti.

a) $\left|4x-x^2\right|-2x=2\left|x^2-9\right|$;
b) $(x-1)^2\,|x|=x^2-1$;
c) $|x|=3x-\left|x^2-1\right|$;
d) $|x-2|+|x|=1+x^2$.

**7.21** (*). Risolvi le seguenti equazioni con più valori assoluti.

a) $|3x-6|+\left|4x-x^2\right|=x+3$;
b) $\left|x^2-4\right|+1-2x=2x^2+|x+2|$;
c) $x+\left|x^2+x-6\right|=\frac{1}{4}(x^2+10x+25)$;
d) $x+2\,|-x-1|=x^2-|x|$.

**7.22** (*). Risolvi le seguenti equazioni con più valori assoluti.

a) $\left|x^3-4x\right|=|x|$;
b) $|x-2|=\left|x^2-4\right|-4$;
c) $|x-2|=\left|x^2-4\right|-\frac{9}{4}$;
d) $\left|x^2-4x\right|=\left|2x^2-3\right|$.

**7.23** (*). Risolvi le seguenti equazioni con più valori assoluti.

a) $|x-1|^2-\left|x^2-1\right|=1$;
b) $\left|9-4x^2\right|=x^2+2\,|x-3|$;
c) $(|x-1|-|3x-3|)^2=0$;
d) $\left(|x|-2\left|17-x^2\right|\right)^3=8$.

**7.24** (*). Risolvi le seguenti equazioni con più valori assoluti.

a) $(|2x-1|-1)\left(6-2\left|x^2-9\right|\right)=0$;
b) $|x-2|\,(1-|x-1|)=\frac{1}{4}$;
c) $\frac{|x-1|+3\left|4x+x^2+3\right|}{2}=2$;
d) $|x-1|-|x+1|=1$.

**7.25** (*). Risolvi le seguenti equazioni con più valori assoluti.

a) $\left|4x^2-4\right|-2|x+1|=0$;
b) $|x-4|=\left|(x-1)^2-1\right|$;
c) $\left|3x^2-\frac{1}{2}\right|-x=|x-1|$;
d) $(x-1)|4-2x|=x^2-2$.

**7.26** (*). Risolvi le seguenti equazioni con più valori assoluti.

a) $(x-1)|4-2x|=x^2-1$;
b) $(x-1)|4-2x|=x^2+1$;
c) $x^2|2x+2|=4|x|$;
d) $|x-2|-|1-x|=(x-1)^2$.

**7.27** (*). Risolvi le seguenti equazioni con più valori assoluti.

a) $2\left|x^2-9\right|+6|4x+12|=0$;
b) $|x-2|+|x|=1-x^2$;
c) $|x-2|=\left|x^2-4\right|-2$;
d) $\left|5x-x^2\right|=3+2x-|x|$.

**7.28** (*). Risolvi le seguenti equazioni con più valori assoluti.

a) $2\left|4-x^2\right|=\left|x^2-2x+3\right|$;
b) $|3-3x|+x=8-2\left|16-4x^2\right|$;
c) $|x-1|=\frac{2}{|x+1|}-1$;
d) $\left|x^2-x\right|+3x=|x-1|-|2x+1|$.

**7.29** (*). Risolvi le seguenti equazioni con più valori assoluti.

a) $\left|x^2-5x+6\right|+3x+2=\left|x^2-1\right|-|x+1|$;
b) $(|x-3|+1)^2=\left|x^2+1\right|-3|x|-|-5|$.

### 7.4 - Disequazioni in valore assoluto

**7.30** (*). Risolvi le seguenti disequazioni in valore assoluto.

a) $|x+1|<1$;
b) $\left|x^2-3x+3\right|<3$;
c) $\left|3x^2-1\right|>6$;
d) $5-\left|5-x^2\right|\geqslant 6$.

**7.31** (*). Risolvi le seguenti disequazioni in valore assoluto.

a) $\left|9-16x^2\right|>0$;
b) $\left|x^2+6x\right|>2$;
c) $\left|5x-x^2\right|>6$;
d) $\left|\frac{2}{x}+\frac{1}{3}\right|-\frac{1}{2}>2$.

**7.32** (*). Risolvi le seguenti disequazioni in valore assoluto.

a) $\left|x^2-3\right|\geqslant|-4|$;
b) $2x^2-7x+3>\left|x^2-2x\right|$;
c) $\left|\frac{x}{x-1}\right|>1$;
d) $\left|x^2+3\right|<|5-2x|$.

**7.33** (*). Risolvi le seguenti disequazioni in valore assoluto.

a) $\left|x^2-1\right|+3x\geqslant 2\left(x+\left|x^2-1\right|\right)$;
b) $|x-2|+2|2-x|>(x-2)(x+2)$;
c) $(x-3)^2-\left|x^2-4\right|<10+(x+1)(x-1)-6x$;
d) $\frac{|x|}{x-1}<\frac{x+1}{|x|}$.

**7.34 (*).** Risolvi le seguenti disequazioni in valore assoluto.

a) $\left|\frac{3x+2}{2x}\right| \leqslant 1$;
b) $|x-1| > |2x-1|$;
c) $\left|x^2-4\right| < \left|x^2-2x\right|$;
d) $|x+1| < |x| - x$.

**7.35 (*).** Risolvi le seguenti disequazioni in valore assoluto.

a) $|x-1| + 3x - |3-x| + 1 < 0$;
b) $|x-1| \geqslant 4 - |2x-3|$;
c) $1 - \left|4x^2-1\right| + 5x < \left|x^2-9\right| + 3x^2$;
d) $\left|x^2-x\right| - 2 \leqslant |x-2|$.

**7.36 (*).** Risolvi le seguenti disequazioni in valore assoluto.

a) $\frac{|x-3|-x^2}{|x-1|} \leqslant 1 - |x-1|$;
b) $(x-1)^2 - |x-3| < |x+5|\,(x-5) + 2x$;
c) $\begin{cases} |2x-3| < 6 \\ \left|x^2-2x\right| > 3 \end{cases}$;
d) $\frac{|x^2-1|-5}{|x-1|(x^2-x-6)} \geqslant 0$.

### 7.5.2 Risposte

**7.3.** d) se $x \leqslant -1 \vee x \geqslant 1 \rightarrow f(x) = 2$; se $-1 < x < 1 \rightarrow f(x) = 2x^2$,
e) se $x \geqslant 0 \rightarrow f(x) = \frac{1}{x} - x$; se $x < 0 \rightarrow f(x) = x - \frac{1}{x}$,
f) se $x < -3 \vee x > 1 \rightarrow f(x) = \frac{x+2}{x-1} + x^2 + 4x + 3 + 1$;
se $-3 \leqslant x < -2 \rightarrow f(x) = \frac{x+2}{x-1} - (x^2+4x+3) + 1$;
se $-2 \leqslant x < -1 \rightarrow f(x) = -\frac{x+2}{x-1} - (x^2+4x+3) + 1$;
se $-1 \leqslant x < 1 \rightarrow f(x) = -\frac{x+2}{x-1} + x^2 + 4x + 3 + 1$.

**7.4.** a) $x_1 = 1 \vee x_2 = -\frac{1}{2}$, b) $x_1 = \sqrt{5} \vee x_2 = -\sqrt{5}$, c) $\emptyset$, d) $\emptyset$.

**7.5.** a) $x_1 = -\frac{3}{2} \vee x_2 = \frac{1}{2}$, b) $x_1 = 0 \vee x_2 = 1 \vee x_3 = 2 \vee x_4 = 3$, c) $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, d) $x_{1,2} = \pm 2$.

**7.6.** a) $x_{1,2} = \pm\sqrt{10} \vee x_{3,4} = \pm 2$, b) $x_{1,2} = \pm 1$, c) $\emptyset$, d) $x_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{3}}{2}$.

**7.7.** a) $x_{1,2} = \pm\sqrt{6}$, b) $x_1 = 0 \vee x_2 = \frac{2}{3} \vee x_{3,4} = -4 \pm 3\sqrt{2}$, c) $x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{2}}{2} \vee x_3 = \frac{1}{2}$, d) $x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$.

**7.8.** a) $x = \frac{1}{2}$, b) $x_1 = \frac{3+\sqrt{21}}{2} \vee x_2 = \frac{-3+\sqrt{29}}{2}$, c) $x_1 = -1 \vee x_2 = 2$, d) $\emptyset$.

**7.9.** a) $x_1 = 1 \vee x_2 = 2$, b) $\emptyset$, c) $x_1 = -\frac{2+\sqrt{14}}{2} \vee x_2 = \frac{\sqrt{6}}{2}$, d) $x_1 = \sqrt{3} \vee x_2 = 4 + \sqrt{7}$.

**7.10.** a) $x = 2$, b) $x = 1$, c) $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$, d) $x_1 = -1 \vee x_2 = 2$.

**7.11.** a) $\emptyset$, b) $x = 0$, c) $x_1 = -1 \vee x_2 = \frac{5-\sqrt{21}}{2}$, d) $x_{1,2} = \pm\sqrt{2+\sqrt{2}} \vee x_{3,4} = \pm\sqrt{1+\sqrt{3}}$.

**7.12.** a) $x_{1,2} = \pm 1 \vee x_{3,4} = \pm\sqrt{5}$, b) $x_1 = -1 \vee x_2 = \frac{13}{3} \vee x_3 = \frac{5}{2}$,
c) $x_1 = \frac{18}{5} \vee x_2 = -2 \vee x_3 = \frac{4\pm 2\sqrt{7}}{3}$, d) $x_1 = 2 \vee x_2 = 3$.

**7.13.** a) $x_1 = -2 \vee x_2 = 3$, b) $x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$, c) $x_1 = -3 \vee x_2 = 4$, d) $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$.

**7.14.** a) $x_1, 2 = \pm 2$, b) $x_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{2+2\sqrt{37}}}{2} \vee x_{3,4} \pm \frac{\sqrt{-2+2\sqrt{37}}}{2}$, c) $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{21}}{10}$,
d) $x_1 = 2 \vee x_2 = 3$.

**7.15.** a) $x \leqslant -1 \vee x \geqslant 1$, b) $x_1 = -3 \vee x_2 = 1$, c) $x = 2$, d) $x = -\frac{\sqrt{161}+1}{10}$, e) $\emptyset$.

**7.16.** a) $x_1 = 2 \vee x_2 = 3$, b) $x = 2$, c) $\emptyset$, d) $x_1 = \frac{5}{2} \vee x_2 = -\frac{1}{4}$.

**7.17.** a) $x_1 = \frac{9}{8} \vee x_2 = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$, b) $\emptyset$, c) $x_1 = -3 \vee x_2 = -1 \vee x_3 = 2$, d) $x_1 = -\frac{1+\sqrt{21}}{2} \vee$
$x_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$.

**7.18.** a) $x = -2$, b) $\emptyset$, c) $x_1 = 0 \vee x_2 = \frac{3}{2}$, d) $x = \sqrt{6} - 1$.

**7.19.** a) $x_1 = 0 \vee x_2 = 3 \vee x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{5}$, b) $x_{1,2} = \pm 2$, c) $\emptyset$, d) $x_{1,2} = \pm 2 \vee x_{3,4} = \pm 3$.

**7.20.** a) $x_1 = -3 - 3\sqrt{3} \vee x_2 = 1 - \sqrt{7}$, b) $x_1 = 1 \vee x_2 = 1 + \sqrt{2}$, c) $x_{1,2} = \sqrt{2} \pm 1$,
d) $x_1 = 1 \vee x_2 = -1 - \sqrt{2}$.

**7.21.** a) $x_1 = 3 \vee x_2 = \sqrt{3} \vee x_3 = 1 + \sqrt{10}$, b) $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$,
c) $x_{1,2} = \frac{-5\pm 2\sqrt{5}}{5} \vee x_{3,4} = \frac{1\pm 2\sqrt{37}}{3}$, d) $x_1 = 1 - \sqrt{3} \vee x_2 = 2 + \sqrt{6}$.

**7.22.** a) $x_{1,2} = \pm\sqrt{5} \vee x_{3,4} = \pm\sqrt{3} \vee x = 0$, b) $x_1 = 3 \vee x_2 = -\frac{1+\sqrt{41}}{2}$,
c) $x_1 = \frac{1}{2} \vee x_2 = \frac{1+3\sqrt{2}}{2} \vee x_3 = -\frac{1+\sqrt{34}}{2}$, d) $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{7} \vee x_{3,4} = \frac{2\pm\sqrt{13}}{3}$.

**7.23.** a) $x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$, b) $x_1 = 1 \vee x_2 = -\frac{3}{5} \vee x_{3,4} = \frac{-1\pm\sqrt{46}}{3}$, c) $x = 1$,
d) $x_{1,2} = \pm 4 \vee x_{3,4} = \frac{\pm 1+\sqrt{257}}{4}$.

**7.24.** a) $x_1 = 0 \vee x_2 = 1 \vee x_{3,4} = \pm\sqrt{6} \vee x_{5,6} = \pm 2\sqrt{3}$, b) $x_1 = \frac{3}{2} \vee x_2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$,
c) $x_1 = -3 \vee x_2 = -\frac{4}{3} \vee x_3 = -\frac{2}{3}$, d) $x = -\frac{1}{2}$.

**7.25.** a) $x_1 = -1 \vee x_2 = \frac{1}{2} \vee x_3 = \frac{3}{2}$, b) $x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$, c) $x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$,
d) $x_1 = 3 + \sqrt{3} \vee x_{2,3} = \frac{3\pm\sqrt{3}}{3}$.

**7.26.** a) $x_1 = 1 \vee x_2 = 5$, b) $x = 3 + \sqrt{6}$, c) $x_1 = -2 \vee x_2 = 0 \vee x_3 = 1$,
d) $x_1 = 0 \vee x_2 = \sqrt{2}$.

**7.27.** a) $x = -3$, b) $\emptyset$, c) $x_1 = 0 \vee x_2 = 1 \vee x_3 = \frac{1+\sqrt{17}}{2} \vee x_4 = -\frac{1+\sqrt{33}}{2}$,
d) $x_1 = 1 \vee x_2 = 3 \vee x_3 = 2\sqrt{3}+3 \vee x_4 = 4-\sqrt{19}$.

**7.28.** a) $x_1 = -1 \vee x_2 = \frac{5}{3} \vee x_{3,4} = -1 \pm 2\sqrt{3}$, b) $x_1 = \frac{-1+\sqrt{87}}{4} \vee x_2 = \frac{1+\sqrt{43}}{4} \vee x_3 = \frac{1-3\sqrt{33}}{8} \vee x_4 = \frac{-1-\sqrt{217}}{8}$, c) $x_1 = 0 \vee x_2 = 1 \vee x_3 = \frac{1-\sqrt{17}}{2}$, d) $x_1 = 0 \vee x_2 = -2$.

**7.29.** a) $x = 10$, b) $x = 8$.

**7.30.** a) $-2 < x < 0$, b) $0 < x < 3$, c) $x < -\frac{\sqrt{21}}{3} \vee x > \frac{\sqrt{21}}{3}$, d) $\emptyset$.

**7.31.** a) $x \neq \pm\frac{3}{4}$, b) $x < -3-\sqrt{11} \vee -3-\sqrt{7} < x < -3+\sqrt{7} \vee x > -3+\sqrt{11}$,
c) $x < -1 \vee 2 < x < 3 \vee x > 6$, d) $-\frac{12}{17} < x < \frac{12}{13} \wedge x \neq 0$.

**7.32.** a) $x \leqslant -\sqrt{7} \vee x \geqslant \sqrt{7}$, b) $x < \frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee x > \frac{\sqrt{13}+5}{2}$, c) $x > \frac{1}{2} \wedge x \neq 1$,
d) $-1-\sqrt{3} < x < -1+\sqrt{3}$.

**7.33.** a) $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, b) $-5 < x < 2$, c) $\forall x \in \mathbb{R} - \{-2; 2\}$, d) $x < 1$.

**7.34.** a) $-2 \leqslant x \leqslant -\frac{2}{5}$, b) $0 < x < \frac{2}{3}$, c) $x < -1$, d) $x < -\frac{1}{3}$.

**7.35.** a) $x < \frac{1}{3}$, b) $x \leqslant 0 \vee x \geqslant \frac{8}{3}$, c) $\forall x \in R$, d) $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

**7.36.** a) $x \geqslant \frac{5}{4}$, b) $x > \frac{29}{5}$, c) $-\frac{3}{2} < x < -1 \vee 3 < x < \frac{9}{2}$,
d) $(x \leqslant -\sqrt{6} \vee -2 < x \leqslant \sqrt{6} \vee x > 3) \wedge x \neq -1$.

# Equazioni e disequazioni irrazionali 8

## 8.1 Equazioni irrazionali con un solo radicale

**Definizione 8.1.** Un'equazione si dice irrazionale quando l'incognita compare sotto il segno di radice.

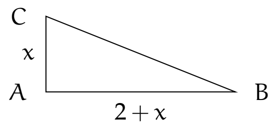
Analizziamo le seguenti equazioni: $\sqrt{3} \cdot x = x^2 - x + 2$ e $\sqrt{2x} = x^2 - x$.

Notiamo che l'equazione $\sqrt{3} \cdot x = x^2 - x + 2$ è di secondo grado, intera con un coefficiente irrazionale (sotto il segno di radice), ma non è un'equazione irrazionale perché l'incognita non compare sotto la radice.

Nell'equazione $\sqrt{2x} = x^2 - x$ il monomio $2x$, contenente l'incognita, compare sotto il segno di radice pertanto essa è un'equazione irrazionale.

**Problema 8.1.** Determinare l'area di un triangolo rettangolo $ABC$ retto in $A$ avente perimetro di 24 cm e i cateti che differiscono di 2 cm.

*Dati*:
$2p = 24$;
$\overline{AB} - \overline{AC} = 2$.
*Obiettivo*: Area.




*Soluzione* Area $= \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{2}$; dobbiamo quindi determinare i cateti. Poniamo $\overline{AC} = x$ con $x > 0$ quindi $\overline{AB} = 2 + x$ e sfruttiamo l'informazione relativa al perimetro per determinare l'equazione risolvente $\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = 24$.

Applicando il teorema di Pitagora si ha $\overline{BC} = \sqrt{x^2 + (2+x)^2} = \sqrt{2x^2 + 4x + 4}$ e dunque otteniamo l'equazione risolvente $2x + 2 + \sqrt{2x^2 + 4x + 4} = 24$ in cui l'incognita compare sotto il segno di radice. Vedremo nel seguito come risolvere un'equazione di questo tipo.

♦

### 8.1.1 Equazioni irrazionali con la radice di indice pari

Ricordiamo che l'espressione irrazionale $E = \sqrt[n]{f(x)}$ con $n$ pari maggiore di 1 ha significato per tutti i valori di $x$ che rendono non negativo il radicando, pertanto l'Insieme Soluzione di un'equazione irrazionale in cui compare uno o più radicali di indice pari sarà un sottoinsieme del Dominio o Insieme di Definizione del radicale (condizione di realtà del radicale).

Per esempio nell'equazione $\sqrt{2x} = x^2 - x$ si ha che il dominio è dato da $x \geqslant 0$ cioè $\mathcal{D} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Pertanto l'insieme delle soluzioni è un sottoinsieme del dominio, cioè I. S. $\subseteq \mathcal{D}$. Nessun numero negativo potrà essere soluzione dell'equazione.

L'espressione irrazionale $E = \sqrt[n]{f(x)}$ nel suo I. D. è positiva o nulla (per definizione), pertanto l'equazione $\sqrt{2x} = x^2 - x$ potrà verificarsi solo se il secondo membro sarà non negativo (condizione di concordanza del segno).

Quando abbiamo un'equazione nella quale l'incognita compare sotto una radice di indice $n$ pari possiamo elevare alla potenza $n$ entrambi i membri dell'equazione eliminando la radice. Tuttavia, l'equazione ottenuta non sempre è equivalente a quella data, ossia non sempre ha le stesse soluzioni dell'equazione data.

---

**Esempio 8.2.** Risolvere la seguente equazione irrazionale $\sqrt{x+2} = x$.

Elevando al quadrato si ha $x+2 = x^2$ da cui $x^2 - x - 2 = 0$. Risolvendo questa equazione di secondo grado otteniamo le soluzioni $x_1 = -1$; $x_2 = 2$. Tuttavia, sostituendo questi valori di $x$ nell'equazione irrazionale di partenza si ha:

per $x = -1 \Rightarrow \sqrt{-1+2} = -1 \Rightarrow \sqrt{1} = -1$ che è falsa, pertanto $x = -1$ non può essere soluzione;

per $x = 2 \Rightarrow \sqrt{2+2} = 2 \Rightarrow \sqrt{4} = 2$ che è vera, pertanto $x = 2$ è l'unica soluzione. $\text{I. S.} = \{2\}$.

---

❍ **Conclusione** Per risolvere un'equazione irrazionale con indice pari possiamo allora elevare alla potenza pari della radice i due membri dell'equazione, risolvere l'equazione che si ottiene e verificare se le soluzioni sono accettabili.

Possiamo però procedere in un altro modo: l'Insieme Soluzione dell'equazione irrazionale $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$ con $n$ pari non nullo sarà un sottoinsieme dell'insieme in cui sono contemporaneamente vere le condizioni

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases} .$$

---

**Esempio 8.3.** Risolvere le seguenti equazioni irrazionali con radice di indice pari.

- $\sqrt{x+2} = x$.

  La soluzione si ottiene risolvendo

  $$\begin{cases} x+2 \geqslant 0 \\ x \geqslant 0 \\ x+2 = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x+2 = x^2 \end{cases} .$$

  Le soluzioni dell'equazione $x^2 - x - 2 = 0$ sono $x_1 = -1 \vee x_2 = 2$, l'unica da accettare è $x = 2$.

- $\sqrt{5-2x} = x-1$.

  Elevo ambo i membri al quadrato, ottengo $5 - 2x = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2$, sostituisco $x = -2$ ottengo $\sqrt{5 - 2 \cdot (-2)} = -2 - 1 \Rightarrow \sqrt{9} = -3$ falso, quindi $x = -2$ non è accettabile; sostituisco $x = +2$ ottengo $\sqrt{5 - 2 \cdot 2} = 2 - 1 \Rightarrow \sqrt{1} = 1$ vero, quindi $x = +2$ è l'unica soluzione.

  Arrivo allo stesso risultato ponendo le condizioni

  $$\begin{cases} 5 - 2x \geqslant 0 \\ x \geqslant 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant \frac{5}{2} \\ x \geqslant 1 \end{cases}$$

  con soluzione $1 \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}$. La soluzione $x = -2$ non è accettabile in quando non è compresa tra 1 e $\frac{5}{2}$, mentre la soluzione $x = +2$ è invece accettabile.

- $\sqrt{2x} = x^2 - x$.

  Determiniamo l'insieme in cui cercare le soluzioni dell'equazione

  $$\begin{cases} 2x \geqslant 0 \\ x^2 - x \geqslant 0 \end{cases}$$

  con soluzione $x = 0 \vee x \geqslant 1$. Rendiamo razionale l'equazione elevando ambo i membri al quadrato:

  $$\left(\sqrt{2x}\right)^2 = \left(x^2 - x\right)^2 \Rightarrow 2x = x^4 - 2x^3 + x^2.$$

  Risolviamo l'equazione ottenuta:

  $$x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x \cdot \left(x^2 + 1\right) \cdot (x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 2.$$

  Confrontiamo le soluzioni con le condizioni $x = 0 \vee x \geqslant 1$, poiché entrambe le soluzioni verificano queste condizioni si ha che $\mathrm{I.S.} = \{0; 2\}$.

---

### 8.1.2 Equazioni irrazionali con la radice di indice dispari

L'espressione irrazionale $E = \sqrt[n]{f(x)}$ con $n$ dispari è definita per tutti i valori reali per cui è definito il radicando, quindi l'equazione irrazionale $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$ si risolve elevando ad $n$ entrambi i membri dell'equazione: $f(x) = g^n(x)$.

---

**Esempio 8.4.** Risolvere le seguenti equazioni irrazionali con radice di indice dispari.

- $\sqrt[3]{x - 2} = \frac{1}{2}$.

  Elevando al cubo si ha $x - 2 = \frac{1}{8} \;\Rightarrow\; x = 2 + \frac{1}{8} \;\Rightarrow\; x = \frac{17}{8}$.

- $\sqrt[3]{-3x^2 + 3x + 1} = x$.

  Elevando al cubo si ha $-3x^2 + 3x + 1 = x^3 \;\Rightarrow\; (x-1)^3 = 0 \;\Rightarrow\; x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = 1$ .

- $\sqrt[3]{\frac{x}{2x+3}} = \frac{2-5x}{4}$.

  Il dominio del radicando è l'insieme $D = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \neq -\frac{3}{2}\right\}$. Per risolvere l'equazione elevo primo e secondo membro al cubo, si ottiene l'equazione $\frac{x}{2x+3} = \left(\frac{2-5x}{4}\right)^3$, la cui risoluzione richiede la risoluzione di un'equazione di quarto grado che non svolgiamo.

- $\sqrt[3]{\frac{1}{x}} = \frac{4x+x^2}{3-x}$.

  Le condizioni di esistenza sono: $x \neq 0 \wedge x \neq 3$. Elevando al cubo si ottiene l'equazione risolvente che non svolgeremo.

---

✍ *Esercizi proposti:* 8.1, 8.2, 8.3, 8.4, 8.5, 8.6, 8.7, 8.8, 8.9.

## 8.2 Equazioni con più radicali

Non potendo stabilire una forma canonica, procederemo mediante esempi al fine di acquisire un metodo risolutivo a seconda dei casi che si possono presentare.

---

**Esempio 8.5.** Risolvere la seguente equazione irrazionale $\sqrt{2-\frac{1}{x}}=\sqrt{x}$.

Osserviamo subito che i due membri, nell'insieme in cui entrambi hanno significato, sono positivi. Determiniamo quindi l'insieme in cui cercare le soluzioni:

$$\begin{cases} 2-\frac{1}{x}\geqslant 0 \\ x\geqslant 0 \end{cases}.$$

Risolvendo le due disequazioni otteniamo

$$\begin{cases} x<0 \vee x\geqslant \frac{1}{2} \\ x\geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow x\geqslant \frac{1}{2}.$$

Ora eleviamo al quadrato entrambi i membri dell'equazione otteniamo $2-\frac{1}{x}=x$ da cui $x_1=x_2=1$ che è accettabile in quanto maggiore di $\frac{1}{2}$.

**Esempio 8.6.** Risolvere la seguente equazione irrazionale $\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{2x^2+6x}=0$.

Separiamo i due radicali $\sqrt{x+3}=\sqrt[3]{2x^2+6x}$.

Affinché i due membri dell'equazione siano positivi dobbiamo porre la condizione di positività anche al radicando del radicale cubico:

$$\begin{cases} x+3\geqslant 0 \\ 2x^2+6x\geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow x=-3\vee x\geqslant 0.$$

Per risolvere l'equazione occorre avere radici con lo stesso indice. Il minimo comune indice è 6, perciò si ha $\sqrt[6]{(x+3)^3}=\sqrt[6]{\left(2x^2+6x\right)^2}$.

Elevando alla sesta potenza si ha

$$\begin{aligned} &(x+3)^3=\left(2x^2+6x\right)^2 \\ \Rightarrow &(x+3)^3-\left(2x^2+6x\right)^2=0 \\ \Rightarrow &(x+3)^3-[2x(x+3)]^2=0. \end{aligned}$$

Raccogliendo a fattore comune si ha: $(x+3)^2\cdot\left(x+3-4x^2\right)=0$.

Per la legge di annullamento del prodotto abbiamo

$$(x+3)^2=0\Rightarrow x+3=0\Rightarrow x=-3$$

e

$$-4x^2+x+3=0 \;\Rightarrow\; x_1=-\frac{3}{4}\vee x_2=1.$$

Le soluzioni che verificano le condizioni $x=-3\vee x\geqslant 0$ sono $x_1=-3$ e $x_2=1$.

**Esempio 8.7.** Risolvere la seguente equazione irrazionale $\sqrt{x}+\sqrt{x^3+2x-1}=0$.

Separiamo i due radicali $\sqrt{x}=-\sqrt{x^3+2x-1}$; osserviamo che i due membri nell'insieme in cui sono definiti sono di segno opposto e dunque l'uguaglianza sarà vera solo nel caso in cui entrambi si annullino.

Il primo membro si annulla solo per $x=0$ che non annulla il secondo membro, pertanto l'equazione non ha soluzioni.

**Esempio 8.8.** Risolvere la seguente equazione irrazionale $-\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{2x+2}=0$.

Portiamo la radice con il segno meno a secondo membro, in modo da avere due radici positive: $\sqrt{2x+2}=\sqrt{x^2+3x}$. Poniamo le condizione sull'accettabilità della soluzione:

$$\begin{cases} 2x+2\geqslant 0 \\ x^2+3x\geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geqslant -1 \\ x\leqslant -3\vee x\geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow x\geqslant 0.$$

Eleviamo al quadrato i due membri dell'equazione

$$2x+2=x^2+3x \;\Rightarrow\; x^2+x-2=0.$$

Le soluzioni sono $x_1=-2$; $x_2=1$. Di queste solo $x=1$ soddisfa le condizioni di accettabilità.

**Esempio 8.9.** Risolvere la seguente equazione irrazionale $\sqrt{x+7}-\sqrt{x-1}=2$.

In questo esempio ci sono altri termini oltre i due radicali.

Spostiamo dopo l'uguale il radicale negativo in modo che sia a destra sia a sinistra i termini siano positivi: $\sqrt{x+7}=\sqrt{x-1}+2$.

Poniamo le condizioni sull'accettabilità delle soluzioni:

$$\begin{cases} x+7\geqslant 0 \\ x-1\geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geqslant -7 \\ x\geqslant 1 \end{cases} \Rightarrow x\geqslant 1.$$

Elevando al quadrato si ha: $x+7=4+4\sqrt{x-1}+x-1\Rightarrow 4\sqrt{x-1}=4\Rightarrow \sqrt{x-1}=1$.

Eleviamo nuovamente al quadrato $\sqrt{x-1}=1$ ottenendo $x-1=1\Rightarrow x=2$, accettabile.

**Esempio 8.10.** Risolvere la seguente equazione irrazionale $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1-4x}=x$.

Per prima cosa trasporto a destra il radicale che ha il segno meno, in modo che diventi positivo $\sqrt{x^2+1}=\sqrt{1-4x}+x$.

In questo caso risulta problematico risolvere il sistema con tutte le condizioni di accettabilità, perché bisognerebbe risolvere anche la disequazione irrazionale $\sqrt{1-4x}+x\geqslant 0$. Ci limiteremo allora a risolvere l'equazione e poi verificarne le soluzioni.

Elevo al quadrato ambo i membri $x^2+1=1-4x+x^2+2x\sqrt{1-4x}$.

Semplificando si ha $x(2-\sqrt{1-4x})=0$. Una soluzione è $x=0$, la seconda soluzione si ottiene da $2-\sqrt{1-4x}=0\Rightarrow 2=\sqrt{1-4x}$ elevando al quadrato si ha $4=1-4x\;\Rightarrow\; x=-\frac{3}{4}$.

Verifichiamo ora le soluzioni. Per $x=0$ si ha $\sqrt{(0)^2+1}=\sqrt{1-4\cdot(0)}+0\;\Rightarrow\;1=1$ soluzione accettabile. Per $x=-\frac{3}{4}$ si ha $\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2+1}=\sqrt{1-4\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)}-\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{5}{4}=\frac{5}{4}$ e anche questa è una soluzione accettabile.

---

✍ *Esercizi proposti:* 8.10, 8.11, 8.12, 8.13, 8.14, 8.15, 8.16, 8.17.

## 8.3 Disequazioni irrazionali

Concludiamo con un cenno alle disequazioni irrazionali, nelle quali l'incognita compare sotto radice. Esaminiamo il caso in cui l'incognita è sotto radice quadrata e l'equazione presenta una sola radice. Qualunque sia la disequazione di partenza, ci si può sempre ricondurre ai seguenti due casi.

**Primo caso:** disequazioni nella forma: $\sqrt{f(x)} > g(x)$.

Questa disequazione si può ricondurre allo studio di una coppia di sistemi di disequazioni. Infatti distinguiamo due casi a seconda del segno della $g(x)$.

- Se $g(x) < 0$ la disequazione è sicuramente verificata, in quanto al primo membro c'è una quantità sicuramente positiva in quanto radice quadrata, sotto condizione di esistenza del radicando $f(x) \geqslant 0$. Pertanto, il primo sistema è:
$$\begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases}.$$
- Se $g(x) \geqslant 0$, dopo aver posto la condizione di esistenza del radicale $f(x) \geqslant 0$ si possono elevare al quadrato i due membri dell'equazione, in quanto entrambi positivi. Si ottiene il sistema
$$\begin{cases} g(x) \geqslant 0 \\ f(x) \geqslant 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases}.$$
La seconda disequazione del sistema si può eliminare in quanto la prima e la terza disequazione implicano automaticamente che $f(x) > 0$.
In definitiva:
$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Rightarrow \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases} \cup \begin{cases} g(x) \geqslant 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases}.$$

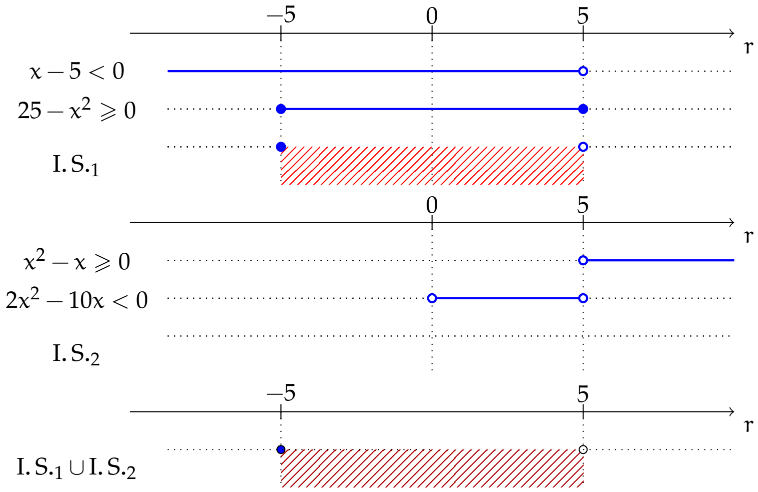
---

**Esempio 8.11.** Risolvere la seguente disequazione irrazionale $\sqrt{25 - x^2} > x - 5$.

La disequazione è equivalente al sistema
$$\begin{cases} x - 5 < 0 \\ 25 - x^2 \geqslant 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x - 5 \geqslant 0 \\ 25 - x^2 > (x-5)^2 \end{cases}.$$

Il primo sistema
$$\begin{cases} x - 5 < 0 \Rightarrow x < 5 \\ 25 - x^2 \geqslant 0 \Rightarrow -5 \leqslant x \leqslant 5 \end{cases}$$
verificato per $-5 \leqslant x < 5$.

Il secondo sistema
$$\begin{cases} x - 5 \geqslant 0 \\ 25 - x^2 > (x-5)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 5 \geqslant 0 \\ 2x^2 - 10x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant 5 \\ 0 < x < 5 \end{cases}$$
mai verificato.




L'Insieme Soluzione della disequazione è $-5 \leqslant x < 5$.

---

**Secondo caso:** disequazioni nella forma: $\sqrt{f(x)} < g(x)$.

Questa disequazione si può ricondurre allo studio di un solo sistema di disequazioni, in quanto la condizione $g(x) \leqslant 0$ non dà soluzioni, in quanto la radice del primo membro dovrebbe essere minore di un numero negativo, cosa non possibile in quanto le radici danno sempre valori positivi. Rimane allora da esaminare la condizione $g(x) > 0$; in questo caso si può elevare al quadrato primo e secondo membro ma resta sempre da aggiungere la condizione di esistenza del radicale, cioè $f(x) \geqslant 0$. In definitiva:

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < [g(x)]^2 \end{cases}.$$

---

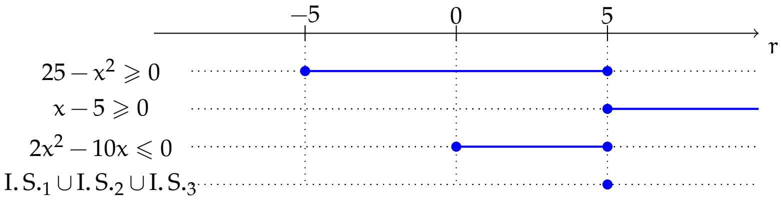
**Esempio 8.12.** Risolvere la seguente disequazione irrazionale $\sqrt{25 - x^2} \leqslant x - 5$.

La disequazione presenta il segno di minore, pertanto è equivalente a un sistema di tre disequazioni:

$$\sqrt{25 - x^2} \leqslant x - 5 \Rightarrow \begin{cases} 25 - x^2 \geqslant 0 \\ x - 5 \geqslant 0 \\ 25 - x^2 \leqslant (x-5)^2 \end{cases}.$$

Sviluppando il sistema di ha:

$$\begin{cases} 25 - x^2 \geqslant 0 \\ x - 5 \geqslant 0 \\ 25 - x^2 \leqslant (x-5)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25 - x^2 \geqslant 0 \\ x - 5 \geqslant 0 \\ 2x^2 - 10x \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5 \leqslant x \leqslant 5 \\ x \geqslant 5 \\ 0 \leqslant x \leqslant 5 \end{cases}.$$




La disequazione è verificata solo per $x = 5$.

**Esempio 8.13.** Risolvere la seguente disequazione irrazionale $\sqrt{x+3} < \sqrt{3x+1}$.

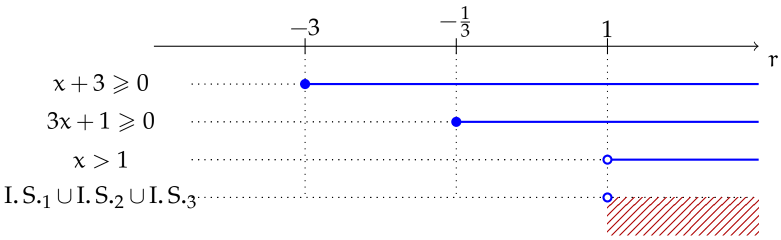
La disequazione è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x+3 \geqslant 0 \\ 3x+1 \geqslant 0 \\ x+3 < 3x+1 \end{cases}.$$

La prima disequazione indica le condizioni di esistenza del primo radicale, la seconda indica le condizione di esistenza del secondo radicale e dato che i due membri della disequazione sono positivi nella terza disequazione si può elevare al quadrato entrambi i membri.

Eseguendo i vari passaggi si ha:

$$\begin{cases} x+3 \geqslant 0 \\ 3x+1 \geqslant 0 \\ x+3 < 3x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant -3 \\ x \geqslant -\frac{1}{3} \\ x > 1 \end{cases}.$$




La disequazione è verificata per $x > 1$.

---

✍ *Esercizi proposti:* 8.18, 8.19, 8.20, 8.21, 8.22, 8.23, 8.24.

## 8.4 Esercizi

### 8.4.1 Esercizi dei singoli paragrafi

#### 8.1 - Equazioni irrazionali con un solo radicale

Risolvi le seguenti equazioni irrazionali con un radicale.

**8.1 (*).** Risolvi le seguenti equazioni irrazionali con un radicale.

a) $\sqrt{2x+1} = 7$;
b) $\sqrt{4-x^2} = 1$;
c) $\sqrt[4]{2x+1} = 2$;
d) $\sqrt[3]{2x+1} = -2$.

**8.2.** Risolvi le seguenti equazioni irrazionali con un radicale.

a) $\sqrt[3]{x+1} = -1$;
b) $\sqrt[3]{x^2-6x} = 3$;
c) $\sqrt{5x-2} = -4$;
d) $\sqrt{2-x^2+x} = 6$.

**8.3 (*).** Risolvi le seguenti equazioni irrazionali con un radicale.

a) $\sqrt{2x^2+9} = 2$;
b) $\sqrt[3]{16x-64} = x-4$;
c) $\sqrt{3x+10} = 1-\frac{3}{2}x$;
d) $\sqrt[3]{3x+10} = 1-\frac{3}{2}x$.

**8.4 (*).** Risolvi le seguenti equazioni irrazionali con un radicale.

a) $-3 = \sqrt{\frac{2}{x+1}}$;
b) $x - \sqrt{x+2} = 0$;
c) $\sqrt[3]{3x+1-3x^2} = x$;
d) $\sqrt{25-x^2} + x = 7$.

**8.5 (*).** Risolvi le seguenti equazioni irrazionali con un radicale.

a) $\sqrt{x^2+1} - 3 + x^2 = (x-2)^2$;
b) $\sqrt{\frac{x-1}{3-x}} = \frac{1}{x-3}$;
c) $\sqrt{\frac{2+3x}{x}} = \frac{1}{x} + 1$;
d) $\sqrt{3x^2+10} = 3x$.

**8.6 (*).** Risolvi le seguenti equazioni irrazionali con un radicale.

a) $\sqrt[3]{\frac{2x^2-1}{x}} - x = 0$;
b) $\sqrt[2]{\frac{2x^2-1}{x}} - x = 0$;
c) $\frac{4x+1}{2x} = \sqrt{\frac{2}{x+1}}$;
d) $\sqrt{\frac{x-1}{3-x}} = \frac{1}{x-3}$.

**8.7 (*).** Risolvi le seguenti equazioni irrazionali con un radicale.

a) $x\sqrt{x^2-4} = x^2-4$;
b) $\sqrt[3]{2x^2-7x+5} = 1-x$;
c) $\frac{\sqrt{2x-3}}{x-2} = 2$;
d) $\sqrt{4x-1} = \sqrt{2}+\sqrt{3}$.

**8.8 (*).** Risolvi le seguenti equazioni irrazionali con un radicale.

a) $\sqrt{x+2}=x-1$;
b) $2\sqrt{x^2-4x-33}-x=15$;
c) $(3-x)^2-\sqrt{x-2x^2+5}=(x-3)(x-2)$;
d) $4x+\frac{1}{2}\sqrt{25-x^2}=\frac{7}{2}(x+1)$.

**8.9 (*).** Risolvi le seguenti equazioni irrazionali con un radicale.

a) $\frac{1}{3}\sqrt{5x^2+4x-8}+x=2\left(x-\frac{1}{3}\right)$;
b) $1-x+\sqrt{8x^2-21x+34}=-3+2x$;
c) $\sqrt[4]{\frac{(x-1)^3}{x}}\cdot\sqrt[4]{\frac{x^3}{x-1}}=x+\frac{3}{2}$.

### 8.2 - Equazioni irrazionali con più radicali

**8.10 (*).** Risolvi le seguenti equazioni irrazionali con più radicali.

a) $\sqrt{3x-5}=\sqrt{1-x}$;
b) $\sqrt{3x-2}=\sqrt{2x-3}$;
c) $\sqrt{x-2}=1-\sqrt{3-x}$;
d) $\sqrt{6-3x}=2+\sqrt{x+1}$.

**8.11 (*).** Risolvi le seguenti equazioni irrazionali con più radicali.

a) $\sqrt{4-3x}=\sqrt{x^2-x-1}$;
b) $\sqrt{3-2x}=-\sqrt{x^2+3}$;
c) $\sqrt{3-x}=\sqrt{x+1}-1$;
d) $2\sqrt{x-1}=\sqrt{1+2x}+1$.

**8.12 (*).** Risolvi le seguenti equazioni irrazionali con più radicali.

a) $3\sqrt{x-x^2}=2\sqrt{x-1}$;
b) $\sqrt{x+1}=3\sqrt{4-x}$;
c) $\sqrt{x^2-x-3}=2\sqrt{x+5}$;
d) $1+2\sqrt{1-\frac{2}{3}x}=\sqrt{2x+1}$.

**8.13 (*).** Risolvi le seguenti equazioni irrazionali con più radicali.

a) $4-\sqrt{x-2}=\sqrt{x-1}+3$;
b) $2-2\sqrt{2-x}=4\sqrt{1-x}$;
c) $\sqrt{x^3-2x^2}=3\sqrt{x^2-2x}$;
d) $3\sqrt{x^4-x^3}=4\sqrt{x^4+2x^3}$.

**8.14 (*).** Risolvi le seguenti equazioni irrazionali con più radicali.

a) $\sqrt{2x^2-4x-3}=\sqrt{x^2-1}$;
b) $\sqrt{x^2+8}=\sqrt{4-x^2}$;
c) $\sqrt{x+12}-1=\sqrt{1-x}$;
d) $\sqrt{2x-5}=3-\sqrt{x+1}$.

**8.15 (*).** Risolvi le seguenti equazioni irrazionali con più radicali.

a) $\sqrt{x^2-2x+3}=\sqrt{1-x^2+2x}$;
b) $\sqrt{4x-7}+\sqrt{7x-4x^2}=0$;
c) $\sqrt{x^2+6x+9}+2\sqrt{1-x}=0$;
d) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-2}=4$.

**8.16 (*).** Risolvi le seguenti equazioni irrazionali con più radicali.

a) $\sqrt{x^2-4}=3+2\sqrt{1-x^2}$;
b) $\sqrt{4+x^2}=1+\sqrt{x^2-1}$;
c) $\sqrt{2x+1}=3+2\sqrt{x-6}$;
d) $\sqrt{x-2}-\sqrt{2x-1}=\sqrt{5x-1}$.

**8.17** (*). Risolvi le seguenti equazioni irrazionali con più radicali.

a ) $\sqrt{\frac{(3-2x)}{(x-1)}}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{\frac{1}{x-1}}$;

b ) $\sqrt{(x-1)^2+\sqrt{5x-6}}=2-x$;

c ) $\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}=\sqrt{x-1}$;

d ) $\sqrt{\frac{x}{4-x}}+3\sqrt{\frac{4-x}{x}}-4=0$;

e ) $\frac{5}{6-\sqrt{x}}+\frac{1}{2}=\frac{6}{5-\sqrt{x}}$.

### 8.3 - Disequazioni irrazionali

**8.18** (*). Risolvi le seguenti disequazioni irrazionali.

a ) $\sqrt{4x^2-x}\geqslant -2x+1$;

b ) $\sqrt{x^2-x-2}\leqslant 2x+6$;

c ) $\sqrt{2x-1}\geqslant x-8$;

d ) $\sqrt{x^2-3x+2}<7-5x$.

**8.19** (*). Risolvi le seguenti disequazioni irrazionali.

a ) $\sqrt{9x^2+2x}\geqslant 3x-4$;

b ) $\sqrt{x^2-2x}\geqslant 5-x$;

c ) $\sqrt{16-2x^2}<x+4$;

d ) $\sqrt{3-2x}\leqslant\sqrt{1-x^2}$.

**8.20** (*). Risolvi le seguenti disequazioni irrazionali.

a ) $\sqrt{4x^2+2x}\geqslant 2x-3$;

b ) $\sqrt{1-x^2}>2x-1$;

c ) $\sqrt{2x^2-x-1}>\sqrt{x-3}$;

d ) $\sqrt{x^2+2x+1}\leqslant\sqrt{1-x^2}$.

**8.21** (*). Risolvi le seguenti disequazioni irrazionali.

a ) $\sqrt{16x^2+2x}\geqslant -4x-1$;

b ) $\sqrt{x^2-1}<x+3$;

c ) $\sqrt{x^2-3x+2}\leqslant\sqrt{3x^2-2x-1}$;

d ) $\sqrt{9x^2-x}\geqslant -3x+6$.

**8.22** (*). Risolvi le seguenti disequazioni irrazionali.

a ) $\sqrt{x^2+1}\leqslant\frac{x+\sqrt{3}}{2}$;

b ) $\sqrt{x^2-5x}\geqslant x-4$;

c ) $\sqrt{x^2+1}\leqslant\frac{1}{2}x+1$;

d ) $\sqrt{10x-x^2}>\sqrt{2x^2-32}$.

**8.23** (*). Risolvi le seguenti disequazioni irrazionali.

a ) $\sqrt{x^2+x}\geqslant x+3$;

b ) $\sqrt{x^2+1}\leqslant\frac{1}{2}x-1$;

c ) $\sqrt{x^2+1}\leqslant\sqrt{1-x^2}$;

d ) $\sqrt{2x^2+x}\geqslant\sqrt{4-x^2}$.

**8.24** (*). Risolvi le seguenti disequazioni irrazionali.

a ) $3\sqrt{3x+x^2}<2\sqrt{2x-x^3}$;

b ) $2\sqrt{x+x^3}>\sqrt{2x^3-3x^2}$;

c ) $\sqrt{x^5-x^3}<2\sqrt{x^4+2x^3}$.

### 8.4.2 Risposte

**8.1.** a) $x = 24$, b) $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$, c) $x = \frac{15}{2}$, d) $x = -\frac{9}{2}$.

**8.2.** a) $x = -2$, b) $x_1 = -3 \vee x_2 = 9$, c) $\emptyset$, d) $\emptyset$.

**8.3.** a) $\emptyset$, b) $x_1 = 4 \vee x_2 = 8$, c) $x = \frac{4-2\sqrt{13}}{3}$, d) $x = -\frac{2}{3}$.

**8.4.** a) $\emptyset$, b) $x = 2$, c) $x = 1$, d) $x_1 = 3 \vee x_2 = 4$.

**8.5.** a) $x_1 = \frac{4}{3}$, b) $\emptyset$, c) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, d) $x = \frac{\sqrt{15}}{3}$.

**8.6.** a) $x_1 = -1 \vee x_2 = 1$, b) $x_1 = 1 \vee x_2 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, c) $\emptyset$, d) $\emptyset$.

**8.7.** a) $x_{1,2} = \mp 2$, b) $x_1 = 1 \vee x_2 = -2 \vee x_3 = 2$, c) $x = \frac{9+\sqrt{5}}{4}$, d) $x = \frac{3+\sqrt{6}}{2}$.

**8.8.** a) $x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$, b) $x_1 = 21 \vee x_2 = -\frac{17}{3}$, c) $x_1 = 1 \vee x_2 = \frac{4}{3}$, d) $x_1 = 3 \vee x_2 = 4$.

**8.9.** a) $x_1 = 1 \vee x_2 = 3$, b) $x = 6$, c) $x = -\frac{9}{16}$.

**8.10.** a) $x = \frac{3}{2}$ non acc, b) $x = -1$ non acc, c) $x_1 = 2 \vee x_2 = 3$, d) $x = \frac{3-2\sqrt{6}}{4}$.

**8.11.** a) $x = -1-\sqrt{6}$, b) $\emptyset$, c) $x = \frac{2+\sqrt{7}}{2}$, d) $x = 4+2\sqrt{2}$.

**8.12.** a) $x = 1$, b) $x = \frac{7}{2}$, c) $x_{1,2} = \frac{5\pm3\sqrt{13}}{2}$, d) $x = \frac{60}{49}$.

**8.13.** a) $x = 2$, b) $x = 1$, c) $x_1 = 0 \vee x_2 = 2 \vee x_3 = 9$, d) $x_1 = 0 \vee x_2 = -\frac{41}{7}$.

**8.14.** a) $x = 2+\sqrt{6}$, b) $\emptyset$, c) $x = -3$, d) $x = 3$.

**8.15.** a) $x = 1$, b) $x = \frac{7}{4}$, c) $\emptyset$, d) $x = 45-24\sqrt{3}$.

**8.16.** a) $\emptyset$, b) $x_{1,2} = \pm\sqrt{5}$, c) $x = 26-6\sqrt{11}$, d) $x = \frac{7-3\sqrt{5}}{2}$.

**8.17.** a) $x = \frac{3}{2}$, b) $x = \frac{5}{4}$, c) $x = 1$, d) $x_1 = 2 \vee x_2 = \frac{18}{5}$, e) $x_1 = 1 \vee x_2 = 64$.

**8.18.** a) $x \geqslant \frac{1}{3}$, b) $-2 \leqslant x \leqslant -1 \vee x \geqslant 2$, c) $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 13$, d) $x \leqslant 1$.

**8.19.** a) $x \leqslant -\frac{2}{9} \vee x \geqslant 0$, b) $x \geqslant \frac{25}{8}$, c) $-2\sqrt{2} \leqslant x < -\frac{8}{3} \vee 0 < x \leqslant 2\sqrt{2}$, d) $\emptyset$.

**8.20.** a) $x \leqslant -\frac{1}{2} \vee x \geqslant 0$, b) $-1 \leqslant x < \frac{4}{5}$, c) $x \geqslant 3$, d) $-1 \leqslant x \leqslant 0$.

**8.21.** a) $x \leqslant -\frac{1}{8} \vee x \geqslant 0$, b) $-\frac{5}{3} < x \leqslant -1 \vee x \geqslant 1$, c) $x \leqslant -\frac{3}{2} \vee x = 1 \vee x \geqslant 2$, d) $x \geqslant \frac{36}{35}$.

**8.22.** a) $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, b) $x \leqslant 0 \vee x \geqslant \frac{16}{3}$, c) $0 \leqslant x \leqslant \frac{4}{3}$, d) $4 \leqslant x < \frac{16}{3}$.

**8.23.** a) $x \leqslant -\frac{9}{5}$, b) $\emptyset$, c) $x = 0$, d) $-2 \leqslant x \leqslant -\frac{4}{3} \vee 1 \leqslant x \leqslant 2$.

**8.24.** a) $x \leqslant -3$, b) $x \geqslant \frac{3}{2}$, c) $1 \leqslant x < 2+\sqrt{13}$.

# Introduzione alla probabilità IV

“Our life is on dice”
Foto di matsuyuki
http://www.flickr.com/photos/matsuyuki/201651074//
Licenza: Attribuzione 2.0 (CC BY SA 2.0)

# 9 La probabilità

## 9.1 Gli eventi

L'esito del lancio di una moneta o di un dado, l'esito di un'estrazione del lotto, il sesso di un nascituro, la durata di una lampadina o di un computer sono esempi di fenomeni la cui realizzazione non può essere prevista con certezza; per questo vengono detti eventi casuali o aleatori (dal latino alea, dado). Spesso è necessario prendere decisioni in condizioni di incertezza: in quale università proseguire gli studi, decidere se fare il vaccino contro l'influenza, scommettere sulla vincita di una squadra, sull'uscita di una sequenza di numeri al gioco del Lotto. E' quindi fondamentale nei confronti di un fenomeno dall'esito incerto, poter identificare quali sono gli eventi che si possono verificare ed inoltre riuscire ad esprimere il proprio grado di fiducia nel verificarsi di tali eventi.

Quali sono gli eventi possibili per un dato fenomeno aleatorio? Supponiamo di lanciare un dado e di essere interessati alla faccia che si presenta dopo aver effettuato il lancio. Il lancio del dado rappresenta l'esperimento oggetto del nostro studio, l'uscita del numero 4 o l'uscita di un numero dispari sono detti *eventi aleatori o casuali*, in quanto sappiamo che si presenterà una delle facce, ma non sappiamo quale.

**Definizione 9.1.** Si chiama *evento casuale* il risultato di un *fenomeno aleatorio*.

Se si considera la proposizione "Oggi farà bel tempo" è evidente che non è chiaro cosa si intende per bel tempo (senza pioggia? senza nuvole? con il sole?) né il luogo a cui ci si riferisce. Sarebbe meglio affermare per esempio "Stamani a Milano ci sarà il sole". È necessario quindi specificare con precisione l'evento che si considera in modo da essere sicuri se l'evento si è verificato o meno.

Nel lancio di un dado sono possibili sei risultati, espressi dai numeri da 1 a 6 e solo uno di essi si realizzerà.

Chiamiamo questi sei risultati *eventi elementari* e indichiamo il loro insieme con $\Omega$ :

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

**Definizione 9.2.** Si chiama *spazio degli eventi*, l'insieme di tutti gli esiti possibili del fenomeno considerato. Tale insieme viene indicato con $\Omega$.

L'insieme $\Omega$ non esaurisce la totalità degli eventi collegati al lancio del dado; non comprende per esempio l'evento $\mathrm{P}$ = Numero pari o l'evento $\mathrm{M}$ = Numero minore di 3. Tuttavia $\Omega$ permette di rappresentare qualsiasi evento come suo particolare sottoinsieme.

**Definizione 9.3.** Si chiama *evento elementare* ogni elemento dell'insieme $\Omega$, mentre *evento composto* un sottoinsieme qualsiasi di $\Omega$.

Estraiamo una carta da un mazzo di 52 carte e consideriamo i seguenti eventi: uscita di un asso di cuori, uscita di un re. Qual è la differenza fra questi due eventi? Il primo dei due è un *evento elementare*, mentre l'altro è un evento formato da quattro eventi elementari (tutti i possibili re presenti nel mazzo) e viene detto *evento composto*.

Sono esempi di eventi composti l'uscita di un numero dispari nel lancio di un dado o l'estrazione di due palline rosse da un'urna contenente 3 palline rosse e 7 nere.

Consideriamo ora due eventi che rivestono una particolare importanza: l'uscita del 7 nel lancio di un dado e l'uscita di un numero minore di 7 sempre nel lancio di un dado. È evidente che l'uscita del 7 non si verificherà mai, mentre l'uscita di un numero minore di 7 è sempre verificato.

**Definizione 9.4.** Chiamiamo *evento impossibile*, e lo indicheremo $\emptyset$, un evento che non può verificarsi in alcun caso. Chiamiamo *evento certo* un evento che accade sicuramente e che è costituito dall'insieme di tutti gli eventi elementari di $\Omega$, cioè da tutti gli esiti possibili del fenomeno considerato.

Gli eventi elementari di un insieme $A$ e gli eventi composti che si possono ottenere con gli eventi elementari di $A$ formano lo *spazio degli eventi* che viene indicato con $\wp(A)$.

Gli eventi sono gli oggetti dello studio della probabilità e in genere si indicano con le lettere maiuscole $A, B, \ldots$ mentre per le operazioni e le relazioni tra eventi si usano i corrispondenti simboli che si sono utilizzati per le operazioni e le relazioni tra insiemi. Molto utile è anche la rappresentazione con i diagrammi di Venn (figura 9.1).

**Definizione 9.5.** Se $n$ eventi $A, B, \ldots, F$ sono esaustivi cioè $A \cup B \cup \ldots F = \Omega$ e a due a due incompatibili $A \cap B = A \cap C \ldots = B \cap C \ldots = C \cap D \ldots = D \cap E \ldots = E \cap F = \emptyset$) diremo che essi formano una *partizione dello spazio degli eventi*. Gli eventi, identificabili da tutti i possibili sottoinsiemi di $\Omega$, sono dati dall'*insieme delle parti* di $\Omega$ indicato con $\wp(\Omega)$.

Ricordiamo che la cardinalità dell'insieme delle parti cioè il numero degli eventi che si possono formare con gli elementi di $\Omega$ è dato da $card(\wp(\Omega)) = 2^n$, dove $n$ rappresenta il numero degli eventi elementari. Così nel lancio del dado abbiamo $2^6 = 64$ possibili eventi, considerando anche l'insieme vuoto $\emptyset$ che rappresenta l'evento impossibile e l'insieme $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ che rappresenta l'evento certo.

✍ *Esercizi proposti:* 9.1, 9.2, 9.3, 9.4, 9.5.

## 9.2 Definizioni di probabilità

Nel linguaggio comune l'uso del termine probabilità è abbastanza chiaro e uniforme. Si dice che un certo fatto o evento è più o meno probabile a seconda che ci si aspetti che si verifichi più o meno facilmente.

La probabilità è dunque una misura del grado di fiducia associato al verificarsi di un evento e dipende dalle informazioni che si hanno a disposizione al momento di effettuare la valutazione.

Se diciamo che oggi pioverà con probabilità $0,20 = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$ intendiamo che siamo disposti a scommettere 20 centesimi per avere 1 euro nel caso che piova e perdere i 20 centesimi della posta nel caso che non piova.

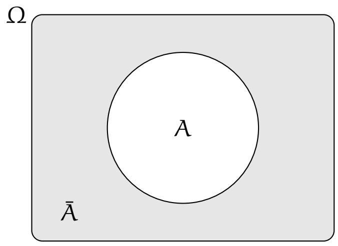



FIGURA 9.1: La *negazione* di un evento $A$, indicata con $\bar{A}$, è l'evento che si verifica quando non si verifica $A$.

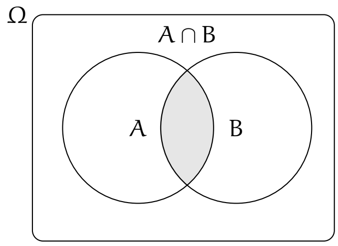



FIGURA 9.2: L'*intersezione* tra gli eventi $A$ e $B$ indicata con $C = A \cap B$ è l'evento che si verifica quando si verificano sia $A$ che $B$.

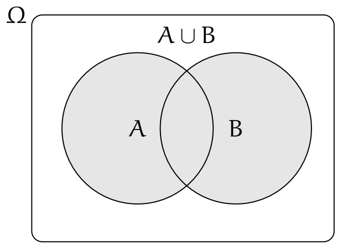



FIGURA 9.3: L'*unione* tra gli eventi $A$ e $B$ indicata con $C = A \cup B$ è l'evento che si verifica quando si verifica almeno uno dei due eventi.

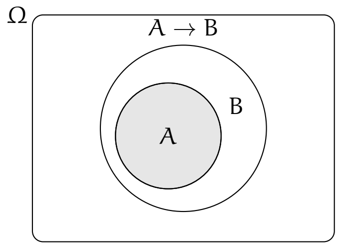



FIGURA 9.4: L'evento $A$ *implica* l'evento $B$, in simboli $A \subseteq B$, se ogni volta che si verifica $A$ si verifica anche $B$.

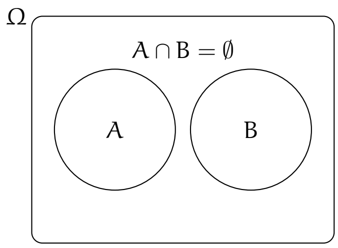



FIGURA 9.5: Due eventi $A$ e $B$ si dicono *incompatibili*, se il verificarsi dell'uno esclude il verificarsi dell'altro.

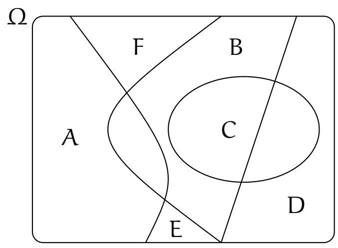



FIGURA 9.6: Due o più eventi si dicono *esaustivi*, se almeno uno di essi si verifica. L'unione di tali eventi coincide con l'insieme $\Omega$.

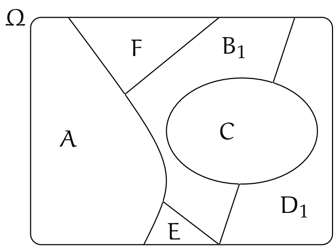



FIGURA 9.7: Un insieme di eventi formato da eventi tra loro incompatibili ed esaustivi, genera una partizione nello spazio degli eventi.

**Definizione 9.6.** La valutazione della probabilità dell'evento $A$ è quel valore $P(A)$ che si ottiene dalla quota $q$ che l'individuo che procede alla valutazione è disposto a pagare per ricevere una vincita $S$ nel caso si verifichi l'evento. Quindi $P(A) = \frac{q}{S}$.

Per ottenere una valutazione coerente, per valutare quanto siamo disposti a perdere-vincere nella scommessa, dobbiamo immedesimarci nei due ruoli, quello dello scommettitore e quello del banco. Inoltre le somme che scommettiamo devono essere significative per chi procede alla valutazione. Nessun individuo coerente scommetterebbe su un evento impossibile una quota maggiore di 0 qualunque sia la vincita e nessun individuo pagherebbe una vincita per il verificarsi di un evento certo. Da queste considerazioni deduciamo che la misura della probabilità appartiene all'intervallo $[0, 1]$, essendo 0 il valore che corrisponde all'evento impossibile e 1 quello che corrisponde all'evento certo.

**Postulato 9.1.** *sulla probabilità*
*La probabilità di un evento E è un numero reale compreso tra 0 e 1:* $0 \leqslant P(E) \leqslant 1$;
*la probabilità dell'evento impossibile è zero* $P(\emptyset) = 0$;
*la probabilità dell'evento certo è uguale a uno:* $P(\Omega) = 1$.

### 9.2.1 La valutazione classica

La valutazione della probabilità a volte si riconduce a semplici giudizi di equiprobabilità: cioè ogni evento elementare dello spazio degli eventi ha la stessa probabilità. Così nel lancio di un dado, nel gioco della tombola, nel gioco delle carte tutti gli eventi elementari hanno la stessa probabilità. Quindi se $n$ sono gli eventi elementari la probabilità di ciascuno di essi è $\frac{1}{n}$.

La probabilità di un evento $E$ è data dal rapporto tra il numero $f$ dei casi favorevoli al verificarsi di $E$ e il numero $n$ di tutti i casi possibili, purché ugualmente possibili. In simboli:

$$P(E) = \frac{f}{n}.$$

Mentre nei giochi di sorte si realizzano le condizioni per calcolare tale probabilità (conoscenza a priori dei casi possibili, di quelli favorevoli e condizione di equiprobabilità) esistono altri eventi casuali per i quali è difficile o impossibile calcolare tale probabilità.

---

**Esempio 9.1.** Se in un sacchetto ho 3 palline rosse e 2 palline gialle qual è la probabilità che estraendo a caso una pallina questa sia rossa?

La probabilità che si estragga una pallina rossa è $p = \frac{3}{5} = 0,6 = 60\%$, infatti i casi favorevoli al verificarsi dell'evento "estrarre una pallina rossa" sono 3, tante quante sono le palline rosse, i casi possibili, tutti ugualmente possibili, sono 5, tante quante palline ci sono nel sacchetto.

**Esempio 9.2.** Da un mazzo di 40 carte napoletane estraiamo una carta. Calcoliamo la probabilità degli eventi:

- $A =$ esce una carta di spade;
- $B =$ esce una carta con il numero 12;
- $C =$ esce una carta con un numero o una figura;
- $D =$ esce il sette di denari;
- $E =$ esce un asso.

I casi possibili sono 40, dato che il mazzo è formato da 40 carte. Anche qui siamo in presenza di eventi elementari equiprobabili, applichiamo ancora lo schema di valutazione classico

- L'evento A è casuale, infatti i casi favorevoli sono 10, dato che il mazzo ha 10 carte di spade: $P(A) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$;
- l'evento B è impossibile dato che non esiste una carta col numero 12: $P(B) = 0$;
- l'evento C è certo, infatti i casi favorevoli sono 40, dato che il mazzo ha 12 figure e 28 carte con un numero: $P(C) = 1$;
- c'è un solo sette di denari su 40 carte: $P(D) = \frac{1}{40}$;
- nel mazzo di 40 carte ci sono 4 assi: $P(E) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} = 0,1 = 10\%$;

**Esempio 9.3.** Lanciando in aria 3 monete, quale dei seguenti eventi è più probabile?

- Ottenere su 3 monete testa;
- ottenere su 1 moneta testa e su 2 monete croce.

Per rispondere alla domanda occorre calcolare le probabilità dei due eventi. Applichiamo la definizione classica. Dobbiamo calcolare tutti gli eventi possibili e tutti gli eventi favorevoli. Aiutiamoci con una tabella per elencare tutti i casi.

| prima moneta | seconda moneta | terza moneta |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | T | C |
| T | C | T |
| T | C | C |
| C | T | T |
| C | T | C |
| C | C | T |
| C | C | C |

I casi possibili sono 8. C'è un solo caso favorevole all'evento "3 volte testa". La probabilità di questo evento è quindi $p = \frac{1}{8} = 0,125 = 12,5\%$.

I casi favorevoli all'evento "1 moneta testa e 2 monete croce" sono CCT, CTC, TCC, quindi 3, allora $p = \frac{3}{8} = 0,375 = 37,5\%$. Possiamo concludere che l'evento più probabile è ottenere 1 testa e 2 croci.

---

### 9.2.2 La valutazione sperimentale

Se si considera una successione di eventi dello stesso tipo e che avvengono in condizioni simili come l'uscita di una determinata faccia in un dado truccato, si indica come frequenza relativa $F(E)$ il rapporto tra il numero $\nu$ dei casi in cui si è verificato l'evento e il numero totale delle prove $n$, cioè $F(E) = \dfrac{\nu}{n}$.

In una serie di prove ripetute nelle stesse condizioni, la frequenza relativa di un evento tende a stabilizzarsi intorno a un valore ben preciso al crescere del numero delle prove effettuate. Si assume come valutazione della probabilità dell'evento $E$ il valore intorno al quale tende a stabilizzarsi la frequenza relativa dello stesso evento, all'aumentare del numero delle prove ripetute alle stesse condizioni: $P(E) \approx F(E) = \dfrac{\nu}{n}$. L'errore che si commette diventa sempre più piccolo al crescere di $n$. La valutazione della probabilità così definita si chiama valutazione sperimentale, statistica, a posteriori o frequentista.

Anche l'ambito di applicazione di tale valutazione è limitato in quanto l'ipotesi che sta alla base della definizione è che l'evento a cui si vuole assegnare la probabilità sia pensabile come uno dei possibili risultati di una determinata prova e che tale prova sia ripetibile infinite volte nelle stesse condizioni. Si fa molto uso di questo schema di valutazione per stime della probabilità in campo economico e sanitario.

---

**Esempio 9.4.** In un'azienda alimentare si producono vasetti di marmellata. In uno studio di controllo sono stati evidenziati su 2500 vasetti analizzati 13 con imperfezioni e non idonei al commercio. Si valuti la probabilità dell'evento E="confezioni non idonee al commercio".

Se si considera il campione dei vasetti analizzati significativo rispetto alla produzione complessiva delle confezioni prodotte possiamo considerare la frequenza relativa dell'evento $E$ come misura della probabilità. Quindi $P(E) = F(E) = \frac{13}{2500} = 0,0052$.

**Esempio 9.5.** Qual è la probabilità che un certo guidatore faccia un incidente con la macchina? Quanto deve pagare, come premio, a una compagnia di assicurazioni in modo che, se fa un incidente, la compagnia paghi per intero il danno?

Per rispondere a queste domande le compagnie di assicurazioni sono in grado di stimare, sulla base dei numerosissimi incidenti stradali che si verificano ogni anno, qual è la probabilità che un guidatore provochi un incidente d'auto.

**Esempio 9.6.** Un sacchetto contiene 10 palline, alcune bianche, altre nere. Si estrae a caso, senza guardare nel sacchetto un pallina, si guarda il colore e si rimette il sacchetto nella pallina.

Dopo 100 estrazioni abbiamo contato 78 volte la pallina bianca e 22 la pallina nera. Possiamo allora ipotizzare che nel sacchetto ci siano 8 palline bianche e 2 palline nere.

---

### 9.2.3 La valutazione soggettiva

É la definizione di probabilità che abbiamo dato all'inizio del capitolo: la probabilità dell'evento $A$ è quel valore $p$ che l'individuo che procede alla valutazione è disposto a pagare per ricevere una vincita unitaria. Se un individuo valuta pari $\frac{1}{4} = 25\%$ la probabilità di un certo evento $E$ vuol dire che è disposto a pagare 25 euro a un ipotetico banco per riceverne 100 nel caso che $E$ si verifichi. Naturalmente la scommessa va accettata anche come banco che deve essere disposto a scommettere il $75\% = 1 - p$ sul fatto che $E$ non si verifichi: $P(E) = \frac{q}{S}$ con $q = 25$ e $S = 100$.

#### Le scommesse

La definizione soggettiva si applica anche alle scommesse. Supponiamo di scommettere sul verificarsi di un evento $E$ a cui attribuiamo probabilità $p$. Stabiliamo inoltre di giocare e quindi perdere $q$ euro nel caso l'evento non si verifichi e di guadagnare $g$ euro nel caso l'evento si verifichi. In genere le scommesse si indicano in questo modo: si mette in rapporto la perdita con il guadagno $\frac{q}{g}$ o anche $q : g$ che si legge $q$ a $g$. In questo caso $q$ e $g$ si chiamano le *poste* o le *messe* del gioco. Che relazione c'è tra questo rapporto e la probabilità?

Se in un grande numero di scommesse così congegnate vincessimo la somma $g$ una frazione $p$ di volte e perdessimo la somma $q$ una frazione $1 - p$, affinché il gioco risulti equo dovremmo avere $p \cdot g - q \cdot (1-p) = 0$. Isoliamo p nell'uguaglianza:

$$p \cdot g - q \cdot (1-p) = 0 \Rightarrow p \cdot g - q + q \cdot p = 0 \Rightarrow p \cdot (g+q) = q \Rightarrow p = \frac{q}{g+q}.$$

La relazione è dunque questa: la probabilità di una scommessa $q : g$ è data dalla perdita q al numeratore e al denominatore la somma complessiva che si incassa data dal guadagno più quello che si è scommesso.

---

**Esempio 9.7.** Supponiamo che la vincita ai mondiali di calcio dell'Italia sia data 5 : 12 cioè 5 a 12 dai bookmaker inglesi. Quale probabilità assegnano gli allibratori alla vincita dell'Italia?

Significa che scommettendo 5 euro sulla vincita dell'Italia ne possiamo vincere 12 nel caso che l'evento si verifichi.

Quindi la probabilità della vincita dell'Italia sarà: $P(E) = \frac{5}{5+12} = \frac{5}{17} = 0,294$

**Esempio 9.8.** Leggo sul sito del Corriere della Sera, che per la partita Real Madrid-Barcellona, che si giocherà questa sera, la vittoria del Real Madrid viene data 1 a 2,60.

Significa che scommettendo 1 euro possiamo vincerne 2,60: la vittoria del Real Madrid è stata quindi stimata dal giornale $p = \frac{1}{2{,}60} = \frac{100}{260} = 0,38\ldots$ circa 38%.

---

✍ *Esercizi proposti:* 9.6, 9.7, 9.8, 9.9, 9.10, 9.11, 9.12, 9.13, 9.14, 9.15, 9.16, 9.17, 9.18, 9.19, 9.20, 9.21, 9.22, 9.23, 9.24, 9.25, 9.26, 9.27.

## 9.3 Probabilità dell'unione di due eventi

La misura della probabilità si può applicare a tutti gli eventi individuati dall'insieme delle parti degli eventi elementari $\wp(\Omega)$. Qualsiasi evento si può definire come sottoinsieme dell'insieme elementare (elencando gli eventi elementari che ne fanno parte) oppure enunciando una proposizione vera nel caso in cui l'evento si verifichi. Possiamo quindi poter esprimere la probabilità su eventi composti da due o più eventi di $\wp(\Omega)$ attraverso le operazioni di unione e intersezione tra insiemi che corrispondono alle operazioni di disgiunzione inclusiva e di congiunzione nelle proposizioni.

Per la probabilità dell'evento unione di due eventi occorre distinguere tra eventi tra loro incompatibili e eventi tra loro compatibili.

### 9.3.1 Unione di due eventi tra loro incompatibili

**Definizione 9.7.** Due eventi A e B si dicono *incompatibili* quando non si possono verificare contemporaneamente, cioè quando $A \cap B = \emptyset$. Due eventi A e B si dicono *compatibili* quando si possono verificare contemporaneamente, cioè quando $A \cap B \neq \emptyset$.

---

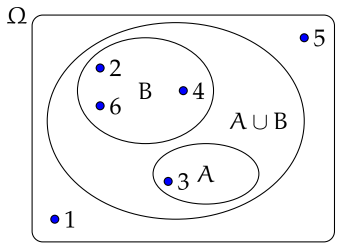
**Esempio 9.9.** Nel lancio di un dado regolare calcolare la probabilità dell'uscita del numero 3 o di un numero pari.

I due eventi "$A =$ Uscita del numero 3" e "$B =$ Uscita di un numero pari" sono eventi incompatibili.

Ci sono due modi per calcolare la probabilità dell'evento unione.

**Modo I** : Secondo la valutazione classica la probabilità che esca il 3 o un numero pari è uguale a $\frac{4}{6}$: infatti i casi favorevoli sono 4 (le facce 3,2,4,6) su un totale di 6 casi possibili.

**Modo II** : Calcoliamo la probabilità dell'unione dei due eventi considerando le proprietà dei singoli eventi. Dato che i due eventi sono incompatibili, cioè: $A \cap B = \emptyset$: abbiamo $P(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6}$.




---

Possiamo quindi affermare che dati due eventi incompatibili cioè tali che $A \cap B = \emptyset$ la probabilità dell'evento unione è dato dalla uguaglianza: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

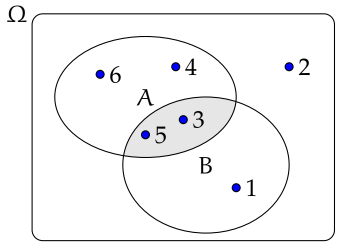
Può essere utile per avere un'idea intuitiva di questa uguaglianza pensare alla probabilità come una massa unitaria distribuita sugli eventi. Se voglio la probabilità di $A \cup B$, considero la massa presente su $A$ che addiziono a quella presente su $B$.

### 9.3.2 Unione di due eventi tra loro compatibili

---

**Esempio 9.10.** Consideriamo il lancio di un dado regolare, vogliamo trovare la probabilità dell'uscita di un numero maggiore di 2 o di un numero dispari.

Gli eventi "$A$ = Uscita di un numero maggiore di 2" e "$B$ = Uscita di un numero dispari" sono compatibili in quanto le facce 5 e 3 appartengono sia all'evento $A$ che all'evento $B$.




**Modo I** : La probabilità che esca un numero maggiore di 2 o un numero dispari è uguale a $\frac{5}{6}$: infatti i casi favorevoli sono 5 (le facce 1,3,4,5,6) su un totale di 6 casi possibili.

**Modo II** : Calcoliamo la probabilità dell'unione dei due eventi considerando le proprietà dei singoli eventi. In questo caso non possiamo sommare come nei casi precedenti le probabilità dei singoli eventi. Infatti $P(A) + P(B) = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = \frac{7}{6}$ che contraddice l'assioma della probabilità. Occorre togliere la probabilità dell'intersezione tra A e B contata due volte, una volta per A e una per B, che è uguale a $\frac{2}{6}$: due casi favorevoli (le facce 3 e 5) su sei casi possibili:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}.$$

**Esempio 9.11.** Calcolare la probabilità che estraendo a caso un numero della tombola esso contenga la cifra 5 oppure sia multiplo di 5.

La prima domanda da farsi è se i due eventi sono compatibili o incompatibili. Poiché esistono numeri della tombola che contengono la cifra 5 e che sono anche multipli di 5 (per esempio 15, 50...) i due eventi sono compatibili. Di conseguenza bisogna applicare la regola $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

- $A$ = estrarre un numero che contiene la cifra 5. Questi numeri sono: 5, 15, 25, 35, 45, 50, 51, 52, ..., 59, 65, 75, 85, in tutto 18 ne segue che: $p(A) = \frac{18}{90}$;
- $B$ = estrarre n multiplo di 5. I multipli di 5 sono 5, 10, 15, 20, ... due per ogni decina, quindi 18 in tutto, ne segue che: $p(B) = \frac{18}{90}$;
- $A \cap B$ = estrarre un cifra che contiene 5 ed è multiplo di 5. Questi numeri sono 5, 15, 25, 35, 45, 50, 55, 65, 75, 85 in tutto sono 10 quindi: $p(A \cap B) = \frac{10}{90}$.

Applichiamo la regola della probabilità utilizzata nel modo II del precedente esempio quindi:

$A \cup B$ = estrarre un numero che contenga la cifra 5 oppure sia multiplo di 5.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{18}{90} + \frac{18}{90} - \frac{10}{90} = \frac{26}{90} \approx 0,29 \approx 29\%.$$

---

Dagli esempi svolti possiamo enunciare il seguente teorema:

**Teorema 9.2** (delle probabilità totali). *Dati due eventi A e B, entrambi appartenenti allo stesso spazio degli eventi, la probabilità dell'unione degli eventi è uguale alla somma delle probabilità dei singoli eventi meno la probabilità della loro intersezione. In simboli:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Se pensiamo alla probabilità come una massa unitaria distribuita sugli eventi, per calcolare la probabilità di $A \cup B$, considero la massa presente su $A$ che addiziono a quella presente su $B$ a cui devo togliere la massa presente su $A \cap B$ che è stata contata due volte.

❑ **Osservazione** Il teorema delle proprietà totali vale anche nel caso degli eventi incompatibili in quanto in questo caso la probabilità dell'intersezione dei due eventi $P(A \cap B) = 0$ e l'uguaglianza diventa $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

✍ *Esercizi proposti:* 9.6, 9.7, 9.28, 9.29, 9.30, 9.31, 9.32, 9.33, 9.34, 9.35, 9.36, 9.37 9.38.

## 9.4 Probabilità dell'evento complementare

Dato un evento $A$ si definisce *evento complementare* di $A$ indicato con $\overline{A}$ l'evento che si verifica quando non si verifica $A$.

**Teorema 9.3** (dell'evento complementare). *Dato un evento $E$, la probabilità dell'evento complementare $\overline{E}$ è data da 1 meno la probabilità dell'evento $E$. In simboli:*

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E).$$

*Dimostrazione.* per l'assioma introdotto all'inizio del capitolo:

$$P(\overline{E} \cup P(E)) = P(\Omega) = 1;$$

per il teorema delle probabilità totali essendo i due eventi incompatibili:

$$(P(\overline{E}) \cup P(E)) = P(\overline{E}) + P(E);$$

per la proprietà transitiva dell'uguaglianza:

$$P(\overline{E}) + P(E) = 1 \Rightarrow P(\overline{E}) = 1 - P(E).$$

□

Se pensiamo all'analogia della una massa unitaria distribuita sugli eventi, la probabilità dell'evento $\overline{E}$ sarà data dalla massa unitaria meno la probabilità di $E$.

---

**Esempio 9.12.** Nel lancio di un dado regolare determina la probabilità che la somma delle facce non sia uguale a 5.

Consideriamo la probabilità che in un lancio di due dadi si abbia un punteggio uguale a 5. I casi possibili sono 36 (ogni faccia del primo dado si può associare con ognuna delle 6 facce del secondo dado), mentre i casi favorevoli all'evento sono 4, precisamente (1,4), (4,1), (2,3) e (3,2). Quindi $P(E) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Per conoscere la probabilità dell'evento complementare cioè la probabilità che la somma delle due facce del dado non sia uguale a 5, risulterebbe piuttosto laborioso trovare tutti i casi in cui la somma delle due facce sia uguale a 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12, si può invece applicare la regola $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$ cioè nel nostro caso $P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$.

---

❑ **Osservazione** L'uguaglianza sulla probabilità dell'evento complementare può risultare molto utile nel risolvere alcuni problemi. A volte è più facile o indispensabile calcolare la probabilità dell'evento complementare che calcolare direttamente la probabilità dell'evento.

✍ *Esercizi proposti:* 9.39, 9.40, 9.41, 9.42, 9.43, 9.44, 9.45, 9.46.

## 9.5 La probabilità dell'evento intersezione di due eventi

Dati due eventi $A, B \in \wp(\Omega)$ ci proponiamo di calcolare la probabilità dell'evento intersezione cioè $P(A \cap B)$ partendo dalla probabilità degli eventi componenti $P(A)$ e $P(B)$. Si tratta quindi di stimare con quale probabilità i due eventi avvengono congiuntamente. Occorre innanzitutto verificare che i due eventi non siano incompatibili in quanto in questo caso l'evento intersezione è impossibile.

Per la probabilità dell'intersezione di due eventi occorre distinguere tra eventi tra loro *indipendenti* e eventi tra loro *dipendenti*.

### 9.5.1 Intersezione di due eventi tra loro indipendenti

Due eventi A e B si dicono *indipendenti* se il verificarsi di A *non cambia* la probabilità del verificarsi di B, si dicono invece *dipendenti* se il verificarsi di A *cambia* la probabilità di B rispetto a quella valutata per B prima del verificarsi di A.

**Esempio 9.13.** Determinare la probabilità che lanciando una moneta e un dado regolari esca testa e un numero maggiore di 4.

- $A =$ Uscita di Testa nel lancio di una moneta $\rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$;
- $B =$ Uscita di un numero maggiore di 4 nel lancio di un dado $\rightarrow P(B) = \frac{2}{6}$;
- $(A \cap B)$= Uscita di testa e di un numero maggiore di 4 nel lancio di una moneta e di un dado.

Vediamo come determinare $P(A \cap B)$. I due eventi A e B non si influenzano in quanto l'uscita di testa non modifica la probabilità dell'uscita di 4 nel lancio del dado.

Notiamo subito una situazione diversa rispetto a quella precedente dell'unione di due eventi. Nel caso precedente, lo spazio degli eventi era lo stesso per l'evento A, per l'evento B e per l'evento unione $(A \cup B)$. Ora invece per l'evento A l'insieme degli eventi elementari è $\Omega_1 = \{T, C\}$, per l'evento B invece, l'insieme degli eventi elementari è $\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. L'evento $(A \cap B)$ ha il seguente insieme degli eventi elementari:

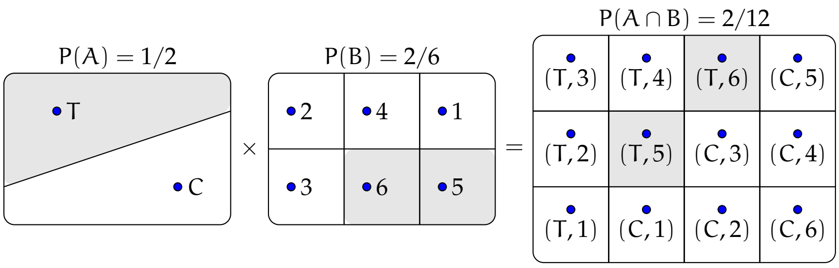
$$\Omega = \{(T, 1); (T, 2); (T, 3); (T, 4); (T, 5); (T, 6); (C, 1); (C, 2); (C, 3); (C, 4); (C, 5); (C, 6)\}.$$

Lo spazio degli eventi elementari dell'intersezione è dato dal prodotto cartesiano dello spazio elementare di A moltiplicato per quello di B. Si può calcolare la probabilità in due modi:

**Modo I** : Si indicano i casi favorevoli e i casi possibili rispetto all'evento intersezione: i casi favorevoli all'evento sono due: $(A \cap B) = \{(T, 5); (T, 6)\}$, i casi possibili sono dodici:

$$\Omega = \{(T, 1); (T, 2); (T, 3); (T, 4); (T, 5); (T, 6); (C, 1); (C, 2); (C, 3); (C, 4); (C, 5); (C, 6)\}$$

la probabilità dell'evento intersezione è: $P(A \cap B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.




**Modo II** : Dato che i due eventi non si influenzano, supponiamo di procedere con due scelte successive: prima il lancio della moneta con probabilità pari a $\frac{1}{2}$ e poi il lancio del dado con probabilità pari a $\frac{2}{6}$. Se si verifica il primo evento la probabilità si riduce da 1 a $\frac{1}{2}$ a cui devo applicare la probabilità che si verifichi il secondo evento pari a $\frac{2}{6}$, moltiplicando le probabilità dei singoli eventi.

- $A =$ Uscita di Testa nel lancio di una moneta $\rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$;
- $B =$ Uscita di un numero maggiore di 4 nel lancio di un dado $\rightarrow P(B) = \frac{2}{6}$;

- $(A \cap B)$= Uscita di testa e di un numero maggiore di 4 nel lancio di una moneta e di un dado $\rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{12}$.

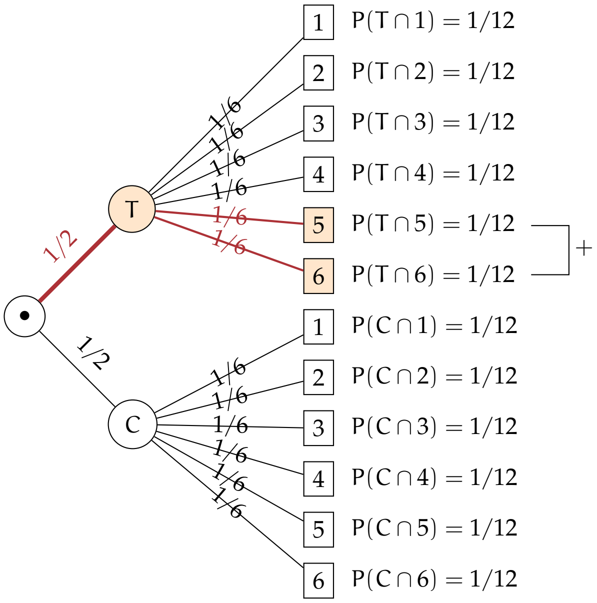
---

Generalizziamo: dati due eventi aleatori A e B tra loro indipendenti la probabilità dell'evento intersezione tra A e B è data dalla probabilità di A moltiplicata per la probabilità di B: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

### Diagrammi ad albero

Una rappresentazione grafica che può risultare utile nello studio della probabilità dell'evento intersezione detto anche studio delle *probabilità composte* è il diagramma ad albero. Le linee dell'albero si dicono *rami*, mentre i punti da cui partono e arrivano i rami si dicono *nodi*, il nodo iniziale si chiama *radice*.

La costruzione di un diagramma ad albero nel caso delle probabilità composte consente di eseguire un'analisi completa di tutti i possibili esiti di una prova. Ogni percorso dell'albero che va dalla radice al nodo terminale indica una sequenza di eventi congiunti, incompatibile con qualsiasi altro percorso dell'albero. La probabilità di ogni singolo evento si indica sui rami e moltiplicando le probabilità che si incontrano nel percorso si ottiene la probabilità della congiunzione degli eventi che formano il percorso. Dato che ogni percorso che va dalla radice al nodo terminale individua eventi incompatibili, se vogliamo trovare l'unione di due o più percorsi possiamo semplicemente sommarli. L'esempio precedente può essere schematizzato in questo modo:




L'albero può essere semplificato considerando gli eventi coinvolti e i loro complementari.

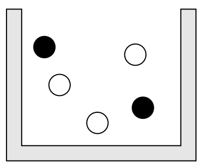
---

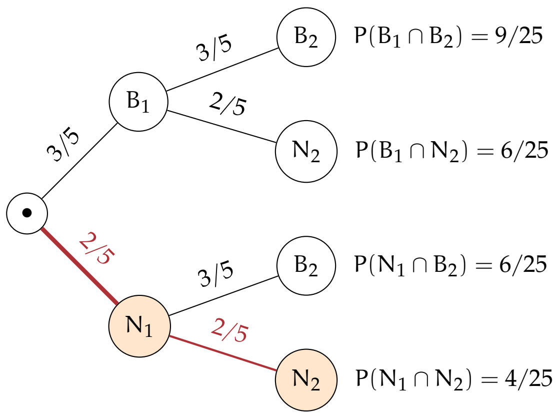
**Esempio 9.14.** In un'urna abbiamo tre palline bianche e due nere. Facciamo due estrazioni rimettendo dopo la prima estrazione la pallina nell'urna. Vogliamo calcolare la probabilità dell'uscita di una pallina nera nelle due estrazioni.

- $B_1$ = nella prima estrazione pallina bianca $\rightarrow P(B_1) = \frac{3}{5}$;

- $B_2$ = nella seconda estrazione pallina bianca $\rightarrow P(B_2) = \frac{3}{5}$ in quanto la pallina si rimette nell'urna;
- $N_1$ = nella prima estrazione pallina nera $\rightarrow P(N_1) = \frac{2}{5}$;
- $N_2$ = nella seconda estrazione pallina nera $\rightarrow P(N_2) = \frac{2}{5}$.

Il problema è sempre lo stesso: calcolare una probabilità su un insieme intersezione partendo dalle probabilità degli eventi componenti. Devo moltiplicare la probabilità di avere nera nella prima estrazione $P(N_1) = \frac{2}{5}$ con la probabilità di avere nera nella seconda estrazione $P(N_2) = \frac{2}{5}$ in quanto, l'uscita della prima pallina nera, evento considerato ora come avvenuto, non influenza la probabilità di avere nera alla seconda estrazione in quanto la pallina estratta viene rimessa nell'urna. Quindi: $P(N_1 \cap N_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$ in quanto i due eventi sono indipendenti.






Le domande che posso fare su questo esperimento sono relative allo spazio degli eventi $\wp(\Omega)$. ove $\Omega = \{(B_1,B_2); (B_1,N_2); (N_1,B_2); (N_1,N_2)\}$ sono del tipo "Quale è la probabilità che escano palline di diverso colore", "Qual è la probabilità che la prima pallina sia bianca", ecc.

---

### Il problema del Cavalier de Méré

Il Cavalier de Méré pose al grande matematico francese Blaise Pascal nel 1654 il seguente problema.

**Problema 9.15.** Perché scommettendo alla pari sull'evento A = "ottenere almeno una volta un 6 in 4 lanci di un dado" ho accumulato una fortuna, mentre rischio la rovina scommettendo alla pari sull'evento B = "ottenere almeno una coppia di 6 in 24 lanci di due dadi".

Scommettere alla pari 1:1 significa assegnare alla probabilità degli eventi A e B il valore pari a $\frac{1}{2}$. Consideriamo la probabilità dell'evento A composto dai quattro eventi indipendenti ma non incompatibili

- $E_1$ = ottenere 6 nel primo lancio;
- $E_2$ = ottenere 6 nel secondo lancio;
- $E_3$ = ottenere 6 nel terzo lancio;
- $E_4$ = ottenere 6 nel quarto lancio.

In questo caso conviene calcolare la probabilità dell'evento complementare: $\overline{A}$ = non ottenere un 6 in quattro lanci di un dado. $\overline{A} = (\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3} \cap \overline{E_4})$.

Dato che gli eventi sono indipendenti e equiprobabili abbiamo:

$$P(\overline{E_1}) = P(\overline{E_2}) = P(\overline{E_3}) = P(\overline{E_4}) = \frac{5}{6}.$$

I valori di ciascun evento vanno moltiplicati tra loro per la regola vista in precedenza. Quindi $P(\overline{A}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{625}{1296} = 0,482$. La probabilità dell'evento A sarà quindi superiore a 0,5 in quanto $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0,482 = 0,518$ e in un numero considerevole di scommesse il Cavalier de Méré accumulava una fortuna.

Consideriamo ora la probabilità dell'evento B, dove valgono considerazioni analoghe. Anche in questo caso conviene calcolare la probabilità dell'evento complementare $\overline{B}$. Dato che i casi possibili nel lancio di due dadi sono 36 il caso favorevole all'evento 6 nel primo dado e 6 nel secondo dado è uno soltanto. Se $P(B) = \frac{1}{36} \Rightarrow p(\overline{B}) = 1 - P(B) = \frac{35}{36}$. Dato che i lanci dei due dadi sono 24 e tutti tra loro indipendenti avremo:

$$p(\overline{B}) = \underbrace{\frac{35}{36} \cdot \frac{35}{36} \cdot \frac{35}{36} \cdot \ldots \cdot \frac{35}{36}}_{\text{24 volte}} = \frac{35^{24}}{36^{24}} = 0,509$$

da cui $P(B) = 1 - 0,509 = 0,491$. Così è spiegato come mai in un grande numero di scommesse scommettendo alla pari il Cavalier de Méré si rovinasse.

✍ *Esercizi proposti:* 9.47, 9.48, 9.49, 9.50, 9.51, 9.52, 9.53, 9.54, 9.55, 9.56, 9.57, 9.58, 9.59.

### 9.5.2 Intersezione di due eventi tra loro dipendenti

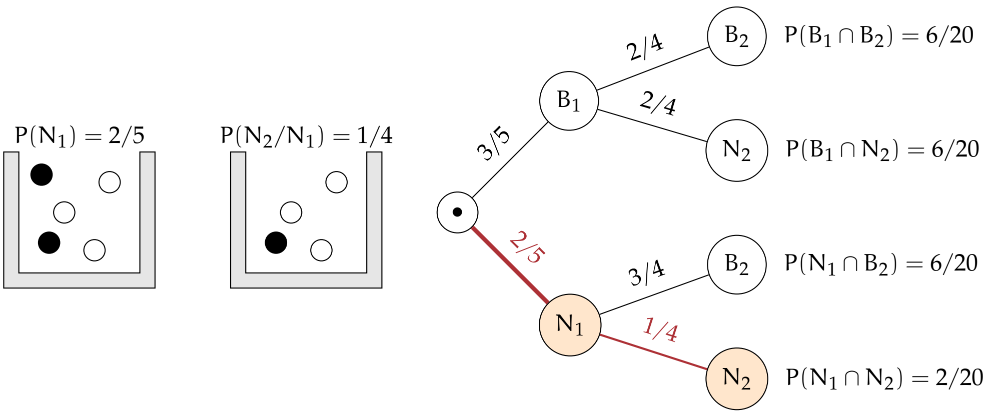
**Definizione 9.8.** Si chiama *probabilità condizionata* di un evento B rispetto a un evento A, la probabilità di B nell'ipotesi che l'evento A si sia già verificato. La probabilita di B subordinata o condizionata ad A si indica con $P(B/A)$.

---

**Esempio 9.16.** Calcolare la probabilità di avere due palline nere in due estrazioni in un'urna contenente tre palline bianche e due nere, questa volta però senza rimettere la pallina nell'urna.

Dato che vogliamo calcolare la probabilità dell'evento intersezione $(N_1 \cap N_2)$ questa sarà data dalla probabilità dell'evento $N_1$ moltiplicata per la probabilità dell'evento $N_2$ dopo che si è verificato l'evento $N_1$. La probabilità dell'evento $N_2$ dopo il verificarsi di $N_1$ non è la stessa dell'esperimento precedente in quanto la pallina estratta non viene rimessa nell'urna.

- $N_1$ = nella prima estrazione pallina nera $\rightarrow P(N_1) = \frac{2}{5}$;
- $N_2$ = nella seconda estrazione pallina nera, dopo che l'evento $N_1$ si è verificato $\rightarrow P(N_2/N_1) = \frac{1}{4}$.




La probabilità dell'insieme intersezione diventa: $P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) \cdot P(N_2/N_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20}$.

Attraverso il diagramma ad albero è facile calcolare le probabilità degli eventi elementari di questo esperimento con $\Omega = \{(B_1,B_2); (B_1,N_2); (N_1,B_2); (N_1,N_2)\}$.

**Esempio 9.17.** Una scatola di caramelle contiene 20 caramelle assortite alla frutta, incartate allo stesso modo e quindi irriconoscibili. Di esse 14 sono al limone. Fabio ne mangia 2. Qual è la probabilità che siano tutte e due al limone?

- $E_1$ = la prima caramella è al limone $\rightarrow P(E_1) = \frac{14}{20}$;
- $E_2$ = la seconda è al limone. Questo evento è dipendente dal primo, perché se Fabio ha mangiato una caramella al limone nella scatola rimangono 19 caramelle di cui 13 al limone quindi $P(E_2/E_1) = \frac{13}{19}$.

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2/E_1) = \frac{14}{20} \cdot \frac{13}{19} = \frac{91}{190}.$$

---

**Teorema 9.4** (delle probabilità composte). *Dati due eventi A e B, entrambi appartenenti allo stesso spazio degli eventi, la probabilità dell'intersezione degli eventi è uguale al prodotto della probabilità del primo evento per la probabilità del secondo evento condizionata al primo. In simboli:* $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$.

Per la proprietà commutativa dell'intersezione abbiamo: $A \cap B = B \cap A$ quindi anche $P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(B) \cdot P(A/B)$.

Possiamo ora meglio definire la dipendenza e l'indipendenza di due eventi.

**Definizione 9.9.** Due eventi $A, B \in \wp(\Omega)$ si dicono *indipendenti* se la probabilità di B e la probabilità di B subordinata a A sono uguali, *dipendenti* nel caso contrario.

$P(B) = P(B/A) \rightarrow$ eventi indipendenti;

$P(B) \neq P(B/A) \rightarrow$ eventi dipendenti.

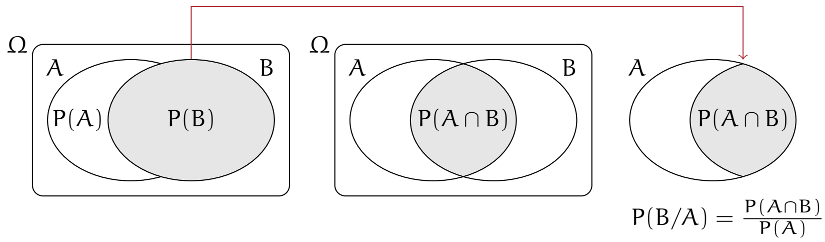
❑ **Osservazione** Il teorema delle probabilità composte vale sia nel caso di eventi dipendenti che nel caso di eventi indipendenti in quanto nel caso di eventi indipendenti $P(B) = P(B/A)$.

### 9.5.3 Interpretazione insiemistica della probabilità condizionata

Dalla uguaglianza del teorema delle probabilità composte isoliamo la probabilità condizionata per meglio individuare qual è il suo significato. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$. Da ciò segue

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Mettiamo a confronto $P(B)$ e $P(B/A)$ aiutandoci con i diagrammi di Venn.




Immaginiamo la misura della probabilità come una massa unitaria da spalmare sull'evento. La probabilità B è la quantità di massa da spalmare sull'evento B in relazione allo spazio degli eventi $\wp(\Omega)$. Nell'ipotesi di ricevere un'ulteriore informazione dal verificarsi di A, questa informazione modifica la probabilità di B. L'insieme di riferimento per la probabilità di B non sarà più $\wp(\Omega)$, ma $\wp(A)$ e $P(B/A)$ sarà data dal rapporto della massa spalmata tra ciò che hanno in comune A e B cioè $P(A \cap B)$ e la probabilità di A cioè $P(A)$: $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Se $P(B/A) = P(B)$ la parte della massa unitaria spalmata su B e il rapporto tra la massa spalmata sull'intersezione tra A e B e la massa spalmata su A rimane invariato e i due eventi si dicono indipendenti.

Se $P(B/A) > P(B)$ si dice che l'evento B è correlato positivamente all'evento A. Cioè il verificarsi di A aumenta la probabilità dell'evento B.

Se $P(B/A) < P(B)$ si dice che l'evento B è correlato negativamente all'evento A. Cioè il verificarsi di A diminuisce la probabilità dell'evento B.

❑ **Osservazione** Due eventi A e B tra loro incompatibili cioè tali che $P(A \cap B) = 0$ sono fortemente dipendenti. Infatti

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0}{P(A)} = 0 \neq P(B).$$

In genere $P(A/B) \neq P(B/A)$ in quanto le due probabilità pur avendo lo stesso numeratore hanno quasi sempre denominatore diverso:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \neq P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Per la proprietà commutativa della intersezione abbiamo: $P(A \cap B) = P(B \cap A)$ quindi

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B).$$

**Esempio 9.18.** Conviene scommettere alla pari che in una classe composta da 23 alunni, due persone compiano gli anni nello stesso giorno dello stesso mese?

In questo esempio non consideriamo gli anni bisestili e che la probabilità di nascere in un giorno dell'anno sia la stessa per tutti i giorni dell'anno. Scommettere alla pari significa intanto attribuire alla probabilità dell'evento A il valore di 0,5. Se la probabilità dell'evento è maggiore di 0,5 conviene scommettere altrimenti no.

Anche in questo caso conviene calcolare la probabilità dell'evento complementare $P(\overline{A})$ cioè la probabilità che nessuno dei 23 allievi compiano gli anni nello stesso giorno dello stesso mese. $P(\overline{A}) = P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_2 \ldots \overline{A}_{21} \cap \overline{A}_{22} \cap \overline{A}_{23})$ dove $\overline{A_i}$ rappresenta la probabilità che il compleanno dell'alunno *i*-esimo non coincida con nessuno dei compleanni degli altri alunni.

Analizziamo alcune di queste probabilità e applichiamo il teorema delle probabilità composte: $P(\overline{A}_1) = \frac{365}{365}$; $P(\overline{A}_2/\overline{A}_1) = \frac{364}{365}$; $P(\overline{A}_3/\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2) = \frac{363}{365}$; $P(\overline{A}_4/\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) = \frac{362}{365}$; ... e così via fino ad arrivare a $P(\overline{A}_{23}/\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_2 \ldots \overline{A}_{21} \cap \overline{A}_{22}) = \frac{343}{365}$.

Il primo allievo avrà la certezza di non avere alcun allievo che compie gli anni nello stesso suo giorno; il secondo allievo avrà una probabilità pari a 364 giorni su 365 di non compiere gli anni nello stesso giorno del primo, il terzo allievo una probabilità di 363 giorni su 365 condizionata a non compiere gli anni lo stesso giorno del primo e del secondo e così via fino alla probabilità dell'ultimo allievo pari a 343 giorni su 365 di non compiere gli anni lo stesso giorno dei propri compagni.

Ora applichiamo il teorema delle probabilità composte:

$$P(\overline{A}) = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} \cdots \frac{345}{365} \cdot \frac{344}{365} \cdot \frac{343}{365} = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \ldots 345 \cdot 344 \cdot 343}{365^{23}} = 0,493.$$

Dato che $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0,493 = 0,507$.

❍ **Conclusione** Conviene scommettere alla pari sull'evento A.

---

Il problema dell'esempio precedente si può così schematizzare: in un'urna ci sono 365 palline numerate da 1 a 365, qual'è la probabilità, rimettendo la pallina nell'urna, di estrarre la stessa pallina in 23 estrazioni?

✍ *Esercizi proposti:* 9.60, 9.61, 9.62, 9.63, 9.64.

## 9.6 Esercizi

### 9.6.1 Esercizi dei singoli paragrafi

#### 9.1 - Gli eventi

**9.1.** Quali dei seguenti eventi sono certi, probabili, impossibili

a ) Il giorno di Pasquetta pioverà;
b ) il giorno di Pasqua sarà domenica;
c ) comprando un biglietto della lotteria vincerò il primo premio;
d ) quest'anno sarò promosso;
e ) il 30 febbraio sarà domenica.

**9.2.** Aprendo a caso un libro di 200 pagine indica se gli eventi seguenti sono impossibili, certi o casuali e in questo ultimo caso indica se sono elementari.

a ) Si prenda la pagina 156: . . . . . . . . . . . ;
b ) si prenda la pagina 210: . . . . . . . . . . . ;
c ) si prenda una pagina minore o uguale a 200: . . . . . . . . . . . ;
d ) si prenda una pagina multipla di 10: . . . . . . . . . . .

**9.3.** Completa la tabella:

| Insieme ⇔ Evento | Spazio degli eventi | Numero degli eventi |
|---|---|---|
| Lanciando una moneta ottengo croce | | |
| $E = \{\text{croce}\}$ | $\Omega = \{\text{testa}, \text{croce}\}$ | $2^2 = 4$ |
| Lanciando un dado ottengo 1 o 6 | | |
| $E = \{1, 6\}$ | $\Omega = \{1, 2, \ldots\ldots, \ldots, \ldots\}$ | $2^6 = \ldots$ |
| Pallina con un numero primo da un'urna con 15 palline numerate da 1 a 15 | | |
| $E = \{2, 3, 5 \ldots, \ldots, \ldots\}$ | $\Omega = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant x \leqslant 15\}$ | $2^{15}$ |
| Estraendo una carta da un mazzo di 40 carte, si presenta il 7 di denari | | |
| $E = \{7\text{denari}\}$ | $\Omega = \{x \in A \mid A = \{\text{Mazzo da 40}\}\}$ | . . . . . . . . . . . |
| Lanciando due monete ottengo facce diverse | | |
| . . . . . . . . . . . . . . . | . . . . . . . . . . . | . . . . . . . . . . . |
| Lanciando un dato ottengo un numero pari | | |
| . . . . . . . . . . . . . . . | . . . . . . . . . . . | . . . . . . . . . . . |
| Pallina con un numero multiplo di 3 da un'urna con 15 palline numerate da 1 a 15 | | |
| . . . . . . . . . . . . . . . | . . . . . . . . . . . | . . . . . . . . . . . |
| Estraendo una carta da un mazzo di 40 carte, si presenta un asso | | |
| . . . . . . . . . . . . . . . | . . . . . . . . . . . | . . . . . . . . . . . |

**9.4.** Estraendo una carta da un mazzo di 40 carte napoletane, individua fra le seguenti le coppie di eventi incompatibili:

a ) La carta estratta è un re;
b ) la carta estratta è di spade.
c ) la carta estratta è un 5.
d ) la carta estratta è una figura.
e ) la carta estratta è di denari.
f ) la carta estratta è un multiplo di 3.
g ) la carta estratta non è una figura.

Quali sono i 2 eventi la cui unione genera un evento certo?

**9.5.** Considerando la distribuzione dei sessi in famiglie con due figli in cui lo spazio degli eventi $\Omega = \{MM, MF, FM, FF\}$ quali sono l'intersezione e l'unione degli eventi $E_1$ =“Il primo figlio è maschio” e $E_2$ = “Il secondo figlio è maschio”.

### 9.2 - Definizioni di probabilità

**9.6.** Quali tra i seguenti numeri possono essere misure di probabilità?

$$1,5;\ 0,5;\ 25;\ 100\%;\ -0,1;\ \frac{1}{2};\ \frac{4}{3};\ 0;\ 120\%;\ 0,\bar{3}.$$

**9.7.** Elenca i casi favorevoli all'evento: “lanciando tre dadi la somma delle facce è 5”.

**9.8 (*).** Per uno studente è indifferente ricevere 350 € senza condizioni, oppure un motorino del valore 1500 € solo se sarà promosso. Qual è la probabilità che lo studente attribuisce alla sua promozione?

**9.9 (*).** Uno studente è disposto a puntare 10 € per riceverne 60 solo se sarà interrogato in matematica. Quale probabilità lo studente attribuisce all'eventualità di essere interrogato in matematica?

**9.10 (*).** Tre amici si sfidano ad una gara di scacchi. Giudico che due di essi si equivalgano, mentre ritengo che il terzo abbia probabilità doppia di ciascuno degli altri due sfidanti. Quale probabilità attribuisco a ciascuno dei tre giocatori?

**9.11 (*).** Un'urna contiene 3 palline bianche, 5 rosse e 7 verdi tutte uguali e distinguibili solo per il colore. Calcolare la probabilità che estraendo a caso una pallina dall'urna si verificano i seguenti eventi.

- ➡ $A =$ si estrae una pallina rossa;
- ➡ $B =$ si estrae una pallina bianca;
- ➡ $C =$ si estrae una pallina bianca o verde.

**9.12.** Si lanciano 3 monete equilibrate (testa e croce sono egualmente possibili); calcolare la probabilità di ottenere due croci e una testa.

**9.13 (*).** Calcolare la probabilità che lanciando 2 dadi regolari la somma dei numeri che si presentano sia 6.

**9.14 (*).** Un'urna contiene 100 palline identiche, numerate da 1 a 100. Calcolare la probabilità che estraendo a caso una pallina dall'urna, essa sia un multiplo di 10.

**9.15** (*)**.** Un'urna contiene 15 palline identiche, numerate da 1 a 15. Calcolare la probabilità che estraendo a caso due palline dall'urna, la loro somma sia 10.

**9.16** (*)**.** Calcola la probabilità che lanciando 4 volte una moneta equilibrata escano solo due teste.

**9.17** (*)**.** Pago alla mia compagnia di assicurazione un premio di 450 € l'anno per avere assicurato contro il furto la mia auto che ho pagato 12000 €. Quale probabilità viene attribuita dalla compagnia al furto dell'auto?

**9.18** (*)**.** E' più facile vincere un premio acquistando un biglietto nella lotteria A che prevede 10 premi di ugual valore su un totale di 5000 biglietti venduti o nella lotteria B che prevede 7 premi su 3000 biglietti venduti? Se ogni premio per entrambe le lotteria ammonta a 1000 euro, quale dovrebbe essere un prezzo equo per la lotteria A? Quale il prezzo equo per la lotteria B?

**9.19.** In Italia nel 2005 sono stati denunciati dalla polizia 2.579.124 crimini penali, nello stesso periodo in Danimarca sono stati denunciati 432.704 crimini. Sulla base di questi dati ritieni che sia più sicuro vivere in Danimarca?

**9.20.** In un mazzo di 40 carte napoletane calcola la probabilità che estraendo a caso una carta essa sia:

- $A =$ un re;
- $B =$ una carta a denari;
- $C =$ una carta minore di 8;
- $D =$ una carta con punteggio pari.

**9.21.** Un mazzo di carte francesi è composto da 54 carte, 13 per seme e due jolly, i semi sono cuori e quadri di colore rosso, picche e fiori di colore nero. Calcolare la probabilità che estraendo a caso una carta

- $A =$ sia un jolly;
- $B =$ sia un re;
- $C =$ sia l'asso di picche,
- $D =$ sia una carta di colore rosso.

**9.22.** Da un mazzo di 40 carte napoletane vengono tolte tutte le figure, calcola la probabilità di estrarre una carta a denari.

**9.23.** In un sacchetto vengono inserite 21 tessere, su ciascuna delle quali è stampata una lettera dell'alfabeto italiano. Calcola la probabilità che estraendo a caso una tessera essa sia

- $A =$ una consonante;
- $B =$ una vocale;
- $C =$ una lettera della parola MATEMATICA.

**9.24.** Nelle estrazioni del Lotto si estraggono dei numeri a caso compresi tra 1 e 90. Calcola la probabilità che il primo numero estratto sia:

- $A =$ il 90;
- $B =$ un numero pari;
- $C =$ un multiplo di 3;

➡ D = contenga la cifra 1.

**9.25.** In un ipermercato si sono venduti in un anno 1286 cellulari di tipo A e 780 cellulari di tipo B. Mentre erano ancora in garanzia sono stati restituiti 12 cellulari di tipo A e 11 cellulari di tipo B perché malfunzionanti. Comprando un cellulare di tipo A, qual è la probabilità che sia malfunzionante? Qual è la probabilità che sia malfunzionante un cellulare di tipo B?

**9.26.** Quando vado al lavoro parcheggio l'auto nei parcheggi a pagamento ma non sempre compro il biglietto del parcheggio. Precisamente lo compro il lunedì e il giovedì, non lo compro il martedì e il mercoledì, il venerdì vado sempre con l'auto di un collega, il sabato e la domenica non lavoro. Quando vado al lavoro, che probabilità ho di prendere la multa per non aver pagato il parcheggio?

**9.27.** Un semaforo mostra il rosso per 120″, il verde per 60″, il giallo per 10″. Qual è la probabilità di incontrare il semaforo quando è verde?

### 9.3 - Probabilità dell'unione di due eventi

**9.28 (*).** Lanciando un dado regolare, si calcoli la probabilità che esca un numero dispari o minore di 4.

**9.29 (*).** Da un'urna che contiene 12 palline identiche numerate da 1 a 12 se ne estrae una. Calcolare la probabilità che la pallina presenti un numero minore di 6 o un numero maggiore di 8.

**9.30 (*).** Da un'urna che contiene 12 palline numerate da 1 a 12 se ne estrae una. Calcolare la probabilità che la pallina presenti un numero pari o un numero maggiore di 8.

**9.31 (*).** Lanciando un dado regolare, si calcoli la probabilità che esca un numero pari o minore di 2.

**9.32 (*).** Calcolare la probabilità che scegliendo a caso una carta da un mazzo di carte francesi di 54 carte si prenda una carta di picche o un re.

**9.33 (*).** Estraendo una carta da un mazzo di 40 carte, calcolare la probabilità che sia un 3 o una carta di spade.

**9.34 (*).** Da un'urna che contiene 5 palline rosse, 8 palline blu, 12 palline bianche, 15 palline gialle, se ne estrae una. Calcolare la probabilità che la pallina sia rossa o blu o gialla.

**9.35 (*).** Da un'urna che contiene 30 palline identiche numerate da 1 a 30, se ne estrae una. Calcolare la probabilità che il numero della pallina sia minore di 20 o multiplo di 4.

**9.36.** Per un mazzo di 40 carte napoletane calcola la probabilità di estrarre

➡ A = un asso o un re;
➡ B = un sette o una carta a bastoni;
➡ C = una figura o una carta a denari.

**9.37.** Calcola la probabilità che lanciando un dado a sei facce esca un numero pari o un multiplo di 3.

**9.38.** Nel gioco della tombola si estrae una pallina numerata da un sacchetto contenente 90 palline numerate da 1 a 90. Calcola la probabilità che estraendo la prima pallina essa riporti:

- $A =$ un multiplo di 5 o un multiplo di 10,
- $B =$ un numero pari o un multiplo di 5,
- $C =$ un numero che contenga la cifra 5 o la cifra 2.

### 9.4 - Probabilità dell'evento complementare

**9.39.** La seguente tabella è tratta dalla tavola di mortalità dei maschi al 2002 relativa a una popolazione di 100000 individui:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Età | $0 \leqslant x < 20$ | $20 \leqslant x < 40$ | $40 \leqslant x < 60$ | $60 \leqslant x < 80$ | $80 \leqslant x < 100$ |
| Decessi | 997 | 1909 | 7227 | 39791 | 49433 |

Calcola la probabilità per un individuo dell'età di 20 anni di vivere almeno per altri 40 anni.

**9.40 (*).** Calcola la probabilità di vincita dell'Italia ai campionati mondiali di calcio se i bookmaker scommettono su una sua vincita 12 a 5.

**9.41 (*).** In un incontro di boxe il pugile Cacine viene dato a 1:7 contro il detentore del titolo Pickdur. Secondo gli allibratori, quale la probabilità ha Cacine di conquistare il titolo? Quali le poste per Pickdur?

**9.42 (*).** Quanto devo puntare su Celestino, che viene dato vincente 4:21 per riscuotere 500 €?

**9.43 (*).** Un cubo di legno viene verniciato e successivamente segato parallelamente alle facce in modo da ottenere 1000 cubetti. Quanti tagli sono necessari? Qual è la probabilità che, una volta mescolati i cubetti, si estragga

- $A =$ un cubetto con una sola faccia verniciata;
- $B =$ un cubetto con due facce verniciate;
- $C =$ un cubetto con nessuna faccia verniciata.

**9.44 (*).** In un circolo vi sono 100 soci. Di essi si sa che 44 sanno giocare a dama, 39 a scacchi, 8 sanno giocare sia a dama che a scacchi. Estraendo a sorte uno dei 100 soci, qual è la probabilità che sia una persona che non sappia giocare ad alcun gioco.

**9.45 (*).** Da un mazzo di 40 carte si estrae 1 carta. Calcola la probabilità dei seguenti eventi:

- $A =$ la carta non è di spade;
- $B =$ la carta non è una figura;
- $C =$ la carta non è un 2.

**9.46 (*).** Calcola la probabilità che lanciano 4 volte una moneta equilibrata esca almeno una testa.

### 9.5 - Probabilità dell'evento intersezione di due eventi

**9.47 (*).** Nel lancio di due monete qual è la probabilità che una almeno sia croce?

**9.48 (*).** Nel lancio di due dadi qual è la probabilità di avere un totale di 8 o due numeri uguali?

**9.49 (*).** Qual è la probabilità nel lancio di due dadi che la somma dei punti sia almeno 9?

**9.50 (*).** Punto 7 euro nel lancio di due dadi sulla somma delle facce uguale a 5. Quanto devo ricevere perché il gioco sia equo?

**9.51 (*).** La probabilità che un proiettile colpisca un determinato bersaglio è 0,5. Qual è la probabilità che tre proiettili lanciati uno dopo l'altro colpiscano tutti il bersaglio.

**9.52 (*).** Due persone giocano con le dita di entrambe le mani a pari e dispari. Con una posta 1:1 conviene giocare sul pari o sul dispari?

**9.53 (*).** Un allievo cuoco prepara la cena. La probabilità che la minestra sia troppo salata è pari a 0,3 e che l'arrosto bruci sia pari a 0,4. Qual è la probabilità che la cena riesca bene?

**9.54 (*).** Una scopa elettrica è formata da due apparati: il motore che si guasta una volta su 10 dopo un anno e la carrozzeria che si rompe una volta su 100 dopo un anno. Che probabilità ha la scopa elettrica di essere funzionante dopo un anno?

**9.55 (*).** Una coppia ha caratteri ereditari tali che ogni loro figlio ha probabilità pari a $1/4$ di essere malato. I genitori vorrebbero avere due figli. Calcolare la probabilità di avere:

- $A =$ entrambi i figli sani;
- $B =$ almeno un figlio malato.

**9.56 (*).** Determinare la probabilità che lanciando tre volte una moneta si presentino

- $A = 3$ Teste;
- $B = 1$ Testa;
- $C = 2$ Teste.

**9.57 (*).** Nel lancio di una moneta e di un dado calcolare la probabilità di:

- $A =$ ottenere Croce e il 6;
- $B =$ ottenere Testa e un numero multiplo di 2;
- $C =$ ottenere Croce e un numero maggiore di 2.

**9.58 (*).** In un'urna ci sono 6 palline, di cui 2 nere e 4 bianche: calcola la probabilità di estrarre palline di diverso colore nel caso in cui la prima pallina viene rimessa nell'urna.

**9.59.** L'urna $U_1$ contiene 10 palline rosse e 15 bianche, l'urna $U_2$ contiene 12 palline rosse e 13 palline bianche. Calcola la probabilità che estraendo una pallina da $U_1$ e una pallina da $U_2$ siano entrambe rosse.

**9.60 (*).** Un'urna contiene 10 palline rosse, 7 palline nere e 2 bianche. Estraendone simultaneamente, tre calcolare la probabilità:

- $A =$ tutte e tre rosse;

- B = tutte e tre bianche;
- C = 1 rossa e 2 nere;
- D = tutte di colore diverso;
- E = una sola bianca.

**9.61** (*). Da un mazzo di 40 carte, si estrae una carta a caso. Determina la probabilità:

- $A$ = che esca un Re;
- B = che esca un Re nell'ipotesi che sia uscita una figura;
- C = che esca un Re nell'ipotesi che sia uscito il seme di fiori;
- D = che esca il seme di fiori dopo che è uscito un Re.

Tra gli eventi A, B, C e D quali sono indipendenti?

**9.62** (*). Uno studente universitario ha la probabilità 0,3 di superare l'esame di matematica e 0,5 di superare l'esame di diritto privato. Se i due eventi sono indipendenti determinare la probabilità che lo studente ha di superare

- $A$ = tutti e due gli esami;
- B = almeno un esame.

**9.63** (*). Un'urna contiene 5 palline bianche e 12 nere. Estraendole due a caso qual è la probabilità che siano dello stesso colore?

**9.64** (*). Uno studente ha la probabilità del 55% di prendere il debito in matematica, del 30% di prendere il debito in inglese e del 20% di prendere il debito in entrambe le materie. Valutare la probabilità di:

- $A$ = avere il debito in matematica nell'ipotesi di averlo già preso in inglese;
- B = avere il debito in inglese nell'ipotesi di averlo già preso in matematica;
- C = avere il debito in matematica nell'ipotesi di non averlo preso in inglese;
- D = avere il debito in inglese nell'ipotesi di non averlo preso in matematica;
- E = non avere il debito in matematica nell'ipotesi di averlo preso in inglese;
- F = non avere il debito in inglese nell'ipotesi di non averlo preso in matematica.

### Esercizi dalle prove Invalsi

**9.65** (Prove Invalsi 2005). Se si lanciano contemporaneamente due monete, qual è la probabilità che escano una testa e una croce?

**9.66** (Prove Invalsi 2005). Qual è la probabilità che su 6 lanci di un comune dado a 6 facce non truccato si abbia per 6 volte il numero 3?

**9.67** (Prove Invalsi 2005). Un'urna contiene 20 gettoni numerati da 1 a 20. Si estrae un gettone: è un numero pari. Sena reinserire il gettone, se ne estrae un secondo. Qual è la probabilità di estrarre un numero dispari?

**9.68** (Prove Invalsi 2006). Se lanci un dado una sola volta, quale probabilità hai di ottenere un numero pari minore di 6?

**9.69** (Prove Invalsi 2006). È lanciato un dado non truccato a forma di ottaedro (solido regolare a otto facce), le cui facce sono numerate da 1 a 8. Qual è la probabilità che escca una faccia il cui numero è multiplo di 3?

**9.70** (Prove Invalsi 2006)**.** Un mazzo di carte da poker è composto da 52 pezzi, 12 dei quali sono figure. Pescando a caso una carta, qual è la probabilità che si verifichi l'evento: "esce una figura o un asso"?

**9.71** (Prove Invalsi 2006)**.** Un'urna contiene 50 gettoni colorati. 20 sono di colore verde, 18 di colore rosso, 10 di colore blu. Qual è la probabilità di pescare un gettone che non sia né verde, né rosso e né blu?

**9.72** (Prove Invalsi 2006)**.** La probabilità di estrarre una pallina rossa da un'urna contenente 100 palline è $3/50$. Quante sono le palline rosse contenute nell'urna?

**9.73** (Prove Invalsi 2005)**.** Si lancia un comune dado a 6 facce non truccato per 8 volte. Qual è la probabilità che al terzo lancio esca il numero 5?

**9.74** (Prove Invalsi 2005)**.** Data un'urna contenente 30 palline, di cui 6 rosse, 9 gialle, 3 verdi e 12 blu, quale delle seguenti affermazioni è falsa? La probabilità di estrarre una pallina...

- rossa o gialla è 0,5;
- verde è 0,1;
- blu o gialla è 0,7;
- rossa o blu è 0,4

**9.75** (Prove Invalsi 2006)**.** Se i lanciano contemporaneamente due monete, qual è la probabilità che esca almeno una testa?

**9.76** (Prove Invalsi 2006)**.** Un'urna contiene 20 palline: 4 bianche, 6 rosse e 10 verdi. Quanto vale il rapporto fra la probabilità di estrarre una pallina bianca o rossa e la probabilità di estrarre una pallina rossa o verde?

**9.77** (Prove Invalsi 2006)**.** La probabilità di estrarre una pallina bianca da un'urna è $4/10$. Quale delle seguenti affermazioni è compatibile con la precedente?

- l'urna contiene 20 palline bianche, 15 rosse e 5 nere;
- l'urna contiene 40 palline bianche, 40 rosse e 40 nere;
- l'urna contiene 40 palline bianche e 100 rosse;
- l'urna contiene 80 palline bianche, 50 rosse e 70 nere.

**9.78** (Prove Invalsi 2006)**.** In un dado truccato avente le facce numerate da 1 a 6, la probabilità di uscita di un numero è direttamente proporzionale al numero stesso. Quanto vale la probabilità che, lanciando il dado, esca il numero 5?

**9.79** (Prove Invalsi 2007)**.** Un'urna contiene 50 palline. Marco ne estrae 20 senza rimetterle nell'urna ed osserva che 10 sono nere e 10 sono rosse. Estraendo una 21-esima pallina, qual è la probabilità che questa si nera?

**9.80** (Prove Invalsi 2007)**.** Quanto vale la probabilità che una persona risponda correttamente ad una domanda che prevede solo una risposta esatta, scegliendo a caso una risposta fra le quattro proposte?

**9.81** (Prove Invalsi 2007)**.** Un'urna contiene 21 palline, ognuna delle quali è contrassegnata da una lettera dell'alfabeto italiano. Qual è la probabilità che, estraendo a caso una di queste palline, si verifichi l'evento "esce la lettera $\pi$"?

**9.82** (Prove Invalsi 2007). In una lotteria i 4 premi sono assegnati per estrazioni successive, partendo dal 1° fino al 4°. Pietro ha acquistato uno solo dei 100 biglietti venduti. Egli è presente all'estrazione dei premi e l'estrazione del 1° premio lo vede perdente. Qual è la probabilità che Pietro vinca il 2° premio?

**9.83** (Prove Invalsi 2007). Si lanciano due dadi ed escono due numeri il cui prodotto è 6. Qual è la probabilità che uno dei due numeri usciti sia 2?

**9.84** (Prove Invalsi 2007). Quanti casi possibili si ottengono gettando un dado e una moneta contemporaneamente?
A. 12 B. 8 C. 36 D. 2 E. La risposta esatta non è tra quelle proposte.

**9.85** (Prove Invalsi 2003). Se lanci un normale dado numerato da 1 a 6, ciascun numero ha probabilità 1/6 di uscire. In 4 lanci successivi sono usciti i numeri 2, 3, 4 e 3. Se lanci il dado una quinta volta, qual è la probabilità che esca 3?

- Maggiore di 61, perché nei 4 tiri precedenti il punteggio 3 è uscito 2 volte su 4;
- 61, perché il dado non si ricorda degli eventi passati;
- minore di 61, perché il punteggio 3 è già uscito e ora è più probabile che escano gli altri;
- 21, come indica il calcolo dei casi favorevoli (due) sul totale dei casi (quattro);
- le informazioni date non consentono di rispondere.

**9.86** (Prove Invalsi 2003). Estrarre da un mazzo di carte francesi (52 carte) una carta di seme nero e figura è ...

- più probabile che estrarre una carta di seme nero;
- più probabile che estrarre una figura di qualunque seme;
- meno probabile che estrarre una carta di seme nero e asso;
- altrettanto probabile che estrarre una carta di seme nero o figura;
- altrettanto probabile che estrarre una carta di seme rosso e figura. (Prove Invalsi 2003)

**9.87** (Prove Invalsi 2003). La probabilità di estrarre un 6 o un 8 da un mazzo di carte napoletane (40 carte) è ...

**9.88** (Prove Invalsi 2003). Aldo e Luigi giocano a testa o croce, ciascuno di essi lancia due monete. Qual è la probabilità che il numero di teste di Luigi sia uguale a quelle ottenute da Aldo?

**9.89** (Prove Invalsi 2004). Se lanci una normale moneta, Testa e Croce hanno entrambe probabilità 1/2 di uscire. In 4 lanci successivi, sono usciti Testa, Croce, Testa, Testa. Se lanci la moneta una quinta volta, qual è la probabilità che esca Testa?

- Maggiore di $\frac{1}{2}$;
- uguale a $\frac{1}{2}$;
- minore di $\frac{1}{2}$;
- le informazioni date non consentono di rispondere.

**9.90** (Prove Invalsi 2004). Nel gioco della tombola qual è la probabilità di estrarre un numero maggiore di 20 e minore di 35?

**9.91** (Prove Invalsi 2004). Qual è la probabilità che lanciando un dado esca un numero dispari o multiplo di 3?

### 9.6.2 Risposte

**9.8.** $P(E) = 0,23$.

**9.9.** $P(E) = 0,17$.

**9.10.** $P(A) = P(B) = 0,25$; $P(C) = 0,50$.

**9.11.** $P(A) = \frac{1}{3}$; $P(B) = \frac{1}{5}$; $P(C) = \frac{2}{3}$.

**9.13.** $P(E) = \frac{5}{36}$.

**9.14.** $P(E) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$.

**9.15.** $P(E) = \frac{8}{210} = \frac{4}{105}$

**9.16.** $P(E) = \frac{3}{8}$.

**9.17.** $P(E) = 0,0375$.

**9.18.** Biglietto B; Prezzo(A)=2€; Prezzo(B)=2,23€.

**9.28.** $P(E) = \frac{2}{3}$.

**9.29.** $P(E) = \frac{3}{4}$.

**9.30.** $P(E) = \frac{2}{3}$.

**9.31.** $P(E) = \frac{2}{3}$.

**9.32.** $P(E) = \frac{8}{27}$.

**9.33.** $P(E) = \frac{13}{40}$.

**9.34.** $P(E) = \frac{7}{10}$.

**9.35.** $P(E) = \frac{11}{15}$.

**9.39.** $P(E) = 0,91$.

**9.40.** $P(E) = 0,71$.

**9.41.** $P(A) = \frac{1}{8}$; $B = 7 : 1$.

**9.42.** 80 €.

**9.43.** $P(A) = 0,384$; $P(B) = 0,096$; $P(C) = 0,512$.

**9.44.** $P(E) = 0,25$.

**9.45.** $P(A) = \frac{3}{4}$; $P(B) = \frac{7}{10}$; $P(C) = \frac{9}{10}$.

**9.46.** $P(E) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.

**9.47.** $P(E) = \frac{3}{4}$.

**9.48.** $P(E) = \frac{5}{18}$.

**9.49.** $P(E) = \frac{15}{18}$.

**9.50.** 63€.

**9.51.** $P(E) = 0,125$.

**9.52.** indifferente.

**9.53.** $P(E) = 0,42$.

**9.54.** $P(E) = 89,1\%$

**9.55.** $P(A) = \frac{9}{16}$; $P(B) = \frac{7}{16}$.

**9.56.** $P(A) = \frac{1}{8}$; $P(B) = \frac{3}{8}$; $P(C) = \frac{3}{8}$.

**9.57.** $P(A) = \frac{1}{12}$; $P(B) = \frac{1}{4}$; $P(C) = \frac{1}{3}$.

**9.58.** $P(E) = \frac{4}{9}$.

**9.60.** $P(A) = 0,12$; $P(B) = 0$; $P(C) = 0,22$; $P(D) = 0,14$; $P(E) = 0,28$.

**9.61.** $P(A) = \frac{1}{10}$; $P(B) = \frac{1}{3}$; $P(C) = \frac{1}{10}$; $P(D) = \frac{1}{4}$; A e C.

**9.62.** $P(A) = 0,15$; $P(B) = 0,65$.

**9.63.** $P(A) = 0,56$.

**9.64.** $P(A) = 67\%$; $P(B) = 36\%$; $P(C) = 50\%$; $P(D) = 22\%$; $P(E) = 33\%$; $P(F) = 64\%$.